

EFECTO CASIMIR: PREDICCIÓN Y ANÁLISIS

David Julián Cañón Carrillo

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias Y Educación
Licenciatura en Física
Bogotá D.C., Colombia
2021

EFECTO CASIMIR: PREDICCIÓN Y ANÁLISIS

David Julián Cañón Carrillo

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar por el título de:
Licenciado en física

Director Interno:
César Aurelio Herreño Fierro

Director Externo:
Nicolás Guillermo Avilán Vargas
Universidad Central
Departamento de Matemáticas

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Licenciatura en Física
Bogotá D.C., Colombia
2021

A mi padre y madre que siempre me apoyaron durante este hermoso trayecto ...

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer al profesor Alejandro Hurtado por enamorarme de la física con su mágica forma enseñar, al profesor Walter Pulido quien con su esfuerzo, vocación y trabajo logra llevar cada uno de sus cursos mucho más allá, siempre da lo mejor de sí para hacer grandes cuestiones de la física comprensibles, le agradezco por brindarme las bases teóricas que permitieron el desarrollo del presente trabajo, a Nicolás Avilán por su paciencia, por su apoyo constante, por su manera de enseñar la física, siempre supo como hacer ver las cosas un poco menos difíciles, lo cual me ayudo mucho en una comprensión más profunda de este trabajo, a César Herreño quién fué crucial para que mis proyectos sean una realidad, agradezco a unos tantos amigos y docentes que me apoyaron en el transcurso de la carrera, a todos infinitas gracias.

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio de la ecuación de Klein-Gordon su respectiva deducción, sus principales características, las anomalías que presentaba como ecuación de onda relativista, su interpretación en la teoría cuántica de campos y así determinar las propiedades del campo escalar desde esta. Se hará énfasis en el análisis de las fluctuaciones cuánticas del vacío, la energía de punto cero y el efecto Casimir. Desde el punto de vista matemático será necesario hacer uso de la técnica de Renormalización para resolver las divergencias en los cálculos de la energía del campo y así llegar a un resultado finito de la energía que produce la fuerza de Casimir, finalmente se revisarán algunas verificaciones experimentales del efecto y se analizan sus implicaciones.

Palabras clave: Efecto Casimir, teoría cuántica de campos, campo escalar, energía de punto cero.

CONTENIDO

RESUMEN III

CONTENIDO VI

1. INTRODUCCIÓN 1
- 1.1. Objetivos . . . 1
  - 1.1.1. Objetivo General . . . 1
  - 1.1.2. Objetivos Específicos . . . 2

2. ESTADO DEL ARTE 3
- 2.1. El concepto de la energía de punto cero *1911-1960* . . . 3
  - 2.1.1. La nueva hipótesis (1911) . . . 3
  - 2.1.2. Consecuencias de la energía de punto cero (1912-1927) . . . 3
  - 2.1.3. La energía de punto cero y sus efectos relacionados con la mecánica cuántica (1925-1933) . . . 4
  - 2.1.4. Efectos de la energía de punto cero (1943-1960) . . . 4
- 2.2. El efecto Casimir y su confirmación experimental (1948-1960) . . . 5
  - 2.2.1. Las fuerzas de London-van der Waals (1947) . . . 5
  - 2.2.2. El efecto Casimir . . . 6
  - 2.2.3. El efecto Casimir entre un cilindro y un plano (1952) . . . 6
  - 2.2.4. El efecto Casimir y la temperatura (1953-1954) . . . 6
  - 2.2.5. Confirmación del Efecto Casimir (1958-1960) . . . 7
- 2.3. Aplicaciones y Extensión del Efecto Casimir (1960-1998) . . . 7

3. PRELIMINARES 9
- 3.1. Nociones de Relatividad Especial . . . 9
- 3.2. Ecuación de Klein-Gordon . . . 12
  - 3.2.1. Interpretación de la ecuación de Klein-Gordon . . . 13
  - 3.2.2. Densidad de Probabilidad . . . 14

4. LA TEORÍA DEL CAMPO ESCALAR 15
- 4.1. Breve Introducción a La Teoría Cuántica de Campos . . . 15
  - 4.1.1. ¿Por qué campos cuánticos? . . . 15
  - 4.1.2. El límite a sistemas continuos . . . 16
- 4.2. Cuántización Canónica . . . 20
  - 4.2.1. El Oscilador Armónico . . . 20
  - 4.2.2. Cuantización Canónica para Campos . . . 22
  - 4.2.3. El Campo Escalar . . . 23
  - 4.2.4. El Operador Campo . . . 25
  - 4.2.5. La Ecuación de K-G en la Teoría Cuántica de Campos . . . 26
- 4.3. Tensor Momento-Energía: . . . 27

4.3.1. Traslación Espacio-temporal: 27
4.3.2. Transformación Infinitesimal: 28
4.3.3. Componentes del Tensor Momento-Energìa 30

5. EFECTO CASIMIR **33**
5.1. Configuración Placas Plano-Paralelas 33
5.1.1. Regularización y Renormalización 36
5.2. Verificaciones Experimentales 38

6. CONCLUSIONES **43**

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El *efecto Casimir ó fuerza de Casimir-Polder* es un efecto predicho por Hendrick Casimir y Dirk Polder en 1948 el cual resulta medible y en su versión más simple consiste en la interacción de dos placas conductoras neutras en el vacío, esta interacción se evidencia por la atracción de dichas placas la cual da lugar a una fuerza de atracción denominada *Fuerza de Casimir-Polder*. A pesar de la naturaleza cuántica de este fenómeno, esté se percibe a escalas macroscópicas el efecto comienza a tener relevancia para distancias de micrómetros, inclusive toma tanta preponderancia cuando la distancia entre las placas disminuye, que en la escala de los nanómetros la presión que ejerce este efecto sobre las placas es equivalente a una atmósfera. El modelo teórico que predice y explica este fenómeno está contenido en la Teoría Cuántica de Campos o en sus siglas en inglés *QFT*, la cual nace de la necesidad de generar un modelo teórico consistente con la *Mecánica Cuántica y la Teoría Especial de la Relatividad*. Con el desarrollo de cuantización de los estados energéticos del electrón, la segunda cuantización del campo electromagnético obteniendo el fotón y lo establecido por el principio de incertidumbre de Heisenberg donde la menor energía que puede existir en un sistema cuántico debe ser diferente a cero, nombrada por Planck como *Energía de punto cero*, se logra explicar el efecto Casimir el cual es una manifestación de dicha energía; donde las fluctuaciones cuánticas de energía de punto cero generan partículas virtuales que se crean y aniquilan por instantes muy cortos de tiempo generando lo que se conoce como *energía de vacío*, estas partículas son las responsables de generar la fuerza de Casimir sobre y entre las placas y finalmente como consecuencia la atracción entre ellas. Con esto en mente la QFT juega un papel fundamental en la explicación de dicho fenómeno debido que la teoría cuántica no permite el cambio del número de partículas en alguna interacción dado que no considera la relación de energía-masa establecida por la relatividad especial, ni la interacción de partículas a altas velocidades o altas energías, la QFT al modelar la energía de punto cero como n osciladores cuánticos sugiere que las fluctuaciones de energía están determinadas por la creación de estos osciladores de allí que la QFT sea una teoría consistente con este efecto y capaz de predecir y explicar muchos otros.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo General

- Reproducir la predicción del efecto Casimir desde el contexto de la teoría cuántica de campos e interpretar sus implicaciones.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Realizar un estudio de la teoría cuántica de campos, identificando la relación entre partículas y campos cuánticos para la teoría escalar.
- Deducir la ecuación de Klein-Gordon a partir de la necesidad de desarrollar una teoría cuántica relativista y estudiar sus soluciones.
- Construir la ecuación de Klein-Gordon desde el formalismo Lagrangiano y estudiar sus propiedades.
- Calcular el tensor momento-energía asociado al campo escalar.
- Evidenciar y resolver las divergencias en el cálculo de la energía del campo escalar.
- Presentar el efecto Casimir y analizar sus implicaciones.
- Revisar las verificaciones experimentales del efecto Casimir.

