Aplicación de Trenzas y Nudos como Herramienta para Fomentar el Pensamiento Pre-Álgebraico

Autor
Brayan Santiago Rodriguez Gonzalez

Tutor
Edwin Alfredo Carranza Vargas

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Licenciatura en matemáticas
Bogotá, Colombia
2024

Índice

Página

Resumen iv

Palabras Clave iv

1. Introducion 1

2. Problema o pregunta orientadora 1

3. Objetivos 1
3.1. Objetivo General . . . 1
3.2. Objetivos Específicos . . . 1

4. Marco de referencia 2
4.1. Pre-algebra . . . 2
4.2. Trenzas . . . 6
4.3. Nudos . . . 10
4.3.1. Anotacion de nudos . . . 12

5. Secuencia de actividades 13
5.1. Actividad 1 . . . 13
5.1.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico . . . 13
5.1.2. Evaluación de la Actividad . . . 14
5.1.3. Registro de Datos . . . 14
5.2. Actividad 2 . . . 14
5.2.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico . . . 15
5.2.2. Evaluación de la Actividad . . . 15
5.2.3. Registro de Datos . . . 16
5.3. Actividad 3 . . . 17
5.3.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico . . . 17
5.3.2. Evaluación de la Actividad . . . 17
5.3.3. Registro de Datos . . . 18
5.4. Actividad 4 . . . 18
5.4.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico . . . 18
5.4.2. Evaluación de la Actividad . . . 19
5.4.3. Registro de Datos . . . 19
5.5. Actividad 5 . . . 19

5.5.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico . . . 21
5.5.2. Evaluación de la Actividad . . . 21
5.5.3. Registro de Datos . . . 21
5.6. Actividad 6 . . . 21
5.6.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico . . . 22
5.6.2. Evaluación de la Actividad . . . 22
5.6.3. Registro de Datos . . . 23
5.7. Actividad 7 . . . 23
5.7.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico . . . 24
5.7.2. Evaluación de la Actividad . . . 24
5.7.3. Registro de Datos . . . 24
5.8. Actividad 8 . . . 26
5.8.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico . . . 26
5.8.2. Evaluación de la Actividad . . . 26
5.8.3. Registro de Datos . . . 27
5.9. Actividad 9 . . . 27
5.9.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico . . . 28
5.9.2. Evaluación de la Actividad . . . 28
5.9.3. Registro de Datos . . . 28
5.10. Actividad 10 . . . 29
5.10.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico . . . 29
5.10.2. Procedimiento de Evaluación . . . 29
5.10.3. Registro de Datos . . . 29

6. Análisis y discusión **30**
6.1. Actividad 1 . . . 30
6.2. Actividad 2 . . . 31
6.3. Actividad 3 . . . 31
6.4. Actividad 4 . . . 33
6.5. Actividad 5 . . . 34
6.6. Actividad 6 . . . 35
6.7. Actividad 7 . . . 35
6.8. Actividad 8 . . . 36
6.9. Actividad 9 . . . 37
6.10. Actividad 10 . . . 37

7. Conclusiones y recomendaciones **42**

Referencias **45**

Resumen

Las trenzas y nudos, objetos de estudio en teorías matemáticas en constante evolución, se erigen como poderosas herramientas para estimular el pensamiento pre-álgebraico en el contexto educativo. A través de una secuencia de actividades diseñadas para estudiantes de séptimo grado, se persigue el fomento de la observación de igualdades y la identificación de patrones mediante la manipulación activa de estos elementos. Estas actividades, al promover un aprendizaje práctico y experiencial, inciden en el desarrollo de habilidades cognitivas esenciales. Posteriormente, la aplicación de esta secuencia de actividades permite observar la manipulación, el desarrollo cognitivo y la atención de los estudiantes, facilitando un análisis detallado que culmina en conclusiones y observaciones relevantes para la mejora continua del proceso educativo.

Palabras Clave

Trenzas, Nudos, Pensamiento pre-álgebraico, Secuencia de actividades, Manipulación, Patrones y Pensamiento crítico.

1. Introducion

Este documento expone una propuesta de trabajo de grado que utiliza nudos y trenzas para promover el pensamiento pre-álgebraico. Se destaca la relevancia de la pre-álgebra y se explora el potencial educativo de trenzas y nudos. Se presenta el problema que origina esta idea y una pregunta orientadora. Además, se establecen el objetivo principal y los objetivos específicos, se describe la metodología y se anticipan los resultados esperados. Se incluye un cronograma y referencias.

2. Problema o pregunta orientadora

Durante mis últimos semestres, he reflexionado sobre la posibilidad de llevar a cabo un proyecto que incorpore un recurso diferente en el aula de matemáticas. En la actualidad, se busca que la enseñanza de las matemáticas trascienda el enfoque meramente numérico. Existen diversos recursos y tipos de pensamientos que pueden generar experiencias de aprendizaje en los estudiantes. Por ejemplo, a partir del comportamiento matemático surgen situaciones artísticas que a menudo pasan desapercibidas en el aula, ya que la matemática suele percibirse como abstracta y no como un espacio dinámico y manipulativo.
Fue a través de la electiva "Formas y Trenzas", impartida por el docente Edwin Carranza, donde surgió la idea de utilizar nudos y trenzas como herramientas para enseñar matemáticas, especialmente en el pensamiento pre-álgebraico. Este trabajo de grado se propone explorar el potencial que tienen las trenzas y nudos para fomentar dicho pensamiento, así como su aplicación en el aula de clases de séptimo grado. Dada la naturaleza visual y manipulativa de las trenzas y nudos, me planteo la siguiente pregunta: ¿Cómo fomentar el pensamiento pre-álgebraico mediante el uso de nudos y trenzas?

3. Objetivos

3.1. Objetivo General

Aplicar trenzas y nudos como herramienta pedagógica para promover el desarrollo del pensamiento pre-álgebraico en estudiantes de grado séptimo.

3.2. Objetivos Específicos

- Introducir a los estudiantes en el concepto de nudos y trenzas como objetos matemáticos y explorar su relación con el pensamiento pre-álgebraico..
- Desarrollar actividades prácticas que involucren la manipulación de nudos y trenzas para fomentar habilidades de visualización espacial y resolución de problemas.
  .

4. Marco de referencia

Para comprender todos los aspectos mencionados, es fundamental desglosar la información en partes claras y distintas:

4.1. Pre-algebra

El tema del pre-álgebra ha sido objeto de investigación y discusión en el pasado reciente. Aunque no es un tema antiguo, ha sido explorado en profundidad en los últimos años, dando lugar a diversas investigaciones que proponen actividades, juegos y metodologías para fomentar este tipo de pensamiento. Un ejemplo notable es la investigación realizada por Marta Molina, de la Universidad de Granada, titulada *Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria*, en la que resalta la importancia de adaptar diversos espacios educativos con el fin de promover el pre-álgebra.
Se propone promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de este modo, cultivar hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas. Blanton y Kaput (2005) sugieren:

> Promover un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo.

Esta propuesta tiene como objetivo promover un aprendizaje que fomente la comprensión de las matemáticas, especialmente en lo que respecta al álgebra. Se argumenta que diversos modos de pensamiento algebraico pueden surgir de manera natural a partir de los conceptos matemáticos enseñados en la educación primaria. Estos modos de pensamiento no solo tienen el potencial de enriquecer la actividad matemática escolar, sino también de mejorar el aprendizaje de la aritmética. Además, se espera que estos enfoques impulsen el desarrollo conceptual de las matemáticas en los estudiantes desde una edad temprana.
Otro artículo de Marta Molina resalta varios enfoques en los que el álgebra se puede trabajar desde etapas tempranas. Cooper y Warren (2011) afirman:

> El álgebra se considera importante en términos de cómo representa los principios y estructuras de las matemáticas.

Las diferentes concepciones no son disjuntas y en ellas se observan nociones comunes. La generalización, los sistemas de representación, la resolución de problemas o las estructuras son algunas de ellas."dichas estructuras son las siguientes:

- Patrones: En matemáticas, un patrón se refiere a una secuencia o conjunto de elementos que siguen una regla o estructura predecible. esto ya sea por parte de una se cuencia de numeros como 2,4,6,8,10,...

Tambien patrones espaciales que generalmente, se encuentran en el ámbito de la geometría o representaciones pictóricas:

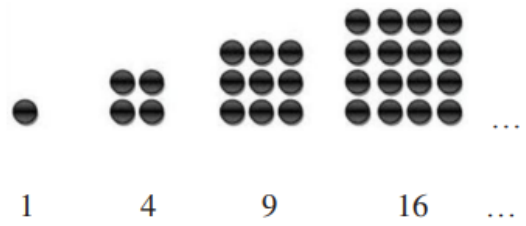


Figura 1: primeros terminos de numeros cuadrados (M. M. C. María, 2018)

Patrones lineales: Son patrones repetitivos o que tienen un núcleo. Un ejemplo es el patrón $XYXYXYXY$, donde su núcleo es XY y se repite varias veces. Estos también pueden observarse gráficamente.

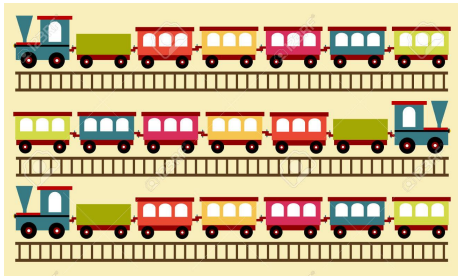


Figura 2: Ejemplo de patron grafico

Los patrones lógicos se caracterizan por un razonamiento fundamentado en la igualdad y la diferencia de atributos entre objetos. En la figura 3 se presenta un ejemplo donde se conserva el tamaño de las figuras geométricas. Podemos identificar el patrón de la serie al observar que cada término nuevo se distingue del anterior en cuanto a forma y color.



Figura 3: Ejemplo de patrón lógico (M. M. C. María, 2018)

- En este enfoque del álgebra centrado en las funciones, estas se convierten en el núcleo del contenido matemático. Tanto en educación infantil como en educación

primaria, se destacan las investigaciones que emplean funciones lineales. En este contexto, cobran especial importancia las funciones lineales en su conjunto, así como las relaciones entre las dos variables, entendidas "como un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 210).
La metodología empleada para abordar las relaciones funcionales dentro del marco de la propuesta del álgebra temprana se enfoca en estimular la percepción y la generalización de patrones observados en situaciones que involucran dos variables relacionadas que covarían. En este sentido, se busca fomentar la comprensión de la estructura subyacente en estos patrones, utilizando la noción de estructura en un sentido similar al descrito en secciones anteriores. Este enfoque no solo permite a los estudiantes identificar regularidades y conexiones entre las variables, sino que también los prepara para abordar conceptos más avanzados en álgebra y matemáticas en general.

- Desde la perspectiva del álgebra como un medio para expresar métodos generales que resuelven diversas clases de problemas, el concepto de estructura adquiere una relevancia fundamental. En este contexto, la estructura se refiere a la organización semántica subyacente en un problema, la cual facilita la distinción de los significados asociados a las operaciones dentro de los problemas verbales. Es decir, la estructura proporciona un marco conceptual que permite comprender cómo las operaciones matemáticas se relacionan y contribuyen a la resolución de un problema específico. Al comprender y analizar la estructura de un problema, los estudiantes pueden desarrollar habilidades para interpretar y abordar una amplia variedad de situaciones matemáticas de manera más efectiva y reflexiva.
  La metodología de resolución de problemas a través de modelos rectangulares, ampliamente empleada en el enfoque educativo del método Singapur, aprovecha el concepto de estructura de manera integral. Este enfoque se implementa de manera sistemática, comenzando desde el segundo grado de Educación Primaria (7-8 años) y extendiéndose hasta la secundaria. Durante este proceso, se instruye a los estudiantes en la representación de problemas verbales y relaciones numéricas utilizando modelos rectangulares, como se destaca en la investigación de Clark (2013). Estos modelos rectangulares actúan como herramientas visuales poderosas para representar la relación entre las cantidades conocidas y desconocidas, y para abordar problemas que implican la interacción entre estas cantidades. Esta metodología facilita una comprensión más profunda de los problemas matemáticos al proporcionar a los estudiantes un marco estructurado y visualmente intuitivo para su análisis y resolución. La figura 4 ilustra visualmente cómo se aplican estos modelos rectangulares en la representación y solución de problemas numéricos.

