

ESPACIO-TIEMPO DS Y ADS (DE SITTER Y ANTI DE SITTER)- CALCULO E INTERPRETACIÓN DE LOS CAMPOS DE KILLING

Carlos Stiven Guzmán Ramírez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias Y Educación
Licenciatura en Física
Bogotá D.C., Colombia
2020

ESPACIO-TIEMPO DS Y ADS (DE SITTER Y ANTI DE SITTER)- CALCULO E INTERPRETACIÓN DE LOS CAMPOS DE KILLING

Carlos Stiven Guzmán Ramírez

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar por el título de:
Licenciado en física

Director Interno:
César Aurelio Herreño Fierro

Director Externo:
Nicolás Guillermo Avilán Vargas
Universidad Central
Departamento de Matemáticas

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Licenciatura en Física
Bogotá D.C., Colombia
2020

A mi madre y abuela que con sus demostraciones de mujeres ejemplares me han impregnado de su persistencia y resiliencia ante situaciones vividas

Agradecimientos

A los profesores Alejandro Hurtado y Edwin Munevar Espitia, por construir en mí aquel implacable espíritu científico, sus capacidades para guiar mis ideas han sido un aporte invaluable. Al profesor Walter Alexis Pulido por permitirme hacer parte de sus actividades intelectuales académicas, aquellas clases despertaron en mí un deseo urgente por incursionar en teorías maravillosas inscritas en el campo de la física. A los profesores Nicolás Avílan Vargas y Cesar Aurelio Herreño por aceptarme para realizar esta tesis bajo su dirección, sus orientaciones y rigurosidades han sido la clave del buen trabajo realizado. A Julián David Cañón, Cristian Duran Torres y unos cuantos amigos y compañeros más, por nuestras acaloradas y extensas discusiones vespertinas en el transcurso de mi carrera, infinitas gracias.

Resumen

Se realiza un estudio basado en la Teoría General de la Relatividad. Se examinan las propiedades físicas y geométricas de dos soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein, de Sitter (dS) y la anti de Sitter (AdS). Como punto de partida se considera la acción de Einstein-Hilbert, cuyo proceso de variación lleva a las ecuaciones del campo; estas admiten múltiples soluciones dependiendo de las fuentes de materia y energía. En particular, la solución propuesta por William De Sitter describe un Universo vacío que se contrae hasta cierta distancia mínima de radio R_0 para luego entrar en expansión acelerada de manera exponencial, llamado Espacio-Tiempo De Sitter. Las propiedades más relevantes son curvatura constante positiva, constante cosmológica negativa (Anti De Sitter AdS) y la maximalidad simétrica (máximo número de simetrías). Finalmente se calculan los campos de Killing asociados a cada una de las soluciones estudiadas. Estos son campos vectoriales que indican las direcciones en las que la métrica permanece invariante, y tienen la información relacionada con las simetrías y las cantidades conservadas del sistema; como lo indica el teorema de Noether.

Palabras clave: Teoría General de la Relatividad, acción Einstein Hilbert, maximalidad simétrica, teorema de Noether.

CONTENIDO

RESUMEN III

CONTENIDO V

Lista de figuras V

1. INTRODUCCIÓN 1
1.1. Estado del arte . . . 2
1.1.1. Preámbulo introductorio . . . 2
1.1.2. Contexto histórico . . . 2
1.2. Objetivos . . . 3
1.2.1. Objetivo General . . . 3
1.2.2. Objetivos Específicos . . . 3

2. DERIVADA DE LIE - CAMPOS DE Killing 5
2.1. Operador natural derivada de Lie . . . 5
2.1.1. Derivada de Lie en función de la derivada covariante . . . 7
2.2. Campos de Killing . . . 8
2.2.1. Derivada de Lie aplicada a un tensor . . . 9
2.2.2. Derivación de La ecuación geodésica . . . 10
2.2.3. Tensor métrico de Minkowsky (espacio-tiempo en ausencia de gravedad) . . . 11
2.2.4. Cálculo de los campos de Killing para el espacio-tiempo Minkowskyano . . . 12
2.2.5. Cantidades conservadas . . . 14

3. ECUACIONES DEL CAMPO GRAVITACIONAL 17
3.1. Acción Einstein-Hilbert . . . 17
3.1.1. Acción Einstein-Hilbert, cálculo y obtención de las ecuaciones del campo gravitacional . . . 17
3.1.2. Retomando el régimen Newtoniano . . . 23
3.2. Cantidades *tensoriales* conservadas-divergencia nula . . . 28
3.2.1. Teoría clásica de campos . . . 28
3.2.2. Divergencia nula . . . 29

4. ESPACIO-TIEMPO dS-AdS 33
4.1. Generalidades y Propiedades dS-AdS . . . 33
4.1.1. Derivación simple de la métrica dS-AdS . . . 34
4.1.2. Espacio-tiempo máximamente simétrico . . . 37
4.1.3. Espacio-tiempo AdS máximamente simétrico . . . 38
4.1.4. Cálculo de la constante cosmológica (Λ) para AdS . . . 38
4.1.5. Estructura de la constante cosmologica para N-dimensiones . . . 43
4.1.6. Explorando AdS (frontera conforme) . . . 44

5. CONCLUSIONES 51
5.0.1. Teorema de Noether . . . 52

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Las contribuciones teóricas hechas por Albert Einstein en su año milagroso reestructuraron, perfeccionaron, aglomeraron y abrieron las puertas a nuevas ideas en el campo de la Física, es más, actualmente sus repercusiones y predicciones altamente corroboradas en laboratorios de alto prestigio no dejan de sorprender a la comunidad científica. Es el caso de la relatividad especial concebida de manera conveniente a través de la generalización del principio de relatividad de Galileo, extendiéndose incluso a sistemas de referencia no-inerciales, conocido hoy en día como *principio de covariancia general*. Este principio establece que las leyes de la física (ecuaciones) deben adoptar la misma forma independiente del sistema de referencia escogido y de la naturaleza del mismo; en síntesis, deben permanecer invariantes bajo cualquier grupo de transformaciones de coordenadas. Una apreciación rápida sugiere la no existencia de sistemas de referencia privilegiados, de esta manera el sistema de coordenadas elegido no atenta en el sentido estricto a la formulación de las leyes de la física. Einstein pensaba que este principio debía ser uno de los ingredientes fundamentales y preponderantes en la formulación de una nueva teoría para sistemas de referencia acelerados. Además, en el modelo conceptual acoplado a la nueva teoría debía de imperar la presencia de cantidades tensoriales cuya finalidad se encuentra direccionada al debido cumplimento de las exigencias enmarcadas en el principio de covariancia.

La conjunción del *principio de covariancia general* junto con el *principio de equivalencia* permitieron capitalizar exclusivamente el desarrollo de la teoría de la *relatividad general*. El primero de ellos puede ser considerado como una extensión del principio de relatividad, expresando el hecho de que las leyes de la física deben transformar de manera covariante bajo cambios generales de coordenadas, por su parte el segundo de ellos menciona la idea de que un observador en caída libre en un campo gravitatorio constante y homogéneo es equivalente a un observador inercial en ausencia de gravedad, es imposible determinar la diferencia entre estas dos situaciones a base de experimentos físicos.

El núcleo fundamental de la teoría de la relatividad general son las ecuaciones de campo de Einstein. Básicamente, estas ecuaciones son un sistema de 10 ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen la interacción gravitatoria (cuya propagación de ninguna manera es instantánea, prescindiendo así de las propiedades Newtonianas para esta señal) como resultado de que el espacio-tiempo está siendo deformado por la materia y la energía. Dichas ecuaciones provienen de la minimización de la acción para dicho campo gravitatorio aducido principalmente a la existencia del tensor métrico y a las derivadas del mismo, específicamente hablando es la derivada funcional de la acción respecto del tensor métrico quien permite demostrar adecuadamente las ecuaciones del campo, junto con otras expresiones como la acción Gibbons-Hawking-York (GHY), cualquier intento de socavar para conocer las propiedades de tal término rebasa los alcances del presente texto. Las propuestas de una acción formulada para el campo gravitacional es compatible con los estándares de una teoría clásica de campos.

A pesar de la dificultad para obtener soluciones a dichas ecuaciones, se conocen algunas, aunque muy pocas tienen aplicaciones físicas directas. A menudo, es frecuente apoyarse en la integración numérica de las ecuaciones. En la relatividad numérica, existen potentes ordenadores para simular la geometría del espacio-tiempo y así resolver las ecuaciones de Einstein en situaciones interesantes, como es el caso de dos agujeros negros en colisión. Algunas soluciones de las ecuaciones de Einstein para el estudio de propiedades cosmológicas son: *la solución de Schwarzschild, la solución de Reissner-*

Nordstrom, la métrica de Kerr y la solución de Robertson-Friedmann-Walker-Lematre, que describe un universo homogéneo, isótropo y en expansión o contracción exponencial acelerada. Este tipo de solución es utilizada en física para la descripción de nuestro universo. Nos centraremos en un caso particular de la métrica de FRW propuesta por el astrónomo William De Sitter (1872-1934) y que en la actualidad lleva su nombre (Espacio-Tiempo De Sitter), mencionando su característica intrínseca más relevante la cual describe un universo exponencial en ausencia de materia y energía (solución en el vacío), paradójicamente presentada poco después de conocerse el modelo de universo estático de Albert Einstein. Finalmente incursionaremos en el formalismo de los *campos de Killing*, importante para la deducción de las isometrías relacionadas con el espacio-tiempo citado y en ocasiones aliadas respecto de los generadores del grupo de Poincare, que consecuentemente permitirán dilucidar todas y cada una de las cantidades conservadas quienes principalmente son equivalentes en algún sentido a las integrales de Hamilton-Jacobi acuñadas en el campo de la mecánica teórica.

En resumen, aunque la relatividad general es una teoría que hasta ahora ha tenido gran éxito en la gravitación y descripción de nuestro universo, hay indicios de que aún la teoría es incompleta; el problema de la gravedad cuántica y la singularidad del espacio-tiempo, entre otros, aún siguen sin ser resueltos. Además, la evidencia experimental de la energía y materia oscura indican la necesidad urgente de un cambio de perspectiva, interpretación y criterio que nos acerque a un modelo nuevo y sofisticado del cual aún estamos expectantes. Claro esta el conocimiento certero de las propiedades del espacio-tiempo a fin abrirá el panorama a un intento de gravedad cuántica recientemente conocido como *correspondencia AdS/CFT*.

1.1. Estado del arte

1.1.1. Preámbulo introductorio

En geometría Riemanniana clásica, los campos de Killing y las isometrías fueron inicialmente estudiados desde un punto de vista local, es decir, se estudiaban sus propiedades en vecindades y entornos de algún punto del espacio. Posteriormente se hizo énfasis en estudiar las propiedades globales de estos campos y su relación con la geometría del espacio en cuestión. Estos análisis permitieron obtener importantes resultados en la física, en particular en relatividad general, para entender la geometría del espacio-tiempo.

1.1.2. Contexto histórico

Para hablar de la historia de los campos vectoriales de Killing, hay que iniciar mencionando a Wilhelm Killing por quien se atribuye el nombre de estos campos vectoriales. Wilhelm Killing fue un matemático alemán, nacido el 10 de mayo de 1847 y quien fue actor preponderante en el desarrollo de la teoría de grupos y álgebras de Lie, y de la geometría euclidiana. Sobre la teoría de Lie, tal vez, el aporte crucial de Killing fue tratar los problemas y propiedades en los que Sophus Lie trabajaba, desde la geometría y no desde las ecuaciones diferenciales[1]. Con lo anterior Killing introdujo conceptos fundamentales de la teoría moderna, como las raíces de un álgebra de Lie y las bases de estas.

Sobre la geometría no euclidiana su aporte más importante se preserva en el artículo *UBER DIE GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE (Fundamentos de Geometría, 1892)*. En este ambicioso artículo Killing introduce más que solo conceptos. Él busca presentar una nueva forma de hacer geometría, propósito evidenciado en los 7 axiomas enunciados con un estilo propio muy marcado que, para su época, rompía con los estándares de escribir verdades matemáticas, aquí se muestra el axioma 5:

"Un cuerpo que antes de un movimiento no tiene parte en común con un espacio y se encuentra en su totalidad dentro de ese espacio después del movimiento, alcanza en el curso del movimiento una posición en el que solo una parte de ella se encuentra dentro de ese espacio". Más allá de presentar su estilo propio, Killing brinda por primera vez aportes fundamentales para la geometría que se trabaja hoy en día. Principalmente tres:

• Killing dice que sus primeros siete axiomas definen una teoría equivalente a la teoría general de los grupos transitivos continuos finitos de transformaciones.

• Trata de dar una definición topológica del número de dimensiones de un espacio.

• Presenta una contribución de valor permanente: el concepto de lo que ahora llamamos campos vectoriales de Killing, dando la primera definición de estas estructuras matemáticas:

Sea M una variedad n-dimensional, tal que la métrica se define en términos de una carta U por $g_{ij} = \mu(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$. Sea χ un campo de vectores en M tal que: $\chi = \Sigma_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Entonces χ es un campo vectorial de Killing si el ξ^i es una solución del sistema de Killing de ecuaciones diferenciales,

$$L_\xi(g_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^k + g_{ik}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{jk}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}. \tag{1.1}$$

Posteriormente al artículo de Killing se abre en la historia de las matemáticas un campo de estudio sobre los campos vectoriales de Killing, en el cual se han generado importantes resultados para la teoría que conocemos hoy. En 1939 Myers y Steenrod obtienen el primer resultado en la teoría global de isometrías a través del siguiente teorema: *"el grupo de isometrías de una variedad Riemanniana es un grupo de Lie"*[2]. En 1990 Nomizu escribe un artículo sobre la existencia local y global de campos vectoriales de Killing resaltando el siguiente teorema: *"el conjunto de todos los campos vectoriales de Killing sobre una variedad Riemanniana forma un álgebra de Lie de dimensión finita sobre el campo de los números reales"* [3]. En los últimos 50 años el estudio de los campos de Killing ha seguido avanzando, especialmente, en términos de la aplicación a la física y relatividad general.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

- Calcular los campos de Killing asociados al espacio-tiempo (dS-AdS) y analizar las respectivas simetrías relacionadas con las cantidades conservadas.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Estudiar los fundamentos de la geometría diferencial. Particularmente las nociones de derivada covariante y derivada de Lie.
- Obtener las ecuaciones del campo gravitacional con constante cosmológica desde el desarrollo variacional de la acción Einstein Hilbert.
- Deducir la métrica de (dS-AdS) y calcular la constante cosmológica.
- Calcular los campos de Killing para el espacio-tiempo (dS-AdS).
- Analizar las simetrías y las cantidades conservadas del espacio-tiempo (dS-AdS).
- Escribir un documento científico extenso con el estado del arte, revisiones, desarrollos y logros alcanzados en las actividades de la pasantía.

Capítulo 2

DERIVADA DE LIE - CAMPOS DE Killing

En el presente capítulo expondremos una posible construcción del operador derivada de Lie, refiriéndonos a este como un operador natural o fundamental sobre una variedad, al no estar escrito en función de las conexiones métricas. Además, haremos uso de la derivada covariante y de su comportamiento tensorial para reestructurar el operador anteriormente mencionado. Luego, demostraremos la ecuación de Killing, importante para el cálculo de los campos de Killing, aplicando el operador derivada de Lie sobre el tensor métrico. Posteriormente abordaremos una derivación simple de la ecuación geodésica mencionando algunas de sus implicaciones. Finalmente, mostraremos cada uno de los campos de Killing asociados con el tensor métrico Minkowskyano, reconociendo en el desarrollo sus leyes de conservación.

2.1. Operador natural derivada de Lie

El marco teórico asociado con la relatividad especial fue construido a partir de una reformulación a la mecánica newtoniana, exponiendo en sí misma un espacio-tiempo plano "ausencia de gravedad", equipado con un sistema de coordenadas cartesianas, cuyos intervalos espacio-temporales están bien definidos a partir del tensor métrico minkowskyano. Estas características son consistentes con la relatividad general localmente hablando, pero carecen de sentido si incursionamos en el sistema de manera global, esto es, a escalas pequeñas, para cada punto sobre una curva paramétrica puede definirse un sistema coordenado isomorfo y de aspecto R^N (Espacio Tangente), pero no quiere decir que todas las zonas del espacio-tiempo cumplan con esa propiedad de localidad. Matemáticamente el objeto que posee esta propiedad se conoce como variedad (Manifold). Necesariamente habría que hacer una generalización en cuanto a los operadores ya bien conocidos en las matemáticas usuales, que por supuesto se ajusten y respeten las teorías matemáticas tradicionales y recuperen estas mismas basadas en primeros principios y aproximaciones coherentes.

Un campo vectorial V^α sobre una variedad $\mathcal{M}^N$ está definido a partir de una congruencia de curvas $\gamma^\alpha(\lambda)$ a través de la ecuación diferencial[4]

$$V^\alpha = \frac{d(\gamma^\alpha(\lambda))}{d\lambda}. \tag{2.1}$$

En otras palabras, $\gamma^\alpha(\lambda)$ son las curvas integrales o las líneas de campo de V^α, mientras que V^α es el campo vectorial tangente a la curva $\gamma^\alpha(\lambda)$. Ahora bien, la derivada de Lie es un operador natural (su estructura teórica no necesita de conexión afín) que representa la diferencia de punto a punto sobre una curva parametrizada en la dirección del campo, la gran ventaja radica en que esta nos proporciona una derivada direccional con formulación covariante, cuya información cobre la dirección está codificada en el campo vectorial en sí mismo. En síntesis, este operador mide el cambio de un campo vectorial, a lo largo del flujo de otro campo, ambos construidos sobre la variedad. Más adelante será evidente que la acción de dicho operador sobre el tensor métrico ofrecerá un conjunto de isometrías

(aplicación matemática que preserva la distancia entre dos puntos) íntimamente relacionadas con los campos de Killing.

En primera instancia se debe recordar el método de aproximación de funciones típicamente conocida como serie de Taylor, vital para dar preámbulo al proceso, el cual se expresa de la siguiente forma

$$f(x+a) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}a + \frac{1}{2!}\frac{d^2f(x)}{dx^2}a^2 + ... \tag{2.2}$$

Destacando un observador quien dispone del siguiente conjunto de coordenadas procedentes de la variedad $x^\alpha(\lambda)$ donde λ es el parámetro afín asociado a la curva (camino), realizando un incremento de $\epsilon << 1$ respecto al parámetro, equivalente a la traslación de dicho observador por el camino ya mencionado y obedeciendo a (2.2) se obtiene[5]

$$x^\alpha(\epsilon) = x^\alpha + \frac{d(x^\alpha)}{d\lambda}\epsilon + \frac{1}{2!}\frac{d^2(x^\alpha)}{d\lambda^2}\epsilon^2 + ... \tag{2.3}$$

$$x^\alpha(\epsilon) = \left(1 + \frac{d}{d\lambda}\epsilon + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\epsilon^2\right)x^\alpha + ... \tag{2.4}$$

Usando la serie de Taylor de la función exponencial

$$x(\epsilon) = e^{\left(\epsilon\frac{d}{d\lambda}\right)}x^\alpha \tag{2.5}$$

En analogía con el proceso anterior y desplazando el observador el mismo incremento $\epsilon << 1$ por otro camino cuya parametrización es completamente diferente, se obtiene

$$x(\epsilon) = e^{\left(\epsilon\frac{d}{d\rho}\right)}x^\alpha \tag{2.6}$$

Ahora bien la idea de Lie a grandes rasgos, sugiere corroborar la existencia de alguna distinción en cuanto a la traslación por diferentes caminos del observador a un punto concreto referente de la variedad, por lo cual habría que calcular el siguiente conmutador

$$(e^{\epsilon\frac{d}{d\rho}}e^{\epsilon\frac{d}{d\lambda}} - e^{\epsilon\frac{d}{d\lambda}}e^{\epsilon\frac{d}{d\rho}})x^\alpha \tag{2.7}$$

Debido a que $\epsilon << 1$ solo sobreviven los términos hasta primer orden de la aproximación, (2.6) queda escrito como

$$\left(1 + \epsilon\frac{d}{d\lambda} + \epsilon\frac{d}{d\rho} + \epsilon^2\frac{d}{d\rho}\frac{d}{d\lambda} - 1 - \epsilon\frac{d}{d\rho} - \epsilon\frac{d}{d\lambda} - \epsilon^2\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\rho}\right)x^\alpha \tag{2.8}$$

Descartando algunos términos

$$\epsilon^2\left(\frac{d}{d\rho}\frac{d}{d\lambda} - \frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\rho}\right)x^\alpha \tag{2.9}$$

Operando

$$\epsilon^2\left(\frac{d}{d\rho}\frac{dx^\alpha}{d\lambda} - \frac{d}{d\lambda}\frac{dx^\alpha}{d\rho}\right) \tag{2.10}$$

Por tanto

$$\epsilon^2\left(\frac{d}{d\rho}(A^\alpha) - \frac{d}{d\lambda}(B^\alpha)\right) \tag{2.11}$$

Donde A y B son los campos vectoriales tangentes a las curvas paramétricamente distintas, y haciendo uso de la regla de la cadena

$$\epsilon^2\left(B^\beta\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} - A^\beta\frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\beta}\right) \tag{2.12}$$

La derivada de Lie queda expresada como

$$\left(B^{\beta}\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - A^{\beta}\frac{\partial B^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right) = L_B A^{\alpha} = [B, A] \tag{2.13}$$

O de la siguiente forma

$$L_A B^{\alpha} = \left(A^{\beta}\partial_{\beta}B^{\alpha} - B^{\beta}\partial_{\beta}A^{\alpha}\right) = [A, B]. \tag{2.14}$$

La cual para fines históricos también se denomina como corchete de Lie.