Capítulo 2

ESTADO DEL ARTE

El efecto Casimir descubierto en 1948 por *Hendrick Casimir* como un nuevo efecto cuántico macroscópico, había sido discutido incluso unas décadas antes que su descubrimiento, bajo un viejo efecto conocido como *Energía de punto cero* el cual fue sugerido por *Max Planck* en 1911 para explicar la energía mínima asociada al movimiento de las partículas atómicas; este concepto no solo fue usado para explicar la agitación de los átomos, también los físicos lo usaron para discutir las agitaciones del vacío y el movimiento de las partículas en el cero absoluto de temperatura.
Algunos físicos en las décadas siguientes acumulaban teorías y evidencia empírica de la energía de punto cero, otros negaban su existencia, incluso después de 1925 donde la mecánica cuántica ya se encontraba estructurada en gran parte y la cual estableció la energía de punto cero para los osciladores atómicos no logro solucionar la situación para siempre.
El contexto histórico del desarrollo del efecto Casimir el cual lleva 109 años se puede enmarcar en tres aspectos fundamentales: El concepto de la energía de punto cero, el efecto Casimir y su verificación experimental y por último sus aplicaciones y extensión a otros fenómenos.[1]

2.1. El concepto de la energía de punto cero *1911-1960*

2.1.1. La nueva hipótesis (1911)

[2]En Febrero del año 1911, *Max Planck* presenta para la *Sociedad Alemana de Física* una teoría sobre la temprana hipótesis cuántica la cual llamó '*nueva hipótesis de la radiación*' está consistió en asumir una absorción continua de la radiación como en la teoría clásica manteniendo la emisión de tipo cuántico como en la hipótesis inicial de 1901, una consecuencia inmediata de este proceder por parte de *Planck* fue obtener la energía de un oscilador como $h\nu/2$ en lugar de cero a la temperatura del cero-absoluto. *Planck* nombró a esta energía como '*energía residual*' luego la renombró como '*energía de punto cero*' la cual atribuyó a todos los movimientos oscilatorios de las partículas ó tipos de movimiento como los de rotación entre otros.

2.1.2. Consecuencias de la energía de punto cero (1912-1927)

[3] En las décadas siguientes a la nueva hipótesis de *Planck* algunos físicos derivan algunas consecuencias interesantes de esta:

a) *Walther Nerns* y *Frederick A. Lindemann* (1911) encontraron que sus datos del calor específico para substancias a bajas temperaturas había sido descrita de la manera correcta por la nueva hipótesis de *Planck* en lugar de la fórmula propuesta por *Einstein* en 1907 la cual consideraba cuantos enteros de energía. Poco después,

Peter Debye (1912) por un lado y *Max Born y Theodor Von Kármán* (1912 y 1913) por otro, encontraron de manera diferentes teorías cuánticas consistentes con el calor específico, evitando el uso de la energía de punto cero.

b) *Albert Einstein y Otto Stern* (1913) explicaron los datos de *Arnold Eucken* sobre el calor específico del hidrógeno molecular a bajas temperaturas asumiendo la energía de punto cero para una molécula en rotación. *Paul Ehrenfest* (1913) contradice su afirmación proponiendo una descripción libre de la energía de punto cero para los mismos datos.

c) *Otto Stern* (1913-1919) calculó la presión de vacío de los sólidos y la constante química de los gases monoatómicos con energía de punto cero. Luego *Frederick A. Lindemann and Francias W. Aston* (1919) no obtuvieron una separación isotópica experimentalmente para el neón, lo cual explicaron como un efecto de la energía de punto cero.

d) *Robert S. Milliken* (1924) encontró números semi cuánticos en los espectros vibracionales del $B^{10}O$ y $B^{11}O$, confirmando directamente el resultado original por parte de *Planck*.

2.1.3. La energía de punto cero y sus efectos relacionados con la mecánica cuántica (1925-1933)

[4] Con los avances obtenidos por la reciente mecánica cuántica sus principales autores obtuvieron algunas interpretaciones respecto a la energía de punto cero

a) *Werner Heisenberg* (1925) en su artículo pionero sobre mecánica cuántica demostró teóricamente que el oscilador armónico tenía como energía fundamental la energía de punto cero de $h\nu/2$.

b) *Erwin Schrödinger* (1926) mostró que una molécula de hidrógeno giratoria no poseía energía de punto cero lo que permitió que *David M. Dennison* (1927) explicara el calor específico para los datos del hidrógeno molecular, después *Heisenberg y Friedrich Hund* introdujeron el spin para el protón.[5]

c) *Enrico Fermi* (1926) encontró que su estadística para electrones conduce a valores finitos para la presión de punto cero y para la energía de punto cero. *Arnold Sommerfeld* (1927-28) usó esta explicación de manera eficaz para su nueva teoría sobre electrones en metales.

d) *Wolfgang Pauli* (1933) en contraste con sus colegas hizo una crítica a la validación general al concepto de energía de punto cero, especialmente a la teoría de la radiación.[6]

2.1.4. Efectos de la energía de punto cero (1943-1960)

[7] En un artículo de 1943 el Físico-químico *Klaus Clusius* quien era un especialista en separación de isótopos de la Universidad de Munich, señaló algunas confirmaciones experimentales de la energía de punto cero:

1. La existencia del helio superfluido.
2. La energía de punto cero de rotación para las redes en las moléculas de metano.
3. Energía de punto cero en presión de vapor.

4. Energía de punto cero en equilibrio químico.

5. Energía de punto cero de electrones en los metales.
   Entre 1938 y 1960 la función de la energía de punto cero en la mecánica cuántica comenzó a tener claridad[8]:

   a) *Hendrik Kramers* en 1938 en su artículo *Quantentheorie des Elektrons und der Strahlung* enfatizó en que la Hermetización para los operadores de la mecánica cuántica no era única.

   b) *Gian Carlo Wick* (1950) propuso el llamado *Producto de Wick* el cual consiste en un ordenamiento que coloca a los operadores creación a la izquierda de los operadores aniquilación, aunque este producto en un principio no incluyó los términos que contienen a la energía de punto cero, en 1960:

   c) *Charles Enz y Armin Thellung* mostraron que a pesar de haber sido suprimidos estos términos en el producto de Wick, los efectos conocidos como la presión de vacío y el efecto Casimir seguían la mecánica cuaántica; es decir la mínima energía cinética que permite el principio de indeterminación es llamada energía de punto cero.[9]

2.2. El efecto Casimir y su confirmación experimental (1948-1960)

El desarrollo del efecto Casimir fue originado por diferentes pasos entre 1947 y 1960, este tuvo un comienzo dado por introducir una corrección a una fuerza molecular que era bastante conocida; esta corrección se reconoció como el efecto de la energía de punto cero de donde se extendió el concepto y luego de varios intentos se estableció experimentalmente el efecto.

2.2.1. Las fuerzas de London-van der Waals (1947)

[10] En 1947 la *Physical Review* recibió un comunicado del *Natuurkundig Laboratorium of Philips Gloeilampenfabrieken in Eindhoven* con el título *The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces* los autores; *Hendrik Casimir y D. Polder* calcularon la influencia de retardo sobre la energía de interacción entre dos átomos investigada por la electrodinámica cuántica, obtuvieron como resultado que el usual potencial atractivo para el caso estático proporcional a R^{-6} (siendo R la distancia de separación entre átomos neutros o moléculas con polarización estática α_1 y α_2) fue reemplazado por una ley de R^{-7}.

$$\delta E = -\frac{23}{4\pi}\frac{\hbar\alpha_1\alpha_2}{R^7} \tag{2.1}$$

En una situación un poco más simple para la interacción entre un átomo neutro y un plano perfectamente conductor los autores encontraron el resultado:

$$\delta E = -\frac{3}{4\pi}\frac{\hbar\alpha}{R^4} \tag{2.2}$$

Este efecto de retardo luego fue conectado con el *'Efecto Casimir'* especialmente luego de que Casimir reportará que la expresión obtenida podría ser derivada por medio de la electrodinámica clásica debido al cambio de la energía electromagnética de punto cero.[11]

2.2.2. El efecto Casimir

[12] En el artículo *On the attraction of two perfectly conducting plate* publicado por *Casimir* para la *Amsterdam Academy of Sciences* un año después del resultado hallado con *Polder*, el autor sugirió un procedimiento mucho más simple para poder derivar el resultado hallado con su compañero un año antes. Casimir consideró una cavidad encerrada por paredes perfectamente conductora la cual contenía modos de onda de la forma $E_0(x)sin(\omega t)$; cuando un átomo de momento eléctrico αE cuyas dimensiones atómicas son $<< c/\omega$ es colocado en la cavidad, la frecuencia del modo de onda se cambia por la cantidad

$$\delta\omega = \frac{2\pi\alpha E_0^2(x,y,z)}{\int\int\int E_0(x,y,z)dxdydz} \tag{2.3}$$

Ahora bien, aunque la energía de punto cero $W_0 = \frac{1}{2}\hbar\sum\omega$ es en principio infinita, la diferencia de energía permanece finita y asume el valor de la ecuación (2.1), es decir

$$\delta E = \delta_R W_0 - \delta_\infty W_0 \tag{2.4}$$

Donde R es la distancia entre el átomo y la pared de la cavidad, de manera similar el obtuvó un resultado para un plano a una distancia a de la pared de la cavidad con L el diámetro de la cavidad:

$$\delta E = -\hbar c\frac{\pi^2}{720}\frac{L^2}{a^3} \tag{2.5}$$

produciendo como resultado una fuerza atractiva por cm^2,

$$F = \hbar c\frac{\pi^2}{240}\frac{1}{a^4} = 0{,}013\frac{1}{a^4}\frac{dinas}{cm^2} \tag{2.6}$$

Sí a se midió en micrómetros 'Aunque el efecto pueda ser pequeño, una verificación experimental no parece factible y podría ser de cierto interés' concluyó Casimir en su artículo.