En séptimo grado, la introducción de conceptos como el inverso aditivo y la igualdad en el estudio de pre-álgebra representa un paso crucial en el desarrollo matemático de los estudiantes. Estos conceptos no solo amplían la comprensión de las operaciones básicas,

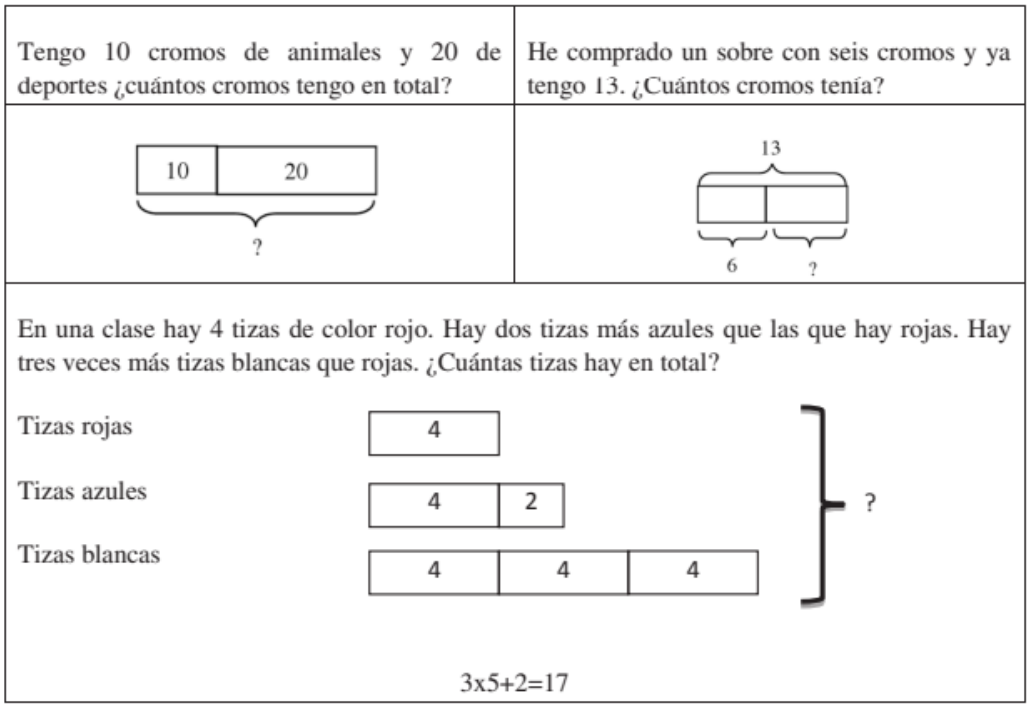


Figura 4: Problemas resueltos con el método Singapur (M. M. C. María, 2018)

sino que también establecen los cimientos para la comprensión de conceptos algebraicos más avanzados. Al explorar el inverso aditivo, los estudiantes no solo aprenden a identificar y utilizar los números opuestos en contextos de suma y resta, sino que también desarrollan habilidades para resolver ecuaciones simples. Esta comprensión les permite abordar de manera más efectiva problemas que involucran movimientos opuestos o cancelaciones de términos en expresiones algebraicas más complejas en grados superiores. Por otro lado, el estudio de la igualdad en el séptimo grado les permite a los estudiantes reconocer y establecer relaciones entre expresiones numéricas y algebraicas. Esto les brinda la capacidad de identificar patrones, encontrar soluciones y verificar resultados, habilidades esenciales para abordar problemas matemáticos de manera sistemática y lógica. La integración de estos conceptos en el plan de estudios del séptimo grado no solo promueve un aprendizaje más profundo y significativo, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos matemáticos más complejos y abstractos en los grados subsiguientes y en su vida académica y profesional.

4.2. Trenzas

Con solo la palabra "trenza", ¿en qué pensamos? Podríamos recordar cuando observamos a nuestra madre trenzando el cabello de una hermana o de algún familiar, o incluso cuando ella misma lo hace. Además, hemos visto trenzas en diferentes culturas a lo largo del tiempo; de hecho, se ha denominado patrimonio cultural. Según un artículo que narra este patrimonio, se ha encontrado esta técnica desde hace más de 3000 años a.C. (Martina, 2020) en el Sahara. Este uso no se limita solo a peinados, sino que también se encuentra en telas de vestimenta de ciertas tribus.
Pero ahora en el contexto matemático como se conoce una trenza; La teoira de trenza es un termino abstracto geometrica que estudia algunas trenzas comunes o generalizadas; con esto es categorizar estos movimientos y llegar a seguir un patron de repeticion;
Mencionado por Navarro porpone que tenemos n-trenzas pues habra n caminos que conectaran puntos $p_1, p_2, ...p_n$ hasta $p'_1, p'_2, ...p'_n$ pero cuidado por que el hilo que comienza en p_1 puede que si o puede que no en terminar en p'_1 como se observa en la figura 5:

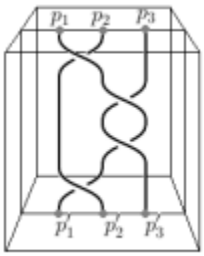


Figura 5: 3-trenza (M. Á. N. Pérez, 2015)

Si bien pensamos en cómo utilizamos esto con los estudiantes, se ha realizado un taller de trenzas en el EDEM5 (Encuentro Distrital de Educación Matemática), que tiene lugar en la ciudad de Bogotá, Colombia. Además, se han publicado otros artículos que proponen este recurso para enseñar en las escuelas.

Estas trenzas, al usarlas, podemos emplearlas de varias formas, como en el trabajo de motricidad o en el trabajo de relaciones. "Los educadores matemáticos suelen indicar los grafos como un tema con grandes potencialidades para el desarrollo de diversas competencias, principalmente en relación con la organización de la información, la modelización y la resolución de problemas" (CDEADLA, 2016).
Si tenemos una cantina de n hilos podemos hacer una n-trenza en donde categorizamos los movimientos como:
Ahora un pequeño ejemblo realicelos una trenza simple: $aBcD$ donde lo graficaremos:
Aqui se oberva en la figura 6 como el color rojo comeinza en p_1 y termina en p'_5 enotnces cuantas veces debemos repetir esta mista trenza para que el rojo termine en p'_1;
Con esto obervamos que debemos repetis 5 veces $aBcD$ para que el hilo rojo termine en p'_1 siendo repetir $aBcDaBcDaBcDaBcDaBcD$ o mejor detonado $(aBcD)^5$.

Letra	Movimientos
a	p_1 bajo p_2
A	p_1 sobre p_2
b	p_2 bajo p_3
B	p_2 sobre p_3
c	p_3 bajo p_4
C	p_3 sobre p_4
d	p_4 bajo p_5
D	p_4 sobre p_5
...	...

Tabla 1: Movimientos

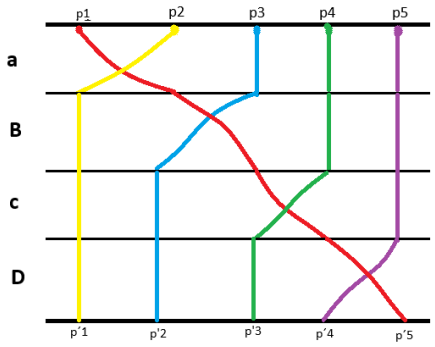


Figura 6: trenza aBcD

Ahora supongamos la siguiente trenza $adACd$ y su grafica (ver figura 8): Se obervar como el hilo rojo vuelve a su posicion desde p_1 hasta p_1' y tambien se observa como no curza con el hilo amarrillo es decir como si el hilo rojo y el hijo amarrillo nunca se cruzaran; que se quiere decir con eso que existen movimientos que cancelen otro movimientos como este ejemplo si A cancelo a entonces la trenza queda de por si dCd Ahora porpongamos otra trenza similar al anterior pero esta esta vez $adaCd$ (ver figura 9):

oberva que cada hilo termina en la misma posicion pero se crea un cruce entre entre los hilos rojo y amarrillo y crendo un movimineot que no se cancela creando una tranza aparte llamada aa y otra aparte llamada dCd.

Se diseñarán trenzas en movimiento con la particularidad de que ciertas acciones se anulen entre sí, lo que conducirá a la situación en la que, al final del proceso, no se haya realizado ningún movimiento neto.

Las trenzas en el contexto del pre-álgebra establecen una conexión significativa entre el simbolismo algebraico y el concepto de inverso aditivo, ya que los movimientos de estas trenzas a menudo implican la cancelación mutua de acciones opuestas. Este enfoque no solo proporciona un material manipulativo único, sino que también ofrece una representación tangible de conceptos abstractos. Al explorar cómo ciertos movimientos

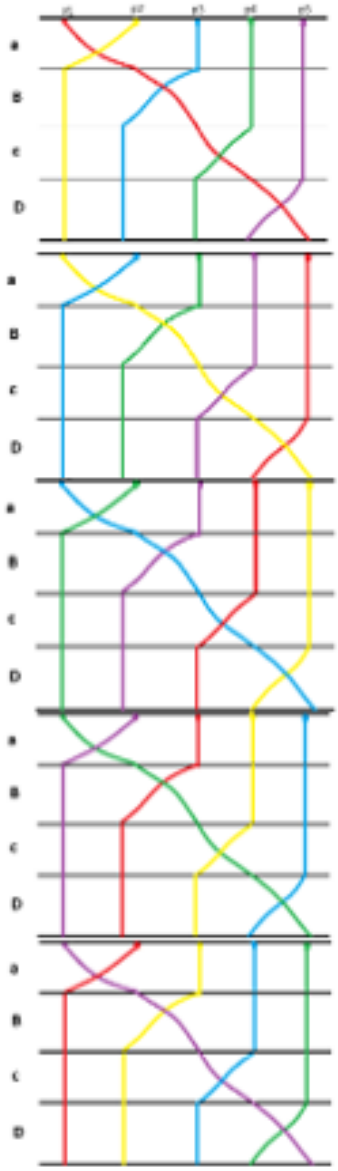


Figura 7: Trenza aBcD

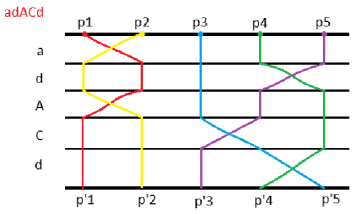


Figura 8: Trenza adACd

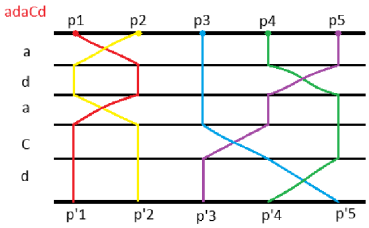


Figura 9: Trenza adaCd

pueden anular los efectos de otros, los estudiantes no solo fortalecen su comprensión de la relación entre operaciones matemáticas, sino que también internalizan el concepto fundamental de la inversión aditiva. Esta conexión entre la manipulación física de las trenzas y los principios algebraicos fundamentales proporciona una plataforma sólida para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado y la comprensión de conceptos más abstractos en el álgebra y más allá.