2.1.1. Derivada de Lie en función de la derivada covariante

Destacando la derivada covariante expresada en función de las conexiones métricas, las cuales garantizan el transporte paralelo del campo a lo largo de una dirección concreta; la estructura de la misma, operando sobre un campo de componentes contravariante está dado por[6]

$$\nabla_{\beta}B^{\alpha} = \partial_{\beta}B^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}B^{\gamma} \tag{2.15}$$

$$\nabla_{\beta}A^{\alpha} = \partial_{\beta}A^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}A^{\gamma} \tag{2.16}$$

Del mismo modo la derivada covariante asociada a un campo de componentes covariantes se expresa como

$$\nabla_{\beta}B_{\alpha} = \partial_{\beta}B_{\alpha} + \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}B_{\gamma} \tag{2.17}$$

$$\nabla_{\beta}A_{\alpha} = \partial_{\beta}A_{\alpha} + \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}A_{\gamma} \tag{2.18}$$

Habría que recordar que la estructura de la derivada covariante operando sobre las componentes del campo transforma como un tensor de 2-Rango debido a que se encuentra expresada como la suma de dos términos no-tensoriales.

Multiplicando (2.15) y (2.16) por A^{β} y B^{β} respectivamente, y posteriormente configurando los índices mudos de ambas ecuaciones

$$A^{\beta}\nabla_{\beta}B^{\alpha} = A^{\beta}\partial_{\beta}B^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}A^{\beta}B^{\gamma} = A^{\beta}\partial_{\beta}B^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\omega}A^{\sigma}B^{\omega} \tag{2.19}$$

$$B^{\beta}\nabla_{\beta}A^{\alpha} = B^{\beta}\partial_{\beta}A^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}B^{\beta}A^{\gamma} = B^{\beta}\partial_{\beta}A^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\omega}A^{\sigma}B^{\omega} \tag{2.20}$$

Restando (2.19) y (2.20) los símbolos de christoffel quedan eliminados y de esta manera se obtiene la derivada de Lie como función de la derivada covariante

$$L_A B^{\alpha} = A^{\beta}\nabla_{\beta}B^{\alpha} - B^{\beta}\nabla_{\beta}A^{\alpha} \tag{2.21}$$

Esta ecuación se cumple bajo la premisa de que el tensor torsión sea nulo

$$T^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = 0 \tag{2.22}$$

Introduciendo algunas propiedades de la derivada de Lie [7]

$$L_c(A^{\alpha}B^{\beta}) = (L_c A^{\alpha})B^{\beta} + A^{\alpha}(L_c B^{\beta}) \tag{2.23}$$

$$L_A f(x^{\beta}) = A^{\alpha}\partial_{\alpha}f(x^{\beta}) \tag{2.24}$$

Para fines prácticos habría que determinar la derivada de Lie respecto a las componentes covariantes del campo; usando la propiedad (2.23)

$$L_u(A^{\alpha}B_{\alpha}) = (L_u A^{\alpha})B_{\alpha} + A^{\alpha}(L_u B_{\alpha}) \tag{2.25}$$

Y teniendo en cuenta la propiedad (2.24) para la parte izquierda de la ecuación anterior

$$u^\mu \partial_\mu (A^\alpha B_\alpha) = (L_u A^\alpha) B_\alpha + A^\alpha (L_u B_\alpha) \tag{2.26}$$

Aplicando la definición

$$u^\mu (\partial_\mu A^\alpha) B_\alpha + u^\mu \ A^\alpha (\partial_\mu B_\alpha) = u^\beta (\partial_\beta A^\alpha) B_\alpha - A^\beta (\partial_\beta u^\alpha) B_\alpha + A^\alpha (L_u B_\alpha) \tag{2.27}$$

Haciendo gimnasia de índices para aquellos que son mudos y despejando $A^\alpha (L_u B_\alpha)$

$$A^\alpha (L_u B_\alpha) = B_\alpha A^\beta (\partial_\beta u^\alpha) \ + u^\mu \ A^\alpha (\partial_\mu B_\alpha) \tag{2.28}$$

Renombrando algunos índices mudos y factorizando A^α

$$A^\alpha (L_u B_\alpha) = A^\alpha (B_\beta (\partial_\alpha u^\beta) + u^\mu (\partial_\mu B_\alpha)) \tag{2.29}$$

Por tanto, la derivada de Lie respecto a las componentes covariantes del campo queda expresada como

$$L_A B_\alpha = B_\beta \partial_\alpha A^\beta + A^\beta \partial_\beta B_\alpha \tag{2.30}$$

expresión que también se puede definir a partir de la derivada covariante

$$L_A B_\alpha = B_\beta \nabla_\alpha A^\beta + A^\beta \nabla_\beta B_\alpha \tag{2.31}$$

Puede malinterpretarse el cambio de derivada parcial a covariante como simplemente una modificación en la notación, pero el proceso acapara la distinción tensorial por parte de la derivada covariante que a pesar de estar expuesta a partir de dos cantidades no-tensoriales (derivada parcial y conexión afín), es de naturaleza tensorial, debido a que al aplicar una transformación de coordenadas de la manera usual sobre ella las derivadas cruzadas se anulan. Lo anterior es una de las consideraciones enmarcadas en el principio de covariancia. El cual ratifica que, si bien el principio de relatividad expresa que las leyes de la física no dependen del sistema de referencia utilizado, implica que estas leyes deberían escribirse en término de objetos que transformen adecuadamente bajo cambios de coordenadas, es decir en términos de tensores. En otras palabras, la estructura matemática restringe la forma de las leyes a ecuaciones tensoriales.

2.2. Campos de Killing

Anteriormente hemos mencionado la idea de que el tensor métrico contiene y determina las propiedades geométricas del espacio-tiempo en cuestión, esta cantidad tensorial es indispensable para describir, predecir y explicar los sistemas a grandes escalas, bajo la influencia asociada con la interacción gravitacional; entonces, necesariamente los operadores generalizados aplicados sobre el tensor métrico, también producen resultados que merecen interpretación y explicación coherente por parte del modelo teórico. Se dice que una métrica $g_{\mu\nu}$ presenta un grupo de isometrías (aplicación geométrica entre espacios métricos que conserva la distancia entre los puntos) si su expresión no cambia bajo una transformación.

$$x^\mu \quad \rightarrow \quad x'^\mu = x^\mu + \epsilon k^\mu \tag{2.32}$$

Para las componentes k^μ asociadas con un campo vectorial en concreto; la afirmación anterior es equivalente con el proceso de construcción de la derivada de Lie, por tal motivo será inmediata la aplicación del operador derivada de Lie sobre el tensor métrico respecto del campo vectorial escogido, quien más adelante llevara el nombre de campo de Killing. Por ejemplo, el espacio-tiempo de Minkowsky, usado en la relatividad especial, tiene un grupo de isometría llamado grupo de Poincaré que es un grupo de Lie de dimensión diez. Normalmente los espacios-tiempos tienen grupos de isometría mucho menores, es decir, de dimensión menor. Lo anterior expresa claramente las relaciones de isotropía y homogeneidad. Un espacio tiempo presenta isotropía general en alguno de sus puntos

si existe un subgrupo de su grupo de isometría, que es equivalente (homeomorfo) a SO(3) "Grupo Especial Ortogonal-3 Dimensiones (Rotaciones)" quien deja invariante dicho punto. Otra propiedad interesante es cuando el grupo de simetría incluye un subgrupo equivalente a R^3 que afecta a las coordenadas espaciales, en ese caso el espacio-tiempo resulta ser homogéneo [8]. En conclusión, un campo vectorial de Killing es un campo vectorial inscrito sobre una variedad Riemanniana cuyo flujo preserva la métrica como veremos más adelante, además estos campos de Killing son los generadores infinitesimales de isometrías sobre la variedad.

2.2.1. Derivada de Lie aplicada a un tensor

La derivada de Lie debe calcularse teniendo en cuenta en número de componentes independientes asociadas al campo [9]

$$L_A B = (L_A B^\alpha) e_\alpha \tag{2.33}$$

Donde e_α son las bases del campo. Ahora bien, recordando la estructura de un tensor de 2-Rango

$$T = T_{\alpha\beta}(e^\alpha \otimes e^\beta) \tag{2.34}$$

Y en analogía con la propiedad (2.23) debida al producto de Leibniz

$$L_u(A \otimes B) = (L_u A) \otimes B + A \otimes (L_u B) \tag{2.35}$$

Por lo tanto, si calculamos

$$L_u(e_\mu \otimes e_\nu) = -\partial_\mu u^\alpha (e_\alpha \otimes e_\nu) - \partial_\nu u^\alpha (e_\mu \otimes e_\alpha) \tag{2.36}$$

por ende, la derivada de Lie de un tensor de 2-Rango quedaría expresada como

$$L_u(T^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu) = (L_u T^{\mu\nu})\ e_\mu \otimes e_\nu + T^{\mu\nu} L_u(e_\mu \otimes e_\nu) \tag{2.37}$$

lo cual respecto a (2.23) y (2.34)

$$L_u(T^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu) = u^\beta (\partial_\beta T^{\mu\nu}) e_\mu \otimes e_\nu - T^{\mu\nu} \partial_\mu u^\alpha (e_\alpha \otimes e_\nu) - T^{\mu\nu} \partial_\nu u^\alpha (e_\mu \otimes e_\alpha) \tag{2.38}$$

Renombrando algunos índices mudos y factorizando $e_\mu \otimes e_\nu$ se obtiene

$$L_u(T^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu) = [u^\beta (\partial_\beta T^{\mu\nu}) - T^{\alpha\nu}(\partial_\alpha u^\mu) - T^{\mu\alpha}(\partial_\alpha u^\nu)] e_\mu \otimes e_\nu \tag{2.39}$$

Lo cual permite identificar

$$L_u(T^{\mu\nu}) = u^\beta (\partial_\beta T^{\mu\nu}) - T^{\alpha\nu}(\partial_\alpha u^\mu) - T^{\mu\alpha}(\partial_\alpha u^\nu) \tag{2.40}$$

Ecuación que comprende la derivada de Lie de un tensor 2-Rango cuyas componentes son contravariantes. En equivalencia con la ecuación (2.38) para un tensor cuyas componentes sean covariantes[10]

$$L_u(T_{\mu\nu}) = u^\beta (\partial_\beta T_{\mu\nu}) + T_{\beta\nu}(\partial_\mu u^\beta) + T_{\mu\beta}(\partial_\nu u^\beta) \tag{2.41}$$

Es de vital importancia aplicar la derivada de Lie sobre el tensor métrico, información imperante está contenida en dicha ejecución

$$L_\xi(g_{\mu\nu}) \tag{2.42}$$

Y si resulta que dicha operación es igual a cero, entonces implica que existe una simetría a lo largo de la dirección del campo sobre la variedad Riemanniana dado por u, cuyo flujo preserva la métrica; a quien denominaremos campo de Killing. Resaltando dicho cálculo en función de la derivada covariante

$$L_u(g_{\mu\nu}) = u^\beta (\nabla_\beta g_{\mu\nu}) + g_{\beta\nu}(\nabla_\mu u^\beta) + g_{\mu\beta}(\nabla_\nu u^\beta) = 0 \tag{2.43}$$

En la construcción de la derivada covariante los símbolos de christoffel exigen que el proceso operacional sobre la métrica sea nulo[11].

$$\nabla_\mu g = 0 \tag{2.44}$$

lo anterior permite escribir (2.41) como sigue

$$(\nabla_\mu g_{\beta\nu} u^\beta) + (\nabla_\nu g_{\mu\beta} u^\beta) = 0 \tag{2.45}$$

Funcionalmente la métrica permite subir y bajar índices (consistentemente con las bases duales)

$$\nabla_\mu \ u_\nu + \nabla_\nu \ u_\mu = 0 \tag{2.46}$$

La cual se denomina ecuación de Killing en coordenadas locales cuyas soluciones se consideran herramientas clave y de gran utilidad en el análisis de las simetrías y la estructura causal de los agujeros negros[12]. Cabe mencionar que una combinación lineal consistente de campos de Killing sigue siendo campo de Killing debido a la linealidad de la derivada covariante indispensable en las teorías de campos clásicos[13]. Los campos de Killing coinciden pertinentemente con las isometrías de la métrica, y debido al teorema de Noether para la física teórica, sabemos que a toda simetría continua se le atribuye una cantidad conservada. Dicho observable asociado a un campo de Killing a lo largo de la trayectoria $x^\mu(\tau)$ de una partícula libre es

$$u_\mu \dot{x}^\mu(\tau) = C(u) \tag{2.47}$$

Donde el punto denota derivación respecto al parámetro τ que en determinadas ocasiones se refiere al tiempo propio, de este modo $\dot{x}^\mu(\tau)$ es la expresión para la cuadrivelocidad, tangente a la trayectoria y relacionada con el cuadrimomento de la partícula. Aunque no se construyó una serie de pasos que permitan deducir la ecuación anterior, esta expresión permanece invariante bajo el grupo de transformaciones de Poincaré, por lo que se le considera un invariante que contiene la información precisa de las cantidades conservadas.

2.2.2. Derivación de La ecuación geodésica

Es bien conocido por el principio de Hamilton, que la trayectoria real de un sistema en el espacio de configuraciones manteniendo los extremos fijos, es aquella cuya derivada funcional de la acción respecto de las coordenadas es igual a cero; este proceso basado en el cálculo de variaciones induce de forma natural las ecuaciones de Euler-Lagrange bien conocidas en la mecánica clásica. La Lagrangiana de una partícula libre está caracterizada únicamente por su energía cinética. Evocando la forma del intervalo espacio temporal, cuya estructura permanece invariante bajo el grupo de transformaciones de Poincaré.

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{2.48}$$

Derivando la ecuación anterior respecto al tiempo propio obtenemos la velocidad generalizada, por lo cual la lagrangiana queda expresada como

$$L = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \tag{2.49}$$

que expresada en función de un principio de mínima acción, requiere de la solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0 \tag{2.50}$$

Evaluando de manera separada la ecuación anterior

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \ \dot{x}^i \dot{x}^j \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = g_{ij}[\delta^i_k \dot{x}^j + \delta^j_k \dot{x}^i] = g_{kj}\dot{x}^j + g_{ik}\dot{x}^i = 2g_{kj}\dot{x}^j \tag{2.52}$$

Lo anterior debido a la manipulación de los índices mudos y haciendo uso de la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) = 2\left(g_{kj}\frac{dx^j}{d\tau} + \frac{dg_{kj}}{d\tau}\dot{x}^j\right) = 2g_{kj}\ddot{x}^j + \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j \tag{2.53}$$

Reemplazando (2.51) y (2.52) en (2.50)

$$g_{kj}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \tag{2.54}$$

Multiplicando por g^{kl} obtenemos

$$\ddot{x}^l + \frac{g^{lk}}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \tag{2.55}$$

Escrita en función de los símbolos de christoffel

$$\ddot{x}^l + \Gamma^l_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \tag{2.56}$$

La anterior se denomina la ecuación geodésica, en el N-espacio esta ecuación corresponde a N ecuaciones diferenciales de segundo orden [14]. Su proceso de integración permitirá identificas las ecuaciones paramétricas afines para cada coordenada. Ecuación fundamental para el proceso porque permite la obtención de los símbolos de christoffel dado un intervalo espacio-temporal. Para el caso particular en el que el tensor métrico no dependa explícitamente de alguna de las coordenadas necesarias para su construcción, es evidente que el término $\frac{\partial L}{\partial x^k}$ de la ecuación (2.50) se anula, el proceso de integración del término resultante provee cierta constante de integración que precisamente concuerda con la cantidad conservada para la dirección coordenada (*campo de Killing*) a la cual se hace alusión en el proceso. Finalmente, cabe anotar que el acto de prescindir de un término en función de las coordenadas del tipo $V(x^k)$ en la escritura del lagrangiano (2.49), está relacionado con el hecho de que la ecuación geodésica es aplicable, ocasionalmente, a partículas libres, es más, una partícula cuya cuadri-aceleración sea nula, implica que las únicas trayectorias seguidas por esta en un sistema de coordenadas especifico descrito a partir del tensor métrico, son consistentes con las soluciones paramétricas de la ecuación geodésica.

2.2.3. Tensor métrico de Minkowsky (espacio-tiempo en ausencia de gravedad)

El intervalo espacio temporal definido en la relatividad especial es una extensión completamente generalizada del intervalo espacial del plano euclidiano escrito en coordenadas cartesianas. Ahora bien, la estructura de este nuevo intervalo depende de la forma y la signatura (-1,1,1,1) de la métrica de Minkowsky

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.57}$$

La esencia de la métrica Minkowskyana radica en la manera en la que transforma, haciendo uso del hecho de que la norma de cualquier c-vector permanece invariante bajo transformaciones generalizadas

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}g_{\alpha\beta} \tag{2.58}$$

Es evidente que la ecuación anterior indica que el tensor métrico transforma como lo hace un tensor de 2-Rango [15]. Cabe resaltar que el intervalo expresado en la ecuación (2.57) hace referencia a un espacio tiempo sin gravedad o el intervalo medido por un observador a una distancia lo suficientemente grande de la fuente del campo gravitacional.

2.2.4. Cálculo de los campos de Killing para el espacio-tiempo Minkowskyano

Antes de incursionar en el cálculo de los campos de Killing, es necesario reformar la ecuación de Killing convenientemente para la buena realización de futuros procesos, aplicando el operador derivada parcial a la ecuación (2.46) y subrayando el hecho de que las conexiones son nulas debido a que las bases no cambian de punto a punto, obtenemos lo siguiente

$$\partial_\beta \partial_\alpha \ \xi_\rho + \partial_\beta \partial_\rho \ \xi_\alpha = 0 \tag{2.59}$$

Permutando algunos índices

$$\partial_\alpha \partial_\rho \ \xi_\beta + \partial_\alpha \partial_\beta \ \xi_\rho = 0 \tag{2.60}$$

$$\partial_\rho \partial_\beta \ \xi_\alpha + \partial_\rho \partial_\alpha \ \xi_\beta = 0 \tag{2.61}$$

Operando de la siguiente forma

$$\partial_\beta \partial_\alpha \ \xi_\rho + \partial_\beta \partial_\rho \ \xi_\alpha + \partial_\alpha \partial_\rho \ \xi_\beta + \partial_\alpha \partial_\beta \ \xi_\rho + \partial_\rho \partial_\beta \ \xi_\alpha + \partial_\rho \partial_\alpha \ \xi_\beta = 0 \tag{2.62}$$

Anulando algunos términos

$$\partial_\beta \partial_\alpha \ \xi_\rho = 0 \tag{2.63}$$

Integrando dos veces

$$\partial_\alpha \ \xi_\rho = a_{\alpha\rho} \tag{2.64}$$

$$\xi_\rho = a_{\alpha\rho} x^\alpha + \hat{e}_\rho \tag{2.65}$$

Donde la constante de integración sin pérdida de generalidad se refiere a las bases coordenadas[16], debido a que toda la ecuación (2.65) debe de trasformar con un tensor de 1-Rango, reemplazando (2.64) en (2.65)

$$a_{\alpha\rho} = -a_{\rho\alpha} \tag{2.66}$$

Lo que indica que la Matriz $a_{\alpha\rho}$ es antisimétrica (unitaria). La ecuación (2.65) contempla de manera extendida las componentes asociadas a los campos de Killing, la constante de integración escrita como base implica traslaciones espacio temporales, el término adherido a la matriz antisimétrica implica rotaciones respecto de los ejes espaciales y boost espaciales para un total de 10 campos de Killing. Expresando los campos de Killing como combinación lineal de las coordenadas y sus bases

$$\underline{\xi} = \xi^\rho \hat{e}_\rho \tag{2.67}$$

El hecho de que $a_{\alpha\rho}$ sea antisimétrica implica que existen 4 términos diagonales nulos referidos a los campos de Killing traslacionales (3 espaciales, 1 temporal), para lograr estos $\alpha = \rho = 0, 1, 2, 3$,

$$\xi_0 = a_{00} x^0 + \hat{e}_0 = \hat{e}_0 \tag{2.68}$$

$$\xi_1 = a_{11} x^1 + \hat{e}_1 = \hat{e}_1 \tag{2.69}$$

$$\xi_2 = a_{22} x^2 + \hat{e}_2 = \hat{e}_2 \tag{2.70}$$

$$\xi_3 = a_{33} x^3 + \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \tag{2.71}$$

El cálculo del resto de campos de Killing está relacionado con las otras seis componentes independientes de la matriz antisimétrica, pero para ello debemos reescribir la ecuación (2.65) en función de (2.63) haciendo las contantes de integración nulas, así

$$\underline{\xi} = [\eta^{\beta\rho} a_{\beta\alpha} x^{\alpha}]\hat{e}_{\rho} \tag{2.72}$$

Donde $\eta^{\beta\rho}$ es la métrica de Minkowsky, calculando los campos de Killing asociados con las rotaciones[17], de la siguiente forma

Para $a_{21} = -a_{12}$

$$\vec{\xi} = \xi^1\hat{e}_1 + \xi^2\hat{e}_2 = \quad \eta^{11}a_{12}x^2\hat{e}_1 + \eta^{22}a_{21}x^1\hat{e}_2 = x\hat{e}_2 - y\hat{e}_1 \tag{2.73}$$

Para $a_{31} = -a_{13}$

$$\vec{\xi} = \xi^1\hat{e}_1 + \xi^3\hat{e}_3 = \quad \eta^{11}a_{13}x^3\hat{e}_1 + \eta^{33}a_{31}x^1\hat{e}_3 = z\hat{e}_1 - x\hat{e}_3 \tag{2.74}$$

Para $a_{32} = -a_{23}$

$$\vec{\xi} = \xi^2\hat{e}_2 + \xi^3\hat{e}_3 = \quad \eta^{22}a_{23}x^3\hat{e}_2 + \eta^{33}a_{32}x^2\hat{e}_3 = y\hat{e}_3 - z\hat{e}_2 \tag{2.75}$$

Donde (2.73),(2.74) y (2.75) son los campos de Killing asociados con las rotaciones respecto el eje z,y,x respectivamente, calculando los campos de Killing referidos a los boost espaciales, de la siguiente forma

Para $a_{10} = -a_{01}$

$$\underline{\xi} = \xi^0\hat{e}_0 + \xi^1\hat{e}_1 = \quad \eta^{00}a_{01}x^1\hat{e}_0 + \eta^{11}a_{10}x^0\hat{e}_1 = x\hat{e}_0 + ct\hat{e}_1 \tag{2.76}$$

Para $a_{20} = -a_{02}$

$$\underline{\xi} = \xi^0\hat{e}_0 + \xi^2\hat{e}_2 = \quad \eta^{00}a_{02}x^2\hat{e}_0 + \eta^{22}a_{20}x^0\hat{e}_2 = y\hat{e}_0 + ct\hat{e}_2 \tag{2.77}$$

Para $a_{30} = -a_{03}$

$$\underline{\xi} = \xi^0\hat{e}_0 + \xi^3\hat{e}_3 = \quad \eta^{00}a_{03}x^3\hat{e}_0 + \eta^{33}a_{30}x^0\hat{e}_3 = z\hat{e}_0 + ct\hat{e}_3 \tag{2.78}$$

Donde (2.76), (2.77) y (2.78) son los campos de Killing asociados a los boost espaciales de x,y,z respectivamente.