2.2.3. El efecto Casimir entre un cilindro y un plano (1952)

[13] 4 años después del propuesto efecto Casimir; *H.G. van Bueren* también de *Eindhoven Philips Labroartories* calculó el efecto entre una placa conductora y un cilindro conductor de radio r_0 a una distancia R, obteniendo también una relación de R^{-4} para la fuerza donde:

$$F = \hbar c\frac{3}{4\pi}\frac{r_0^2}{R^5} = 8 * 10^{-6} \tag{2.7}$$

Debido a que R y r_0 están medidos en micrómetros el valor de interacción era aún muy pequeño para ser medible señaló el autor finalmente.

2.2.4. El efecto Casimir y la temperatura (1953-1954)

[14] *E.M. Lifshitz* hizo los desarrollos teóricos considerando un medio macroscópico en un campo eléctrico fluctuante generalizando los anteriores resultados para medios con constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 respectivamente, en el caso de dos medios iguales a una distancia l encontró:

$$F = \hbar c\frac{\pi^2}{240}\frac{1}{l^4}\left[1 - \frac{48}{9}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4\right] \; para\; pequeños\; \frac{lT}{\hbar c} \tag{2.8}$$

y

$$F = \frac{T}{8\pi}\frac{1}{l^3}\left(\epsilon_0 - \frac{1}{\epsilon_0} + 1\right)^2 \; para\; grandes\; \frac{lT}{\hbar c} \tag{2.9}$$

I.I. Abrikosova y B.V. Deriagin en 1953 en Moscú realizaron los cálculos para el caso de dos láminas de cuarzo con lo que posteriormente se confirmó dichos resultados por un estudio hecho en Londres por *J.A Kitchener y A.P. Prosser* en 1956.

2.2.5. Confirmación del Efecto Casimir (1958-1960)

[15] En el año 1958, *M.J. Sparnaay* de *Philips Research Laboratories* presentó un artículo titulado *Measurement of attractive forces between flat plates* el cual contenía la primera medición del original efecto Casimir de 1948, sus mediciones confirmaban completamente las predicciones de Casimir. Dos años más tarde en la *Pauli Memorial Meeting* en Suiza, *Markus Fierz* (1960) evaluó la dependencia de la temperatura del efecto y mostró la distancia crítica para la cual a temperatura ambiente ($T = 300K$) el efecto corresponde prácticamente a $T = 0$ de lo cual obtuvo

$$a = \hbar ckT = 1{,}2 * 10^{-4} cm \tag{2.10}$$

Sparnaay usó distancias para a entre $0{,}5 * 10^{-4} y 2 * 10^{-4} cm$ por lo cual sus medidas reproducen la teoría correctamente debido a que la radiación de temperatura aun no influía.

2.3. Aplicaciones y Extensión del Efecto Casimir (1960-1998)

Antes de la década de 60‘s el efecto Casimir era estudiado solo por un pequeño grupo de investigadores de Eindhoven y de Moscú, sin embargo en las décadas siguientes el efecto comenzó a tener una gran atención como un tópico fascinante para la comunidad científica obviamente el estudio se vio incrementado debido al interés del estudio detallado de las fuerzas moleculares, por lo cual el efecto Casimir comenzó a tener un gran alcance a nivel mundial. A mediados de los años 1970 un nuevo e inesperado tópico se unió al estudio de la energía de punto cero, cuando los cosmólogos se interesaron por *La energía del vacío cuántico* en un artículo de *L.H. Ford* titulado *Quantum vacuum energy in general relativity* cuyo resumen comienza con las palabras.[16]

> 'The vacuum energy of a quantized field in a non-Minkowskian spacetime is discussed. The approach taken emphasizes the analogy between this vacuum energy and the energy of the vacuum state of the quantized electromagnetic field in the presence of a pair of parallel conducting plates, the Casimir energy.'

Es así como en el caso de sistemas con fronteras materiales, las variedades topológicas también poseen valores de energía de vacío diferente de cero, desde entonces los escenarios cosmológicos inflacionarios comenzaron a ser visualizados desde una emocionante perspectiva la cual contiene al efecto Casimir como principal herramienta de investigación para estudiar las propiedades físicas locales del vacío de estas estructuras.[17]
Las aplicaciones del efecto Casimir en los últimos años han sido extendidos a un gran rango de fenómenos físicos, artículos escritos que incluyen diversos tópicos como; La fuerza de Casimir, el calor específico para películas críticas, el efecto Casimir en espacios curvos, el efecto Casimir para partículas elementales, entre otros. [18]

Capítulo 3

PRELIMINARES

Con el nacimiento de la *Mecánica Cuántica* surge contemporáneamente la *Teoría Cuántica de Campos* o *QFT* por sus siglas en inglés (*Quantum Field Theory)*; está teoría como se ha nombrado anteriormente es el marco consistente que logró hacer compatible la *Relatividad Especial* con la *Mecánica Cuántica* aunque desde una perspectiva algo diferente. En lugar de describir al sistema como lo hace la mecánica cuántica por medio de la función de onda Ψ, donde su evolución temporal está dictada por la ecuación de *Schrödinger*:

$$\hat{H}\Psi = i\partial_t\Psi \tag{3.1}$$

Sin embargo la ecuación (3.1) no puede describir procesos en los cuales existe un intercambio en el número de partículas, ademas de esto las ecuaciones de onda relativistas sufren algunas patologías como la aparición de densidad de probabilidad negativa, la existencia de energía negativa y violación de causalidad como veremos más adelante.
La *Teoría Cuántica de Campos* proporciona un marco natural para manejar un número variable de partículas, da sentido a las soluciones de energía negativa interpretandola como las anti-partículas, además resuelve el problema de la causalidad donde la propagación de una partícula fuera del cono de luz es indistinguible de su antipartícula viajando en dirección opuesta y sus amplitudes se cancelan.[19] En este capítulo veremos las nociones generales que permitieron construir desde la relatividad especial la ecuación de Klein-Gordon, haciendo uso de la notación tensorial con la cual en el siguiente capítulo construiremos la densidad lagrangiana hallando sus propiedades y finalmente la explicación del *Efecto Casimir* desde la *QFT*.

3.1. Nociones de Relatividad Especial

Parece sorprendente, pero históricamente uno de los principios en los que se fundamenta la relatividad especial es incluso más antiguo que la mecánica clásica de *Newton*. Fue formulado por *Galileo Galilei (1564-1642)* alrededor de 1600[20], como un argumento en la discusión del heliocentrismo contra el geocentrismo. Quienes defendían al geocentrismo eran fieles de la física de Aristoteles y la astronomía de Ptolomeo, argumentaban que si fuera cierto que si la tierra se mueve alrededor del sol y alrededor de su eje ¿por qué no lo notamos? como respuesta a este argumento *Galilei* introdujo una nueva idea: la *inercia*[21]. De sus múltiples experimentos con bolas rodando sobre planos inclinados llegó a la conclusión de que una masa en movimiento uniforme rectilíneo mantendrá eternamente este movimiento mientras no actúe ninguna fuerza exterior sobre ella (formuló de manera cualitativa la segunda ley de *Newton*), además de esto, Galilei formuló algunos ejemplos llegando a la conclusión de que un observador no es capaz de determinar si él está en un sistema que se encuentra en reposo o en movimiento uniforme y rectilíneo. El observador podrá hacer una gran cantidad de experimentos y los resultados serán los mismos en movimiento (uniforme) o en reposo. A este principio se le llama *Principio de*

Relatividad.
La relatividad especial de *Einstein* se fundamenta en 2 principios; uno de estos es el principio de relatividad pero formulado de una manera distinta. Se define como *sistema inercial* a todo sistema de referencia que está en reposo o en movimiento uniforme y rectilíneo respecto a un sistema que ha sido previamente elegido como inercial y es en este conjunto de sistemas inerciales donde es válido el principio de relatividad, por lo tanto este queda formulado como:

1. Todas las leyes de la física deben ser las mismas para todos los sistemas de referencia inerciales.

   El segundo principio es algo más abstracto, basado en el éxito de las leyes de *Maxwell* en la descripción de una gran variedad de fenómenos electromagnéticos *Einstein* pone fin a la existencia del *éter luminífero*, ya que de existir las leyes de Maxwell las cuales predicen la velocidad de la luz en el vacío y que no necesitan de un observador para determinarla, deberían modificarse en función del estado de movimiento de un observador con respecto al éter; como consecuencia de esto no solo se establece la constancia de la velocidad de la luz además se pone de manifiesto un límite impuesto por la naturaleza donde ninguna interacción u objeto físico podrá viajar más rápido que la luz. El segundo principio en el cual se basa la relatividad especial se postula como:

2. La velocidad de la luz es invariante, posee la misma magnitud en el vacío para todos los sistemas de referencia inerciales.