4.3. Nudos

En la teorias de nudos menciona M. Á. N. Pérez (2015) "Es la rama de la topología de baja dimensión que estudia las propiedades de los nudos matemáticos con la finalidad de clasificarlos". pero como se pueden clasificar, como ha hecho lo investigadores categorizar los nudos e incluso crear una tabla de clasificacion(ver figura 10): Ahora bien que quiere

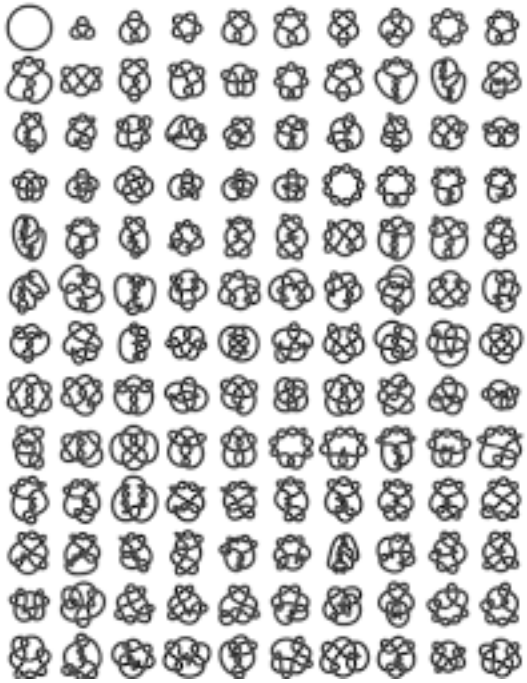


Figura 10: Tabla de nudos

decir esto con clasificarlos, y es que existen tipos de nudos que van dependiendo los cruces, enlaces y colorabilidad:

- Cuando nos referimos a un cruce en un nudo, estamos hablando de la cantidad de intersecciones que se forman cuando un segmento de la cuerda del nudo cruza por encima o por debajo de otro segmento. Estos cruces son puntos cruciales de la topología del nudo, determinando su estructura y forma. Cada cruce puede ser positivo, cuando un segmento pasa sobre otro, o negativo, cuando un segmento pasa por debajo de otro. Estos conceptos son esenciales para comprender la complejidad y la naturaleza intrínseca de los nudos. Veamos un ejemplo concreto para ilustrar este concepto.(ver figura 11): Aqui se observa como el nudo de la derecha contiene tres cuatro mientras en nudo de la derecha tiene tres cruces; esto ya lo diferencia de cada uno y en donde se concluye que estos nudos son diferentes.

- La colorabilidad de un nudo se refiere a la capacidad de asignar colores a sus arcos, que son los segmentos de cuerda que van desde un cruce hasta otro. Este concepto básico en la teoría de nudos es esencial para comprender las propiedades

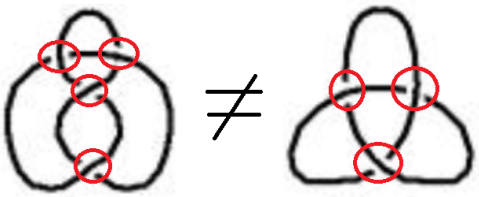


Figura 11: Diferencia de nudos por cruces

estructurales y topológicas de los nudos. La colorabilidad mínima para un nudo es de tres colores, ya que cada arco debe ser coloreado de manera que ningún arco adyacente tenga el mismo color. Este principio fundamental de la colorabilidad proporciona una base para investigaciones más avanzadas en la teoría de nudos, y es fundamental para la clasificación y el estudio de los nudos en la topología.(ver figura 12):



Figura 12: Colorabilidad en los arcos

- En el contexto de los enlaces, se entiende como la combinación de dos nudos triviales, es decir, nudos que no tienen cruces entre sí. Esta definición sugiere que los enlaces pueden concebirse como la unión de dos estructuras de nudos simples y básicas. Estos enlaces pueden ser de gran interés en la teoría de nudos y la topología, ya que representan una forma de estudiar y comprender la interacción entre múltiples nudos en un sistema más complejo. Explorar la estructura y las propiedades de los enlaces proporciona información valiosa sobre la naturaleza de las interconexiones entre los nudos individuales, lo que contribuye a nuestra comprensión general de la topología de los sistemas entrelazados. (ver figura 13):

Con eso tres elementos se pueden clasificar la mayoria de nudos.
Los nudos proporcionan una excelente oportunidad para fomentar el pensamiento pre-álgebraico al permitir a los estudiantes explorar y entender conceptos abstractos de manera tangible. Al manipular nudos y trenzas, los estudiantes pueden identificar patrones, relaciones y simetrías, lo que les ayuda a desarrollar habilidades de razonamiento

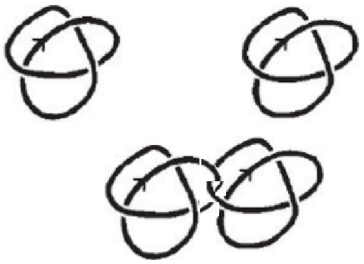


Figura 13: Enlace de dos nudos

algebraico, como la generalización y la resolución de problemas. Además, la visualización y manipulación de nudos proporciona una experiencia práctica que facilita la comprensión de conceptos matemáticos complejos, como las propiedades de las funciones y las transformaciones geométricas, preparando así el terreno para el estudio más avanzado del álgebra.

4.3.1. Anotacion de nudos

Para la anotacion de nudos se tendra en cuenta la siguietne expresion:

$$a^b \tag{1}$$

En donde

- a: Es la cantidad de cruces que es el lugar donde un segmento de cuerda pasa por encima o por debajo de otro segmento de la misma cuerda, creando así una intersección.
- b: Es la cantidad de enlaces que se encuetra en el nudo esto se refiere a una parte del nudo donde los segmentos de la cuerda forman un bucle cerrado o se cruzan consigo mismos.

Por ejemplo el nudo tribial:

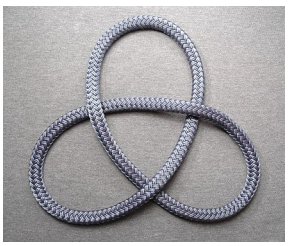


Figura 14: Nudo de trevol

En donde se ve que tiene un enlace y tiene tres cruces, Por ende su anotacion es la siguiente:

$$3^1 \tag{2}$$

5. Secuencia de actividades

Para la secuencia de actividades, he decidido llamarla “El Fascinante Mundo de Trenzas y Nudos", un título que refleja la intriga y la riqueza de esta experiencia educativa. Dirigida específicamente a estudiantes de séptimo grado, cada actividad presentada será cuidadosamente diseñada para involucrar y desafiar a los alumnos en su viaje de descubrimiento matemático. Además, se asignará un tiempo estimado para cada actividad, garantizando así un flujo efectivo y una gestión adecuada del tiempo en el aula. Esta secuencia no solo busca introducir a los estudiantes en conceptos matemáticos fundamentales a través de la manipulación práctica de trenzas y nudos, sino también fomentar el pensamiento crítico, la colaboración y la creatividad en un entorno de aprendizaje dinámico y estimulante.

5.1. Actividad 1

Para esta primera actividad, comenzaremos introduciendo a los estudiantes al fascinante mundo de las trenzas. Les proporcionaremos un contexto cultural e histórico, explorando el significado y la importancia de las trenzas en diferentes culturas y épocas. Para lograrlo, emplearemos una serie de preguntas reflexivas que invitarán a los estudiantes a reflexionar sobre temas como la diversidad cultural, la expresión personal y las tradiciones ancestrales.

- ¿Qué son las trenzas?
- ¿Desde cuándo existen las trenzas?
- ¿Para qué sirven las trenzas?

Al finalizar esta actividad, enfatizaremos la importancia cultural e histórica de las trenzas, destacando su papel como símbolos de identidad y tradición en diversas culturas alrededor del mundo. Luego, les mostraremos cómo podemos aplicar conceptos matemáticos en el estudio de las trenzas, preparándolos para explorar y practicar estos conceptos en actividades posteriores. De esta manera, conectaremos la riqueza cultural de las trenzas con el potencial educativo y matemático que encierran.

5.1.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico

La actividad de explorar el contexto cultural e histórico de las trenzas tiene como propósito:

- **Reconocimiento de Patrones**: Identificar y describir patrones en diferentes estilos de trenzas.
- **Conexión de Conceptos**: Relacionar conceptos matemáticos con aplicaciones concretas en la vida cotidiana.

- **Desarrollo del Razonamiento Espacial**: Introducción a la geometría y visualización espacial mediante la observación de trenzas.

5.1.2. Evaluación de la Actividad

- **Participación Oral**: Observar y evaluar la participación y reflexiones de los estudiantes durante las discusiones.
- **Reflexiones Escritas**: Evaluar la profundidad y claridad de las respuestas escritas a las preguntas sobre trenzas.
- **Proyectos Creativos**: Valorar proyectos donde representen y expliquen trenzas, conectando con conceptos matemáticos.

5.1.3. Registro de Datos

- **Portafolios de Aprendizaje**: Recopilar respuestas escritas y proyectos en un portafolio.
- **Observaciones del Profesor**: Mantener un registro cualitativo de las observaciones sobre la participación de los estudiantes.
- **Rúbricas de Evaluación**: Utilizar rúbricas para evaluar comprensión cultural, habilidad para identificar patrones y conexiones matemáticas.

Este enfoque garantiza una evaluación integral del desarrollo del pensamiento prealgebraico y cultural de los estudiantes.

5.2. Actividad 2

Para esta actividad, formalizaremos el concepto de n-trenza y los movimientos asociados, con el objetivo de proporcionar una comprensión clara y precisa de estos términos. Mediante esta formalización, pretendemos transmitir lo siguiente:

- Una n-trenza se define como una clasificación de trenzas según la cantidad de hilos que se manejen. Por ejemplo, si trabajamos con dos hilos, se denomina 2-trenza; si son cinco hilos, será una 5-trenza, y así sucesivamente. Esta clasificación se extiende consecuentemente a cualquier cantidad de hilos, lo que nos permite identificar y estudiar distintos tipos de trenzas en función de su complejidad y número de componentes.
- Los movimientos lo clasificaremos mediante la siguiente tabla: En donde seguna la cantidad de n-trenza se distinguira la cantidad de movimientos. A la vez se les pedira a los estduiantes realizar un dibujo de cada movimiento, hasta en este caso D
  Ejemplo:

Letra	Movimientos
a	p_1 bajo p_2
A	p_1 sobre p_2
b	p_2 bajo p_3
B	p_2 sobre p_3
c	p_3 bajo p_4
C	p_3 sobre p_4
d	p_4 bajo p_5
D	p_4 sobre p_5
...	...

Tabla 2: Movimientos

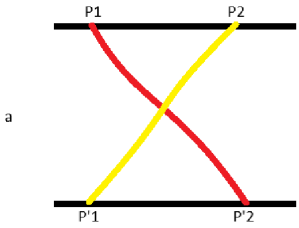


Figura 15: Ejemplo del movimiento (a)

Al final se les pedira a los estudiantes que traiagn lana, cuerda o hilo de cualquier color para la siguiente actividad.

5.2.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico

La actividad de formalizar el concepto de n-trenza y los movimientos asociados tiene como propósito:

- **Clasificación y Estructuración**: Ayudar a los estudiantes a comprender cómo se pueden clasificar y estructurar las trenzas según la cantidad de hilos, lo que les permitirá entender mejor la complejidad y las características de diferentes trenzas.
- **Introducción a la Nomenclatura**: Enseñar a los estudiantes a usar una nomenclatura específica para describir movimientos, desarrollando habilidades para seguir y crear secuencias lógicas, una habilidad fundamental en el álgebra.
- **Visualización Espacial y Simbólica**: Fomentar la visualización de movimientos trenzados y su representación simbólica, lo cual es clave para el pensamiento algebraico y geométrico.

5.2.2. Evaluación de la Actividad

- **Precisión en Definiciones**: Evaluar la comprensión de los estudiantes sobre las definiciones de n-trenza y los movimientos asociados mediante preguntas y

discusiones en clase.

- **Dibujos de Movimientos**: Evaluar los dibujos realizados por los estudiantes para cada movimiento, verificando la precisión y claridad en la representación.
- **Aplicación de Nomenclatura**: Observar cómo los estudiantes aplican la nomenclatura en sus explicaciones y dibujos, asegurando que entienden cómo usar las letras para describir movimientos.

5.2.3. Registro de Datos

- **Portafolios de Aprendizaje**: Incluir las definiciones, tablas y dibujos de los movimientos en el portafolio de cada estudiante.
- **Observaciones del Profesor**: Mantener un registro de observaciones sobre la comprensión y participación de los estudiantes durante la actividad.
- **Rúbricas de Evaluación**: Usar una rúbrica para evaluar la precisión de las definiciones, la claridad de los dibujos y la correcta aplicación de la nomenclatura.