Reconociendo de manera organizada cada uno de los campos de Killing, haciendo alusión a su interpretación física.

$$\vec{\xi}_{(1)} = \hat{e}_1 \quad \rightarrow \quad Traslación \ \text{“}x\text{”} \tag{2.79}$$

$$\vec{\xi}_{(2)} = \hat{e}_2 \quad \rightarrow \quad Traslación \ \text{“}y\text{”} \tag{2.80}$$

$$\vec{\xi}_{(3)} = \hat{e}_3 \quad \rightarrow \quad Traslación \ \text{“}z\text{”} \tag{2.81}$$

$$\underline{\xi}_{(4)} = \hat{e}_0 \quad \rightarrow \quad Traslación \ \text{“}ct\text{”} \tag{2.82}$$

$$\vec{\xi}_{(5)} = y\hat{e}_3 - z\hat{e}_2 \quad \rightarrow \quad Rotación \ \text{“}x\text{”} \tag{2.83}$$

$$\vec{\xi}_{(6)} = z\hat{e}_1 - x\hat{e}_3 \quad \rightarrow \quad Rotación \ \text{“}y\text{”} \tag{2.84}$$

$$\vec{\xi}_{(7)} = x\hat{e}_2 - y\hat{e}_1 \quad \rightarrow \quad Rotación \ \text{“}z\text{”} \tag{2.85}$$

$$\underline{\xi}_{(8)} = x\hat{e}_0 + ct\hat{e}_1 \quad \rightarrow \quad boost \ \text{“}x\text{”} \tag{2.86}$$

$$\underline{\xi}_{(9)} = y\hat{e}_0 + ct\hat{e}_2 \quad \rightarrow \quad boost \ \text{“}y\text{”} \tag{2.87}$$

$$\underline{\xi}_{(10)} = z\hat{e}_0 + ct\hat{e}_3 \quad \rightarrow \quad boost \ \text{“}z\text{”} \tag{2.88}$$

2.2.5. Cantidades conservadas

Si resulta que se mide alguna magnitud asociada a un observador que se mueve a lo largo de cierta geodésica y esta magnitud no cambia a lo largo de la trayectoria, diremos entonces que existe una cantidad que se conserva a lo largo del camino, estas geodésicas exponen la condición bajo la cual el c-vector aceleración es nulo, premisa que satisface la ecuación (2.54); analizaremos qué cantidades son equivalentes respecto a cada campo de Killing definido, para ello debemos hacer énfasis en los c-vectores velocidad y momento definidos como

$$U^\mu = \gamma(\vec{u})[c, \vec{u}] \tag{2.89}$$

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{2.90}$$

Ajustando el producto interno de la ecuación (2.47) de la siguiente forma

$$g_{\mu\nu}U^\mu\xi^\nu = U_\mu\xi^\mu = \underline{U} \cdot \underline{\xi} = C \tag{2.91}$$

Determinando la derivada respecto de τ (tiempo propio) el cual hace las veces de parámetro afín, en cuanto al producto interno anteriormente mostrado

$$\frac{d(\underline{U} \cdot \underline{\xi})}{d\tau} = \quad \frac{d\underline{U}}{d\tau} \cdot \underline{\xi} + \underline{U} \cdot \frac{d\underline{\xi}}{d\tau} = \underline{U} \cdot \frac{d\underline{\xi}}{d\tau} \tag{2.92}$$

Haciendo uso de la regla de la cadena y escribiendo ξ como combinación lineal

$$\frac{d(\underline{U} \cdot \underline{\xi})}{d\tau} = \ \underline{U} \cdot \frac{d\underline{x}^\alpha}{d\tau}\partial_\alpha\underline{\xi} = \underline{U} \cdot u^\alpha\partial_\alpha(\xi^\beta\hat{e_\beta}) = u^\gamma\hat{e_\gamma} \cdot u^\alpha\nabla_\alpha(\xi^\beta)\hat{e_\beta} \tag{2.93}$$

Realizando el producto interno y haciendo énfasis en que la derivada covariante de la métrica generalizada es nula

$$u^\gamma\hat{e_\gamma} \cdot u^\alpha\nabla_\alpha(\xi^\beta)\hat{e_\beta} = u^\gamma u^\alpha\nabla_\alpha(\xi^\beta)\hat{e_\gamma} \cdot \hat{e_\beta} = u^\gamma u^\alpha(\nabla_\alpha\xi^\beta)g_{\gamma\beta} = u^\gamma u^\alpha\nabla_\alpha\xi_\gamma \tag{2.94}$$

Lo que resulta ser

$$\frac{d(\underline{U} \cdot \underline{\xi})}{d\tau} = \ u^\gamma u^\alpha\nabla_\alpha\xi_\gamma \tag{2.95}$$

Mencionando la siguiente propiedad asociada a la contracción de dos tensores de 2-Rango uno de ellos simétrico

$$S^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}\frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}\right) \tag{2.96}$$

Utilizando la propiedad anterior a (2.92) y teniendo en cuenta la ecuación de Killing (2.44)

$$\frac{d(\underline{U} \cdot \underline{\xi})}{d\tau} = \ u^\gamma u^\alpha\nabla_\alpha\xi_\gamma = \frac{1}{2}u^\gamma u^\alpha(\nabla_\alpha\xi_\gamma + \nabla_\gamma\xi_\alpha) = 0 \tag{2.97}$$

El cálculo anterior define que la derivada total del producto interno es nula debido a que el parámetro utilizado al operar caracteriza una curva geodésica; integrando la ecuación anterior se obtiene cierta constante asociada con la cantidad conservada, demostrando de esta manera la igualdad (2.91). Multiplicando la ecuación implicada por la masa relativista, revisando la definición del c-vector momento, esta queda escrita para fines prácticos de la siguiente forma

$$\underline{P} \cdot \underline{\xi} = C = cantidad \ \ conservada \tag{2.98}$$

Cantidad conservada (traslacion temporal)

Los desarrollos siguientes corresponden a la manipulación de la ecuación (2.98) para cada campo de Killing

Para $\underline{\xi} = \hat{e_0}$

$$\underline{P} \cdot \hat{e_0} = p^\alpha \ \hat{e_\alpha} \cdot \hat{e_0} = p^\alpha g_{\alpha 0} = p^0 g_{00} = -p^0 \tag{2.99}$$

Destacando la parte temporal del c-vector momento

$$\underline{P} \cdot \xi_{(temporal)} = -\frac{E}{c} \tag{2.100}$$

Vemos que un sistema cuya traslación sea a través del campo de Killing temporal tendrá una cantidad conservada asociada con la energía total; lo que se define como espacio-tiempo estático, ya que como mínimo tiene un campo de Killing temporal.

Cantidades conservadas (traslaciones espaciales)

Para $\underline{\xi} = \hat{e_1}$

$$\underline{P} \cdot \hat{e_1} = p^\alpha \ \hat{e_\alpha} \cdot \hat{e_1} = p^\alpha g_{\alpha 01} = p^1 g_{11} = p^1 = p_x \tag{2.101}$$

Para $\underline{\xi} = \hat{e_2}$

$$\underline{P} \cdot \hat{e_2} = p^\alpha \ \hat{e_\alpha} \cdot \hat{e_2} = p^\alpha g_{\alpha 02} = p^2 g_{22} = p^2 = p_y \tag{2.102}$$

Para $\underline{\xi} = \hat{e_3}$

$$\underline{P} \cdot \hat{e_3} = p^\alpha \ \hat{e_\alpha} \cdot \hat{e_3} = p^\alpha g_{\alpha 03} = p^3 g_{33} = p^3 = p_z \tag{2.103}$$

Mostrando de esta forma que un sistema cuya traslación esté dada por los campos de Killing de espacio tendrá 3 componentes asociadas a una única cantidad conservada llamada momento lineal, parte espacial de c-vector momento.

Cantidades conservadas (rotaciones en torno a Los ejes espaciales)

Para $\underline{\xi} = x\hat{e_2} - y\hat{e_1}$

$$\underline{P} \cdot (x\hat{e_2} - y\hat{e_1}) = m(u^\alpha \ x g_{\alpha 2} - u^\beta \ y g_{\beta 1}) = m(u^2 x - u^1 y) = (p^2 x - p^1 y) \tag{2.104}$$

Es necesario mencionar $p^i = p_i$ para $i = 1, 2, 3$ debido a la estructura de la métrica

$$\underline{P} \cdot x\hat{e_2} - y\hat{e_1} = xp_2 \ - yp_1 \ = xp_y \ - yp_x = L_z \tag{2.105}$$

Para $\underline{\xi} = z\hat{e_1} - x\hat{e_3}$

$$\underline{P} \cdot (z\hat{e_1} - x\hat{e_3}) = zp_1 \ - \ xp_3 \ = zp_x \ - xp_z = L_y \tag{2.106}$$

Para $\underline{\xi} = y\hat{e_3} - z\hat{e_2}$

$$\underline{P} \cdot (y\hat{e_3} - z\hat{e_2}) = yp_3 \ - \ zp_2 \ = yp_z \ - zp_y = L_x \tag{2.107}$$

Ahora bien, variaciones en cuanto a la rotación respecto de los tres ejes espaciales descritos por campos de Killing para determinado sistema, abarcará 3 componentes de una única cantidad conservada llamada momento angular, es decir si el espacio tiempo es invariante bajo el grupo de rotaciones, el momento angular se conserva.

Cantidades conservadas (boost espaciales)

Para $\underline{\xi} = x\hat{e_0} + ct\hat{e_1}$

$$\underline{P} \cdot (x\hat{e_0} + ct\hat{e_1}) = m(u^\alpha \ xg_{\alpha 0} - u^\beta \ ctg_{\beta 1}) = m(-u^0x^1 + u^1x^0) = (x^0p^1 - x^1p^0) \tag{2.108}$$

Para $\underline{\xi} = x\hat{e_0} + ct\hat{e_1}$

$$\underline{P} \cdot (y\hat{e_0} + ct\hat{e_2}) = m(u^\alpha \ yg_{\alpha 0} + u^\beta \ ctg_{\beta 2}) = m(-u^0x^2 + u^2x^0) = (x^0p^2 - x^2p^0) \tag{2.109}$$

Para $\underline{\xi} = z\hat{e_0} + ct\hat{e_3}$

$$\underline{P} \cdot (z\hat{e_0} + ct\hat{e_3}) = m(u^\alpha \ zg_{\alpha 0} + u^\beta \ ctg_{\beta 3}) = m(-u^0x^3 + u^3x^0) = (x^0p^3 - x^3p^0) \tag{2.110}$$

Cuya cantidad conservada en este caso se denomina momento angular relativista, que puede verse expresado en función de un tensor de 2-Rango antisimétrico de la siguiente forma

$$M^{\alpha\beta} = x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha \tag{2.111}$$

En conclusión el teorema de Noether implica que a cada simetría le corresponde una ley de conservación, cuya demostración se basa en la Lagrangiana del sistema quien debe cumplir con ciertas propiedades para su variación, además se autoabastece por medio de las integrales de movimiento de la mecánica teórica, se generaliza para la relatividad general por medio de los campos de Killing cuyas isometrías ofrecen cantidades conservadas anteriormente calculadas que pertenecen y generan un conglomerado de generadores incrustados al grupo de transformaciones de Poincaré.

Capítulo 3

ECUACIONES DEL CAMPO GRAVITACIONAL

En el presente capítulo mostraremos detalladamente la construcción de las ecuaciones del campo gravitacional partiendo de la acción Einstein-Hilbert, mencionando que son consistentes con un principio de mínima acción, importante en las teorías clásicas de campos, exponiendo algunas de sus propiedades más interesantes. Además, reconoceremos que la teoría de la gravedad de Newton funciona bajo condiciones particulares precisadas en el régimen clásico y a su vez, esta hace parte de la teoría de la relatividad general. Luego, calcularemos el valor de la contante k indispensable para el acople de las ecuaciones del campo de Einstein con el tensor energía-momento (E-M), incursionando en este último a partir de una transformación infinitesimal de espacio-tiempo.

3.1. Acción Einstein-Hilbert

El principio de equivalencia más general, establece que observadores en caída libre en un campo gravitatorio son localmente equivalentes a observadores inerciales. No hay experimentos locales que puedan distinguir entre estas dos situaciones. Lo anterior corresponde con la igualdad entre la masa inercial-masa gravitacional, corroborada en una serie de experimentos históricos de alta precisión. Albert Einstein no solo enuncio este principio como pilar indispensable para una teoría que acoplara la gravedad a la relatividad especial, sino que entiende que la fuerza gravitatoria podría anularse en zonas del espacio bajo la elección de un sistema de coordenadas bien definido, argumento referido al concepto de pseudo fuerza; teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, la teoría gravitacional Newtoniana debe ser modificada y cumplir con un principio de covariancia en sí misma, es más bajo ciertas aproximaciones la "nueva"teoría debe ajustarse a las predicciones del campo gravitacional Newtoniano y específicamente hablando con la ecuación de Poisson como veremos en secciones posteriores. Lo anterior indica irremediablemente que la teoría gravitacional de Newton no es del todo completa, aunque predice y funciona bajo ciertas condiciones, esta hace parte de un modelo impoluto mucho más consistente, llamado teoría de la relatividad general[18]. Ahora bien, de aquí en adelante seguiremos el "camino"que llevó a David Hilbert al cálculo demostrativo de las ecuaciones del campo gravitacional (tiempo después obtenidas por Einstein bajo procesos y desarrollos distintos), quien, al mejor estilo de las teorías de campos clásicos, partió de un "principio variacional", quien contiene un funcional en su estructura y actualmente conocido como acción Einstein-Hilbert.

3.1.1. Acción Einstein-Hilbert, cálculo y obtención de las ecuaciones del campo gravitacional

Tomando como punto de partida el siguiente funcional cuya dependencia está completamente descrita por el tensor métrico

$$S[g] = \int \sqrt{|-g|} R d^4x \tag{3.1}$$

Donde $|-g|$ es el determinante del tensor métrico y R es el escalar de curvatura. La acción E-H es el enfoque moderno arraigado a las teorías de campos clásicos, cuyo proceso de variación para nuestro caso determina las ecuaciones del campo gravitacional. Como punto de partida desarrollamos la variación asociada con el determinante del tensor métrico:

$$\delta(\sqrt{|-g|})$$

Recordando el proceso de aproximación de funciones hasta primer orden

$$f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0,y_0}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}|_{x_0,y_0}\delta y \tag{3.2}$$

Donde el lado izquierdo de la ecuación (3.2) es precisamente la variación de la función δf

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0,y_0}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}|_{x_0,y_0}\delta y \tag{3.3}$$

Ecuación indispensable para el desarrollo. Ahora bien, examinemos el siguiente ejemplo (variación de la siguiente función propuesta)

$$f(x,y) = \sqrt{xy} \tag{3.4}$$

Habría que determinar las derivadas parciales de la función

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{x_0,y_0} = \frac{y_0}{2\sqrt{x_0 y_0}} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}_{x_0,y_0} = \frac{x_0}{2\sqrt{x_0 y_0}} \tag{3.6}$$

Reemplazando (3.5) y (3.6) en (3.3)

$$\delta f = \frac{1}{2\sqrt{x_0 y_0}}[y_0\delta x + x_0\delta y] \tag{3.7}$$

Racionalizando

$$\delta f = \frac{\sqrt{x_0 y_0}}{2}\left[\frac{1}{x_0}\delta x + \frac{1}{y_0}\delta y\right] \tag{3.8}$$

Hasta aquí hemos culminado el ejercicio propuesto, examinemos el mismo desarrollo para la función del tipo

$$f(x_i) = \sqrt{x_1 x_2 ... x_n} \tag{3.9}$$

Entonces siendo consistentes con el desarrollo que llevo a la ecuación (3.8) obtenemos la variación de (3.9)

$$\delta f(x_i) = \frac{\sqrt{x_1 x_2 ... x_n}}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\delta x_i \tag{3.10}$$

Retomando el tensor métrico, cuyo determinante adaptado a un conjunto de bases diagonales puede escribirse como

$$\sqrt{\det g} = \sqrt{g_{11} g_{22} ... g_{nn}} \tag{3.11}$$

Cuya variación queda expresada como

$$\delta\sqrt{|g|} = \frac{\sqrt{g}}{2}\left(\frac{1}{g_{11}}\delta g_{11} + ... + \frac{1}{g_{nn}}\delta g_{nn}\right) \tag{3.12}$$

O de la siguiente forma resaltando el convenio de suma de Einstein, recalcando que $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{g_{\alpha\beta}}$ propiedad inversa de la métrica

$$\delta(\sqrt{|g|}) = \frac{\sqrt{|g|}}{2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \tag{3.13}$$

Cuya variación conlleva a la obtención de un tensor de 0-Rango "escalar", tomando $\det g = |g| = g$ y suministrando el signo negativo al determinante de la métrica

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \tag{3.14}$$

La expresión anterior evidencia la variación relacionada con el determinante de la métrica, el desarrollo siguiente tendrá como objetivo la variación del escalar de curvatura para ello debemos primero abordar la estructura de la conexión métrica

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_{\alpha} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\alpha\rho} - \partial_{\rho} g_{\nu\alpha}) \tag{3.15}$$

Haciendo $\mu = \alpha$

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\nu\mu}) \tag{3.16}$$

Distribuyendo términos

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\cancel{g^{\mu\rho} \partial_{\mu} g_{\nu\rho}} + g^{\mu\rho} \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \cancel{g^{\mu\rho} \partial_{\rho} g_{\nu\mu}}) \tag{3.17}$$

Por ende

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \partial_{\nu} g_{\mu\rho} \tag{3.18}$$

Cambiando $\mu = \alpha$ y $\rho = \beta$ de manera conveniente para futuros desarrollos

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_{\nu} g_{\alpha\beta} \tag{3.19}$$

Ahora bien, tomando la ecuación (14) a partir de la derivada funcional

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta x^{\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x^{\nu}} \tag{3.20}$$

Bajo la noción de límite

$$\lim_{\delta x^{\nu} \to 0} \left[\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta x^{\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x^{\nu}} \right]$$

El operador queda definido por medio de la derivada parcial

$$\partial_{\nu}\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\alpha\beta} \partial_{\nu} g_{\alpha\beta} \tag{3.21}$$

Reescribiendo

$$\frac{\partial_{\nu}\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_{\nu} g_{\alpha\beta} \tag{3.22}$$