El primer postulado implica que las leyes de la física deben ser independientes del sistema de referencia escogido, de tal manera que sí se conocen las leyes que gobiernan en un sistema de referencia elegido, deben conocerse cómo transforman sus observables tal que se cumplan exactamente las mismas leyes, el grupo de transformaciones que cumplen con estas condiciones se le llaman transformaciones de Poincaré, las cuales se reducen al grupo de Lorentz para $x^0 = 0$. Para estudiar las consecuencias que implican estas transformaciones es más fácil, compacta y comprensible la notación relativista basada en los tensores[22].

- **Notación Relativista**
  Las coordenadas relativistas de un punto en el espacio-tiempo, *Espacio de Minkowski*, se definen como: $x^\mu = (ct, x, y, z)$ o en su forma indicial $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ forman un vector contravariante llamado cuadrivector *posición* siendo su primera componente x^0 *temporal* y sus otras tres x^1, x^2, x^3 componentes *espaciales* de dicho cuadrivector. Aquí cuando veamos índices griegos estos van de 0 a 3 mientras que para los índices latinos estos corren de 1 a 3.
  Análogamente se define el cuadrivector momentum-energía como $p^\mu = (E/c, \vec{p})$, siendo $p^0 = E/c$ la componente *temporal* del cuadrimomento y $\vec{p}$ las componentes *espaciales* tal que: $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3) = (p_x, p_y, p_z)$.
  Ahora, dados los postulados de la relatividad especial (principio de relatividad) el grupo de transformaciones de coordenadas de un evento en el espacio-tiempo para un observador inercial Σ a un observador en un sistema de referencia Σ' que se mueve con velocidad constante v respecto a Σ en dirección x, las cuales cumplen con los dos postulados de la relatividad especial y dejan el producto escalar entre cuadrivectores invariante son[22]:

  $$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} \tag{3.2}$$

  Siendo Λ la matriz de transformación de Lorentz para un boost en el eje x^1 que se define:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Con $\beta = v/c$ y $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. Escribiendo (3.1) en forma matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Cabe aclarar que al igual que en el espacio euclídeo, en el espacio de Minkowski el producto interno y cualquier escalar son invariantes bajo las transformaciones de Lorentz[19]. Para hallar el producto interno entre los cuadrivectores definimos el tensor métrico así:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

El tensor métrico permite pasar de las componentes covariantes (índices abajo) a las contravariantes (índices arriba) o viceversa, estos últimos términos hacen referencia de manera general a la idea de los vectores duales en el espacio de Minkowski de un tensor o cuadrivector es decir en términos de matrices los tensores covariantes son los inversos a los contravariantes. La métrica permite hallar la norma de un cuadrivector y el producto interno entre ellos. Comencemos con la norma del cuadrivector:

$$x \cdot x = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{3.6}$$

Ahora para el sistema de referencia Σ'

$$x' \cdot x' = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 \tag{3.7}$$

Haciendo uso de la ecuación (3.3) tenemos:

$$x' \cdot x' = (\gamma x^0 - \beta\gamma x^1)^2 - (\gamma x^1 - \beta\gamma x^0)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

$$x' \cdot x' = (\gamma x^0)^2 + (\beta\gamma x^1)^2 - 2\beta\gamma^2 x^0 x^1 - (\gamma x^1)^2 - (\beta\gamma x^0)^2 + 2\beta\gamma^2 x^0 x^1 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

$$x' \cdot x' = (\gamma x^0)^2 + (\beta\gamma x^1)^2 - \cancel{2\beta\gamma^2 x^0 x^1} - (\gamma x^1)^2 - (\beta\gamma x^0)^2 + \cancel{2\beta\gamma^2 x^0 x^1} - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

$$x' \cdot x' = \gamma^2((x^0)^2 - (x^1)^2) - \beta^2\gamma^2((x^0)^2 - (x^1)^2) - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

$$x' \cdot x' = (\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)((x^0)^2 - (x^1)^2) - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

$$x' \cdot x' = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x \cdot x \tag{3.8}$$

Queda demostrado en (3.7) que la norma de un cuadrivector es invariante bajo la transformaciones de Lorentz. Miremos que sucede con el producto interno entre ellos:

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \tag{3.9}$$

Ahora para el sistema de referencia Σ'

$$x' \cdot y' = g_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu = x'^0 y'^0 - x'^1 y'^1 - x'^2 y'^2 - x'^3 y'^3 \tag{3.10}$$

Haciendo uso nuevamente de la ecuación (3.3) tenemos:

$$x' \cdot y' = (\gamma x^0 - \beta\gamma x^1)(\gamma y^0 - \beta\gamma y^1) - (\gamma x^1 - \beta\gamma x^0)(\gamma y^1 - \beta\gamma y^0) - (x^2 y^2) - (x^3 y^3)$$

$$x' \cdot y' = \gamma^2 x^0 y^0 - \cancel{\beta\gamma^2 x^0 y^1} - \cancel{\beta\gamma^2 x^1 y^0} + \beta^2\gamma^2 x^1 y^1 - \gamma^2 x^1 y^1 + \cancel{\beta\gamma^2 x^1 y^0} + \cancel{\beta\gamma^2 x^0 y^1} - \beta^2\gamma^2 x^0 y^0 - (x^2 y^2) - (x^3 y^3)$$

$$x' \cdot y' = \gamma^2(x^0 y^0 - x^1 y^1) - \beta^2\gamma^2(x^0 y^0 - x^1 y^1) - (x^2 y^2) - (x^3 y^3)$$

$$x' \cdot y' = (\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)(x^0 y^0 - x^1 y^1) - (x^2 y^2) - (x^3 y^3)$$

$$x' \cdot y' = (x^0 y^0) - (x^1 y^1) - (x^2 y^2) - (x^3 y^3) = x \cdot y \tag{3.11}$$

El producto interno entre la métrica covariante y la contravariante es: $g_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} = \delta^\alpha_\mu$ Sucede así que un cuadrivector o tensor covariante, se diferencia de uno contravariante en que las componentes espaciales cambian de signo.
Definimos ahora el cuadrivector derivada:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial x^0, \vec{\nabla}) \qquad\qquad \partial^\mu = (\partial x^0, -\vec{\nabla}) \tag{3.12}$$

Con lo cual el operador D'Alembertiano se define de la forma:

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \nabla^2 = \Box^2 \tag{3.13}$$

3.2. Ecuación de Klein-Gordon

A principios del siglo XX se fundamentaron las dos más grandes teorías que se encuentran hoy en física; por un lado tenemos la teoría especial y general de la relatividad y por el otro la mecánica cuántica.
Durante el desarrollo de la teoría cuántica se realizaron ecuaciones de onda para la función de onda propuesta por Schrödinger que fueran consistentes con el principio de relatividad, (covarianza Lorentz). El mismo Schrödinger presentó una ecuación de onda relativista la cual rechazó por algunas inconsistencias que presentaba, por tal razón se quedó con su versión para sistemas con bajas velocidades; hoy a esta primera versión de dicha ecuación de onda relativista se le conoce como ecuación de Klein-Gordon desarrollada por Oscar Klein y Walter Gordon en 1926, este trabajo fue el primer intento por unificar la teoría cuántica y la teoría especial de la relatividad, trabajo que se culmina con los desarrollos hechos por Paul Dirac y la teoría cuántica de campos[22].
La descripción de fenómenos en donde estén implicadas altas velocidades o altas energías que involucren partículas, requieren el análisis de ecuaciones de onda relativistas; esta transición requiere la reinterpretación de algunos conceptos no relativistas. Si miramos la ecuación de onda de Schrödinger (3.14), para una partícula libre encontramos que no aparece la velocidad de la luz en esta ecuación, de igual manera no hay ningún término que impida que la partícula puede moverse a la velocidad de luz o a una velocidad superior.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{t})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \tag{3.14}$$

Esta ecuación de onda, no es covariante ya que bajo transformaciones de Lorentz no permanece invariante, por lo cual se presenta en este trabajo la ecuación de Klein-Gordon que toma en cuenta los efectos relativistas y es compatible con ambas teorías[22].
El objetivo principal de la ecuación de Klein-Gordon fue desarrollar una ecuación de onda

relativista, lo que se logró mediante el procedimiento canónico de la mecánica cuántica; es decir otorgar un operador mecanocuántico a las variables dinámicas[23] y obtener la ecuación de conservación e equivalencia masa-energía de Einstein.