5.3. Actividad 3

Para esta actividad, se solicitará a los estudiantes que realicen y dibujen trenzas utilizando los hilos o cordones que se les haya pedido que traigan con anterioridad. Se proporcionarán ejemplos como $aBcD$ o $bACda$ Y concluiremos esta actividad planteando una pregunta clave: "¿Cuántas repeticiones son necesarias para que el hilo rojo regrese a su posición original?". La respuesta a esta pregunta dependerá del color que los estudiantes obtengan, lo que generará una reflexión sobre la simetría y la repetición en el proceso de trenzado.

Y al concluir la actividad, los estudiantes podrán comprender aún más este concepto a través de la exploración de las permutaciones. Se les presentará la idea de cómo una trenza elevada a un número representa la cantidad de repeticiones de esa trenza. Esto se ilustrará utilizando el ejemplo de $aBcD$, en lugar de repetirlo manualmente cinco veces como $aBcDaBcDaBcDaBcDaBcD$, se presentará de la siguiente manera: $(aBcD)^5$. Al revisar cada permutación, se les animará a identificar el color del hilo donde termina o comienza, lo que les permitirá visualizar y comprender mejor cómo se desarrolla la trenza en cada repetición.

5.3.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico

La actividad de trenzar y analizar las repeticiones tiene como propósito:

- **Comprensión de la Simetría y Repetición**: Ayudar a los estudiantes a explorar conceptos de simetría y repetición mediante la observación y creación de trenzas.
- **Introducción a las Permutaciones**: Enseñar a los estudiantes cómo las permutaciones se aplican en el contexto de las trenzas y cómo se representan matemáticamente.
- **Desarrollo de Habilidades de Visualización**: Fomentar la visualización y comprensión de cómo una secuencia de movimientos afecta la posición de cada hilo.

5.3.2. Evaluación de la Actividad

- **Trenzas Físicas y Dibujos**: Evaluar la precisión y creatividad en las trenzas realizadas y sus representaciones dibujadas.
- **Respuestas a la Pregunta Clave**: Evaluar la comprensión de los estudiantes sobre la simetría y repetición a través de sus respuestas a la pregunta sobre cuántas repeticiones son necesarias para que un hilo regrese a su posición original.
- **Comprensión de las Permutaciones**: Evaluar la capacidad de los estudiantes para representar y entender las permutaciones mediante la notación matemática y la identificación de las posiciones iniciales y finales de los hilos.

5.3.3. Registro de Datos

- **Portafolios de Aprendizaje**: Incluir fotos de las trenzas realizadas, los dibujos de las trenzas y las respuestas a las preguntas clave en el portafolio de cada estudiante.
- **Observaciones del Profesor**: Mantener un registro cualitativo de la comprensión y participación de los estudiantes durante la actividad.
- **Rúbricas de Evaluación**: Usar una rúbrica para evaluar la precisión y creatividad en las trenzas y dibujos, la claridad en las respuestas a la pregunta clave, y la comprensión de las permutaciones.

5.4. Actividad 4

Para esta actividad, los estudiantes se embarcarán en la tarea de realizar trenzas, pero con un enfoque único: los ejemplos de trenzas presentarán movimientos que se cancelen entre sí, así como otros que no lo hagan. Mientras los alumnos dibujan y ejecutan estas trenzas, el objetivo primordial es que adquieran por sí mismos la comprensión de cómo un movimiento puede anular el efecto de otro. Esto se logrará a través de ejemplos, asesorías y la experiencia directa de llevar a cabo las trenzas.

Al finalizar esta actividad, se espera que los estudiantes hayan internalizado el concepto de cancelación de movimientos. Un ejemplo ilustrativo de este principio es la trenza $adACd$, como se muestra en la figura 8. Este ejercicio proporcionará una experiencia práctica invaluable para comprender cómo los movimientos en las trenzas pueden interactuar entre sí, ya sea anulándose mutuamente o dejando un efecto palpable en el resultado final.

5.4.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico

La actividad de trenzar con movimientos que se cancelan tiene como propósito:

- **Comprensión de la Cancelación de Movimientos**: Ayudar a los estudiantes a entender cómo ciertos movimientos pueden anularse entre sí, desarrollando habilidades para identificar y aplicar estos principios.
- **Desarrollo de Habilidades de Razonamiento Lógico**: Enseñar a los estudiantes a razonar lógicamente sobre la secuencia y el efecto de los movimientos, fortaleciendo su pensamiento pre-algebraico.
- **Experiencia Práctica**: Proporcionar una experiencia práctica que conecte la teoría con la práctica, facilitando la internalización de conceptos abstractos mediante la manipulación física de las trenzas.

5.4.2. Evaluación de la Actividad

- **Dibujos y Trenzas Físicas**: Evaluar la precisión en la ejecución y representación de trenzas con movimientos que se cancelan y aquellos que no se cancelan.
- **Comprensión de la Cancelación**: Evaluar la comprensión de los estudiantes sobre cómo y por qué los movimientos se cancelan mediante discusiones y preguntas.
- **Aplicación Práctica**: Observar la habilidad de los estudiantes para aplicar el concepto de cancelación en la creación de nuevas trenzas.

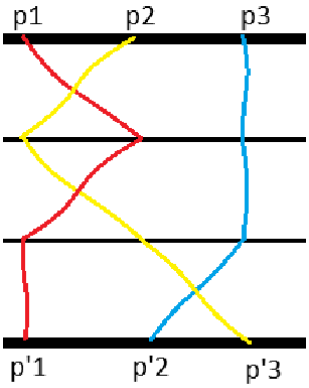
5.4.3. Registro de Datos

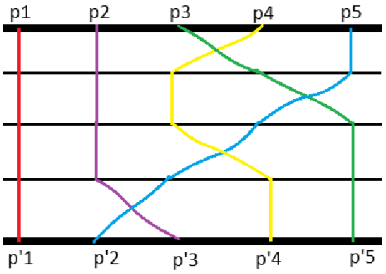
- **Portafolios de Aprendizaje**: Incluir dibujos de las trenzas realizadas y descripciones de los movimientos cancelados en el portafolio de cada estudiante.
- **Observaciones del Profesor**: Mantener un registro cualitativo de la comprensión y participación de los estudiantes durante la actividad.
- **Rúbricas de Evaluación**: Usar una rúbrica para evaluar la precisión en los dibujos, la comprensión de la cancelación de movimientos y la aplicación práctica de los conceptos.

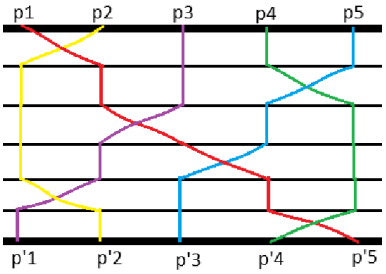
5.5. Actividad 5

Para esta actividad se expondra una taller en donde se les pedira a los estudiantes lo siguiente:

1. Realize, analice y dibuje las siguientes trenzas:
   - $(aBCde)^4$
   - $(AcBdE)^3$
   - $(aDbCD)^5$
   - $(abcde)^8$
   - $(EadBc)^4$
2. Escriba el nombre de las siguentes trenzas:
   -
   -
   -


p1
p2
p3
p'1
p'2
p'3


p1
p2
p3
p4
p5
p'1
p'2
p'3
p'4
p'5


p1
p2
p3
p4
p5
p'1
p'2
p'3
p'4
p'5

5.5.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico

La actividad de analizar y dibujar trenzas complejas tiene como propósito:

- **Desarrollo de Habilidades de Análisis**: Fomentar el análisis detallado y la representación de secuencias de movimientos complejos.
- **Comprensión de la Notación Algebraica**: Ayudar a los estudiantes a entender y utilizar la notación algebraica para describir trenzas, fortaleciendo sus habilidades en la manipulación de expresiones algebraicas.
- **Reconocimiento de Patrones y Nombres**: Enseñar a los estudiantes a reconocer y nombrar patrones específicos en las trenzas, desarrollando su capacidad para identificar estructuras matemáticas.

5.5.2. Evaluación de la Actividad

- **Trenzas Realizadas y Dibujadas**: Evaluar la precisión y claridad en la realización y el dibujo de las trenzas solicitadas.
- **Nomenclatura de Trenzas**: Evaluar la capacidad de los estudiantes para identificar y nombrar correctamente las trenzas presentadas en las imágenes.
- **Comprensión y Aplicación de la Notación**: Observar la habilidad de los estudiantes para aplicar correctamente la notación algebraica en la descripción y creación de trenzas.

5.5.3. Registro de Datos

- **Portafolios de Aprendizaje**: Incluir los dibujos de las trenzas realizadas y las respuestas a las preguntas sobre la nomenclatura en el portafolio de cada estudiante.
- **Observaciones del Profesor**: Mantener un registro cualitativo de la comprensión y participación de los estudiantes durante la actividad.
- **Rúbricas de Evaluación**: Usar una rúbrica para evaluar la precisión y claridad en los dibujos, la corrección en la nomenclatura y la aplicación de la notación algebraica.

5.6. Actividad 6

Para esta actividad, daremos inicio con una introducción al fascinante mundo de los nudos. Para explicar esta idea de manera efectiva, nos apoyaremos en un recurso audiovisual: un video especialmente seleccionado que aborda de manera inductiva los diferentes tipos de nudos y sus aplicaciones prácticas. Este video tiene una duración

de 33 minutos y ofrece una explicación detallada y visualmente enriquecedora sobre la diversidad de nudos, sus usos y técnicas para su ejecución.

La elección de un video como herramienta pedagógica clave para esta actividad se fundamenta en la observación de que los estudiantes suelen sentirse más motivados y comprometidos con el aprendizaje cuando se utilizan recursos multimedia. Los videos no solo capturan la atención de los estudiantes de una manera dinámica y visualmente estimulante, sino que también les brindan la oportunidad de aprender de manera autónoma y a su propio ritmo. Además, la combinación de imágenes y narración en un video puede facilitar la comprensión de conceptos complejos y fomentar una mejor retención del material presentado.

Dicho video es el siguiente: Cómo la Rama Más INÚTIL de la Matemática Podría Salvar tu Vida.
A la par de la observación del video, se irán destacando datos relevantes, notas y observaciones que enriquecerán la experiencia de aprendizaje y proporcionarán una base sólida para comprender la secuencia de actividades. Estos detalles adicionales servirán como puntos de referencia importantes para los estudiantes, ayudándoles a contextualizar y aplicar los conceptos presentados en el video de una manera más significativa.

5.6.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico

La actividad de introducción al mundo de los nudos mediante un video seleccionado tiene como propósito:

- **Introducción a los Nudos y sus Aplicaciones**: Presentar a los estudiantes una variedad de nudos y sus usos prácticos, proporcionando una base para explorar conceptos matemáticos relacionados con las formas y estructuras.
- **Estimulación de la Curiosidad y la Creatividad**: Motivar a los estudiantes a aprender de manera autónoma y a su propio ritmo mediante un recurso multimedia que captura su atención y fomenta la exploración activa.
- **Fomento del Aprendizaje Significativo**: Promover la comprensión profunda y duradera de los conceptos presentados al relacionarlos con situaciones reales y ofrecer oportunidades para la reflexión y la aplicación práctica.

5.6.2. Evaluación de la Actividad

La evaluación de esta actividad se centrará en:

- **Participación Activa durante la Observación del Video**: Observar la participación de los estudiantes durante la visualización del video, su nivel de atención y compromiso con el material presentado.
- **Comprensión de los Conceptos Presentados**: Evaluar la comprensión de los estudiantes mediante preguntas, discusiones y actividades posteriores que les permitan aplicar los conocimientos adquiridos.

- **Reflexiones y Observaciones Posteriores**: Revisar las reflexiones y observaciones realizadas por los estudiantes durante y después del video, buscando evidencia de comprensión y conexión con los conceptos presentados.