Comparando las expresiones (3.19) y (3.22)

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\nu} [\sqrt{-g}] \tag{3.23}$$

La propiedad anterior se hará manifiesta para procesos en los cuales se busque la generalización de operadores diferenciales en función de la derivada covariante. Destacando el tensor de Ricci como contracción del tensor de Riemann

$$R_{\theta\nu} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{\nu\theta} - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\mu\theta} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\theta} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\theta} \tag{3.24}$$

Realizando la variación de la ecuación (24) teniendo en cuenta las siguientes propiedades

$$\delta(A \cdot B) = \delta(A)B + A\delta(B) \tag{3.25}$$

$$\delta(\partial A) = \partial(\delta B) \tag{3.26}$$

Aplicando el variacional

$$\delta R_{\theta\nu} = \partial_\mu(\delta\Gamma^\mu_{\nu\theta}) - \partial_\nu(\delta\Gamma^\mu_{\mu\theta}) + (\delta\Gamma^\mu_{\mu\lambda})\Gamma^\lambda_{\nu\theta} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\theta}) - (\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda})\Gamma^\lambda_{\mu\theta} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\theta}) \tag{3.27}$$

Renombrando para simplificar la escritura

$\mathrm{T}^\alpha_{\beta\gamma} = \delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$(3.28)
Por tanto (3.27) queda como

$$\delta R_{\theta\nu} = \partial_\mu T^\mu_{\nu\theta} - \partial_\nu T^\mu_{\mu\theta} + T^\mu_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\theta} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^\lambda_{\nu\theta} - T^\mu_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\theta} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}T^\lambda_{\mu\theta} \tag{3.29}$$

Destacando los dos primeros términos de (3.29) escritos en derivadas covariantes

$$\nabla_\mu T^\mu_{\theta\nu} = \partial_\mu T^\mu_{\nu\theta} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^\lambda_{\nu\theta} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}T^\mu_{\lambda\theta} - \Gamma^\lambda_{\mu\theta}T^\mu_{\nu\lambda} \tag{3.30}$$

$$\nabla_\nu T^\mu_{\mu\theta} = \partial_\nu T^\mu_{\mu\theta} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}T^\lambda_{\mu\theta} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}T^\mu_{\lambda\theta} - \Gamma^\lambda_{\nu\theta}T^\mu_{\mu\lambda} \tag{3.31}$$

Restando (3.30) y (3.31)

$$\nabla_\mu T^\mu_{\theta\nu} - \nabla_\nu T^\mu_{\mu\theta} = \partial_\mu T^\mu_{\nu\theta} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^\lambda_{\nu\theta} - \cancel{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}T^\mu_{\lambda\theta}} - \Gamma^\lambda_{\mu\theta}T^\mu_{\nu\lambda} - \partial_\nu T^\mu_{\mu\theta} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}T^\lambda_{\mu\theta} + \cancel{\Gamma^\lambda_{\nu\mu}T^\mu_{\lambda\theta}} + \Gamma^\lambda_{\nu\theta}T^\mu_{\mu\lambda}$$

Anulando algunos términos

$$\nabla_\mu T^\mu_{\theta\nu} - \nabla_\nu T^\mu_{\mu\theta} = \partial_\mu T^\mu_{\nu\theta} - \partial_\nu T^\mu_{\mu\theta} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^\lambda_{\nu\theta} + \Gamma^\lambda_{\nu\theta}T^\mu_{\mu\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}T^\lambda_{\mu\theta} - \Gamma^\lambda_{\mu\theta}T^\mu_{\nu\lambda} \tag{3.32}$$

Comparando (3.29) y (3.32)

$$\delta R_{\theta\nu} = \nabla_\mu(\delta\Gamma^\mu_{\nu\theta}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\mu_{\mu\theta}) \tag{3.33}$$

Ecuación conocida como la identidad de Palatini, quien describe la variación del tensor de Ricci como la diferencia de las derivadas covariantes de la variación de las conexiones, reescribiéndola para futuros desarrollos

$$\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}) - \nabla_\beta(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}) \tag{3.34}$$

La finalidad del proceso es lograr la variación del escalar de curvatura, por ende

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \tag{3.35}$$

Su variación teniendo en cuenta la propiedad (3.25)

$$\delta R = \delta[g^{\alpha\beta}]R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta[R_{\alpha\beta}] \tag{3.36}$$

Respecto de (3.34)

$$\delta R = \delta(g^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}(\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}) - \nabla_\beta(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\alpha})) \tag{3.37}$$

La conexión afín está construida tal que sea consistente con

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.38}$$

Por tal motivo (3.37) queda escrita como

$$\delta R = R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\lambda(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}) - \nabla_\beta(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}) \tag{3.39}$$

Cambiando algunos índices mudos $\lambda = \mu, \beta = \mu$ para factorizar las derivadas covariantes

$$\delta R = R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\mu(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}) \tag{3.40}$$

La parte derecha de la ecuación anterior transforma como un tensor de 1-Rango, por tal motivo será necesario reescribirla de la siguiente forma

$$\delta R = R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\mu J^\mu \tag{3.41}$$

Donde

$$J^\mu = g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} \tag{3.42}$$

Aplicando el operador variación a la acción Einstein-Hilbert, teniendo en cuenta las reglas de Leibniz y sabiendo que la variación y la integral conmutan

$$\delta S = \int d^4x[\delta(\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}\delta R] \tag{3.43}$$

Reemplazando los resultados obtenidos en las ecuaciones (3.14) y (3.41)

$$\delta S = \int d^4x \left[\left(\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\right)R + \sqrt{-g}(R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\mu J^\mu)\right] \tag{3.44}$$

Siendo consistentes con el principio de Hamilton

$$\delta S = \int d^4x\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\alpha\beta}R\delta g_{\alpha\beta} + \int d^4x\sqrt{-g}R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu J^\mu = 0 \tag{3.45}$$

Verificando el último término de la ecuación (3.45)

$$\nabla_\mu J^\mu = \partial_\mu J^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}J^\lambda \tag{3.46}$$

Respecto de (3.23), se declara la ecuación (3.46) como sigue

$$\nabla_\mu J^\mu = \partial_\lambda J^\lambda + \frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\lambda\sqrt{-g})J^\lambda \tag{3.47}$$

Haciendo uso de la derivada del producto

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda(\sqrt{-g}J^\lambda) \tag{3.48}$$

y al sustituir ecuación (3.48) en el último término de la ecuación (3.45) se obtiene

$$\delta S = \int d^4x\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\alpha\beta}R\delta g_{\alpha\beta} + \int d^4x\sqrt{-g}R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \int d^4x\partial_\lambda(\sqrt{-g}J^\lambda) = 0 \tag{3.49}$$

El último término determina la frontera del espacio-tiempo y su modelo radica en la acción Gibbon-Hawking-York. Continuando con el proceso, se debe recordar el producto matricial de la métrica y su inversa equivalente al símbolo delta kronecker

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha} \tag{3.50}$$

Ahora bien, aplicando el variacional

$$\delta[g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}] = 0 \tag{3.51}$$

De acuerdo con la regla de Leibniz para el operador variación

$$g^{\beta\gamma}\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}\delta g^{\beta\gamma} \tag{3.52}$$

Recordando la estructura de un tensor de 2-rango

$$T_r[T^{\alpha}_{\beta}] = T^{\alpha}_{\alpha} \tag{3.53}$$

Aplicando la traza a la ecuación (3.52)

$$T_r \rightarrow g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{3.54}$$

Reemplazando en la ecuación (3.49)

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\right]\delta g^{\alpha\beta} + \int d^4x\partial_{\lambda}(\sqrt{-g}J^{\lambda}) \tag{3.55}$$

Ahora bien, el último término de la expresión anterior está relacionada con la acción Hawking-Gibbons-York mencionado anteriormente, cuya interpretación obedece y es aplicable en variedades cerradas-compactas que cuenten con una métrica inducida, además dicha acción es relevantes para las teorías cuánticas gravitacionales, sin pérdida de generalidad será necesario anular dicho término

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\right] = 0 \tag{3.56}$$

En conclusión, matemáticamente hablando el principio de Hamilton expresa que la derivada funcional de la acción respecto de la métrica debe ser el mínimo posible o simplemente nulo, lo anterior implica el tensor de Einstein el cual contiene toda la información geometría del espacio-tiempo

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.57}$$

La expresión anterior transforma como un tensor de 2-Rango y es simétrico para ambos índices, existe un desarrollo posterior, el cual será mostrado en secciones ulteriores, en el cual se hace indispensable la identidad de Bianchi (Propiedad del tensor de Riemann), este cálculo demuestra el tensor de Einstein desde la perspectiva que obedece a una ley de conservación (necesaria para las teorías de campos), por tal motivo será necesario acoplar a dicho tensor una constante y un tensor del mismo Rango y que cumpla con las características anteriormente mencionadas, llamado tensor energía-momento, de la siguiente forma

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta} \tag{3.58}$$

La expresión anterior es conocida como las ecuaciones del campo gravitacional, cuyas soluciones particularmente predicen la existencia de agujeros negros[19]. El cálculo de k será evidente de manera detallada en secciones posteriores, por ahora será necesario mencionar algunas propiedades de la misma

$$G_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta} \tag{3.59}$$

• Como el tensor de Einstein es simétrico para ambos índices, formalmente el tensor energía-momento también debe serlo

$$G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha} \quad \rightarrow \quad T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} \tag{3.60}$$

• Estrictamente hablando el tensor energía-momento proviene de una Ley de conservación, por tal motivo el tensor de Einstein debe ser de la misma naturaleza (este desarrollo será mostrado en futuros cálculos)

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.61}$$

• Siendo consistentes con su proceso demostrativo, el tensor de Einstein debe ocuparse de las características geométricas, por tal motivo su dependencia directa está asociada con el tensor métrico y sus derivadas, además para espacios planos (ausencia de gravedad) $G_{\alpha\beta}$=0

$$G_{\alpha\beta}[g_{\alpha\beta}, \partial_\mu(g_{\alpha\beta})] \tag{3.62}$$

• Debe ser posible identificar la componente g_{00} de la métrica como el potencial Newtoniano. La ecuación de Poisson será recuperada bajo ciertas consideraciones (argumento que se pondrá en tela de juicio en la sección posterior) siempre y cuando $G_{\alpha\beta}$ contenga segundas derivadas de la métrica, por tal argumento será necesario calcular contracciones respecto de las propiedades del tensor de Riemann

$$\nabla_\lambda R_{\theta\rho\alpha\beta} + \nabla_\alpha R_{\theta\rho\beta\alpha} + \nabla_\beta R_{\theta\rho\lambda\alpha} = 0 \tag{3.63}$$

• $G_{\alpha\beta}$ debe ser lineal en el tensor de Riemann, de lo contrario contracciones del siguiente tipo darían lugar a ecuaciones diferenciales de orden mayor que 2

$$R_{\mu\rho}R^{\rho}_{\nu}; R_{\mu\lambda\alpha\gamma}R^{\lambda\alpha\gamma}_{\nu} \quad \rightarrow \quad contracciones - consistentes \tag{3.64}$$

La ecuación de campo aglomera un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales no-lineales acopladas y de segundo orden, lo que hace de su resolución un trabajo muy complicado[20]. Actualmente no se conocen técnicas que posibiliten la obtención de una solución general (las soluciones hoy en día establecidas son casos particulares con alta simetría y triviales). Aun así la condición $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$ impone 4 ligaduras, entonces solo 6 ecuaciones son independientes y podrán ser bien definidas; las otras 4 componentes son no-físicas y vienen determinadas por la elección del sistema de coordenadas.

3.1.2. Retomando el régimen Newtoniano

De aquí en adelante el objetivo inmediato será recuperar el límite Newtoniano, a partir del modelo gravitacional enmarcado en la relatividad general, para ello será necesario socializar las siguientes consideraciones

•Las velocidades de los sistemas deben ser bajas en comparación con la velocidad de la luz

$$v^i << c \tag{3.65}$$

•En perspectiva la métrica general asociada con el espacio-tiempo, evidentemente será la métrica Minkowskyana (Plana) más una perturbación arraigada con el campo gravitatorio clásico, como se verá las adelante

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.66}$$

•Donde $h_{\mu\nu}$ deberá ser consistente con las siguientes observaciones (campo débil)

$$h = det[h_{\mu\nu}] << 1 \tag{3.67}$$

$$h^2 = 0; h_{\mu\nu}x^{\mu\nu} = 0 \tag{3.68}$$

$$h^{\mu\nu}\partial_\alpha[h_{\mu\nu}] = 0 \tag{3.69}$$

• Variaciones temporales de la métrica generalizada debe ser nula (métrica estática)

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0 \tag{3.70}$$

Retomemos la ecuación geodésica, escogiendo como parámetro afín el tiempo propio (Tiempo medido por el observador para el cual dos eventos ocurren para coordenadas espaciales iguales)

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{3.71}$$

Tomando la parte temporal $\alpha = \beta = 0$ para c=1

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left[\frac{dt}{d\tau}\right]^2 = 0 \tag{3.72}$$

Calculando la conexión afín

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}[\partial_0 g_{0\lambda} + \partial_0 g_{\lambda 0} - \partial_\lambda g_{00}] \tag{3.73}$$

fijándonos en las consideraciones anteriormente mencionadas

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\lambda g_{00} \tag{3.74}$$

Lo anterior siendo consistentes con la métrica estática, retomando

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.75}$$

$$g^{\mu\lambda} = \eta^{\mu\lambda} + \chi^{\mu\lambda} \tag{3.76}$$

Lo que prosigue tendrá como propósito el cálculo de la métrica inversa $\chi^{\mu\lambda}$, multiplicando ambas ecuaciones

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda} = [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}][\eta^{\mu\lambda} + \chi^{\mu\lambda}] = \eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\lambda} + \eta_{\mu\nu}\chi^{\mu\lambda} + h_{\mu\nu}\eta^{\mu\lambda} + h_{\mu\nu}\chi^{\mu\lambda} \tag{3.77}$$

Lo que resulta en

$$\delta^\lambda_\nu = \delta^\lambda_\nu + \eta_{\mu\nu}\chi^{\mu\lambda} + h_{\mu\nu}\eta^{\mu\lambda} \tag{3.78}$$

Lo anterior debido a consideraciones referidas con el "campo débi", anulando los símbolos delta

$$0 = \eta_{\mu\nu}\chi^{\mu\lambda} + h_{\mu\nu}\eta^{\mu\lambda} \tag{3.79}$$

Realizando gimnasia de índices para despejar la métrica inversa

$$-\eta_{\mu\nu}\chi^{\mu\lambda} = h^\lambda{}_\nu \tag{3.80}$$

$$-\eta^{\theta\nu}\eta_{\mu\nu}\chi^{\mu\lambda} = \eta^{\theta\nu}h^\lambda{}_\nu \tag{3.81}$$

$$-\delta^\theta_\mu\chi^{\mu\lambda} = \eta^{\theta\lambda} \tag{3.82}$$

Obteniendo

$$-\chi^{\theta\lambda} = \eta^{\theta\lambda} \tag{3.83}$$

La métrica inversa debe cumplir con la propiedad anterior, por ende

$$g^{\mu\lambda} = \eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda} \tag{3.84}$$

Reemplazando en el desarrollo de la conexión

$$\Gamma^{\mu}_{00} = -\frac{1}{2}[\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda}]\partial_{\lambda} g_{00} = -\frac{1}{2}[\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda}]\partial_{\lambda}[\eta_{00} - h_{00}] = -\frac{1}{2}[\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda}]\partial_{\lambda} h_{00} \tag{3.85}$$

$$\Gamma^{\mu}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda} h_{00} + h^{\mu\lambda}\partial_{\lambda} h_{00} \tag{3.86}$$

Teniendo en cuenta las consideraciones se obtiene

$$\Gamma^{\mu}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda} h_{00} = -\frac{1}{2}\partial^{\mu} h_{00} \tag{3.87}$$

Respecto de la ecuación geodésica

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\partial^{\mu} h_{00}\left[\frac{dt}{d\tau}\right]^2 \tag{3.88}$$

Para $\mu = 0$ y en referencia al argumento de la métrica estática

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\partial^{0} h_{00}\left[\frac{dt}{d\tau}\right]^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{d\tau} = cte \tag{3.89}$$

Para $\mu = 1, 2, 3 = i$

$$\frac{d^2 x^{i}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\partial^{i} h_{00}\left[\frac{dt}{d\tau}\right]^2 \tag{3.90}$$

$$\frac{\frac{d^2 x^{i}}{d\tau^2}}{\left[\frac{dt}{d\tau}\right]^2} = \frac{1}{2}\partial^{i} h_{00} \tag{3.91}$$

Reconociendo la aceleración gravitacional física

$$\vec{g} = \frac{d^2 x^{i}}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial^{i} h_{00} \tag{3.92}$$

Resaltando constructos inmersos en la mecánica Newtoniana

$$\vec{g} = -\nabla\phi(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{\vec{r}} \tag{3.93}$$

Donde ϕ se conoce como el potencial gravitacional

$$\frac{1}{2}\partial^{i} h_{00} = -\nabla\phi(\vec{r}) \tag{3.94}$$

Integrando

$$h_{00} = -2\phi(\vec{r}) + cte \tag{3.95}$$

De esta manera aprendemos que la componente temporal de la métrica adaptada como perturbación asociada a la curvatura, está relacionada con el potencial gravitacional; las consideraciones primeramente mencionadas respaldan el límite Newtoniano y es aquí donde la teoría gravitacional antigua es exitosa[21]. En efecto, la capacidad predictiva y explicativa de la teoría de Newton se ha mostrado en múltiples problemas que atañen al movimiento de los cuerpos celestes. La nueva teoría gravitacional (relatividad general) construida desde una perspectiva y principios distintos, debe reproducir los resultados de la vieja teoría, en aquellos casos que se encuentran dentro del límite newtoniano.

Cálculo de k

Escribamos una vez más las ecuaciones del campo gravitacional

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \tag{3.96}$$

Donde ambos tensores presentan estructuras referidas a ecuaciones de continuidad, noción indispensable en las teorías clásicas de campos. Reescribiendo la parte izquierda de la ecuación anterior

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \tag{3.97}$$

Multiplicando a ambos lados por $g^{\mu\nu}$ para contraer y determinar la traza de los tensores

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \tag{3.98}$$

Donde

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R \quad \rightarrow \quad Escalar[Curvatura - Ricci] \tag{3.99}$$

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4 \quad \rightarrow \quad dimensión[Espacio - Tiempo] \tag{3.100}$$

$$T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad escalar[energía - momento] \tag{3.101}$$

Detectando escalares

$$R - 2R = T \quad \rightarrow \quad R = -kT \tag{3.102}$$

Reemplazando el cálculo anterior en la expresión (97)

$$R_{\mu\nu} + \frac{kT}{2}g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) \tag{3.103}$$

Discutamos lo siguiente

$$Si \quad \rightarrow \quad T_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad implica \quad \rightarrow \quad R_{\mu\nu} = 0 \tag{3.104}$$

Lo anterior hace parte de las soluciones en el vacío (ausencia de materia y energía) de las ecuaciones del campo gravitacional, debido a que son consistentes y válidas fuera de la fuente de curvatura. Consideremos el caso más sencillo para $T_{\mu\nu}$ el cual describe un conjunto de partículas que no interactúan, llamado materia fría o materia no-relativista, este solo posee componente temporal debido a que su presión es nula, contrario al caso del fluido perfecto

$$T_{\mu\nu} = \rho_0 U_\mu U_\nu c^2 \tag{3.105}$$

Donde ρ_0 es la densidad del sistema de partículas en el sistema comovil (densidad propia) y U_ν la cuadrivelocidad, para un observador comovil con el fluido es claro que

$$U^\alpha = \gamma(\vec{u})(c, \vec{u}) \quad \rightarrow \quad Observador - comovil \quad \rightarrow \quad U^\alpha = (U^0, 0, 0, 0) \tag{3.106}$$

Examinemos la norma del c-vector velocidad

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -c^2 \tag{3.107}$$

Recordando la consideración para campo débil

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.108}$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \tag{3.109}$$

Asumiendo la parte temporal de la norma

$$g_{00}(U^0)^2 = -c^2 \tag{3.110}$$

De acuerdo con (3.108)

$$(\eta_{00} + h_{00})(U^0)^2 = -c^2 \quad \rightarrow \quad (-1 + h_{00})(U^0)^2 = -c^2 \tag{3.111}$$

Despejando la parte temporal de la c-velocidad

$$(U^0)^2 = \frac{c^2}{1 - h_{00}} \quad \rightarrow \quad U^0 = c(1 - h_{00})^{\frac{-1}{2}} \tag{3.112}$$

Realizando una expansión binomial

$$U^0 = c\left(1 + \frac{h_{00}}{2}\right) \tag{3.113}$$

Retomando la parte temporal del tensor momento-energía

$$T_{00} = \rho_0 (U_0)^2 c^2 \quad \rightarrow \quad T_{00} = \rho_0 c^4 \tag{3.114}$$

Detectando el escalar E-M para la expresión anterior

$$g^{00} T_{00} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T = -\rho_0 c^4 \tag{3.115}$$

Evaluando la ecuación (3.103) para $\mu = \nu = 0$

$$R_{00} = k\left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00}\right) \tag{3.116}$$

Reemplazando los valores de T y T_{00} en la expresión anterior

$$R_{00} = k\left[\rho_0 c^4 - \left(\frac{-\rho_0 c^4}{2}\right)(-1)\right] \tag{3.117}$$

Por tanto, la parte temporal del escalar de Ricci queda escrita como

$$R_{00} = \frac{1}{2} k \rho_0 c^4 \tag{3.118}$$

Haciendo énfasis en el tenor de Ricci como contracción del tensor de Riemann

$$R_{00} = R^{\alpha}_{0\alpha 0} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{00} - \partial_0 \Gamma^{\alpha}_{0\alpha} + \Gamma^{\theta}_{00} \Gamma^{\alpha}_{\theta\alpha} - \Gamma^{\theta}_{0\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\theta 0} \tag{3.119}$$

Anulando algunos términos debido a consideraciones del límite Newtoniano, expresiones (3.68)(3.69)

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{00} \tag{3.120}$$

Calculando la conexión

$$\partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{00} = \partial_\alpha \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_0 g_{\beta 0} + \partial_0 g_{0\beta} - \partial_\beta g_{00})\right] \tag{3.121}$$

Respecto del argumento asociado con la métrica estática

$$\partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{00} = -\frac{1}{2} \partial_\beta \partial^\beta g_{00} = R_{00} \tag{3.122}$$

O de la siguiente forma

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\partial_\beta\partial^\beta(-1+h_{00}) = -\frac{1}{2}\partial_\beta\partial^\beta h_{00} \quad \rightarrow \quad R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \tag{3.123}$$

Igualando (3.118) y (3.123)

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = \frac{1}{2}k\rho_0 c^4 \tag{3.124}$$

Y teniendo en cuenta la parte temporal de la métrica en función del potencial gravitacional (anulando la constante)

$$h_{00} = -2\phi(\vec{r}) \tag{3.125}$$

Por tal motivo (3.124) queda escrita como

$$2\nabla^2\phi(\vec{r}) = k\rho_0 c^4 \tag{3.126}$$

La parte izquierda establece la ecuación de Poisson para la gravitación[22]

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho_0 \tag{3.127}$$

Reemplazando, anulando la densidad de materia y despejando k

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{3.128}$$

En última instancia las ecuaciones del campo gravitacional de Einstein toman la siguiente forma definitiva

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{3.129}$$

Vemos en conclusión que teniendo en cuenta las consideraciones enmarcadas en el régimen clásico y haciendo uso de la estructura más simple del tensor energía-momento, logramos calcular la constante k descrita en las ecuaciones del campo gravitacional.