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla \tag{3.15}$$

$$\hat{E} = i\hbar\partial_t \tag{3.16}$$

$$\hat{p}^\mu \to (\hat{E}/c, \hat{\mathbf{p}}) \qquad \hat{p}_\mu\hat{p}^\mu = \hat{E}^2/c^2 - \hat{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 \qquad \hat{E}^2/c^2 = \hat{\mathbf{p}}^2 + m^2c^2 \tag{3.17}$$

Reemplazando (3.15) y (3.16) en (3.17) tenemos:

$$\to \frac{-\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2\nabla^2\Psi + m^2c^2\Psi \tag{3.18}$$

Dividiendo (3.18) por $\hbar^2$ y haciendo el respectiva álgebra y reemplazos obtenemos:

$$(\Box^2 + \mu^2)\Psi = 0 \;\; Con \;\; \mu^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \tag{3.19}$$

Siendo (3.19) la ecuación de Klein-Gordon, donde esta ecuación es local y covariante Lorentz[24], analizamos sus limitaciones y su interpretación en la mecánica cuántica.

3.2.1. Interpretación de la ecuación de Klein-Gordon

La solución a la ecuación de K-G está dada por una función de Ψ de la siguiente forma[23]:

$$\Psi(x^\mu) = e^{-(i/\hbar)p\cdot x} \tag{3.20}$$

Realizando el producto entre el cuadri-momento y el vector cuadri-posición (considerando el problema en una sola dimensión espacial) tenemos que:

$$p_\mu x^\mu = p^0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x} \tag{3.21}$$

ahora calculamos las derivadas para reemplazar este resultado en la ecuación (3.19)

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x^0} = \frac{\partial(e^{(-i/\hbar)(p^0x^0-\vec{p}\cdot\vec{x})})}{\partial x^0} = -\frac{i}{\hbar}p^0e^{(-i/\hbar)(p^0x^0-\vec{p}\cdot\vec{x})}$$

$$= -\frac{i}{\hbar}p^0\Psi \to \frac{\partial^2\Psi}{\partial(x^0)^2} = -\frac{(p^0)^2}{\hbar^2}\Psi \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial(e^{(-i/\hbar)(p^0x^0-\vec{p}\cdot\vec{x})})}{\partial x} = \frac{i}{\hbar}pe^{(-i/\hbar)(p^0x^0-\vec{p}\cdot\vec{x})} = \frac{i}{\hbar}p\Psi \to \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{-p^2}{\hbar^2}\Psi \tag{3.23}$$

Donde $p = (p^0, \vec{p})$, recordando (3.17) $p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2c^2$ y sabiendo que $E = cp^0$. Reemplazando (3.22) y (3.23) en (3.19) tenemos:

$$(E^2 - (\vec{p})^2)\Psi = \mu^2\Psi \tag{3.24}$$

$$E^2 = p^2 + \mu^2 \to E = \pm\sqrt{p^2 + \mu^2} \tag{3.25}$$

Aquí la solución para la ecuación de onda tiene sus primeras inconsistencias, la energía puede tomar valores negativos lo que genera sistemas inestables, no argumentaba el hecho de establecer un estado fundamental para la energía del electrón; la energía de un sistema de electrones no estaba acotada inferiormente; cuestiones que no tuvieron interpretación adecuada hasta que Paul Dirac postuló la antimateria.

3.2.2. Densidad de Probabilidad

Ahora analizamos que se puede concluir para la densidad de probabilidad para la ecuación de K-G. Haciendo uso de la ecuación de continuidad[22]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^0} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{3.26}$$

Donde la *densidad de probabilidad* se define como[25]:

$$\rho = \Psi^* \Psi = [\Psi]^2 \tag{3.27}$$

Junto con la corriente de probabilidad que se define como[25]:

$$\vec{J} = -i\hbar \left(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^* \right) \tag{3.28}$$

Lo que implica que $\nabla \cdot \vec{J}$ sea:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -i\hbar \left(\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^* \right) \tag{3.29}$$

Despejando de la ecuación (3.19) $\nabla^2 \psi$ y reemplazando en (3.29):

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial (x^0)^2} + \mu^2 \Psi$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -i\hbar \left(\Psi^* \left(\nabla^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial (x^0)^2} + \mu^2 \Psi \right) - \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial (x^0)^2} + \mu^2 \Psi^* \right) \right) \tag{3.30}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -i\hbar \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial (x^0)^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial (x^0)^2} \right) \tag{3.31}$$

Reemplazando (3.31) en la ecuación de continuidad (3.26):

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^0} = i\hbar \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial (x^0)^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial (x^0)^2} \right) \tag{3.32}$$

Se define la densidad de probabilidad ρ como:

$$\rho = i\hbar \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^0} \right) \tag{3.33}$$

Desarrollando (3.33) con la solución propuesta para la ecuación de K-G (3.20):

$$\Psi(x^\mu) = e^{-(i/\hbar)(p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \qquad \Psi^*(x^\mu) = e^{(i/\hbar)(p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} = -\frac{i}{\hbar} p^0 \Psi \qquad \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^0} = \frac{i}{\hbar} p^0 \Psi \tag{3.35}$$

$$\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} = -\Psi^* \frac{i}{\hbar} p^0 \Psi = -\frac{i}{\hbar} p^0 \qquad \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^0} = \Psi \frac{i}{\hbar} p^0 \Psi = \frac{i}{\hbar} p^0 \tag{3.36}$$

$$\rho = i\hbar \left(-\frac{i}{\hbar} p^0 - \frac{i}{\hbar} p^0 \right) = 2p^0 = \frac{2}{c} E \rightarrow E = \pm \sqrt{p^2 + \mu^2} \tag{3.37}$$

Donde para la ecuación de K-G también existe la posibilidad de tener densidades de probabilidad negativa, es decir la ecuación no está relacionada con una única partícula; lo que terminó con su rechazo como ecuación de onda relativista para la mecánica cuántica. Problema que se soluciona al pasar a una teoría cuántica de campos en lugar de partículas.

Capítulo 4

LA TEORÍA DEL CAMPO ESCALAR

Las teorías de campos como el electromagnetismo o la relatividad general son eficientes ya que trabajan con sistemas en el número de grados de libertad son infinitos[27], esto quiere decir que el número de partículas con el que se trata es muy grande, por otro lado el objeto con el que se pueden estudiar estos sistemas se les conoce como campos; por una parte con la interpretación de campo (clásico), la interacción entre partículas ya no ocurre de manera instantánea, en lugar de ello la interacción viaja con una velocidad finita definida por la perturbación del campo punto a punto.
En este capítulo presentaremos una introducción a la (QFT), pasando por los sistemas clásicos discretos al límite de los sistemas continuos para llegar a la ecuación de onda, de donde se obtiene naturalmente la densidad lagrangiana la cual nos permite deducir las propiedades del campo escalar, finalizando con la cuantización canónica para sistemas discretos y continuos construyendo la ecuación de *Klein-Gordon* y el operador campo para estudiar el efecto Casimir desde la (QFT)

4.1. Breve Introducción a La Teoría Cuántica de Campos

4.1.1. ¿Por qué campos cuánticos?

La *QFT* combina la mecánica cuántica y la relatividad especial es decir estudia los sistemas cuánticos con efectos relativistas que son importantes, razón suficiente para ser una teoría de gran importancia con aplicaciones en la física contemporánea, es fundamental para el estudio de la física de partículas y la resolución de una gran número de problemas atómicos.
Debido a los problemas que sufren las ecuaciones de onda relativistas como veremos más adelante, fue necesario generar una teoría donde el objeto de estudio no estuviera etiquetado por medio de la posición y de momentum debido a que no siempre trabajaremos con sistemas en los que el número de partículas permanece fijo, es decir con un gran número de grados de libertad, en la teoría cuántica de campos (QFT) las partículas pueden crearse y/o destruirse y la única manera hasta el momento consistente con los postulados de la mecánica cuántica y de la relatividad especial es estudiar este fenómeno por medio de campos cuánticos, consecuencia inmediata de esta teoría es que el comportamiento cuántico de un campo continuo coincide con el de un sistema de un gran número de partículas[27]. Por otro lado en una teoría de campos lo fundamental no es la función de onda ψ, en lugar de ello lo importante es la dinámica del espacio-tiempo. En ese nuevo enfoque la variable el operador cuántico asociado a la variable ψ, es un campo, que no necesita dar lugar a una densidad de probabilidad positiva[28].