5.6.3. Registro de Datos

Se registrarán:

- **Observaciones del Profesor**: Anotaciones sobre la participación, el nivel de atención y las reacciones de los estudiantes durante la visualización del video.
- **Reflexiones de los Estudiantes**: Recopilación de las reflexiones, notas y observaciones realizadas por los estudiantes durante y después del video.
- **Feedback y Evaluación de la Comprensión**: Retroalimentación proporcionada a los estudiantes sobre su comprensión y participación, así como evaluaciones formales o informales sobre el material presentado.

5.7. Actividad 7

Con base en el video anterior, se fomentará la idea de cruces, que se refiere a cuando un hilo pasa por encima o por debajo de otro hilo. Tomando como ejemplo el nudo de trébol, se pedirá a los estudiantes que realicen nudos con 4, 5 y 6 cruces. Además, se les solicitará que anoten y dibujen estos nudos en sus cuadernos (ver imagen 15).

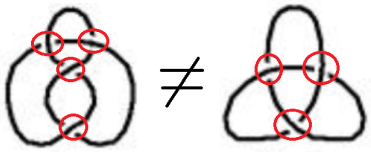


Figura 16: Cruces

Después, se llevará a cabo una actividad relacionada con la coloración de los arcos. Los estudiantes dibujarán el mismo nudo previamente trabajado y deberán identificar y aplicar colores a los distintos segmentos del nudo, utilizando al menos tres colores diferentes. El objetivo de esta actividad es que los estudiantes comprendan la técnica de coloración de nudos, la cual es fundamental para distinguir y analizar las diferentes partes de un nudo de manera más clara y visual. Además, se les pedirá que expliquen sus elecciones de color y cómo estas ayudan a identificar las propiedades y características del nudo. Los resultados deberán ser anotados y dibujados detalladamente en sus cuadernos para su posterior discusión y análisis en clase.



Figura 17: Colorabilidad

5.7.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico

La actividad de realizar y colorear nudos con diferentes cruces tiene como propósito:

- **Exploración de Conceptos de Cruces en Nudos**: Permitir a los estudiantes experimentar con la creación de nudos y comprender cómo los cruces afectan su estructura y complejidad.
- **Desarrollo de Habilidades Visuales y Espaciales**: Mejorar la habilidad de los estudiantes para visualizar y manipular objetos tridimensionales, como los nudos, y comprender cómo los cruces afectan su apariencia.
- **Introducción a la Técnica de Coloración de Nudos**: Enseñar a los estudiantes la importancia de la coloración de los arcos en la identificación y análisis de las características de los nudos, preparándolos para futuras exploraciones matemáticas.

5.7.2. Evaluación de la Actividad

- **Precisión en la Creación de Nudos**: Evaluar la precisión con la que los estudiantes crean nudos con el número especificado de cruces.
- **Aplicación de la Técnica de Coloración**: Evaluar la capacidad de los estudiantes para aplicar la técnica de coloración de arcos de manera efectiva, utilizando al menos tres colores diferentes y explicando sus elecciones.
- **Comprensión de las Propiedades del Nudo**: Observar la capacidad de los estudiantes para identificar y explicar las propiedades y características del nudo basándose en su coloración y estructura.

5.7.3. Registro de Datos

- **Dibujos y Anotaciones en los Cuadernos**: Registrar los dibujos y anotaciones detalladas realizadas por los estudiantes sobre los nudos creados y coloreados.

- **Observaciones del Profesor**: Mantener un registro cualitativo de la precisión en la creación y coloración de los nudos, así como de las explicaciones proporcionadas por los estudiantes.
- **Discusiones y Análisis en Clase**: Registrar los resultados de las discusiones y análisis en clase sobre las propiedades y características de los nudos basados en su coloración y estructura.

5.8. Actividad 8

La siguiente actividad consistirá en un taller en el que, mediante el análisis y la creación de diversos nudos, los estudiantes podrán profundizar y ampliar su comprensión sobre el tema de los nudos. Durante el taller, se proporcionarán diferentes tipos de cuerdas y ejemplos de nudos, desde los más simples hasta los más complejos.
Los estudiantes trabajarán en grupos para fomentar la colaboración y el intercambio de ideas. Cada grupo seleccionará varios nudos para analizar, describiendo sus características y propiedades. Luego, cada grupo deberá reproducir estos nudos y presentar sus hallazgos al resto de la clase.
Además, se les animará a crear sus propios diseños de nudos, aplicando los conceptos aprendidos. Estos nuevos nudos serán evaluados en términos de complejidad, funcionalidad y originalidad. Los estudiantes documentarán su proceso de creación y análisis mediante dibujos y descripciones detalladas en sus cuadernos.
Al finalizar el taller, se realizará una discusión grupal en la que cada equipo compartirá sus experiencias y descubrimientos. Esta actividad permitirá a los estudiantes desarrollar habilidades prácticas y teóricas, fortaleciendo su comprensión de los nudos y sus aplicaciones en diferentes contextos.

5.8.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico

La actividad del taller sobre nudos tiene como propósito:

- **Profundización en el Conocimiento de los Nudos**: Permitir a los estudiantes explorar una variedad de nudos, desde los simples hasta los complejos, para comprender sus características y propiedades.
- **Fomento de la Colaboración y el Intercambio de Ideas**: Promover el trabajo en grupo para que los estudiantes compartan conocimientos, analicen los nudos seleccionados y presenten sus hallazgos a sus compañeros.
- **Estímulo a la Creatividad y la Originalidad**: Incentivar a los estudiantes a crear sus propios diseños de nudos, aplicando los conceptos aprendidos y evaluando la complejidad, funcionalidad y originalidad de sus creaciones.

5.8.2. Evaluación de la Actividad

- **Análisis y Descripción de Nudos**: Evaluar la capacidad de los estudiantes para analizar y describir las características y propiedades de los nudos seleccionados.
- **Reproducción de Nudos**: Observar la precisión con la que los estudiantes pueden reproducir los nudos seleccionados y presentarlos al grupo.
- **Creación de Nudos Originales**: Evaluar la complejidad, funcionalidad y originalidad de los nudos creados por los estudiantes.

- **Participación y Colaboración**: Evaluar la participación y el intercambio de ideas dentro de los grupos durante el taller.

5.8.3. Registro de Datos

- **Documentación en Cuadernos**: Registrar dibujos y descripciones detalladas de los nudos analizados, reproducidos y creados por los estudiantes en sus cuadernos.
- **Presentaciones y Discusiones en Grupo**: Registrar los hallazgos presentados por cada grupo durante la actividad y las discusiones posteriores.
- **Observaciones del Profesor**: Mantener un registro cualitativo de la participación, el trabajo en equipo y la comprensión de los estudiantes durante el taller.

5.9. Actividad 9

En esta actividad, combinaremos ambas teorías que hemos estado manejando: las trenzas y los nudos. El objetivo es que los estudiantes integren y apliquen los conceptos aprendidos sobre estos dos temas de manera práctica y colaborativa:
Se les pedira a los estudiantes realizar la trenza $adaCd$; y despues se les pedira unir los hilos del mismo color por encima de la trenza: Con base en esta actividad, se les

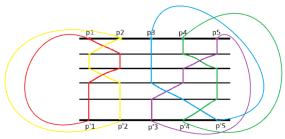


Figura 18: Trenza y nudo

pedirá a los estudiantes que analicen la cantidad de cruces, enlaces y la coloración que se puede encontrar en los nudos y trenzas que han creado. Los estudiantes deberán contar el número de cruces en cada nudo y trenza, identificar los enlaces y determinar cómo se forman los bucles cerrados. Además, aplicarán al menos tres colores diferentes para colorear los arcos de los nudos y trenzas;
Despues se les pedira que repitan el la misma trenza pero esta vez lo repetiran dos veces es decir $(adaCd)^2$ repetiran lo mismo con esta trenza en conocer sus colores, cruces y enlaces Después, se les pedirá a los estudiantes que repitan la misma trenza, pero esta vez lo harán duplicándola, es decir, $(adaCd)^2$. Deberán realizar el mismo análisis de colores, cruces y enlaces con esta trenza repetida, documentando cualquier cambio o patrón que observen en comparación con la trenza original. Esta información también deberá ser registrada con dibujos y anotaciones detalladas, y será presentada a la clase para discutir las diferencias y similitudes encontradas.

5.9.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico

En esta actividad, se busca que los estudiantes integren y apliquen los conceptos aprendidos sobre trenzas y nudos de manera práctica y colaborativa, con los siguientes propósitos:

- **Aplicación Práctica de Conceptos**: Permitir a los estudiantes aplicar los conceptos de trenzas y nudos en una actividad práctica y concreta.
- **Integración de Teorías**: Integrar los conocimientos adquiridos sobre trenzas y nudos, relacionando ambos temas en una misma actividad.
- **Análisis y Experimentación**: Fomentar el análisis y la experimentación de los estudiantes al contar cruces, identificar enlaces y colorear arcos en las trenzas y nudos creados.
- **Observación de Patrones y Cambios**: Estimular a los estudiantes a observar patrones y cambios al duplicar la trenza original, analizando cómo afectan a la estructura y las características del nudo.

5.9.2. Evaluación de la Actividad

- **Precisión en la Reproducción de la Trenza Duplicada**: Evaluar la precisión con la que los estudiantes repiten la trenza original al duplicarla.
- **Análisis de Colores, Cruces y Enlaces**: Evaluar la capacidad de los estudiantes para contar cruces, identificar enlaces y aplicar la coloración en las trenzas y nudos.
- **Documentación y Presentación**: Evaluar la calidad de la documentación realizada por los estudiantes, así como su capacidad para presentar sus hallazgos a la clase y participar en la discusión.

5.9.3. Registro de Datos

- **Dibujos y Anotaciones en Cuadernos**: Registrar los dibujos y anotaciones detalladas realizadas por los estudiantes sobre las trenzas y nudos creados, así como cualquier observación relevante.
- **Resultados del Análisis**: Registrar los resultados del análisis de colores, cruces y enlaces realizados por los estudiantes.
- **Observaciones del Profesor**: Mantener un registro cualitativo de la precisión en la reproducción de la trenza duplicada y del nivel de participación y comprensión de los estudiantes durante la actividad.

5.10. Actividad 10

En esta última actividad, se les pedirá a los estudiantes que, en grupos de tres, realicen un informe. Deberán crear la siguiente trenza $AbCdE$ y, con cada exponente, formar el nudo correspondiente para luego analizar los enlaces, cruces y colores. Cada grupo documentará su proceso con dibujos y anotaciones detalladas, presentando sus hallazgos en el informe. Este informe incluirá una explicación de los métodos utilizados, los resultados obtenidos y cualquier observación relevante sobre las características estructurales y la coloración de los nudos.
Dicho informe se dejará como tarea para que los estudiantes lo completen en casa y será recogido en el próximo encuentro. Se espera que los grupos trabajen de manera colaborativa y detallada en la elaboración del informe, incluyendo todos los aspectos solicitados, como la creación de las trenzas, la formación de los nudos con cada exponente, y el análisis exhaustivo de los enlaces, cruces y colores.

Además, se alienta a los estudiantes a aprovechar este tiempo fuera del aula para profundizar en sus observaciones y reflexiones, y para abordar cualquier pregunta o inquietud que surja durante el proceso. La entrega del informe será una oportunidad para compartir y discutir los resultados obtenidos, promoviendo así el intercambio de ideas y el aprendizaje entre pares.

5.10.1. Propósito de la Actividad con el Desarrollo del Pensamiento Pre-Algebraico

La actividad final tiene como objetivo principal:

- **Aplicación Integral de Conceptos**: Permitir a los estudiantes aplicar de manera integral los conceptos aprendidos sobre trenzas y nudos, realizando una tarea que integra ambos temas de manera colaborativa y detallada.

5.10.2. Procedimiento de Evaluación

La evaluación de esta actividad se centrará en:

- **Calidad del Informe**: Evaluar la calidad del informe realizado por cada grupo, incluyendo la creación de la trenza, la formación de los nudos con cada exponente y el análisis exhaustivo de los enlaces, cruces y colores.