3.2. Cantidades *tensoriales* conservadas-divergencia nula

3.2.1. Teoría clásica de campos

La teoría de la relatividad especial propuesta por Einstein en 1905, está fundamentada y es consistente respecto de sus dos postulados, si bien, el primero menciona que las leyes de la física deben permanecer invariantes bajo el grupo de transformación de Poincare, este no es más que una generalización del principio de Galileo, cuya única diferencia está sujeta a una reestructuración importante y necesaria en cuanto a las transformaciones antiguas entre sistemas de referencia inerciales (Transformaciones de Galileo), abandonando la idea del tiempo absoluto descrito por Newton. El segundo postulado asegura y propone un límite de la naturaleza, imponiendo a la velocidad de la luz como constante universal e independiente del estado de movimiento de la fuente, idea algo contra intuitiva bajo suposiciones Newtonianas pero inevitablemente verídica bajo procesos estrictamente matemáticos y experimentales. Ahora bien, una de las principales características enmarcadas en las teorías clásicas de campos, es que estas se acogen al segundo postulado de la relatividad especial debido a que los campos allí inscritos (campo gravitacional y electromagnético) obedecen a una velocidad límite en cuanto a sus interacciones, que es precisamente la velocidad de la Luz, argumento errático en cuanto a la teoría de Newton, en donde la señal de interacción gravitacional no se acopla a una velocidad límite, en pocas palabras es de carácter instantáneo. Es de vital importancia mencionar que en cuanto al electromagnetismo, el campo allí descrito es una función que depende únicamente de las coordenadas espaciales y del tiempo $\phi(x,t)$, mientras que en relatividad general la idea de campo está sujeta a una versión moderna, debido a que toda la información del mismo está contenida en el tensor métrico

$g_{\mu\nu}$, específicamente en sus 10 coordenadas independientes; por supuesto estas teorías de campos clásicos obedecen a un principio variaciones, donde el funcional acción está escrito mediante la densidad Lagrangiana del sistema, y este a su vez, depende exclusivamente del campo y de las derivadas del mismo, en donde la derivada funcional de la acción permitirá conocer de manera precisa y unívoca la dinámica del campo asociado.

3.2.2. Divergencia nula

Las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional, si bien, están precedidas de un principio variacional completamente establecido, acoplan a su estructura matemática dos tensores de 2-Rango que pueden definirse desde la perspectiva de una ecuación de continuidad "divergencia nula", por supuesto esta es otra característica fundamental arraigada a las teorías clásicas de campos, en el sentido de que permite identificar cantidades "cargas" conservadas. Veremos continuación que el tensor de Einstein como el tensor momento-energía, aunque difieren en la naturaleza misma de su construcción teórica, obedecen y se adaptan a la propiedad anteriormente mencionada.

Tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$

Retomando la identidad de Bianchi asociada con el tensor de Riemann

$$\nabla_\mu R_{\alpha\beta\lambda\omega} + \nabla_\lambda R_{\alpha\beta\omega\mu} + \nabla_\omega R_{\alpha\beta\mu\lambda} = 0 \tag{3.130}$$

Haciendo uso de la métrica

$$g^{\alpha\theta}[\nabla_\mu R_{\alpha\beta\lambda\omega} + \nabla_\lambda R_{\alpha\beta\omega\mu} + \nabla_\omega R_{\alpha\beta\mu\lambda}] = \nabla_\mu R^\theta{}_{\beta\lambda\omega} + \nabla_\lambda R^\theta{}_{\beta\omega\mu} + \nabla_\omega R^\theta{}_{\beta\mu\lambda} = 0 \tag{3.131}$$

Lo anterior debido a la aplicación de la métrica sobre el primer índice covariante del tensor de Riemann, retomando los índices iniciales

$$\nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\lambda\omega} + \nabla_\lambda R^\alpha{}_{\beta\omega\mu} + \nabla_\omega R^\alpha{}_{\beta\mu\lambda} = 0 \tag{3.132}$$

Haciendo $\alpha = \omega$, desde luego es evidente que el segundo término de la ecuación anterior también está expuesto en el proceso de contracción indicial, pero esta no es del todo trivial, debido a la definición misma del tensor de Ricci

$$R^\alpha{}_{\beta\omega\alpha} = R_{\beta\omega} \tag{3.133}$$

Por tal motivo se hace necesario acudir a las siguientes propiedades del tensor de Riemann

$$R^\alpha{}_{\beta\alpha\omega} = -R^\alpha{}_{\beta\omega\alpha} \tag{3.134}$$

$$R^\alpha{}_{\beta\alpha\omega} = -R^\beta{}_{\alpha\omega\alpha} \tag{3.135}$$

quienes revelan ciertas características de antisimetría para la primera y última pareja de índices, en ese sentido la ecuación (3.132) queda dilucidada como

$$\nabla_\mu R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R_{\beta\mu} + \nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\mu\lambda} = 0 \tag{3.136}$$

Nuevamente haciendo uso del tensor métrico

$$g^{\beta\theta}[\nabla_\mu R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R_{\beta\mu} + \nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\mu\lambda}] = \nabla_\mu R^\theta{}_\lambda - \nabla_\lambda R^\theta{}_\mu + \nabla_\alpha R^{\alpha\theta}{}_{\mu\lambda} = 0 \tag{3.137}$$

Ahora bien, para $\mu = \theta \quad \rightarrow \quad \beta$

$$\nabla_\beta R^\beta{}_\lambda - \nabla_\lambda R^\beta{}_\beta + \nabla_\alpha R^{\alpha\beta}{}_{\beta\lambda} = 0 \tag{3.138}$$

Recordando la definición del escalar de curvatura $R^{\beta}{}_{\beta} = R$, y contrayendo en simultánea para el último término

$$\nabla_{\beta} R^{\beta}{}_{\lambda} - \nabla_{\lambda} R + \nabla_{\alpha} R^{\alpha\beta}{}_{\beta\lambda} = 0 \tag{3.139}$$

$$\nabla_{\beta} R^{\beta}{}_{\lambda} - \nabla_{\lambda} R + \nabla_{\alpha} R^{\alpha}{}_{\lambda} = 0 \tag{3.140}$$

Habría que notar que tanto β como α son índices mudos y por esta razón la ecuación anterior puede quedar escrita como

$$2\nabla_{\alpha} R^{\alpha}{}_{\lambda} - \nabla_{\lambda} R = 0 \tag{3.141}$$

factorizando la derivada covariante

$$2\nabla_{\alpha} \left[R^{\alpha}{}_{\lambda} - \frac{1}{2} \delta^{\alpha}_{\lambda} R \right] = 0 \tag{3.142}$$

Pasando de covariante a contra variante el índice α por medio de la métrica

$$\nabla_{\alpha} \left[g^{\lambda\beta} R^{\alpha}{}_{\lambda} - \frac{1}{2} g^{\lambda\beta} \delta^{\alpha}_{\lambda} R \right] = 0 \tag{3.143}$$

Lo que resulta en

$$\nabla_{\alpha} \left[R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} \right] = 0 \tag{3.144}$$

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} \tag{3.145}$$

En este punto es clara la estructura de la ecuación que hemos obtenido, la cual sin duda alguna obedece y está escrita como una ecuación de continuidad, cantidad que resulta ser un tensor de 2-Rango por la manera en la que transforma y siendo consistentes con la literatura este es llamado tensor de Einstein.

Tensor energía-momento

Sin hacer énfasis en la naturaleza misma del campo (escalar, vectorial, tensorial) abarquemos adecuadamente una propiedad teórica del mismo, encerrada y expresada en su acción

$$S[\phi(x^{\mu})] = \int d^4 x \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\, \phi) \tag{3.146}$$

La densidad Lagrangiana aquí expuesta tiene dependencia en cuanto del campo y sus derivadas, también deberá permanecer invariante bajo el grupo de trasformaciones de Poincare, claro está, en relatividad general la idea del campo como función de las coordenadas espaciales y del tiempo termina siendo obsoleta, en cambio esta definición se condensa y es sustituida de manera objetiva por medio del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ y específicamente por sus 10 componentes independientes. Será necesario en este punto acudir a la siguiente traslación infinitesimal del espacio-tiempo

$$\bar{x}^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \qquad \rightarrow \qquad (a^{\mu})^2 \approx 0 \tag{3.147}$$

Ahora bien, si aplicamos la ecuación anterior al campo y sus coordenadas intrínsecas, su variación quedaría expresada como

$$\bar{\delta}\phi = \bar{\phi}(\bar{x}) - \phi(x) = 0 \tag{3.148}$$

Lo anterior inevitablemente carece de sentido si y solo si el campo no presente naturaleza escalar, es decir exprese carácter tensorial y su estructura matemática exponga notación indicial, para dicho campo la variación sería diferente de cero, por ahora en el presente capítulo solo abordaremos campos

cuya naturaleza sea del tipo escalar y en ese orden (3.148) sería consistente. Retomemos la ecuación anterior en función de la transformación infinitesimal

$$\bar{\phi}(x^\mu + a^\mu) = \phi(x^\mu) \tag{3.149}$$

Efectuando una expansión Taylor a primer orden para el lado izquierdo de la ecuación

$$\bar{\phi}(x^\mu) + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^\mu} a^\mu \approx \phi(x^\mu) \tag{3.150}$$

Pero

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \ \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = \delta^\alpha_\mu \ \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \tag{3.151}$$

Por tanto (3.21) queda como

$$\bar{\phi}(x^\mu) + a^\mu \partial_\mu \phi \approx \phi(x^\mu) \tag{3.152}$$

O de la forma

$$\delta\phi \approx \bar{\phi}(x^\mu) - \ \phi(x^\mu) \ \approx -a^\mu \partial_\mu \phi \tag{3.153}$$

Argumento basado y obtenido en el proceso de reetiquetado del espacio-tiempo, bajo coordenadas nuevas descritas por la transformación (3.147), en este punto se pueden presentar más dudas que certezas en cuanto a las variaciones del desarrollo, por tal razón será necesario justificar cada una; la variación (3.148) está sujeta a dos observadores con coordenadas y bases distintas, aunque cada una de ellos dispone de formas diferentes de etiquetar el espacio-tiempo, la medida del campo para ambos será equivalente, en contraposición la variación (3.153) es consistente con una traslación activa, debido a que para coordenadas iguales las medidas del campo difieren respecto del término a^μ en referencia al desplazamiento del campo para el mismo punto coordenado, respetando las propiedades, forma y estructura del mismo. Apliquemos la variación anteriormente expuesta como "divergencia" a la densidad lagrangiana

$$\delta\mathcal{L} = \ -a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \tag{3.154}$$

Será necesario retomar la definición inicial acorde con la densidad lagrangiana y sus dependencias, para inmediatamente calcular su variación

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu \phi) \tag{3.155}$$

Reconociendo la propiedad conmutativa para el operador variación y derivada parcial

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) \tag{3.156}$$

Exigiendo la validez de las ecuaciones de E-L

$$\delta\mathcal{L} = \ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) \tag{3.157}$$

Igualando las variaciones asociadas con la densidad lagrangiana acoplando la información de la variación del campo

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} a^\alpha \partial_\alpha \phi \right) - \partial_\mu (a^\mu \mathcal{L}) = 0 \tag{3.158}$$

Factorizando la derivada parcial

$$\partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi} \right) a^\alpha \partial_\alpha \phi - (a^\mu \mathcal{L}) \right] \ = 0 \tag{3.159}$$

y el factor infinitesimal a^α

$$\partial_\mu a^\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\alpha \phi - \delta^\mu_\alpha \mathcal{L} \right] = 0 \tag{3.160}$$

para $a^\alpha \neq 0$

$$\partial_\mu T^\mu{}_\alpha = 0 \tag{3.161}$$

Integrando

$$T^\mu{}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\alpha \phi - \delta^\mu_\alpha \mathcal{L} \tag{3.162}$$

Esta cantidad obtenida se denomina tensor momento-energía y sugiere que conociendo de manera anticipada y completa la función densidad lagrangiana, quedaran definidas todas sus componentes independientes, además, contiene toda la información observable del sistema físico. En mecánica clásica la primera integral de movimiento conocida debido a su simetría de tiempo es el hamiltoniano o energía total, quien desempeña un papel ciertamente analógico con el tensor E-M, claro está las coordenadas y momentos generalizados en este contexto quedan bien definidos por medio de los valores del campo en cada punto del espacio tridimensional y por el momento canónicamente conjugado respectivamente. Para fines prácticos será necesario optar por el tensor E-M completamente contravariante para sus dos índices, de la forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{3.163}$$

Aunque ciertamente ambos tensores fueron obtenidos a partir de procesos matemáticos equivalentes, extendidos al concepto de divergencia nula, la naturaleza física de los mismos es radicalmente diferente, el tensor de Einstein contiene toda la información geométrica en relación con el espacio-tiempo (Variedad), cuya estructura se expone finamente mediante el tensor métrico y derivadas del mismo; por su parte el tensor E-M aglomera lo que se conocen como cargas conservadas y es precisamente este, quien ratifica el contenido de energía y materia inmerso en el sistema de incursión [23]; claro está, ambas cantidades se encuentran acopladas mediante la buena elección de cierta constante, para de esta forma, darle estructura teórica a lo que se conoce como las ecuaciones del campo gravitacional.

Capítulo 4

ESPACIO-TIEMPO dS-AdS

En el presente capítulo indicaremos un posible camino para la construcción del tensor métrico para el espacio-tiempo dS-AdS, discutiendo las diferencias entre estos dos, partiendo de la idea de un universo embebido en otro de dimensión mayor, examinando sus distintas coordenadas en cuanto a su estructura matemática. Además, describiremos las propiedades consistentes con un espacio-tiempo máximamente simétrico, mencionando algunas definiciones tanto conceptuales como teóricas. Posteriormente, mostraremos que el universo en cuestión cumple con las exigencias de un espacio-tiempo máximamente simétrico lo que lo convierte en uno de ellos. Luego daremos estructura general en cuanto al cálculo de la constante cosmológica para N-dimensiones y por último incursionaremos en su frontera conforme partiendo del conocimiento de sus campos de Killing así como de las coordenadas de Poincaré, señalando que el estudio ejemplar de dicha frontera abre las puertas a teorías de unificación como es el caso de la correspondencia AdS/CFT.

4.1. Generalidades y Propiedades dS-AdS

En lo que a la relatividad general concierne, Einstein consideraba la idea de un universo estático, inmutable y sin expansión aparente; su descripción del universo lo conduce a la introducción de un término extra a sus ecuaciones para el campo gravitacional, plasmado a partir del producto del tensor métrico junto con cierto parámetro cuya interpretación a priori se encuentra arraigada con la energía y presión del vacío, quien inminentemente puede representarse por medio del tensor momentum-energía. Actualmente dicho parámetro se conoce como constante cosmológica; el efecto producido por esta en el universo es de carácter completamente repulsivo, en contraposición con la gravedad, manifestando la idea anquilosada de un universo completamente estacionario; este modelo fue abandonado por el propio Einstein una vez que Edwin Hubble midió experimentalmente el corrimiento al rojo particular de galaxias vecinas, sugiriendo de esta manera un universo carente de las mencionadas propiedades; Einstein ha abandono la constante cosmológica, llamando a este hecho "la peor idea de su vida". Hoy en día se conoce que el universo está en expansión acelerada mostrando que la velocidad de repulsión de ciertas galaxias es proporcional a la distancia que las separa, hecho que ha renovado el interés de la comunidad científica en referencia a la constante cosmológica.

Tiempo después de conocerse el modelo de universo estático propuesto por Einstein, William De Sitter revelo a la comunidad científica una solución a las ecuaciones de campo, que involucraba un universo vacío (ausencia de materia y radiación) en expansión acelerada, curvatura constante positiva, constante cosmológica negativa (Anti de Sitter) íntimamente relacionada con el Radio De Sitter y máximamente simétrico, estas propiedades serán discutidas más adelante en el apéndice; en última instancia cabe mencionar que el espacio tiempo de Sitter representa un caso particular de la solución a las ecuaciones de campo gravitacional propuesta por Friedman-Lemaitre-Walker-Robertson, la cual describe un universo en expansión o contracción, homogéneo e isótropo (máximamente simétrico); cuya métrica cuenta con un factor dependiente del tiempo, a partir del cual puede calcularse el tamaño del universo observable[27]. Si bien el espacio-tiempo AdS no corresponde con la constante cosmológica observada, existe cierta equivalencia con otras fuerzas íntimamente relacionadas con la mecánica cuántica, modelo sofisticado hoy en día conocida como correspondencia AdS / CFT.

4.1.1. Derivación simple de la métrica dS-AdS

Antes de exponer un posible camino para la construcción del espacio-tiempo precisado anteriormente, será necesario traer a colación algunos comentarios antes de los detalles. El espacio-tiempo de Sitter (dS) y Anti de Sitter (AdS) son soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein en ausencia de materia, por su parte el universo de Sitter considera una constante cosmológica Λ positiva, generando entonces una fuerza de carácter repulsivo, este espacio cumple un papel fundamental y relevante en la cosmología moderna, debido a que esta geometría se aproxima en buena medida al fenómeno de expansión exponencial del universo primordial en la época de expansión. Por su parte, el universo AdS precisa una constante cosmológica negativa, antecedente que sin duda alguna los hace enigmático en interesante para su investigación, es más, aunque en sus inicios se pronunciaba tan solo como un modelo cosmológico, posteriormente se difundió como una herramienta importante por el papel que se le atribuye en la correspondencia AdS/CFT y en el principio holográfico.