4.1.2. El límite a sistemas continuos

Dado que vamos a trabajar con una *teoría de campos*, las distintas partículas no interactúan directamente entre ellas, en lugar de esto usan los campos como los transportadores de las interacciones físicas; en este sentido un campo físico es realmente el intermediario a través del cual las distintas partículas interactúan unas con otras a grandes distancias[29].

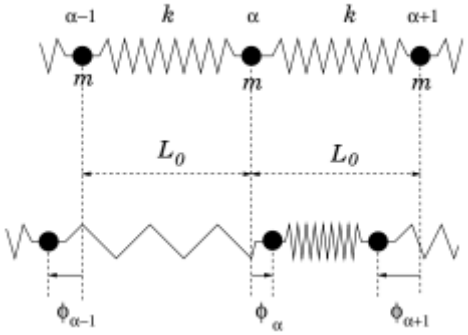


Figura 1: Una serie de masas m están conectadas a travás de muelles con constante k y posición de equilibrio L_0. En la situación de equilibrio (arriba) las masas están separadas por la distancia L_0 En la situación general (abajo) el desplazamiento de la masa m de la posición de equilibrio está caracterizado por ϕ_α.[29]

Conceptualmente las teorías de campos contienen algunas diferencias con los sistemas discretos, sin embargo es útil estudiar la conexión con la mecánica analítica discreta, antes de pasar a los campos. Por lo tanto partiremos de un modelo discreto (un número finito de grados de libertad) a un sistema con un número de infinitos grados de libertad (campo), aunque aumentar los grados de libertad no simboliza cambiar las tecnicas utiles para su estudio, aquí aplicaremos el formalismo lagrangiano, considerando la manera más adecuada de adaptarlo al límite continuo.

Consideremos un sistema que consiste en un número infinito (pero contable) de masas iguales m alineadas a lo largo del eje x y conectadas por muelles idénticos de tamaño L_0 y constante elástica k. Restringimos el movimiento (para facilitar cálculos) en la dirección x (Figura 1). Tomando como coordenada generalizada $q_\alpha(t)$ la posición de la α-ésima masa m

$$q_\alpha(t) = \alpha L_0 + \phi_\alpha(t) \tag{4.1.1}$$

Donde el índice α corre de $-\infty$ a ∞ y $\phi_\alpha(t)$ mide la desviación de la posición de equilibrio. Las velocidades generalizadas están dadas por $\dot{q}_\alpha = \dot{\phi}_\alpha$. La energía potencial elástica viene dada por:

$$V = \frac{1}{2}\sum_\alpha k(\phi_{\alpha+1} - \phi_\alpha)^2 \tag{4.1.2}$$

Por lo tanto el lagrangiano vendrá dado por:

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha \left(m\dot{\phi}_\alpha^2 - k(\phi_{\alpha+1} - \phi_\alpha)^2\right) \tag{4.1.3}$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha L_0 \left(\frac{m}{L_0}\dot{\phi}_\alpha^2 - kL_0\left(\frac{\phi_{\alpha+1} - \phi_\alpha}{L_0}\right)^2\right) \tag{4.1.4}$$

Se ha sacado como factor común a L_0 por razones que se harán claras más adelante cuando se analice el límite cuando L_0 tiende a cero.En el límite al continuo como primera observación es

que en este caso la distribución de masas se hace continua y el sistema de masas conectadas por muelles tiende a una varilla elástica con cierta densidad de masa $\rho = m/L_0$. . El índice discreto α que hace referencia a la α-ésima masa, se convierte en una variable continua x, indicando los puntos a lo largo de la varilla, la coordenada generalizada $\phi_\alpha(t)$ que indica el desplazamiento de la masa, α se convierte en una función $\phi(x,t)$ del desplazamiento de la cantidad infinitesimal de masa dm a lo largo de la varilla.[29]
De este modo hemos pasado de una teoría con un número discreto de grados de libertad a una teoría con un número continuo de grados de libertad, en otras palabras a una teoría de campos[29]. En las teorías de campos las cantidades fundamentales, las que hacen el papel de coordenada generalizada, son los campos $\phi(x,t)$ y no las posiciones x; las posiciones x no son más que una etiqueta continua para distinguir los diferentes grados de libertad ϕ.
Ahora observemos cómo se transforma el lagrangiano (4.1.4) con las anteriores observaciones; en el límite donde $L_0 \to 0$. En primera instancia $\dot{\phi}_\alpha(t)$ se convierten en derivadas parciales con respecto al tiempo.

$$\dot{\phi}_\alpha \to \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t) \tag{4.1.5}$$

Por otro lado, el segundo término de (4.1.4) es por definición un límite cuando $L_0 \to 0$[29].(Esta es la razón de haber sacado el factor L_0 antes).

$$\lim_{L_0\to 0} \frac{\phi_{\alpha+1}-\phi_\alpha}{L_0} = \lim_{L_0\to 0} \frac{\phi(x+L_0,t)-\phi(x,t)}{L_0} = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t) \tag{4.1.6}$$

Por último queda identificar el límite de los parámetros que aparecen en el lagrangiano. La cantidad m/L_0 tiene dimensión $\mathbf{ML}^{-1}$, que en el límite continuo se convierte en la densidad ρ de la varilla. La cantidad kL_0 se identifica como: la fuerza necesaria para extender uno de los muelles la distancia $(\phi_{\alpha+1}-\phi_\alpha)$ y viene dada por:

$$F = k(\phi_{\alpha+1}-\phi_\alpha) = kL_0\frac{\phi_{\alpha+1}-\phi_\alpha}{L_0} = Y\Delta L_0 \tag{4.1.7}$$

Donde $\Delta L_0 = (\phi_{\alpha+1}-\phi_\alpha)/L_0$ es la extensión por unidad de longitud y Y es el módulo de Young, la constante de proporcionalidad entre la fuerza aplicada y la extensión por unidad de longitud en materiales elásticos, una constante que depende del material en cuestión.
Con estas consideraciones de la densidad y el módulo de Young podemos escribir el lagrangiano (3.1.4) como:

$$L = \int dx \left[\frac{1}{2}\rho(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2}Y(\partial_x\phi)^2\right] \tag{4.1.8}$$

Donde la $\sum$ sobre los desplazamientos L_0 se ha convertido en una integral $\int dx$ sobre la variable continua x. Por último analicemos la siguiente cuestión; si dividimos el módulo de Young sobre la densidad obtenemos lo siguiente: $[\rho] = ML^{-1}$ y $[Y] = MLT^{-2}$ por lo cual $[\frac{Y}{\rho}] = (\frac{L}{T})^2$ lo que se puede considerar como una velocidad de propagación de la perturbación en el campo[29]. Por lo cual el lagrangiano lo podemos escribir como:

$$L = \int dxY \left[\frac{1}{2}\frac{1}{v^2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2\right] \tag{4.1.9}$$

Cabe aclarar que aquí hicimos uso de un sustento mecánico para desarrollar nuestros cálculos como el hecho de usar resortes que acoplaban a las masas y luego pasar a una varilla con densidad y módulo de Young etc. Cuando pasamos a un campo en el cual la propagación no necesita de un medio material para transportarse el módulo de Young se puede despreciar y la

velocidad de propagación se convierte en la velocidad de la luz, lo que nos deja como resultado final el siguiente prototipo de lagrangiano invariante Lorentz.

$$L = \int dx \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \rightarrow L = \int dx \mathcal{L} \tag{4.1.10}$$

Donde el integrando $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu)$ es la *densidad lagrangiana*, que contiene toda la física del sistema. Ahora, para obtener las ecuaciones de lagrange de donde se obtiene la dinámica del sistema debemos hacer uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange, y la acción para este lagrangiano aunque debemos extender este lagrangiano a todo el espacio.

$$L = \int \int \int dx^1 dx^2 dx^3 \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{4.1.11}$$

Una manera simplificada de escribir esto es:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$$

Ahora definimos la acción S para este lagrangiano asi:

$$S(\phi) = \int \int dt d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \rightarrow cdt = dx^0 \rightarrow S(\phi) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{4.1.12}$$