5.10.3. Registro de Datos

Los registros de datos incluirán:

- **Informes de los Estudiantes**: Los informes elaborados por cada grupo, que documentarán el proceso seguido, los resultados obtenidos y las observaciones relevantes sobre las características estructurales y la coloración de los nudos.

6. Análisis y discusión

De manera sorprendente, esta secuencia fue aplicada a una población aproximada de entre 60 y 90 estudiantes de grado séptimo, quienes participaron en cada una de las actividades propuestas. A continuación, se procederá a analizar el cumplimiento de los objetivos planteados en cada actividad.

6.1. Actividad 1

En esta actividad de conocimiento o acercamiento a las trenzas, se obtuvieron diversos resultados, incluyendo respuestas a las preguntas planteadas por los estudiantes.

- ¿Que son las trenzas?
  La mayoría de las respuestas coinciden en que una trenza es un tipo de peinado o estilo para el cabello. Sin embargo, esta definición llevó a una discusión sobre si las trenzas solo se aplican en el cabello, ya que algunos estudiantes mencionaron su uso en contextos artesanales como collares, pulseras e incluso bolsos. Esto sugiere que los estudiantes comprenden el concepto de trenza y su aplicación en diversos contextos.

- ¿Desde cuando existen las trenzas?
  Los estudiantes proponen que las trenzas han existido durante varios años, aunque no proporcionan fechas ni años exactos. Esta observación no solo indica que las trenzas son un elemento cotidiano y antiguo en diversas culturas, sino que también sugiere que los estudiantes reconocen su larga tradición sin conocer con precisión sus orígenes históricos. Esta falta de información detallada sobre el origen de las trenzas refleja una percepción generalizada de su antigüedad y su integración en la vida diaria, destacando su relevancia cultural y su presencia a lo largo del tiempo.

- ¿Para que sirven?
  Todos los estudiantes coincidieron en que las trenzas tienen una función puramente estética, es decir, que se utilizan exclusivamente para decorar. La mayoría percibe las trenzas como algo llamativo y ornamental. Sin embargo, se les recordó que las trenzas también tienen aplicaciones en diversas industrias. Este recordatorio abrió la puerta a una discusión sobre los usos funcionales de las trenzas más allá de su valor decorativo, como su aplicación en la fabricación de textiles, cuerdas y otros productos industriales. Esta ampliación del conocimiento permite comprender que, aunque las trenzas son frecuentemente vistas como elementos decorativos, también juegan un papel importante en contextos prácticos y funcionales.

Con esta actividad, se amplió significativamente el conocimiento y el contexto sobre las trenzas en nuestra vida cotidiana. Al explorar los diversos usos y aplicaciones de las trenzas, se logró expandir la comprensión más allá de su percepción inicial como un simple adorno. Los estudiantes comenzaron a reconocer que las trenzas tienen múltiples funciones y aplicaciones prácticas en diferentes ámbitos, desde la moda y la decoración

hasta su uso en la industria y el arte. Este enfoque más amplio permitió a los estudiantes apreciar la trenza no solo como un elemento decorativo, sino también como una herramienta versátil con una variedad de aplicaciones en la vida diaria y en distintos contextos culturales y funcionales.

6.2. Actividad 2

En la segunda actividad, que consistió en aplicar la tabla de movimientos de las trenzas, los estudiantes no solo lograron identificar, sino también practicar los movimientos. Algunos relacionaron estos movimientos con secuencias corporales, comparándolos con pasos de baile. Esta relación no solo facilitó la comprensión de la representación simbólica de las trenzas al vincularlas con acciones físicas, sino que también contribuyó al cumplimiento de uno de los objetivos de la actividad, que era ilustrar cómo las secuencias de letras pueden tener correspondencias en movimientos concretos y dinámicos.

6.3. Actividad 3

En esta actividad, se puso en práctica el dibujo de una trenza y su realización paso a paso.

- **Dibujo**
  Al dibujar la trenza, muchos estudiantes comprendieron la idea y lograron plasmar el diseño con precisión. No solo destacaron los colores, sino que también identificaron claramente los cruces, indicando qué cuerda pasa por encima y cuál pasa por debajo.

- **Trenza**
  Durante la elaboración de las trenzas, todos los estudiantes comprendieron la transición del dibujo a la creación práctica de la trenza. Cada uno eligió sus propios colores, y se evidenció que el color que comenzó en p_1 terminó en p_5, reflejando así la correcta secuencia y el patrón establecido.

Estos resultados se pueden observar en la siguiente imagen, que muestra uno de los varios ejemplos realizados (ver figura 19).

Por otro lado, al pedirles que repitieran la misma trenza y respondieran a la pregunta '¿Cuántas veces hay que repetir la trenza para que ese color vuelva a estar en p_1 ?', muchos de los estudiantes comenzaron a comprobarlo. Sin embargo, al intentar realizarlo, se encontraron con varias dificultades:

1. la primera es que alguno Los estudiantes lograron repetir la trenza con éxito. llegando a lo siguiente (ver figura 20):

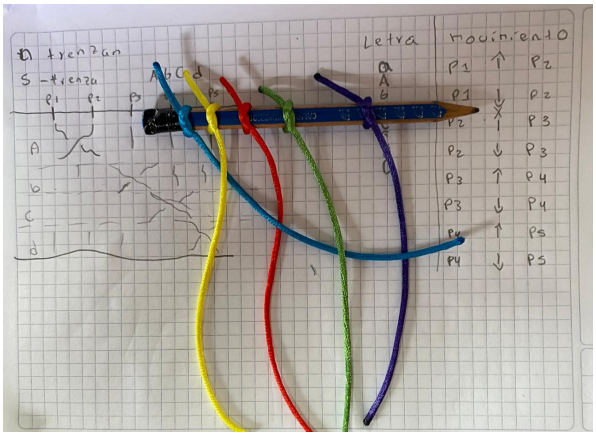


Figura 19: Trabajo hecho por un estudiante



Figura 20: Trencha hecha por el estudiante

2. Lo segundo es la elaboración de trenzas en donde por confusion o saltar un movimiento la trenza queda totalmente diferente (ver figura 21) :

3. En tercer lugar, se observó que algunos estudiantes se frustraron al realizar la actividad y optaron por dejarla de lado. Esta frustración no solo impactó el progreso en esta tarea específica, sino que también refleja una situación común que puede ocurrir con cualquier estudiante, independientemente del tema, ya sea en matemáticas u otras áreas. Este problema de frustración y desánimo es relevante y merece una discusión más profunda, que abordaremos más adelante en el análisis.

A través de esta actividad, los estudiantes pudieron reconocer ideas matemáticas fundamentales, como la simetría y la repetición de patrones, que son parte del desarrollo del pensamiento pre-algebraico. Al repetir este patrón en la elaboración de una trenza, los estudiantes observaron cómo los diferentes elementos se ajustaban de manera sistemática, mostrando una estructura que no solo era visualmente atractiva, sino inherentemente

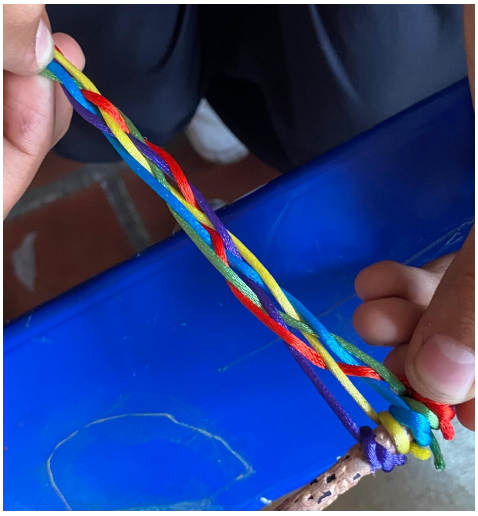


Figura 21: trenza hecha por el estudiante

matemática. Identificaron esta característica llamando a las trenzas "lindas.º "simétricas", lo que demuestra su capacidad para detectar patrones y secuencias ordenadas.

Este enfoque hacia la simetría no solo les permitió encontrar valor estético en las trenzas, sino también conectar esta noción con la idea de regularidad matemática. La repetición de movimientos y cruces en la trenza tiene el mismo resultado armonioso, lo que ilustra cómo los patrones, cuando se organizan adecuadamente, pueden generar formas predecibles y ordenadas. Esta comprensión es crucial en el camino hacia el pensamiento algebraico, ya que permite a los estudiantes ir más allá de la estética y comenzar a ver los patrones y secuencias desde un punto de vista más abstracto y simbólico, sentando las bases para conceptos mucho más avanzados en el álgebra.

6.4. Actividad 4

En esta actividad prevaleció un sentimiento de confusión, ya que los estudiantes estaban muy concentrados en elaborar la trenza, pero al observar que algunos movimientos se cancelaban entre sí, se confundían aún más. De toda la población, solo unos pocos lograron captar el concepto y llegaron a utilizar términos como 'cancelar' o 'eliminar' para describir el proceso.

Este tipo de tarea desafía la intuición de los estudiantes, además de ser una actividad clave en el desarrollo de habilidades pre-algebraicas, como la comprensión de operaciones inversas, la representación simbólica de procesos y el reconocimiento de patrones de simetría. La idea de que un movimiento pueda "deshacer.ºtro se relaciona directamente con el concepto algebraico de operaciones inversas, donde una acción puede anular a su opuesta. Estas experiencias ayudan a los estudiantes a desarrollar no solo habilidades manuales y visuales, sino también un conocimiento abstracto y contextual, crucial para su futura comprensión de las matemáticas

fue mediante al uso de estos terminos que lograron elaborar la trenza (ver figura 22):

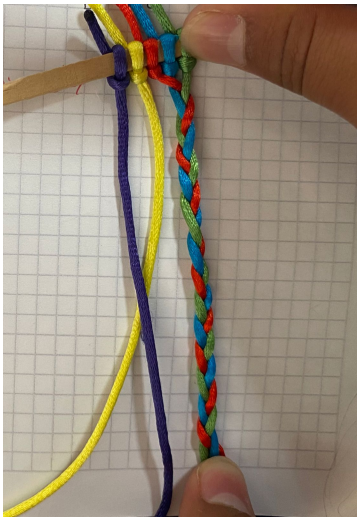


Figura 22: Trenza adAcd hecha por el estudiante

En esta actividad, los estudiantes comprendieron que, al igual que existen movimientos que avanzan o construyen la trenza, también hay otros movimientos que los contrarrestan o eliminan, dando la impresión de que no ha ocurrido ningún cambio. Este concepto les permitió entender la idea de cancelación de movimientos opuestos, un principio que refleja la simetría y el equilibrio en el proceso de trenzado. Al descubrir cómo ciertos movimientos se neutralizan entre sí, los estudiantes pudieron apreciar la estructura lógica detrás de la creación de la trenza, lo que también refuerza la comprensión de patrones matemáticos y secuencias repetitivas.

6.5. Actividad 5

Esta actividad puso en práctica los conceptos trabajados en actividades anteriores, permitiendo a los estudiantes realizar diferentes tipos de trenzas acompañadas de sus respectivos dibujos. Al vincular el diseño gráfico con la creación manual de las trenzas, los estudiantes consolidaron su comprensión del proceso de trenzado y de los patrones involucrados. Esta combinación de teoría y práctica fue fundamental para reforzar su aprendizaje, ya que les permitió visualizar y ejecutar los movimientos de manera más clara y precisa. La experiencia de dibujar y luego elaborar las trenzas ayudó a afianzar conceptos clave, facilitando tanto la comprensión como la destreza en la creación de trenzas. (ver imagenes 23 y 24):

El hecho de dibujar la trenza y luego construirla manualmente unió aún más el conocimiento de los estudiantes en los niveles conceptual y práctico. Dibujar los cruces y repetirlos les permitió conectar la representación simbólica con la actividad concreta,

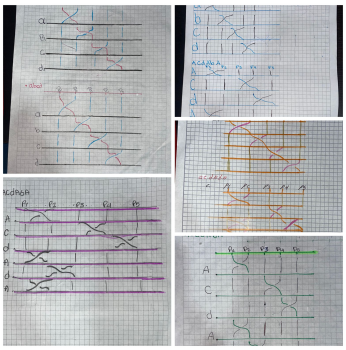


Figura 23: Dibujos hechos por estudiantes

algo que en álgebra se traduce en la capacidad de relacionar expresiones simbólicas con operaciones numéricas o geométricas. Este ejercicio fue crucial para afianzar el pensamiento pre-algebraico, ya que los estudiantes comenzaron a familiarizarse con la idea de secuencias repetitivas, simetría y cómo ciertos movimientos dentro de un patrón afectan el resultado final, habilidades esenciales para abordar temas algebraicos más avanzados.