Recordando la estructura asociada con el intervalo espacial cartesiano en R^3

$$ds^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{4.1}$$

donde $\delta_{\mu\nu}$ se conoce como la métrica euclidiana; mencionando la invariancia del anterior intervalo espacial bajo transformaciones lineales del estilo (junto con su inversa)

$$x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} y^\beta \qquad \rightarrow \qquad y^\beta = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\rho} x^\rho \tag{4.2}$$

Reconociendo nuestro invariante

$$\delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha\beta} dy^\mu dy^\nu \tag{4.3}$$

Transformando

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} \delta_{\mu\nu} \tag{4.4}$$

donde la ecuación anterior permite identificar los coeficientes métricos en coordenadas esféricas, teniendo en cuenta las ecuaciones paramétricas en el proceso

$$x = r sen\theta cos\phi \tag{4.5}$$

$$y = r sen\theta sen\phi \tag{4.6}$$

$$z = r cos\theta \tag{4.7}$$

Realizando el cálculo se obtiene el intervalo espacial en coordenadas esféricas indispensable para el proceso

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2 \tag{4.8}$$

Para el caso de una 2-esfera

$$r = R = cte \tag{4.9}$$

la métrica toma la siguiente forma

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\ ) \tag{4.10}$$

expresando el intervalo cartesiano en R^4

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \tag{4.11}$$

cuyo conjunto de puntos en analogía con la 2-esfera debe cumplir con

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2 \tag{4.12}$$

Expresión consistente con una 3-esfera, exigiendo la siguiente parametrización

$$x^2 + y^2 + z^2 = (Rcos\rho)^2 \tag{4.13}$$

$$w^2 = (Rsen\rho)^2 \tag{4.14}$$

cuyas ecuaciones paramétricas toman la siguiente forma

$$x = R(cos\rho)(sen\alpha)(cos\beta) \tag{4.15}$$

$$y = R(cos\rho)(sen\alpha)(sen\beta) \tag{4.16}$$

$$z = R(cos\rho)(cos\alpha) \tag{4.17}$$

diferenciando

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 sen^2\rho d\rho^2 + R^2 cos^2\rho(d\alpha^2 + sen^2\alpha d\beta^2) \tag{4.18}$$

$$dw^2 = R^2 cos^2\rho d\rho^2 \tag{4.19}$$

sumando (4.18), (4.19) y factorizando obtenemos la métrica de la 3-esfera

$$ds^2_{3-E} = R^2(d\rho^2 + cos^2\rho(d\alpha^2 + sen^2\alpha d\beta^2) \tag{4.20}$$

Los cálculos anteriores están basados en una geometría euclidiana de dimensión superior N a la N-1-esfera escogida.

El objetivo de aquí en adelante será construir una métrica espacio temporal con escalar de curvatura

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = cte < 0 \tag{4.21}$$

Lo anterior es una de las consideraciones de AdS, respaldada por la expresión característica de un hiperboloide (4.27). Matemáticamente, las variedades máximamente simétricas son espacios con curvatura constante. Es decir, que el tensor de Riemann tenga la forma

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = K(g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) \tag{4.22}$$

Un análisis dimensional indica que K coincide con el radio de curvatura de la variedad, íntimamente conectado con la constante cosmológica. Ahora bien

$$K > 0 \quad \rightarrow \quad (espacio - tiempo\ \ de\ \ Sitter) \tag{4.23}$$

$$K = 0 \quad \rightarrow \quad (Plano\ \ R^N) \tag{4.24}$$

$$K < 0 \quad \rightarrow \quad (espacio - tiempo\ \ Anti\ \ de\ \ Sitter) \tag{4.25}$$

En un espacio Anti-de Sitter, como en un espacio de Sitter, la curvatura inherente del espacio-tiempo corresponde a la constante cosmológica[28]; quien para Anti de Sitter debe cumplir con la siguiente condición

$$\Lambda < 0 \tag{4.26}$$

La curvatura de AdS no corresponde con la constante cosmológica observada, se considera como modelo de estudio en mecánica cuántica, llamado correspondencia AdS/CFT.

Ahora bien, existen una gran gama de espacios que cumplen con las propiedades anteriormente mencionadas como lo son la N-esfera en S^N y el plano en R^N, sin embargo, para efectos prácticos será escogido el hiperboloide equivalente con la siguiente expresión

$$-x^2 - y^2 + z^2 = -R_0^2 \tag{4.27}$$

Motivados por dicha ecuación propondremos el siguiente intervalo cartesiano en R^5, el cual permite conocer las propiedades de los espacios incrustados

$$ds^2 = -(dx^0)^2 - (dx^4)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{4.28}$$

Y en concordancia con la ecuación del hiperboloide quien debe cumplir con

$$-(x^0)^2 - (x^4)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -R_0^2 = -1 \tag{4.29}$$

Es de importancia mencionar que observadores situados en la hipersuperficie del hiperboloide están equipados con una métrica inducida de dimensión inferior descrita por un solo tiempo coordenado. Siguiendo y adaptando la parametrización correspondiente a las ecuaciones (4.13), (4.14)

$$(x^0)^2 + (x^4)^2 = cosh^2\rho \tag{4.30}$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = senh^2\rho \tag{4.31}$$

La parametrización anterior se ajusta perfectamente con (4.29), diferenciando

$$(dx^4)^2 + (dx^0)^2 = (senh^2\rho)d\rho^2 + (cosh^2\rho)dt^2 \tag{4.32}$$

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = (cosh^2\rho)d\rho^2 + senh^2\rho(d\alpha^2 + sen^2\alpha d\beta^2) \tag{4.33}$$

Reemplazando en el intervalo escogido (4.28) obtendremos la métrica de Sitter inducida en 4-dimensiones con signatura (-,+,+,+)

$$ds^2_{AdS-4} = (-cosh^2\rho)dt^2 + d\rho^2 + senh^2\rho(d\alpha^2 + sen^2\alpha d\beta^2) \tag{4.34}$$

$$0 \leq \rho < \infty \ ; \ -\infty < t < \infty \ ; \ 0 \leq \alpha \leq \pi \ ; \ 0 \leq \beta < 2\pi \tag{4.35}$$

Destacando el siguiente cambio de variable

$$r = senh\rho \quad \rightarrow \quad dr = cosh\rho d\rho \quad \rightarrow \quad dr^2 = (1 + r^2)d\rho^2 \tag{4.36}$$

$$cosh^2\rho - senh^2\rho = 1 \quad \rightarrow \quad cosh^2\rho = 1 + \ senh^2\rho \quad \rightarrow \quad cosh\rho = \sqrt{1 + r^2} \tag{4.37}$$

Reemplazando en la métrica AdS generalizada

$$ds^2_{AdS-4} = -\left(1 + \frac{r^2}{R_0^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R_0^2}} + r^2(d\alpha^2 + (sen^2\alpha)d\beta^2) \quad \rightarrow \quad 0 \leq r; -\infty < t < \infty \tag{4.38}$$

La anterior se conoce como la métrica de AdS en coordenadas globales, ya que cubren todo el espacio de Anti de Sitter, esta permanece invariante bajo $SO(1, N-1)$ y es máximamente simétrica (Variedad homogénea e isotrópica)[29]. Ahora bien destaquemos la siguiente parametrización

$$x^0 = rz^0 \tag{4.39}$$

$$x^1 = rz^1 \tag{4.40}$$

$$x^2 = rz^2 \tag{4.41}$$

$$x^4 - x^3 = r \tag{4.42}$$

$$x^4 + x^3 = \frac{1}{r} + r[-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2] \tag{4.43}$$

Diferenciando cada una y reemplazando en el intervalo escogido obtenemos la métrica AdS expresadas en coordenadas relacionadas con el parche de Poincaré[30]. Estas coordenadas básicamente cubren únicamente una porción del espacio-tiempo de AdS , además, permanecen invariantes bajo una transformación de escala, conocida como simetría de dilatación.

$$ds^2_{AdS-4} = \frac{R_0^2}{z^2}[-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad \rightarrow \quad z > 0 \tag{4.44}$$

Coordenadas conformemente Minkowskyana, además supremamente importantes en el estudio de la frontera conforme AdS. Lo anterior podrá corroborarse respecto de la sección (2.2.3.), una observación rápida permite identificar la similitud del intervalo Minkowskyano con el parche de Poincaré.

4.1.2. Espacio-tiempo máximamente simétrico

Un espacio se considera máximamente simétrico si presenta el máximo número de isometrías; es decir, si tiene el mayor número de vectores de Killing. Conviene revisar las siguientes definiciones

• *Definición 1.* Dada una variedad (M, g), se dice que es homogénea si para cada par de puntos $p, q \in M$ existe una isometría global A: $M \rightarrow M$ tal que $A(p) = q$.

Es decir, todos los puntos de la variedad son indistinguibles, pues son equivalentes. Desde el punto de vista de las matemáticas, esto significa que la métrica g de M posee tanta simetría que es posible relacionar dos puntos cualesquiera a través de una transformación de simetría. Por lo demás, nótese que la homogeneidad es una propiedad global de una variedad.

• *Definición 2.* Dada una variedad (M, g), se dice que es isótropa en un punto $p \in M$ si dados $v, w \in T_pM$ existe una isometria A: $T_pM \rightarrow T_pM$ tal que $A(v) = w$.

Es decir, no hay una dirección privilegiada. Esto es, las superficies isótropas preservan su forma en todas sus direcciones. Matemáticamente, esto se interpreta como que la métrica es esféricamente simétrica. Nótese que el concepto de isotropía no es global, al contrario de lo que sucedía con la homogeneidad. Inevitablemente emerge la siguiente pregunta ¿son la homogeneidad y la isotropía conceptos independientes?, en principio sí. Por ejemplo, el cilindro es homogéneo, pero no isótropo, en cambio, un cono es isótropo en el vértice, pero no homogéneo.

• *Definicion 3.* Una variedad (M, g) que es homogénea e isótropa se dice que es máximamente simétrica, es decir, tiene el máximo número de simetrías.

En general, podemos concluir que las variedades máximamente simétricas son espacios con curvatura constante. Existen algunas relaciones remarcables respecto a la curvatura para espacios máximamente simétricos.

1. El escalar de curvatura R es constante.
2. El tensor de Ricci es proporcional a la métrica

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{n} R g_{\mu\nu} \tag{4.45}$$

3. El tensor de Riemann está dado por

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}) \tag{4.46}$$

Estas relaciones fueron estudiadas por primera vez por Elie Cartan[31].

4.1.3. Espacio-tiempo AdS máximamente simétrico

Respecto del cálculo expuesto en secciones anteriores podemos obtener los campos de Killing del universo afín, esto es aquellos campos cuya relevancia sería remarcable en futuros procesos, específicamente hablando en el estudio de la frontera conforme de AdS. Haremos uso del intervalo AdS en coordenadas globales (4.37), así mismo el intervalo de Minkowskyano escrito en coordenadas esféricas respecto de su parte angular

$$d\Omega^2_{(2)} = d\phi^2 + (\text{sen}^2\,\phi)d\theta^2 \tag{4.47}$$

concuerda precisamente con el intervalo AdS para su parte angular, sin precisar el hecho de que efectivamente AdS presenta un campo de Killing temporal, como en el caso de Minkowsky, este puede argumentarse con facilidad debido a que las componentes de la métrica no dependen explícitamente del tiempo

$$d\Omega^2_{(2)} = d\alpha^2 + (\text{sen}^2\,\alpha)d\beta^2 \tag{4.48}$$

Por tal razón los campos de Killing de AdS protagonistas en futuros cálculos, describen traslaciones temporales y rotaciones respecto de los tres ejes espaciales

$$\underline{\xi}_{(1)} = \hat{e}_0 \quad \rightarrow \quad Traslación\text{“}ct\text{”} \tag{4.49}$$

$$\vec{\xi}_{(2)} = y\hat{e}_3 - z\hat{e}_2 \quad \rightarrow \quad Rotación\text{“}x\text{”} \tag{4.50}$$

$$\vec{\xi}_{(3)} = z\hat{e}_1 - x\hat{e}_3 \quad \rightarrow \quad Rotación\text{“}y\text{”} \tag{4.51}$$

$$\vec{\xi}_{(4)} = x\hat{e}_2 - y\hat{e}_1 \quad \rightarrow \quad Rotación\text{“}z\text{”} \tag{4.52}$$

Expresando los campos de Killing rotacionales en coordenadas esféricas respecto de las reglas de transformación convencionales.

$$\vec{\xi}_{(2)} = -sin\alpha e_\beta - \frac{cos\beta}{sin\beta}cos\alpha e_\alpha \tag{4.53}$$

$$\vec{\xi}_{(3)} = cos\alpha e_\beta - \frac{cos\beta}{sin\beta}sin\alpha e_\alpha \tag{4.54}$$

$$\vec{\xi}_{(4)} = e_\alpha \tag{4.55}$$

El resto de campos de Killing “traslaciones espaciales y Boost” están precisados en la sección (2.2.4.). AdS contiene el mayor número de isometrías cuyo valor específicamente es de 10 campos de Killing, por su puesto de naturaleza distinta; lo que indudablemente lo convierte en un espacio-tiempo máximamente simétrico, todas las direcciones son equivalentes y todos los puntos situados en una dirección pertinente son indistinguibles.

4.1.4. Cálculo de la constante cosmológica (Λ) para AdS

La acción para el campo gravitacional puede ser escrita de la siguiente forma

$$S = \frac{c^4}{8\pi G}\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x \tag{4.56}$$

Donde R se conoce como el escalar de curvatura, g el determinante de la métrica y Λ la constante cosmológica (termino introducido por Einstein en su idea de un universo estático); aplicando el variacional a la acción

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} = \int \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}\right)\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{4.57}$$

Lo cual se ajusta perfectamente con el principio de Hamilton que expresa matemáticamente que la derivada funcional debe ser igual a cero[32], por tanto

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 0 \tag{4.58}$$

De aquí en adelante se calcularán las componentes del tensor de Ricci no nulas y el escalar de curvatura para el parche de Poincaré, luego introduciremos el cálculo en las ecuaciones de Einstein identificando la constante cosmológica para AdS

$$ds^2_{AdS-4} = \frac{R_0^2}{z^2}\left[-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right] \tag{4.59}$$

Reconociendo la Lagrangiana en coordenadas generalizadas

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu} \quad \dot{x}^{\nu} \tag{4.60}$$

Cuya solución a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange induce la ecuación geodésica. La lagrangiana para el parche de Poincaré estaría dada por

$$L = \frac{1}{2}\frac{R_0^2}{z^2}[-\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] \tag{4.61}$$

Calculando los símbolos de Christoffel
•para la coordenada x^{α}=ct

$$\bullet\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{4.62}$$

$$\bullet\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -\frac{R_0^2}{z^2}\dot{t} \quad \rightarrow \quad \bullet\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) = \frac{2R_0^2}{z^3}\dot{z}\dot{t} - \frac{R_0^2}{z^2}\ddot{t} \tag{4.63}$$

$$\bullet\ddot{t} - \frac{2}{z}\dot{z}\dot{t} = 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma^t_{zt} = \Gamma^t_{tz} = -\frac{1}{z} \tag{4.64}$$

•para la coordenada x^{α}=x

$$\bullet\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{4.65}$$

$$\bullet\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\frac{R_0^2}{z^2}\dot{x} \quad \rightarrow \quad \bullet\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{R_0^2}{z^2}\ddot{x} - \frac{2R_0^2}{z^3}\dot{x}\dot{z} \tag{4.66}$$

$$\bullet\ddot{x} - \frac{2}{z}\dot{x}\dot{z} = 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma^x_{xz} = \Gamma^x_{zx} = -\frac{1}{z} \tag{4.67}$$

•para la coordenada x^{α}=y

$$\bullet\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{4.68}$$

$$\bullet\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -\frac{R_0^2}{z^2}\dot{y} \quad \rightarrow \quad \bullet\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{R_0^2}{z^2}\ddot{y} - \frac{2R_0^2}{z^3}\dot{y}\dot{z} \tag{4.69}$$

$$\bullet\ddot{y} - \frac{2}{z}\dot{y}\dot{z} = 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma^y_{yz} = \Gamma^y_{zy} = -\frac{1}{z} \tag{4.70}$$

•para la coordenada x^{α}=z

$$\bullet\frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{R_0^2}{z^3}[-\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] \tag{4.71}$$

$$\bullet\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{R_0^2}{z^2}\dot{z} \quad \rightarrow \quad \bullet\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{R_0^2}{z^2}\ddot{z} - \frac{2R_0^2}{z^3}\dot{z}\dot{z} \tag{4.72}$$

$$\bullet\ddot{z} - \frac{1}{z}\dot{z}^2 - \frac{1}{z}\dot{t}^2 + \frac{1}{z}\dot{x}^2 + \frac{1}{z}\dot{y}^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \Gamma^z_{zz} = -\frac{1}{z}; \Gamma^z_{tt} = -\frac{1}{z}; \Gamma^z_{xx} = \frac{1}{z}; \Gamma^z_{yy} = \frac{1}{z} \tag{4.73}$$

Resaltando cada una de las conexiones obtenidas

$$\bullet\Gamma^t_{zt} = \Gamma^t_{tz} = -\frac{1}{z} \bullet\ \Gamma^x_{xz} = \Gamma^x_{zx} = -\frac{1}{z} \bullet \Gamma^y_{yz} = \Gamma^y_{zy} = -\frac{1}{z} \tag{4.74}$$

$$\bullet\Gamma^z_{zz} = -\frac{1}{z} \bullet \Gamma^z_{tt} = -\frac{1}{z} \bullet \Gamma^z_{xx} = \frac{1}{z} \bullet \Gamma^z_{yy} = \frac{1}{z} \tag{4.75}$$

Ahora bien, habría que determinar el número de componentes independientes asociadas con el tensor de Riemann

$$\frac{N^2(N^2-1)}{12} \qquad \rightarrow \qquad N = 4 \qquad \rightarrow \qquad 20 \tag{4.76}$$

Recordando la manera estándar asociada con el tensor de Riemann

$$[\nabla_\alpha,\ \nabla_\beta]A^\theta = [\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha]A^\theta = R^\theta_{\rho\alpha\beta}A^\rho \tag{4.77}$$

Básicamente el tensor de Riemann mide el ángulo desfasado respecto del transporte paralelo de las componentes de cualquier campo a lo largo de una curva cerrada; realizando el cálculo, el cual se enfoca particularmente en operar la derivada covariante sobre las componentes contravariante del campo, obtenemos

$$R^\theta_{\rho\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^\theta_{\rho\beta} - \partial_\beta\Gamma^\theta_{\rho\alpha} + \ \Gamma^\omega_{\rho\beta}\Gamma^\theta_{\omega\alpha} - \Gamma^\omega_{\rho\alpha}\Gamma^\theta_{\omega\beta} \tag{4.78}$$

Contrayendo respecto al primer y tercer índice

$$R^\theta_{\rho\alpha\beta} = R_{\rho\beta} \qquad \rightarrow \qquad tensor\ \ de\ \ Ricci \tag{4.79}$$

Contrayendo ambos índices con la métrica

$$R_{\rho\beta}g^{\rho\beta} \qquad \rightarrow \qquad escalar\ \ de\ \ curvatura \tag{4.80}$$

Donde el índice mudo ω referido al tensor de Riemann (4.78) corre desde $\omega = 0, 1, 2, 3$; bajando el índice θ por medio de la métrica

$$g_{\theta\lambda}R^\lambda_{\rho\alpha\beta} = R_{\theta\rho\alpha\beta} \tag{4.81}$$

Mostrando algunas de sus propiedades

$$\bullet R_{\theta\rho\alpha\beta} = R_{\rho\theta\alpha\beta} \tag{4.82}$$

$$\bullet R_{\theta\rho\alpha\beta} = R_{\theta\rho\beta\alpha} \tag{4.83}$$

$$\bullet R_{\theta\rho\alpha\beta} = R_{\beta\alpha\theta\rho} \tag{4.84}$$

$$\bullet\ R_{\theta\rho\alpha\beta} + R_{\theta\alpha\beta\rho} + R_{\theta\beta\rho\alpha} = 0 \tag{4.85}$$

$$\bullet\nabla_\lambda\ R_{\theta\rho\alpha\beta} + \nabla_\alpha\ R_{\theta\rho\beta\alpha} + \nabla_\beta\ R_{\theta\rho\lambda\alpha} = 0 \tag{4.86}$$

Donde la última de las propiedades se conoce como Identidad de Bianchi; importante debido a que permite resaltar otro proceso que muestra el tensor de Einstein