Dado que para desarrollar las ecuaciones de Euler-Lagrange se debe variar respecto a variables continuas debemos usar la herramienta correcta para realizar esta operación siendo *derivada funcional*, definida como:

$$\frac{\delta \phi(x', t')}{\delta \phi(x, t)} = \delta(x - x') \delta(t - t') \rightarrow \frac{\delta F(\phi(x', t'))}{\delta \phi(x, t)} = \frac{\delta F(\phi(x', t'))}{\delta \phi(x', t')} \frac{\delta \phi(x', t')}{\delta \phi(x, t)} \tag{4.1.13}$$

para cualquier función $F(\phi$(x,t)) en donde δ(x-x) es la delta de Dirac.
La variación de la acción **S** (4.1.12) con respecto a los campos $\phi(x,t)$ viene dada por:

$$\begin{aligned} 0 \equiv \delta S = \int dt dx & \left[\frac{\delta \mathcal{L}(\phi(x,t), \partial_x \phi(x,t), \partial_t \phi(x,t))}{\delta \phi(x', t')} \delta \phi(x', t') \right] \\ & + \left[\frac{\delta \mathcal{L}(\phi(x,t), \partial_x \phi(x,t), \partial_t \phi(x,t))}{\delta \partial_{x'} \phi(x', t')} \delta \partial_{x'} \phi(x', t') \right] \\ & + \left[\frac{\delta \mathcal{L}(\phi(x,t), \partial_x \phi(x,t), \partial_t \phi(x,t))}{\delta \partial_{t'} \phi(x', t')} \delta \partial_{t'} \phi(x', t') \right] \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Sabiendo que la variación y la derivada son operadores lineales, podemos decir que: $\delta \partial_x \phi(x,t) = \partial_x \delta \phi(x,t)$; Considerando los extremos de la variación como fijos:

$$\delta \phi(x, t_1) = \delta \phi(x, t_2) = \delta \phi(x_1, t) = \delta \phi(x_2, t) = 0 \tag{4.1.15}$$

De manera que la variación sea igual a cero esta debe tomar la forma de:

$$0 \equiv \delta S = \int dt dx \left[\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_t \phi(x,t))} \right) + \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_x \phi(x,t))} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(x,t)} \right] \delta \phi(x,t) \tag{4.1.16}$$

Del cálculo variacional sabemos que este resultado solo es igual a cero si se cumple la ecuación de Euler-Lagrange[30] en este caso para una teoría de campos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_t \phi)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_x \phi)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = 0 \tag{4.1.17}$$

Sustituyendo esto en notación relativista tenemos que:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \rightarrow Ecuacion\ De\ Euler\ Lagrange \tag{4.1.18}$$

¿Qué significa lo hecho anteriormente? La evolución espacio-temporal del campo ϕ que conecta dos estados del campo inicial y final será la evolución que minimice la acción para dicho campo[27].
Cabe aclarar que lo hecho hasta aquí sigue siendo aplicado únicamente a campos clásicos; como el campo gravitacional o el campo electromagnético, donde su dinámica está descrita por una ecuación de ondas que se puede deducir de lo anteriormente propuesto; para lograr la cuantización de un campo en la imagen de Schrödinger se proporcionan a las cantidades dinámicas el carácter de operadores y se usan criterios de conmutación[29].

Primera cuantización: Se entiende como el método para generar un modelo de partícula en la mecánica cuántica; a partir de una descripción clásica en el *espacio de fases* de la partícula; más exactamente construir operadores que sustituyan a las variable dinámicas clásicas[31].

Segunda cuantización: Son los métodos utilizados para generar un campo cuantizado mediante una teoría clásica de campos; esto se logra por medio de una cuantización canonica (primera cuantización) extendida a un número variable de particulas[31].

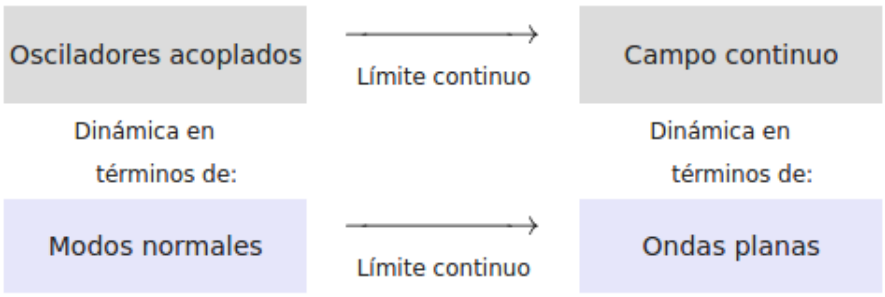


Figura 2 Versión clásica de campo[31]

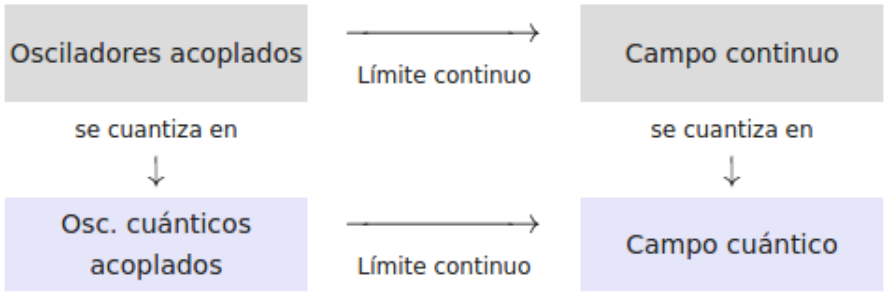


Figura 3 Versión cuántica de campo[31]

En la teoría cuántica de campos la descripción del campo se logra por medio de la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$; a partir del principio de mínima acción y las ecuaciones de Euler-Lagrange se deduce su equivalente a *ecuación de movimiento* que describe la dinámica del campo (su evolución temporal), de tal manera que la descripción de este campo sea consistente con la teoría especial de la relatividad especial y la mecánica cuántica[32].

4.2. Cuántización Canónica

4.2.1. El Oscilador Armónico

De acuerdo con la visión de la mecánica cuántica dada por Heisenberg el cual propuso dar un carácter de operador a las variables dinámicas de movimiento de la mecánica clásica q y p donde impuśo la relación de conmutación[33]:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \rightarrow \hat{q} = q \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla \tag{4.2.19}$$

En esencia la cuantización para campos se logra de manera similar como la desarrollada para la cuantización canónica no relativista de la mecánica cuántica[35]. La característica principal que la hace diferente es que ahora se consideran sistemas físicos con un número infinitos de grados de libertad, es decir la cuantización de un gran número de partículas idénticas las cuales una vez cuantizadas constituirán lo que se define como *campo cuántico*. Un caso particular es un sistema con un N osciladores.[34]
Una técnica muy importante y utilizada para la segunda cuantización (cuantización del campo) consiste en la *representación de número de ocupación*; esta representación es introducida de manera sencilla en el tratamiento del oscilador armónico cuántico, la cual puede ser extendida para examinar sistemas con un gran número de partículas idénticas.[34]
Comencemos por escribir el Hamiltoniano para el oscilador armónico unidimensional.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2\right) \tag{4.2.20}$$

Donde la función de onda Ψ_n para los diferentes estados de energía del oscilador satisface:

$$\hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n \tag{4.2.21}$$

En donde se puede resolver el problema introduciendo los operadores escalera $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{a}$ llamados operador creación y aniquilación respectivamente los cuales se definen[35]:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}\right) \qquad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(i\hat{p} + m\omega\hat{x}\right) \tag{4.2.22}$$

Donde $\hat{a}^{\dagger *} = \hat{a}$ y $\hat{a}^* = \hat{a}^\dagger$ realizando $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\hat{a}\hat{a}^\dagger &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\hat{p}^2 + im\omega\hat{p}\hat{x} - im\omega\hat{x}\hat{p} + (m\omega\hat{x})^2\right) \\
&= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2 - im\omega(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\right) \\
&= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2 - im\omega\left[\hat{x}, \hat{p}\right]\right)
\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Reemplazando (4.2.19) en (4.2.23).

$$\begin{aligned}
\hat{a}\hat{a}^\dagger &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2 + \hbar m\omega\right) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\frac{1}{2m}\left(\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2\right) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

Desarrollando de la misma manera $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ se obtiene:

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \tag{4.2.25}$$

Recordando (4.2.21) analicemos que ocurre con $\hat{H}(\hat{a}^\dagger\Psi)$ para ejemplificar el uso de los operadores escalera.

$$\begin{aligned}\hat{H}(\hat{a}^\dagger\Psi_n) &= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger a_- + \frac{1}{2}\right)(\hat{a}^\dagger\Psi_n)\\ &= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger a_-\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\right)(\Psi_n)\\ &= \hbar\omega\hat{a}^\dagger\left(a_-\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2}\right)(\Psi_n)\\ &= \hbar\omega\hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger a_- + 1 + \frac{1}{2}\right)(\Psi_n)\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

De (4.2.25) tenemos que $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$ reemplazando en (4.2.26) y sustituyendo (4.2.21) tenemos:

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger\Psi_n) = (E_n + \hbar\omega)\hat{a}^\dagger\Psi_n \tag{4.2.27}$$

$$\hat{H}(\hat{a}\Psi_n) = (E_n - \hbar\omega)\hat{a}\Psi_n \tag{4.2.28}$$

O también:

$$\hat{a}^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1} \qquad \hat{a}\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1} \tag{4.2.29}$$