6.6. Actividad 6

En esta actividad, se destacó el uso de un video para introducir el concepto de los nudos. A pesar de que el video parecía estar dirigido a un público mayor, captó la atención de los estudiantes de manera notable. La mayoría de ellos quedaron emocionados e impactados al descubrir la gran cantidad de información matemática que puede encontrarse en un nudo, algo que inicialmente no esperaban. El video no solo sirvió como una introducción atractiva, sino que también despertó su curiosidad y los motivó a explorar cómo los nudos, más allá de su apariencia sencilla, encierran patrones matemáticos complejos y aplicaciones prácticas. Esta experiencia visual ayudó a los estudiantes a reconocer el valor de los nudos como herramientas matemáticas, abriendo un nuevo campo de estudio dentro de la actividad.

6.7. Actividad 7

En esta actividad, nos centramos en los conceptos específicos relacionados con los nudos, como los cruces, la colorabilidad y los enlaces presentes en su estructura. Estos elementos clave permitieron a los estudiantes no solo visualizar y analizar los nudos, sino también diferenciar un nudo de otro, estableciendo criterios claros para su clasificación. Al explorar estos conceptos, los estudiantes fueron capaces de comprender mejor las propiedades únicas de cada nudo, lo que les permitió identificar patrones y similitudes entre diferentes tipos de nudos. Esta experiencia fortaleció su capacidad para organizar y categorizar los nudos de forma sistemática, enriqueciendo su comprensión sobre cómo los nudos se relacionan con principios matemáticos como la topología y las secuencias). Este proceso de clasificación y diferenciación fortaleció su capacidad para organizar de

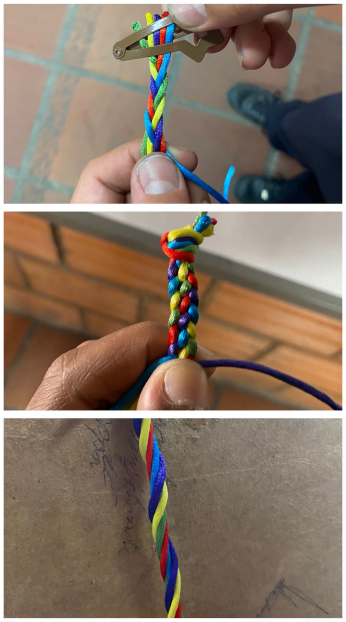


Figura 24: Trenzas hechas por estudiantes de la actividad

manera sistemática los nudos, algo esencial en la comprensión de conceptos matemáticos más abstractos. En particular, los estudiantes comenzaron a identificar patrones y similitudes entre diferentes tipos de nudos, lo que los llevó a entender mejor cómo ciertas características estructurales se repiten o varían entre ellos. Este tipo de pensamiento sistemático es crucial en el desarrollo del pensamiento pre-algebraico, ya que ayuda a los estudiantes a comprender cómo agrupar y categorizar elementos según ciertas propiedades, habilidades que son fundamentales en el estudio del álgebra.

6.8. Actividad 8

En esta actividad, se llevó a cabo un taller enfocado en la clasificación de diferentes tipos de nudos. Los estudiantes participaron activamente al realizar dibujos detallados de varios nudos, aplicando los conceptos aprendidos sobre cruces y enlaces. A través de este proceso, lograron visualizar las diferencias clave entre los nudos y clasificar cada uno según sus características. La realización de los dibujos no solo les permitió practicar la identificación de los elementos distintivos de cada nudo, sino también reforzar su comprensión sobre cómo se forman y cómo se relacionan entre sí. Esta actividad fomentó un enfoque más analítico, permitiendo a los estudiantes organizar y representar los nudos de manera gráfica. Los resultados de estos ejercicios pueden observarse en la siguiente imagen, donde se reflejan sus esfuerzos y avances en la comprensión de la estructura de los nudos(ver imagen 25).

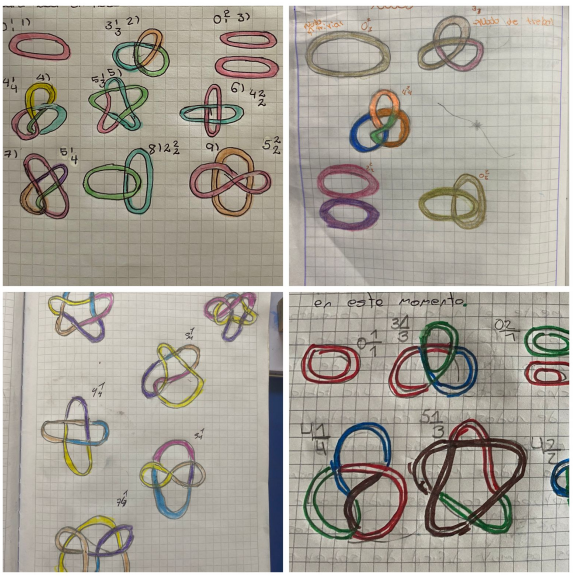


Figura 25: dibujos hechos por estudiantes

6.9. Actividad 9

En la elaboración de esta actividad, varios estudiantes mostraron cierta resistencia ante la idea de combinar estas dos teorías de forma conjunta. Esto llevó a que la actividad tomara más tiempo del inicialmente previsto. Sin embargo, me conmueve ver el avance y la comprensión que demostraron a lo largo del proceso, ya que la mayoría de ellos se esforzaron notablemente. Lograron no solo realizar la trenza de ejemplo, sino que también identificaron los nudos que se formaban, reconociendo cómo estos cumplían con la introducción de ambos conceptos. Este progreso fue un indicativo claro de su creciente entendimiento y habilidad para conectar las teorías aprendidas. Ante este alentador resultado, decidí proceder con la última actividad, confiando en que los estudiantes estaban listos para aplicar su conocimiento de manera más amplia.

6.10. Actividad 10

En esta actividad se observa la inclusión de ambas teorías, desde el armado de una trenza hasta el análisis de un nudo. Es notable cómo los estudiantes integraron los conceptos previamente trabajados, combinando habilidades manuales y analíticas para completar la tarea. Destaco especialmente el trabajo colaborativo que surgió entre ellos, demostrando que el esfuerzo conjunto fue clave para llevar a cabo esta última actividad de manera exitosa. La interacción entre los estudiantes no solo facilitó la comprensión de las ideas, sino que también promovió un ambiente de apoyo mutuo y aprendizaje compartido.

Observamos que esta es la primera página del proyecto elaborado por uno de los

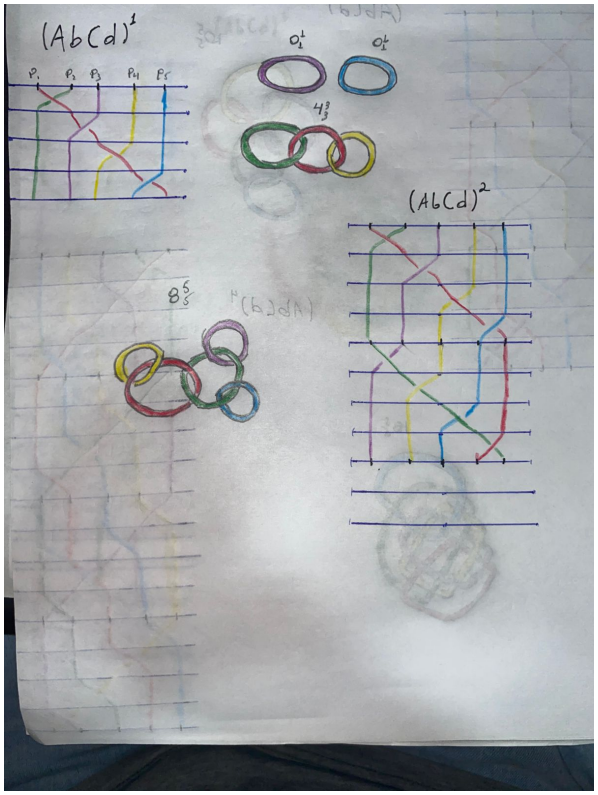


Figura 26: Proyecto hecho por el estudiante pag 1

grupos de estudiantes. En ella, se pueden apreciar varios dibujos iniciales, donde las trenzas están representadas de manera detallada, mostrando claramente cuántas veces se repiten los patrones. Además, se incluyen dibujos de diferentes nudos, destacando tanto nudos triviales como algunos enlaces más complejos. Uno de los estudiantes del grupo menciona, en particular, la trenza $(AbCd)^1$, en la cual tres de los hilos se enlazan, mientras que dos de ellos forman nudos triviales. Al observar la trenza $(AbCd)^2$, el estudiante señala que en este caso todos los hilos se enlazan formando un único nudo, pero añade un interesante comentario: el nudo trivial del color verde se enlaza con tres hilos, mientras que el nudo amarillo solo se enlaza con uno. Este tipo de observaciones demuestra no solo la comprensión del concepto de nudos y trenzas, sino también una capacidad de análisis que va más allá de lo superficial, explorando las relaciones entre los elementos que conforman las estructuras.

En esta segunda página del proyecto, se observa un aumento en la complejidad tanto de las trenzas como de los nudos. En particular, la trenza $(AbCd)^3$ está representada con su respectivo dibujo, mostrando un mayor desarrollo en la estructura. Respecto al nudo asociado a esta trenza, los estudiantes destacan lo siguiente: 'tres se enlazan con dos triviales, uno se enlaza con tres triviales, y uno se enlaza con un trivial'. Esta descripción demuestra que los estudiantes ya están manejando los conceptos fundamentales de

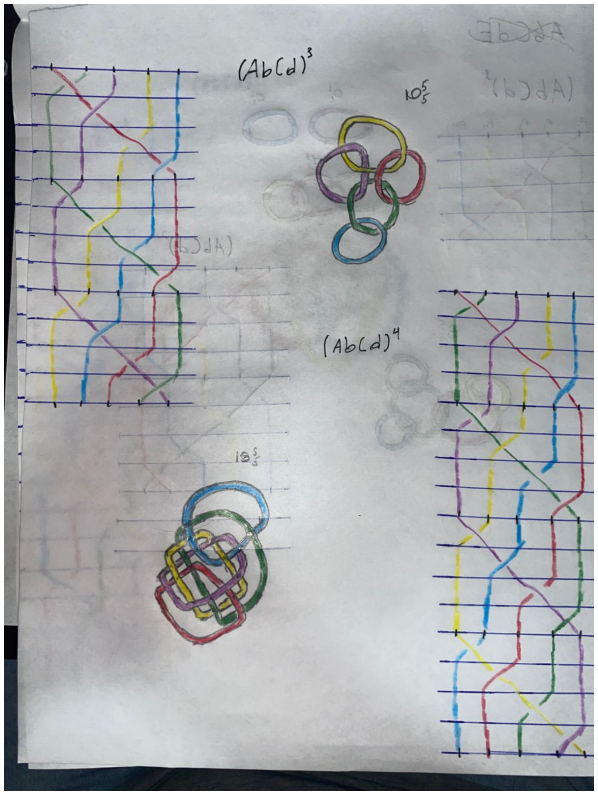


Figura 27: Proyecto hecho por el estudiante pag 2

nudos, mostrando una comprensión más profunda de las relaciones entre los hilos y los nudos que se forman. El hecho de que puedan identificar y diferenciar los distintos tipos de enlaces y nudos triviales indica que están aplicando correctamente los conceptos teóricos que han aprendido. Además, este progreso revela que han internalizado la idea de cómo se generan y organizan los nudos dentro de las trenzas, lo que denota una evolución significativa en su capacidad para analizar y descomponer estructuras más complejas.