Calculando las componentes independientes del tensor de Riemann

$$R^t_{xtx} = \partial_t\Gamma^t_{xx} - \partial_x\Gamma^t_{xt} + \Gamma^\omega_{xx}\Gamma^t_{\omega t} - \Gamma^\omega_{xt}\Gamma^t_{\omega x} = \Gamma^z_{xx}\Gamma^t_{zt} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.87}$$

$$\bullet R^t_{xtx} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.88}$$

$$R^t_{yty} = \partial_t\Gamma^t_{yy} - \partial_y\Gamma^t_{yt} + \Gamma^\omega_{yy}\Gamma^t_{\omega t} - \Gamma^\omega_{yt}\Gamma^t_{\omega y} = \Gamma^z_{yy}\Gamma^t_{zt} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.89}$$

$$\bullet R^t_{yty} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.90}$$

$$R^t_{ztz} = \partial_t\Gamma^t_{zz} - \partial_z\Gamma^t_{zt} + \Gamma^\omega_{zz}\Gamma^t_{\omega t} - \Gamma^\omega_{zt}\Gamma^t_{\omega z} = -\partial_z\Gamma^t_{zt} + \Gamma^z_{zz}\Gamma^t_{zt} - \Gamma^t_{zt}\Gamma^t_{tz} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.91}$$

$$\bullet R^t_{ztz} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.92}$$

$$R^x_{txt} = \partial_x\Gamma^x_{tt} - \partial_t\Gamma^x_{tx} + \Gamma^\omega_{tt}\Gamma^x_{\omega x} - \Gamma^\omega_{tx}\Gamma^x_{\omega t} = \Gamma^z_{tt}\Gamma^x_{zx} = \frac{1}{z^2} \tag{4.93}$$

$$\bullet R^x_{txt} = \frac{1}{z^2} \tag{4.94}$$

$$R^x_{yxy} = \partial_x\Gamma^x_{yy} - \partial_y\Gamma^x_{yx} + \Gamma^\omega_{yy}\Gamma^x_{\omega x} - \Gamma^\omega_{yx}\Gamma^x_{\omega y} = \Gamma^z_{yy}\Gamma^x_{zx} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.95}$$

$$\bullet R^x_{yxy} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.96}$$

$$R^x_{zxz} = \partial_x\Gamma^x_{zz} - \partial_z\Gamma^x_{zx} + \Gamma^\omega_{zz}\Gamma^x_{\omega x} - \Gamma^\omega_{zx}\Gamma^x_{\omega z} = -\partial_z\Gamma^x_{zx} + \Gamma^z_{zz}\Gamma^x_{zx} - \Gamma^x_{zx}\Gamma^x_{xz} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.97}$$

$$\bullet R^x_{zxz} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.98}$$

$$R^y_{tyt} = \partial_y\Gamma^y_{tt} - \partial_t\Gamma^y_{ty} + \Gamma^\omega_{tt}\Gamma^y_{\omega y} - \Gamma^\omega_{ty}\Gamma^y_{\omega t} = \Gamma^z_{tt}\Gamma^y_{zy} = \frac{1}{z^2} \tag{4.99}$$

$$\bullet R^y_{tyt} = \frac{1}{z^2} \tag{4.100}$$

$$R^y_{xyx} = \partial_y\Gamma^y_{xx} - \partial_x\Gamma^y_{xy} + \Gamma^\omega_{xx}\Gamma^y_{\omega y} - \Gamma^\omega_{xy}\Gamma^y_{\omega x} = \Gamma^z_{xx}\Gamma^y_{zy} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.101}$$

$$\bullet R^y_{xyx} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.102}$$

$$R^y_{zyz} = \partial_y\Gamma^y_{zz} - \partial_z\Gamma^y_{zy} + \Gamma^\omega_{zz}\Gamma^y_{\omega y} - \Gamma^\omega_{zy}\Gamma^y_{\omega z} = -\partial_z\Gamma^y_{zy} + \Gamma^z_{zz}\Gamma^y_{zy} - \Gamma^y_{zy}\Gamma^y_{yz} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.103}$$

$$\bullet R^y_{zyz} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.104}$$

$$R^z_{tzt} = \partial_z\Gamma^z_{tt} - \partial_t\Gamma^z_{tz} + \Gamma^\omega_{tt}\Gamma^z_{\omega z} - \Gamma^\omega_{tz}\Gamma^z_{\omega t} = \partial_z\Gamma^z_{tt} + \Gamma^z_{tt}\Gamma^z_{zz} - \Gamma^t_{tz}\Gamma^z_{tt} = \frac{1}{z^2} \tag{4.105}$$

$$\bullet R^z_{tzt} = \frac{1}{z^2} \tag{4.106}$$

$$R^z_{xzx} = \partial_z\Gamma^z_{xx} - \partial_x\Gamma^z_{xz} + \Gamma^\omega_{xx}\Gamma^z_{\omega z} - \Gamma^\omega_{xz}\Gamma^z_{\omega x} = \partial_z\Gamma^z_{xx} + \Gamma^z_{xx}\Gamma^z_{zz} - \Gamma^x_{xz}\Gamma^z_{xx} = \frac{1}{z^2} \tag{4.107}$$

$$\bullet R^z_{xzx} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.108}$$

$$R^z_{yzy} = \partial_z\Gamma^z_{yy} - \partial_y\Gamma^z_{yz} + \Gamma^\omega_{yy}\Gamma^z_{\omega z} - \Gamma^\omega_{yz}\Gamma^z_{\omega y} = \partial_z\Gamma^z_{yy} + \Gamma^z_{yy}\Gamma^z_{zz} - \Gamma^y_{yz}\Gamma^z_{yy} = \frac{1}{z^2} \tag{4.109}$$

$$\bullet R^z_{yzy} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.110}$$

Donde las componentes restantes tienen que ver con las propiedades del tensor, destacando cada una de las componentes independientes

$$\bullet R^t_{xtx} = -\frac{1}{z^2} \bullet R^t_{yty} = -\frac{1}{z^2} \bullet R^t_{ztz} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.111}$$

$$\bullet R^x_{txt} = \frac{1}{z^2} \bullet R^x_{yxy} = -\frac{1}{z^2} \bullet R^x_{zxz} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.112}$$

$$\bullet R^y_{tyt} = \frac{1}{z^2} \bullet R^y_{xyx} = -\frac{1}{z^2} \bullet R^y_{zyz} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.113}$$

$$\bullet R^z_{tzt} = \frac{1}{z^2} \bullet R^z_{xzx} = -\frac{1}{z^2} \bullet R^z_{yzy} = -\frac{1}{z^2} \tag{4.114}$$

Calculando las componentes del tensor de Ricci

$$R_{tt} = R^x_{txt} + R^y_{tyt} + R^z_{tzt} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{3}{z^2} \tag{4.115}$$

$$\bullet R_{tt} = \frac{3}{z^2} \tag{4.116}$$

$$R_{xx} = R^t_{xtx} + R^y_{xyx} + R^z_{xzx} = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} = -\frac{3}{z^2} \tag{4.117}$$

$$\bullet R_{xx} = -\frac{3}{z^2} \tag{4.118}$$

$$R_{yy} = R^t_{yty} + R^x_{yxy} + R^z_{yzy} = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} = \frac{3}{z^2} \tag{4.119}$$

$$\bullet R_{yy} = -\frac{3}{z^2} \tag{4.120}$$

$$R_{zz} = R^t_{ztz} + R^x_{zxz} + R^y_{zyz} = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} = -\frac{3}{z^2} \tag{4.121}$$

$$\bullet R_{zz} = -\frac{3}{z^2} \tag{4.122}$$

Destacando cada una de las componentes independientes del tensor de Ricci

$$\bullet R_{tt} = \frac{3}{z^2} \bullet R_{xx} = -\frac{3}{z^2} \bullet R_{yy} = -\frac{3}{z^2} \bullet R_{tt} = -\frac{3}{z^2} \tag{4.123}$$

Por último, calculando el escalar de curvatura

$$R = R_{tt}g^{tt} + R_{xx}g^{xx} + R_{yy}g^{yy} + R_{zz}g^{zz} = \frac{z^2}{R_0^2}[-R_{tt} + R_{xx} + R_{yy} + R_{zz}] = -\frac{12}{R_0^2} \tag{4.124}$$

$$\bullet R = -\frac{12}{R_0^2} \tag{4.125}$$

Reemplazando cada uno de los cálculos obtenidos en las ecuaciones de campos

$$R_{\mu\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\beta} + \Lambda g_{\mu\beta} = 0 \tag{4.126}$$

Para $\mu = \beta = ct$

$$R_{tt} - \left(\frac{1}{2}R + \Lambda\right) g_{tt} = \frac{3}{z^2} + \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{12}{R_0^2}\right) - \Lambda\right] \frac{R_0^2}{z^2} = 0 \tag{4.127}$$

Despejando Λ

$$\bullet\Lambda = -\frac{3}{R_0^2} \tag{4.128}$$

Para el resto de las componentes no nulas asociadas a las ecuaciones de Einstein, la constante cosmológica resulta tener la misma forma y para un espacio-tiempo de AdS de dimensión mayor la constante cosmológica tiene la siguiente estructura

$$\bullet\Lambda = \frac{-(N-1)(N-2)}{2R_0^2} \tag{4.129}$$

Calculo indispensable para la correspondencia AdS/CFT.

4.1.5. Estructura de la constante cosmologica para N-dimensiones

Los espacios tiempos máximamente simétricos están caracterizados entre otras cosas por una propiedad indispensable relacionada con el tensor de Riemann (para AdS)

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = -\frac{1}{R_0^2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) \tag{4.130}$$

Recordando las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica

$$R_{\mu\rho} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\rho} + \Lambda g_{\mu\rho} = 0 \tag{4.131}$$

Contrayendo el tensor de Riemann (4.129) para la obtención del tensor de Ricci

$$R_{\mu\rho} = g^{\nu\lambda}R_{\mu\nu\rho\lambda} = -\frac{1}{R_0^2}(g^{\nu\lambda}g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g^{\nu\lambda}g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) \tag{4.132}$$

Teniendo en cuenta la dimensionalidad de la variedad definida como

$$g^{\nu\lambda}g_{\nu\lambda} = N \tag{4.133}$$

Donde N hace referencia a la dimensión de la variedad, por tanto

$$R_{\mu\rho} = -\frac{1}{R_0^2}(Ng_{\mu\rho} - \delta_\mu^\nu g_{\nu\rho}) = -\frac{1}{R_0^2}(Ng_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}) \tag{4.134}$$

factorizando

$$R_{\mu\rho} = -\frac{1}{R_0^2}(N-1)g_{\mu\rho} \tag{4.135}$$

Contrayendo una vez más para obtener el escalar de curvatura

$$R = g^{\mu\rho}R_{\mu\rho} = -\frac{1}{R_0^2}N(N-1) \tag{4.136}$$

Reemplazando en las ecuaciones del campo gravitacional (3.119)

$$-\frac{1}{R_0^2}(N-1)g_{\mu\rho}+\frac{1}{2R_0^2}N(N-1)-\frac{1}{R_0^2}N(N-1)+\Lambda g_{\mu\rho}=0 \tag{4.137}$$

Lo que resulta en

$$\frac{1}{R_0^2}(N-1)g_{\mu\rho}\left[\frac{N}{2}-1\right]=-\Lambda g_{\mu\rho} \tag{4.138}$$

Despejando Λ

$$\Lambda=-\frac{[N-1][N-2]}{2R_0^2} \tag{4.139}$$

Note que para $N=4$ se recupera la constante cosmológica para 4-dimensiones anteriormente calculada[33].

4.1.6. Explorando AdS (frontera conforme)

En secciones anteriores hemos hecho una descripción coherente del universo AdS-dS, partiendo de una construcción simple de su intervalo espacio-temporal precedido de su tensor métrico, exponiendo la estructura teórica de su constante cosmológica, generalizando el proceso para N-dimensiones. Si bien, hemos especificado las características relevantes del universo dS-AdS, el panorama exige un estudio altamente predictivo en cuanto a las geodésicas descritas por sistemas naturalmente diferentes (Luz, partículas materiales, etc.), además, es de suma importancia intervenir de manera pertinente en su frontera conforme, considerando las propiedades de la misma y en últimas manifestando sus repercusiones en teorías modernas y de alta belleza intrínseca, que invitan de forma trascendental a la creación de una teoría unificada.

Recordemos las coordenadas globales quienes cubren completamente el espacio-tiempo AdS

$$ds^2_{AdS-4}=(-cosh^2\rho)dt^2+d\rho^2+(sinh^2\rho)d\Omega^2_{(2)} \tag{4.140}$$

$$ds^2_{AdS-4}=-\left(1+\frac{r^2}{R_0^2}\right)dt^2+\frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{R_0^2}}+r^2d\Omega^2_{(2)} \tag{4.141}$$

y las coordenadas óptimas en el estudio de su frontera conforme conocida como parche de Poincaré

$$ds^2_{AdS-4}=\frac{R_0^2}{z^2}[-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2] \tag{4.142}$$

Analicemos el sistema bajo las coordenadas radial y temporal únicamente

$$\theta=cte;\phi=cte \quad \rightarrow \quad d\Omega^2_{(2)}=d\theta^2+(\text{sen}^2\,\theta)d\phi^2=0 \tag{4.143}$$

ocasionalmente

$$ds^2=(-cosh^2\rho)dt^2+d\rho^2 \quad \rightarrow \quad 0\leq\rho;-\infty<t<\infty. \tag{4.144}$$

Escojamos el intervalo espacio-temporal tipo luz $ds^2=0$, para determinar y describir las trayectorias seguidas por los fotones en AdS, además evidentemente la estructura del c-momento para la luz, entendiendo que no debe ser la habitual, esto es, debe estar construida a partir de un parámetro distinto al tiempo propio. Escribamos el producto interno relacionado con el campo de Killing temporal.

$$\underline{k}\cdot\underline{\xi}=-E \tag{4.145}$$

donde E debe permanecer constante a lo largo de una geodésica nula "lumínica", de acuerdo con la expresión del intervalo podemos definir

$$\underline{k} = k^0\hat{e}_0 + k^1\hat{e}_1 = \frac{dt}{d\lambda}\hat{e}_0 + \frac{d\rho}{d\lambda}\hat{e}_1 \tag{4.146}$$

Donde $k^0 = \frac{dt}{d\lambda}k^1 = \frac{d\rho}{d\lambda}$, efectivamente AdS presenta un campo de Killing temporal, este puede detectarse con facilidad debido a que las componentes de la métrica no dependen explícitamente del tiempo

$$\underline{\xi} = \hat{e}_0 \tag{4.147}$$

quien debe ser consistente con

$$\underline{\xi}\cdot\underline{\xi} < 0 \quad \rightarrow \quad \hat{e}_0\cdot\hat{e}_0 = -cosh^2\rho \tag{4.148}$$

En efecto el campo de Killing cumple con dicha propiedad, acudamos al producto interno anteriormente mencionado

$$k^\alpha\hat{e}_\alpha\cdot\hat{e}_0 = \frac{dt}{d\lambda}\hat{e}_0\cdot\hat{e}_0 = \frac{dt}{d\lambda}(-cosh^2\rho) = -E \tag{4.149}$$

$$E = \frac{dt}{d\lambda}cosh^2\rho \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{cosh^2\rho} \tag{4.150}$$

Manifestando que

$$\underline{k}\cdot\underline{k} = g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = k_\mu k^\mu = 0 \tag{4.151}$$

Siendo consistentes con la sumatoria

$$(k^0)^2 g_{00} + (k^1)g_{11} = -\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)cosh^2\rho + \left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)^2 = 0 \tag{4.152}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.149)

$$\left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)^2 = \frac{E^2}{cosh^4\rho}cosh^2\rho \tag{4.153}$$

Simplificando

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = \pm\frac{E}{cosh\rho} \tag{4.154}$$

La expresión anterior manifiesta la ecuación de las geodésicas lumínicas (trayectorias seguidas por los fotones); resolviendo por separación de variables

$$\int(cosh\rho)d\rho = \pm\int Ed\lambda \quad \rightarrow \quad sinh\rho = \pm E\lambda + \lambda_0 \tag{4.155}$$

Haciendo uso de la siguiente identidad

$$cosh^2\rho - sinh^2\rho = 1 \quad \rightarrow \quad cosh^2\rho = 1 + sinh^2\rho \quad \rightarrow \quad cosh^2\rho = 1 + [\pm E\lambda + \lambda_0]^2 \tag{4.156}$$

Lo anterior a favor de la ecuación (4.149)

$$\int dt = \int \frac{E}{1 + [\pm E\lambda + \lambda_0]^2} \tag{4.157}$$

Integrando bajo el cambio de variable

$$\alpha = \pm E\lambda + \lambda_0 \quad \rightarrow \quad d\alpha = \pm Ed\lambda \tag{4.158}$$

sustituyendo

$$t = \pm \int \frac{E}{1+\alpha^2} d\alpha \tag{4.159}$$

Se obtiene

$$t - t_0 = \pm arctan\alpha = arctan(\pm\alpha) \tag{4.160}$$

Recuperando las variables iniciales

$$t - t_0 = arctan(E\lambda \pm \lambda_0) \tag{4.161}$$

De forma equivalente

$$tan(t - t_0) = E\lambda \pm \lambda_0 \tag{4.162}$$

Entonces las soluciones a las ecuaciones diferenciales (4.149) y (4.152) están dadas por (geodésicas nulas)

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = \pm \frac{E}{cosh\rho} \quad \rightarrow \quad sinh\rho = \pm E\lambda + \lambda_0 \tag{4.163}$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{cosh^2\rho} \quad \rightarrow \quad E\lambda \pm \lambda_0 \tag{4.164}$$

Evidentemente ambas soluciones quedan expresadas en función del mismo parámetro $\rho(\lambda)$ y $t(\lambda)$, ahora bien para $\lambda = 0$ podríamos determinar que $\lambda_0 = 0$ y $t_0 = 0$ (sin descartar otras posibilidades); involucrando únicamente valores de ρ mayores que cero

$$sinh(\rho) = \pm E\lambda \tag{4.165}$$

$$tan(t) = E\lambda \tag{4.166}$$

En este punto será necesario evaluar el siguiente interrogante, ¿Qué incremento de la coordenada temporal Δt medirá un observador que emite un fotón desde su origen de coordenadas (ρ, t) al infinito, concretamente $\rho = \infty$?; apliquemos tal valor de la coordenada ρ a nuestras soluciones geodésicas

$$sinh(\infty) = E\lambda \tag{4.167}$$

Siendo consistentes con lo anterior $\lambda = \infty$ por tal motivo

$$tan(t) = E(\infty) \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{\pi}{2} \tag{4.168}$$

Típicamente si trabajáramos en cualquier otro espacio-tiempo regido por un tensor métrico bien definido, la respuesta a nuestro interrogante sería inmediato e intuitivo, el incremento de tiempo debería ser infinito, pero en referencia con los resultados obtenidos para AdS el incremento de tiempo es finito, concretamente $\Delta t = \frac{\pi}{2}$; en síntesis, si existe un observador A situado en $\rho = 0$ y otro observador B situado en $\rho = \infty$, entonces una señal lumínica tardaría de A B $\Delta t_{A-B} = \frac{\pi}{2}$, de B a A el mismo incremento $\Delta t_{B-A} = \frac{\pi}{2}$ y en consecuencia el tiempo que tardaría desde la emisión por parte del observador A hasta la recepción por parte del mismo es

$$\Delta t_T = \Delta t_{A-B} + \Delta t_{B-A} = \pi \tag{4.169}$$

Resultado inquietante, relevante y asombroso, pero completamente contra intuitivo, en cuanto a la predicción y descripción de geodésicas lumínicas. Ahora bien, discutamos todo lo relacionado con las geodésicas asociadas con partículas materiales, haciendo uso de

$$\underline{P} \cdot \underline{\xi} = -E \quad \rightarrow \quad \underline{P} = P^0 e_0 + P^1 e_1 = m_0 U^\mu e_\mu \tag{4.170}$$

o de la forma

$$\underline{P} = m\frac{dt}{d\tau}e_0 + m\frac{d\rho}{d\tau}e_1 \tag{4.171}$$

Basados en la definición misma de tiempo propio, la cual esta basada en que dos eventos ocurren en el mismo punto del espacio $x_i^\mu = x_f^\mu; \mu = 1, 2, 3$, el intervalo puede escribirse como

$$ds^2 = -d\tau^2 \tag{4.172}$$

en consecuencia

$$-d\tau^2 = (-cosh^2\rho)dt^2 + d\rho^2 \tag{4.173}$$

$$1 = (cosh^2\rho)\frac{dt}{d\tau}^2 - \frac{d\rho}{d\tau}^2 \tag{4.174}$$

Acudamos nuevamente al producto interno descrito en (4.169)

$$m\frac{dt}{d\tau}e_0 \cdot e_0 = m\frac{dt}{d\tau}(-cosh^2\rho) = -E \tag{4.175}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{cosh^2\rho}\frac{E}{m} \tag{4.176}$$

Reemplazando en la ecuación intervalo de tiempo propio

$$1 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 \frac{1}{cosh^2\rho} - \frac{d\rho}{d\tau}^2 \tag{4.177}$$

Despejando $\frac{d\rho}{d\tau}$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \pm\sqrt{\frac{(E/m)^2}{cosh^2\rho} - 1} \tag{4.178}$$

Ecuación que hace alusión a la "velocidad física" de las partículas materiales; en una primera aproximación, para solo soluciones positivas

$$\rho \to 0 \quad \to \quad \cosh\rho \approx 1 \Longleftrightarrow \frac{d\rho}{d\tau} \approx \sqrt{\frac{E}{m}^2 - 1} \tag{4.179}$$

Entonces para $\frac{E}{m} > 1$

$$\frac{d\rho}{d\tau} > 0 \tag{4.180}$$

En conclusión, la partícula presentará estado de movimiento siempre y cuando esta cuente con la energía total suficiente; en una segunda aproximación

$$\rho \to \infty \quad \to \quad \frac{(E/m)^2}{cosh^2\rho} \approx 0 \Longleftrightarrow \frac{d\rho}{d\tau} \approx \sqrt{-1} = i \tag{4.181}$$

Suponer que una partícula obedece a coordenadas radiales muy grandes, sugiere una contradicción, de hecho, incursionando un poco más en el análisis, existe un valor $\rho = \rho_0$ para el cual la partícula se detiene

$$\frac{d\rho}{d\tau}(\rho_0) = \sqrt{\frac{(E/m)^2}{cosh^2\rho_0} - 1} = 0 \tag{4.182}$$

lo anterior impone que

$$\frac{(E/m)^2}{cosh^2\rho_0} = 1 \tag{4.183}$$

Y define un radio que impone una limitación posicional para la partícula

$$cosh^2\rho = \frac{E}{m} \tag{4.184}$$

Cuanta más energía posea la partícula, causalmente su coordenada radial ρ ira en aumento; descartando la situación en la que $\rho = \infty$, debido a que carece de sentido físico. En ese orden de ideas una partícula de materia obedecerá a una velocidad bien definida hasta cierto radio $\rho = \rho_0$ que depende de su energía, en ese punto coordenado puede que la partícula se encuentre en estado de reposo o como expresa la ecuación (4.177) podría obedecer a valores negativos para su velocidad. La imagen mental que representa tal situación es equivalente con la de un oscilador armónico simple, lo anterior puede verse expresado teóricamente así

$$\rho \approx 0 \quad \rightarrow \quad cosh\rho \approx 1 + \frac{1}{2}\rho^2 \tag{4.185}$$

Por tanto, su intervalo toma la forma

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{1}{2}\rho^2\right) dt^2 + d\rho^2 \tag{4.186}$$

Haciendo el simple cambio de variable $\rho = x$

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{1}{2}x^2\right) dt^2 + dx^2 \tag{4.187}$$

Sin duda alguna este intervalo presenta una estructura similar con las coordenadas de Rindler (descripción de un observador situado en un sistema de referencia uniformemente acelerado en el espacio de Minkowsky), en el cual el elemento

$$g_{00} = -(1 + 2\phi) \tag{4.188}$$

Donde ϕ está completamente determinado por la definición del potencial gravitacional clásico. En síntesis, en torno a $\rho \approx 0$ la componente temporal de la métrica AdS adopta una forma semejante a una función cuadrática del estilo $\frac{1}{2}k^2$, quien es precisamente la energía potencial asociada a un oscilador armónico; no obstante es claro que el potencial se hace infinito para valores grandes de la coordenada radial y clásicamente es imposible escapar de un potencial de este estilo. Motivados por la interpretación anterior podríamos mencionar que posiblemente en $\rho \approx \infty$ existe una especia de frontera atípica y extraña que será objeto de estudio a continuación. Inspirados en las geodésicas nulas realicemos el siguiente cambio de variable

$$sinh\rho = tan\omega \tag{4.189}$$

Diferenciando y elevando al cuadrado

$$(cosh^2\rho)d\rho^2 = \frac{1}{cos^4\omega} d\omega^2 \tag{4.190}$$

De acuerdo con las identidades hiperbólicas

$$cosh^2\rho = 1 + sinh\rho \quad \rightarrow \quad cosh^2\rho = 1 + (tan\omega)^2 \tag{4.191}$$

y a favor de las identidades trigonométricas

$$tan^2\omega + 1 = \frac{1}{cos^2\omega} \tag{4.192}$$

definimos

$$cosh^2\rho = \frac{1}{cos^2\omega} \tag{4.193}$$

Sustituyendo en (4.189)

$$d\rho^2 = \frac{1}{cos^2\omega}d\omega^2 \tag{4.194}$$

El intervalo queda escrito como

$$ds^2 = \frac{1}{cos^2\omega}(-dt^2 + d\omega^2) \tag{4.195}$$

No olvidemos que de acuerdo con el cambio de variable

$$\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = 0 \tag{4.196}$$

$$\rho = +\infty \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{2} \tag{4.197}$$

Renovando los rangos de cada coordenada

$$-\infty < t < \infty; \omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \tag{4.198}$$

Entonces respecto de la métrica (4.194), existe una especie de frontera conforme para valores $\omega > \frac{\pi}{2}$. Definamos algunas propiedades de dicha frontera

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{z(x^\mu)}\tilde{g}_{\alpha\beta} \tag{4.199}$$

Donde $z(x^\mu)$ debe ser compatible con

$$z(x^\mu) > 0 \quad \rightarrow \quad dentro\ \ del\ \ espacio - tiempo \tag{4.200}$$

$$z(x_0) = 0 \quad \rightarrow \quad frontera \tag{4.201}$$

$$dz(x_0) \neq 0 \quad \rightarrow \quad frontera \tag{4.202}$$

Para nuestro caso la función queda bien definida por $z(\omega) = cos\omega$, quien cumple satisfactoriamente con las propiedades antes descritas[34]. A continuación, mencionaremos algunas interpretaciones y consecuencias con significado físico relevantes en el proceso, retomemos las coordenadas globales bajo el cambio de variable asociado con la frontera

$$ds^2_{AdS-4} = \frac{1}{cos^2\omega}(-dt^2 + d\omega^2) + sinh^2\rho d\Omega^2_{(2)} \tag{4.203}$$

Ajustando la componente del tensor métrico inmerso en el diferencial de línea de la 2-esfera

$$ds^2_{AdS-4} = \frac{1}{cos^2\omega}(-dt^2 + d\omega^2 + d\Omega^2_{(2)}) \tag{4.204}$$

Abordemos la coordenada ω bajo una aproximación

$$\omega = \omega_0 \leq \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \eta_0 = \frac{1}{cos^2\omega_0} >>> 1 \quad \rightarrow \quad d\omega = 0 \tag{4.205}$$

Donde η_0 se conoce como factor global el cual se caracteriza por ser muy grande comparado con la unidad, reescribiendo el intervalo

$$ds^2_{AdS-4} = \eta_0(-dt^2 + d\Omega^2_{(2)}) \tag{4.206}$$

Normalizando el intervalo

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{\eta_0}} \quad \rightarrow \quad d\bar{s}^2 = \frac{ds^2}{\eta_0} \tag{4.207}$$

$$d\bar{s}^2 = -dt^2 + d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2 \tag{4.208}$$

Ubiquemos el sistema en el plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$d\bar{s}^2 = -dt^2 + d\phi^2 \quad \rightarrow \quad \overbrace{ds^2_{cil} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}^{Coordenadas Cilindricas} \tag{4.209}$$

El intervalo obtenido sugiere la imagen mental de un cilindro unitario de altura infinita, con dos grados de libertad ortogonales entre sí (no hay términos cruzados en el intervalo) el cual representa y describe la frontera conforme AdS. Si recopilamos toda la información en referencia con el tensor de Riemann (curvatura) su resultado sería nulo, debido a que este está construido a partir de derivadas del tensor métrico cuyas componentes son constantes; por tanto cualquier superficie prudentemente escogida de la frontera próxima a $\frac{\pi}{2}$ será considerada como extrínsecamente curva, pero intrínsecamente plana (Geométricamente equivalente a Minkowsky) como era de esperarse[35]. Dicha frontera suele llamarse Time Like, debido a que una de sus coordenadas obedece al tiempo, característica que ha motivado a la construcción de diferentes propuestas teóricas con el fin de ubicar o situar su superficie, sistemas con infinitos grados de libertad, específicamente hablando campos, cuya naturaleza depende del objetivo propuesto (AdS/CFT).

Capítulo 5

CONCLUSIONES

El objetivo principal del presente trabajo era el de calcular e interpretar los campos de Killing del universo dS y AdS enmarcados en la teoría de la relatividad general. El resultado final permite determinar la obtención de 10 campos de Killing lo que corresponde con un espacio máximamente simétrico. Grosso modo, los campos vectoriales de Killing preservan la distancia entre dos puntos cualesquiera del espacio-tiempo y casi siempre van por el nombre de isometrías. En particular la presencia de un campo de Killing de tiempo implica que existe un grupo uniparamétrico de isometrías, cuya simetría temporal de traslación obedece con la conservación de la energía; característica fundamental de los espacios estacionarios.

A estos efectos, en el capítulo 1 se presentaron los operadores derivada de Lie y derivada covariante importantes en la estructura matemática que concibe la ecuación de Killing, la cual básicamente sugiere que la aplicación del operador derivada de Lie sobre el tensor métrico es nula, implicando que la métrica se preserva bajo la dirección del campo que el operador contiene. Las soluciones de la ecuación de Killing permiten identificar todas y cada una de las isometrías del espacio.

El núcleo fundamental de la teoría relatividad general son las ecuaciones del campo gravitacional de Einstein, las cuales fueron estudiadas en el capítulo 2, mencionando que estas se deducen a partir de un principio de mínima acción, en donde la derivada funcional de la acción respecto del tensor métrico debe ser nula, demostrando entonces las ecuaciones de campo. Además se hizo alusión a la teoría gravitatoria de Newton como contenida dentro del marco de la relatividad general, revisando que esta teoría es consistente para un régimen bien definido.

Finalmente en el capítulo 3 se construye y expone la métrica AdS como embebida en un hiperespacio representado a partir del intervalo de un hiperboloide que cuenta con dos coordenadas de tiempo y tres espaciales, discutiendo sus principales características así como las diferentes coordenadas que la describen. En particular las coordenadas conocidas como el parche de Poincaré son óptimas para el estudio de la frontera conforme de AdS, resaltando que el principal interés reside en que sus superficies de nivel son consistente con espacios equipados con una métrica Minkowskyana. Es importante mencionar que la incursión teórica en fronteras conformes como la de AdS permite establecer teorías renuentes de unificación como es el caso de la correspondencia AdS/CFT. Los pormenores y antecedentes de dicha teoría propician la construcción de posteriores investigaciones como posible continuación del presente trabajo.

En conclusión el cálculo de los campos de Killing según mi interpretación no son más que una generalización sofisticada de las integrales de movimiento de Hamilton-Jacobi, contenidas en el teorema de Noether; no hay que comparar ambos métodos de manera apresurada, puesto que son de naturaleza distinta, por un lado en mecánica clásica las simetrías se desprenden del sistema dinámico y en Relatividad General las isometrías "campos de Killing" están asociados y son aplicables a los espacios en general, pero aun así, ambos procesos por líneas de desarrollo distintas, exponen leyes de conservación radicalmente similares e indispensables para el campo de la física teórica. El conocimiento básico adquirido respecto de la teoría de la relatividad general puede ser de apropiación colectiva, que le posibilita al alumno novicio adentrarse en este tipo de teorías actuales.

Apéndice

5.0.1. Teorema de Noether

En mecánica clásica el estado físico de un sistema está completamente caracterizado a partir de la función lagrangiana, cuya dependencia explicita radica en el conocimiento de las coordenadas generalizadas q_k, sus derivadas $\dot{q}_k$ y en ocasiones del tiempo; estas magnitudes que determinan el estado del sistema varían en el tiempo. Existen, sin embargo, unas funciones de estas magnitudes cuyos valores permanecen constantes durante el movimiento, dependiendo únicamente de las condiciones iniciales. A estas funciones se las denomina integrales de movimiento. La importancia de dichas cantidades radica en que tienen un profundo significado derivado de las propiedades fundamentales: homogeneidad e isotropía del espacio y el tiempo. Los teoremas de conservación para estas magnitudes hacen posible de modo inmediato deducir de conclusiones referentes al estado de los cuerpos después de la interacción, si es conocido su estado antes de la interacción.

En virtud de la homogeneidad del tiempo (cualquier t es equivalente para realizar mediciones), la lagrangiana de un sistema cerrado "*sistema aislado de manera adiabática e impermeable*"no depende explícitamente del tiempo. Entonces la derivada total respecto al tiempo de la lagrangiana puede escribirse

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k. \tag{5.1}$$

De acuerdo con las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \dot{q}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k = \sum_k \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \tag{5.2}$$

E igualando a cero

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L\right) = 0 \tag{5.3}$$

Integrando se deduce que la magnitud

$$E = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = cte. \tag{5.4}$$

Permanece constante durante el movimiento de un sistema cerrado, es decir, es una integral de movimiento. A esta magnitud se le llama energía total del sistema. El teorema de conservación de la energía es válido no solo para sistemas cerrados, sino también para sistemas sometidos a un campo exterior constante, es decir, no dependiente del tiempo. Los sistemas mecánicos cuya energía se conserva se suelen llamar conservativos.

De la homogeneidad del espacio (sobre una dirección cualquier punto es equivalente para realizar mediciones) se deduce un segundo teorema de conservación. Las propiedades de un sistema cerrado no varían por un desplazamiento paralelo de todo el sistema en el espacio. Consideremos, entonces, un desplazamiento infinitesimal medible δr_α, y busquemos la condición para que la función lagrangiana no varié. Dicho desplazamiento paralelo debe entenderse como una transformación en la cual todas las partículas del sistema se desplazan un mismo segmento, esto es, los vectores de posición r_k se convierten en $r_k + \delta r_\alpha$. La variación de la función lagrangiana (permaneciendo constantes las velocidades de las partículas), en consecuencia, está dada por

$$\delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k = 0 \tag{5.5}$$

Revisando el último término de la expresión anterior, entendiendo que el operador variación y derivada total conmutan

$$\delta\dot{q}_k = \delta\left(\frac{dq_k}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta q_k) = 0 \tag{5.6}$$

Por tanto, la variación δL queda como

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{5.7}$$

Siendo consistentes con las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\cancel{\partial L}}{\cancel{\partial q_k}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \tag{5.8}$$

Integrando, llegamos a la conclusión de que la magnitud vectorial

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = cte \tag{5.9}$$

Permanece constante durante el movimiento; el vector P se conoce como ímpetu o momento lineal del sistema. Las tres componentes del vector momento lineal se conservan en ausencia de un campo exterior. Sin embargo, alguna de estas componentes puede permanecer constante aun en presencia de un campo externo, si la energía potencial en el campo no depende de todas las coordenadas espaciales ni del tiempo.

Estudiemos ahora el teorema de conservación que se infiere a partir de la isotropía del espacio (cualquier dirección es equivalente para realizar mediciones, no hay direcciones privilegiadas). Las propiedades mecánicas de un sistema cerrado no cambian en relación con una rotación en el espacio del sistema en conjunto. Asumamos, entonces, una rotación infinitesimal del sistema, y busquemos la condición para que la lagrangiana permanezca invariante. Consideremos en primera instancia el incremento en el vector posición correspondiente a una partícula del sistema, tomando como origen de coordenadas el eje de rotación

$$|\delta\vec{r}| = |r||\delta\theta|sen\phi \quad \rightarrow \quad \delta\vec{r} = \delta\vec{\theta}\times\vec{r} \tag{5.10}$$

Donde $\delta\theta$ es el vector rotación infinitesimal cuyo módulo es igual al ángulo de rotación y su dirección coincide con el eje de rotación, r determina la posición de la partícula respecto del origen de coordenadas. La rotación del sistema no solo modifica la dirección de los vectores de posición sino también las velocidades de las partículas, transformándose todos bajo la misma ley

$$\delta\dot{\vec{r}} = \delta\vec{\theta}\times\dot{\vec{r}} \tag{5.11}$$

Apliquemos estas expresiones a la variación de la función lagrangiana

$$\delta L = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right) = 0 \tag{5.12}$$

Por definición $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = P_k$ y $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \dot{P}_k$. Reemplazando

$$\sum_k (\dot{P}_k \cdot \delta\theta \times r_k + P_k \cdot \delta\theta \times \dot{r_k}) = 0 \tag{5.13}$$

Y teniendo en cuenta que el triple producto cumple con

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) \tag{5.14}$$

Factorizando $\delta\theta$

$$\delta\theta\sum_k (r_k\times\dot{P}_k + \dot{r_k}\times P_k) = \delta\theta\cdot\frac{d}{dt}\sum_k (r_k\times P_k) = 0 \tag{5.15}$$

Puesto que $\delta\theta$ es arbitrario

$$\frac{d}{dt}\sum_k (r_k \times P_k) = 0 \tag{5.16}$$

Integrando, se concluye que en el movimiento de un sistema cerrado se conserva la magnitud vectorial

$$L = \sum_k r_k \times P_k \tag{5.17}$$

Llamado momento angular o cinético del sistema. Como la definición contiene vectores de posición de las partículas, su valor depende en general de la elección del origen de coordenadas. En resumen, todo sistema cerrado posee siete integrales de movimiento: la energía, las tres componentes del momento lineal y las tres componentes del momento angular. En síntesis, el teorema de Noether expresa que el conjunto K de objetos matemáticos que describen y representan correctamente algunas propiedades de un sistema físico, se precisan a favor del concepto de simetría, si sobre ellos actúa un conjunto de transformaciones G que no modifica sus propiedades intrínsecas, manteniendo los elementos de dicho conjunto K completamente inalterados. De esta manera las llamadas leyes de conservación en física obedecen a un grupo de transformaciones donde G implica translaciones espaciales (conservación de las tres componentes del momento), translaciones temporales (conservación de la energía) y rotaciones (conservación de las tres componentes del momento angular) aplicadas sobre el grupo K que es concebido a partir de sus lagrangianos admisibles [36].

Bibliografía

[1] Paola Andrea Clavijo. (2015). Campos Vectoriales Tipo Killing en Geometría Riemanniana. Pontificia Universidad Javeriana. P 7-10

[2] Myers and Steenrod. (1939). Annals of Mathematics Second Series. P 400-416

[3] K. Nomizu. On Local And Global Existence Of Killing vector fields. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 72,, 1960.

[4] d'Inverno, R. A. (1992).Introducing einstein's relativity. Clarendon Press. P 69-70.

[5] Schutz, B. F., y Schutz, D. B. F. (1980). Geometrical methods of mathematicalphysics. Cambridge university press. P 76-77.

[6] d'Inverno, R. A. (1992). Introducing einstein's relativity. Clarendon Press. P 72-74.

[7] Schutz, B. F., y Schutz, D. B. F. (1980). Geometrical methods of mathematicalphysics. Cambridge university press. P 14-16.

[8] Tejeiro, J. M. (s.f.). Sobre la teoría especial de la relatividad. Universidad Nacional de Colombia. Capítulo 2. Fundamentos de la Relatividad Especial.

[9] d'Inverno, R. A. (1992). Introducing einstein's relativity. Clarendon Press. P 71-72.

[10] Blau, M. (2011). Lecture notes on general relativity. Albert Einstein Center for Fundamental Physics. P 232-237.

[11] Schutz, B. F., y Schutz, D. B. F. (1980). Geometrical methods of mathematicalphysics. Cambridge university press. P 88-91.

[12] Blau, M. (2011). Lecture notes on general relativity. Albert Einstein Center for Fundamental Physics. P 238.

[13] Sannjev S. Seahra. (2006). An introduction to Black Holes. University of Leicester. Uk. P 4.

[14] Sepúlveda, A. (2013). Elementos de relatividad general. Universidad de Antioquia. P 17-21.

[15] De la Torre, L. (2008). Elementos de relatividad. Universidad de Antioquia. P 217-218.

[16] Blau, M. (2011). Lecture notes on general relativity. Albert Einstein Center for Fundamental Physics. P 239-240.

[17] Sannjev S. Seahra. (2006). An introduction to Black Holes. University of Leicester. Uk. P 4-5

[18] Janssen, B. (2013). Teorıa de la relatividad general. Granada: Universidad de Granada. Capítulo 9 El Principio de Equivalencia.

[19] Guillermo Fernández Melgarejo. (2016). Observadores uniformemente acelerados en de Sitter. Universidad De Granada. P 13-19.

[20] Janssen, B. (2013). Teorıa de la relatividad general. Granada: Universidad de Granada. Capítulo 9 El Principio de Equivalencia. P 113-117.

[21] Carroll, S. M. (2019). Spacetime and geometry. Cambridge University Press. P 151-159.

[22] Carroll, S. M. (2019). Spacetime and geometry. Cambridge University Press. P 158.

[23] Landau, L. D., y Lifshitz, E. M. (1992). Teoría clásica de campos (Vol. 2). Reverté. P 108-112.

[24] Landau, L. D., y Lifshitz, E. M. (1992). Teoría clásica de campos (Vol. 2). Reverté. P 95-97.

[25] De la Torre, L. (2008).Elementos de relatividad. Universidad de Antioquia. P 148-150.

[26] Landau, L. D., y Lifshitz, E. M. (1992). Teoría clásica de campos (Vol. 2). Reverté. P 114-116.

[27] Guillermo Fernández Melgarejo. (2016). Observadores uniformemente acelerados en de Sitter. Universidad De Granada. P 7-12.

[28] Guillermo Fernández Melgarejo. (2016). Observadores uniformemente acelerados en de Sitter. Universidad De Granada. P 22.

[29] Andrés Pinto (2020). Espacio tiempo de Anti de Sitter. Université de Paris - Sorbonne Université. P 1-11.

[30] Andrés Pinto (2020). Espacio tiempo de Anti de Sitter. Université de Paris - Sorbonne Université. P 11-13.

[31] Villegas, F. (2019). Espacio-tiempo anti-de sitter (ads). Revista de Investigación de Fisíca, 22, 2.2.

[32] Guillermo Fernández Melgarejo (2016). Observadores uniformemente acelerados en de Sitter. Universidad De Granada. P 19.

[33] Pablo Bueno (2019). Entropia de Entrelazamiento - Correspondencia AdS/CFT.

[34] Andrés Pinto (2020). Espacio tiempo de Anti de Sitter. Université de Paris - Sorbonne Université. P 14-17.

[35] Andrés Pinto (2020). Espacio tiempo de Anti de Sitter. Université de Paris - Sorbonne Université. P 17-18.

[36] Landau, L. D., y Lifshitz, E. (1970). Física teórica. Mecánica (Vol.1). Reverte. P 15-24.