En la trenza $(AbCd)^4$ se presenta un dibujo dinámico y claro, mostrando un progreso significativo en la comprensión de los estudiantes. En cuanto al dibujo del nudo, es evidente que los estudiantes han logrado elaborar algo detallado y bien estructurado. Uno de ellos comenta: *el dibujo se nos complicó un poco, pero finalmente lo logramos; sin embargo, observamos que todos los nudos triviales se enlazan entre sí, excepto dos, el azul y el rojo, que no se enlazan.* Este comentario refleja el nivel de análisis que han alcanzado al enfrentarse a situaciones más complejas. Cabe destacar que la calidad de las anotaciones y los dibujos ha mejorado considerablemente en comparación con las primeras páginas del proyecto. Este progreso es resultado del proceso de práctica manual que realizaron previamente, tanto en la creación de trenzas como en el armado de nudos, lo cual ha sido fundamental para fortalecer su comprensión y representación gráfica de los conceptos trabajados.

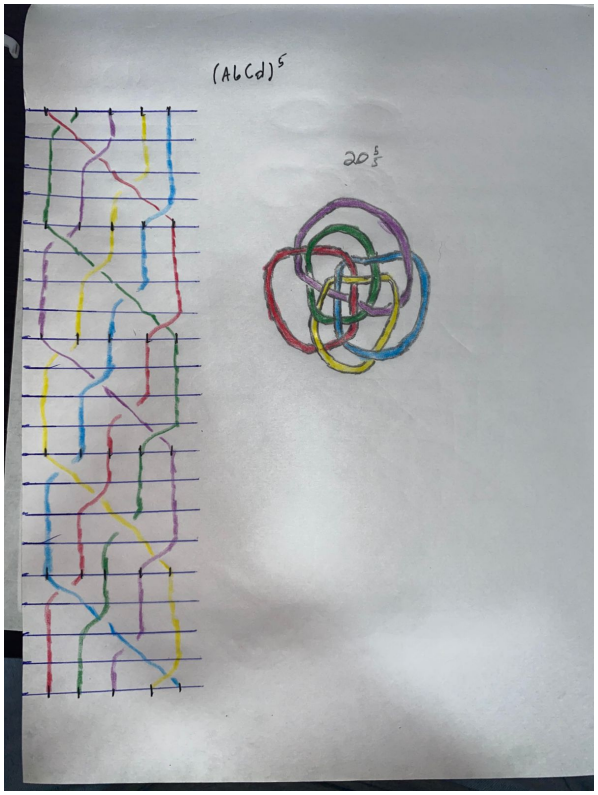


Figura 28: Proyecto hecho por el estudiante pag 2

En esta última página del proyecto, se presenta el dibujo de la trenza $(AbCd)^5$, donde se destaca el gran trabajo realizado por los estudiantes en la representación visual. El detalle y la precisión en el dibujo de la trenza demuestran una notable evolución en su comprensión del tema. En cuanto al dibujo del nudo asociado a esta trenza, resalta el comentario de uno de los estudiantes: *aquí sí nos complicamos; fue difícil hacer el nudo y también lo fue dibujarlo, ya que cada trivial se enlaza con las otras cuatro triviales*. Este tipo de observación refleja el profundo entendimiento que los estudiantes han alcanzado en ambos temas, tanto en la elaboración de trenzas como en la teoría de nudos.

Se evidencia que han asimilado conceptos clave, como la representación gráfica de la trenza basada en los movimientos de la tabla de movimientos, y la categorización de los nudos en función de los cruces y colores. El manejo de estos términos y su aplicación correcta en los dibujos indican un dominio del contenido trabajado en las actividades. Además, esta habilidad para clasificar y representar gráficamente fomenta una comprensión más profunda de las relaciones algebraicas, permitiéndoles comenzar a establecer conexiones entre patrones visuales y expresiones algebraicas. Así, a medida que se enfrentan a problemas más complejos, estarán mejor equipados para aplicar sus conocimientos en contextos más amplios, lo que refuerza la importancia de las actividades prácticas en la enseñanza del álgebra. En definitiva, esta experiencia no solo fortalece

su conocimiento matemático, sino que también les proporciona herramientas valiosas para resolver problemas y abordar nuevas ideas en su trayectoria académica.

Con esto, concluye el apartado de análisis, habiendo demostrado la práctica de los conceptos de trenzas y nudos, lo cual ha sido esencial para alcanzar los objetivos propuestos en el proyecto.

7. Conclusiones y recomendaciones

Ahora hablemos del trabajo en términos generales. Al momento de implementar las actividades, muchos estudiantes tendían a frustrarse, ya que se enfrentaban a un tema nuevo y desconocido. Al intentar manipular los conceptos, un grupo considerable de ellos experimentaba frustración, lo que los llevaba a abandonar la actividad. Esto deja la reflexión sobre si este material, por su naturaleza, genera frustración en los estudiantes, pero Carmen, Miguel y Ana, en su artículo sobre el miedo y la tolerancia a la frustración en estudiantes, publicado el 14 de agosto de 2024, mencionan que 'la frustración es aquella respuesta que involucra ansiedad, conductas de escape, agresividad e incluso violencia; y la intensidad y duración de estas respuestas dependen de las experiencias vividas de cada individuo, lo que determina el grado de tolerancia'. Esto resalta que la frustración que observé durante la secuencia de actividades no está ligada únicamente a la complejidad de las trenzas y los nudos, sino que puede ser causada por cualquier tema académico o situación en la vida diaria.

Esta reflexión me lleva a recordar mi propia experiencia como estudiante, tanto en la escuela como en la universidad, cuando me sentía frustrado por temas que no comprendía del todo. De la misma manera, como docente, me he encontrado y seguiré encontrando con estudiantes que se frustran ante diferentes temas, especialmente en matemáticas.

Estudiar y practicar cómo enfrentar estos momentos de frustración se vuelve crucial. Motivarlos a superar esos obstáculos y seguir aprendiendo es una tarea esencial que cualquier docente, sin importar el área, debe dominar. La habilidad de detectar la frustración y convertirla en una oportunidad de crecimiento y aprendizaje es parte del rol que todo educador debe mejorar y estar preparado para enfrentar.

Podemos afirmar que hemos cumplido con el objetivo de utilizar las trenzas y los nudos como herramientas para fomentar el pensamiento pre-algebraico. A lo largo de esta secuencia de actividades, logramos trabajar aspectos clave como la creación de patrones, la interpretación de simbolismos y la correcta escritura y nomenclatura algebraica.

Los resultados obtenidos han sido variados. Por un lado, destacamos la calidad de algunas presentaciones, la correcta elaboración de trenzas, y el análisis detallado de los nudos por parte de los estudiantes, lo cual refleja un buen nivel de comprensión en muchos casos.

Sin embargo, también nos encontramos con desafíos. Hubo momentos de frustración que algunos estudiantes no supieron gestionar, lo que llevó a que no completaran las actividades o que sus resultados no fueran satisfactorios. Esta falta de motivación y participación, en ciertos casos, afectó negativamente los logros esperados.

Pese a estos obstáculos, el balance general es positivo. La experiencia nos muestra que, aunque la metodología aplicada tuvo sus dificultades, sí logramos nuestro objetivo de introducir y trabajar conceptos pre-algebraicos de manera innovadora. A su vez, nos ofrece una valiosa oportunidad de reflexión y mejora para futuras aplicaciones de actividades similares.

Es importante destacar que la teoría de trenzas y nudos no solo se limita a fo-

mentar el pensamiento pre-algebraico en los estudiantes, sino que tiene el potencial de extenderse y aplicarse en diversas ramas de las matemáticas dentro del aula de clase.

Por ejemplo, esta teoría puede ser una herramienta poderosa para introducir conceptos de geometría al trabajar con las propiedades espaciales y visualización tridimensional de las trenzas y nudos. Los estudiantes pueden explorar cómo las trenzas interactúan en el espacio y comprender mejor las nociones de simetría, rotación y reflexión.

Además, en el campo de la combinatoria, las trenzas y nudos ofrecen un contexto práctico para entender cómo se forman diferentes configuraciones y patrones, lo cual puede llevar a discusiones sobre permutaciones, variaciones y otras estructuras combinatorias más avanzadas.

En el ámbito de la topología, que estudia las propiedades de los objetos que permanecen inalteradas bajo deformaciones, las trenzas y nudos son un ejemplo fundamental para introducir conceptos como enlaces, superficies y deformaciones continuas. Esta es una rama matemática que suele ser abstracta, pero que puede abordarse de forma accesible y visual mediante actividades prácticas de trenzado.

Finalmente, en álgebra abstracta, las operaciones simbólicas y las reglas que se aplican para describir las trenzas y nudos son un excelente punto de partida para explorar estructuras algebraicas como los grupos y las operaciones en estos. Las secuencias de movimientos que describen las trenzas pueden llevar a los estudiantes a una comprensión intuitiva de los grupos de trenzas y sus aplicaciones.

Me gustaría concluir este trabajo con la siguiente frase que refleja la esencia de este recurso:: **la teoría de trenzas y nudos se convierte en una valiosa herramienta interdisciplinaria que no solo enriquece el pensamiento pre-algebraico, sino que también abre las puertas a la exploración de diversas áreas matemáticas de una manera concreta y accesible para los estudiantes.**

Referencias

[1] M. Blanton y J. J. Kaput, «Developing elementary teachers' .ªlgebra eyes and ears": Understanding characteristics of professional development that promote generative and self-sustaining change in teacher practice,» *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 24, n.º 1-2, págs. 57-87, 2005. dirección: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.02.001.

[2] C. A. M. F. A. Alberca, «Miedo y tolerancia a la frustración en estudiantes,» *Revista de Educación*, vol. 23, n.º 2, págs. 45-60, 2024. dirección: https://doi.org/10.19136/hs.a23n2.5823.

[3] M. C. Cañadas y M. Molina, «El desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria y secundaria obligatoria,» *Revista de Educación Matemática*, vol. 48, n.º 1, págs. 203-225, 2016.

[4] CDEADLA, «Las potencialidades de los grafos en la educación matemática,» *Revista de Investigación en Educación Matemática*, vol. 1, n.º 2, págs. 15-30, 2016.

[5] F. B. Clark, «Using bar modeling in the Singapore Math approach to enhance problem-solving skills,» *Educational Research and Reviews*, vol. 8, n.º 24, págs. 2283-2292, 2013. dirección: https://doi.org/10.5897/ERR2013.1616.

[6] T. J. Cooper y E. Warren, «Developing early algebraic reasoning in primary school classrooms,» *Mathematics Education Research Journal*, vol. 23, n.º 1, págs. 41-59, 2011. dirección: https://doi.org/10.1007/s13394-011-0003-6.

[7] J. T. J. Luna, «Trenzas: hacer matemáticas,» *Revista de Educación Matemática*, 2019. dirección: http://funes.uniandes.edu.co/14387/1/Torres2018Trenzas.pdf.

[8] L. A. P. Reyes, «Metáforas y desarrollo del pensamiento matemático: ¡cuanto antes mejor!» *Revista de Educación*, 2016. dirección: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=478055145002.

[9] M. Á. N. Pérez, «Trenzas y nudos,» *Revista de Matemáticas*, 2015. dirección: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/56152/1/Nudos_y_trenzas_NAVARRO_PEREZ_MIGUEL_ANGEL.pdf.

[10] A. Martina, «El patrimonio cultural de las trenzas a través del tiempo,» *Revista de Cultura y Sociedad*, vol. 15, n.º 3, págs. 45-60, 2020.

[11] M. M. C. María, «La noción de estructura en early algebra,» *Revista de Educación Matemática*, 2018. dirección: http://funes.uniandes.edu.co/13770/.

[12] M. Molina, «Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria,» *PNA*, vol. 3, n.º 3, págs. 78-89, 2009. dirección: https://doi.org/10.30827/pna.v3i3.6186.

[13] Shuttleworth, *Diseño de la investigación cuantitativa*, 2008. dirección: https://explorable.com/es/diseno-de-la-investigacion-cuantitativa.