Donde como se puede ver en (4.2.27) y (4.2.28) los operadores escalera aplicados al oscilador armónico cuántico suben y/o bajan los diferentes estados de energía del sistema respectivamente, más adelante estos operadores serán quienes permitan crear y aniquilar partículas las cuales provocan las fluctuaciones cuánticas. Los factores $\sqrt{n+1}$ y $\sqrt{n}$ introducidos en la ecuación (4.2.29) realizan la normalización de los estados Ψ_n[35] de donde se deducen las funciones propias de la multiplicación $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ y $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ con valores propios $\sqrt{n+1}$ y $\sqrt{n}$ por lo tanto una manera de escribir esta relación es:[34]

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{n} + 1 \qquad \hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{n} \qquad \hat{n}\Psi_n = n\Psi_n \tag{4.2.30}$$

Donde $\hat{n}$ es conocido propiamente como *operador número de ocupación* de manera que:

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1 \rightarrow \hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{n} + 1 \tag{4.2.31}$$

De manera general:

$$\Psi_n = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}\Psi_0 \tag{4.2.32}$$

Para el estado fundamental de un sistema cuántico se cumple:

$$\hat{a}\Psi_0 = 0 \tag{4.2.33}$$

Tal que:

$$\begin{gathered}\hat{H}\Psi_0 = E_0\Psi_0\\ \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)\Psi_0 = E_0\Psi_0\\ \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\cancel{\hat{a}\Psi_0} + 1/2\Psi_0) = E_0\Psi_0\end{gathered}$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{4.2.34}$$

Finalmente hemos llegado al estado fundamental de energía, conocido como *Energía de punto cero*; la cual es la mínima energía que puede tener un oscilador cuaántico dado que el principio

de incertidumbre prohíbe una energía igual a cero[35]. La transición a la representación del número de ocupación consiste en que en lugar de que la función Ψ sea definida por medio de las coordenadas (representación de las coordenadas) o por los momentos (representación de los momentos), el estado del sistema se encuentre caracterizado o definido por el número de ocupación n es decir; el índice del nivel de energía ($n = 1, 2, 3...$), el operador $\hat{n}$ representa la base de la interpretación corpuscular para las transiciones de energía del oscilador armónico, lo desarrollado anteriormente tiene como propósito, considerar al oscilador armónico en un estado excitado $\Psi_n(n \geq 1)$ como la colección de infinitos osciladores cuánticos el cual cada uno aporta una energía mínima de $\hbar\omega/2$ por lo tanto un campo como el electromagnético puede ser modelado de esta forma; así el vacío cuántico es la combinación de todos los campos de punto cero[36]. Sumando todos los modos de oscilación posibles esta cantidad diverge, más adelante mostraremos cómo deshacernos de este infinito usando la técnica de renormalización.

4.2.2. Cuantización Canónica para Campos

La teoría cuántica de campos considera que existen en el universo una colección de copias indistinguibles de las partículas elementales [37]. Estas partículas pueden ser creadas o aniquiladas por interacciones entre ellas o con entidades externas, estos fenómenos se pueden describir gracias a la teoría cuaántica de campos ya que las partículas son consideradas como excitaciones de campos cuánticos. Para analizar cómo emergen estas partículas necesitamos cuantizar los campos clásicos vistos en la sección 4.1.2, esto se logra por medio de la cuantización canónica la cual nos brinda las herramientas para pasar de una teoría clásica a una teoría cuántica, así veremos que las partículas se crean o se aniquilan en un sistema físico el cual se puede analizar por medio del campo establecido como operador el cual estará escrito en términos de los operadores escalera vistos en la sección anterior que fueron de tanta utilidad en el desarrollo del oscilador armónico.
Retomando la definición de los operadores escalera, ecuación (4.2.22) podemos despejar a $\hat{x}$ y $\hat{p}$ en término de estos operadores obteniendo:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \qquad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \tag{4.2.35}$$

Para lograr la cuantización del campo, primero consideremos el caso sencillo para el cual un sistema de N osciladores cuánticos los cuales se encuentran desacoplados, es decir no existe interacción entre ellos, el hamiltoniano de este sistema estará descrito por:

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hat{H}_k \tag{4.2.36}$$

con $\hat{H}_k$

$$\hat{H}_k = \frac{\hat{p}_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2}m_k\omega_k^2\hat{x}_k^2 \tag{4.2.37}$$

Por lo tanto podemos definir al operador $\hat{a}_k^\dagger$ y $\hat{a}_k$ los cuales crean o aniquilan respectivamente un quantum de energía sobre el k-ésimo oscilador dejando los demás inalterados, los operadores actúan sobre diferentes osciladores y a su vez estos conmutan por lo cual no pueden afectarse entre sí [37] por lo cual el hamiltoniano (4.2.36) puede escribirse como:

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k + \frac{1}{2}\right) \tag{4.2.38}$$

De manera general el estado del sistema se puede escribir en la representación de número de ocupación, como se está actuando sobre el estado del vacío la idea es analizar cuántos

operadores $\hat{a}^\dagger$ se necesitan para poner n_1 cuantos de energía sobre el oscilador 1, n_2 cuantos sobre el oscilador 2 y así sucesivamente, de manera compacta podemos escribir esta situación así:

$$\Psi_k = \prod_k \frac{\hat{a}^{\dagger n_k}}{\sqrt{n_k}} \Psi_0 \tag{4.2.39}$$

En el anterior modelo se debe recordar que todos los osciladores son independientes entre sí pero una técnica similar nos servirá cuando acoplamos los diferentes osciladores, lo que se hará en la siguiente sección.

4.2.3. El Campo Escalar

Consideremos un sistema para el cual los osciladores se encuentran acoplados, ejemplo una cadena lineal de átomos de masa m los cuales se encuentran ligados por pequeños muelles sin estirar de longitud a y constante k (Imagen 4). Las masas en el equilibrio tienen posición $R_j = ja$, pero pueden ser desplazados una distancia x_j, la j-ésima masa tiene momentum p_j, el hamiltoniano del sistema está escrito como:

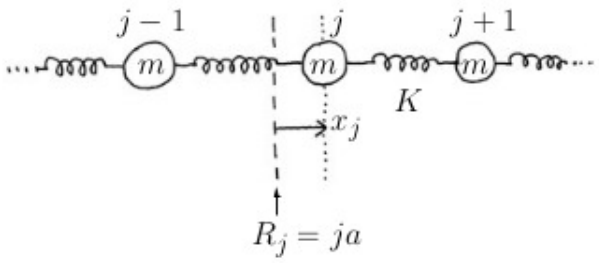


Figura 4: Cadena lineal de átomos [37]

$$\hat{H} = \sum_j \frac{\hat{p}_j^2}{2m} + \frac{1}{2}k\left(\hat{x}_{j+1} - \hat{x}_j\right)^2 \tag{4.2.40}$$

En contraste con lo desarrollado en la sección anterior, las diferentes masas se encuentran acopladas con su vecina, por lo cual no se pueden considerar como independientes, ahora ¿Qué sucede con las excitaciones sobre el sistema, son dependientes de los osciladores? Analicemos este problema por medio de una transformación de Fourier[37].

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{x}_k e^{ikja} \tag{4.2.41}$$

$$p_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{p}_k e^{ikja} \tag{4.2.42}$$

de manera equivalente

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k x_j e^{-ikja} \tag{4.2.43}$$

$$\tilde{p}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k p_j e^{-ikja} \tag{4.2.44}$$

Se imponen condiciones de frontera periódicas[37] haciendo $e^{ikja} = e^{ik(j+N)a}$ el vector de onda k toma los valores de $2\pi n/Na$, donde n tiene valores en el rango $-N/2 \leq n \leq N/2$. Donde

$$\sum_j e^{ikja} = N\delta_{k,0} \tag{4.2.45}$$

Las relaciones de conmutación

$$[x_j, p_{j'}] = i\hbar\delta_{jj'} \tag{4.2.46}$$

$$\begin{aligned}
[x_k, p_{k'}] &= \frac{1}{N}\sum_j\sum_{j'} e^{-ikja}e^{-ik'j'a}\,[x_j, p_{j'}] \\
&= \frac{i\hbar}{N}\sum_j e^{-i(k+k')ja} \\
&= i\hbar\delta_{k,-k'}
\end{aligned} \tag{4.2.47}$$

Ahora podemos trabajar con los terminos del Hamiltoniano de la ecuación (4.2.40)

$$\begin{aligned}
\sum_j P_j^2 &= \sum_j \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k \tilde{p}_k e^{ikja}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k'} \tilde{p}_{k'} e^{ik'ja}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_j\sum_k\sum_{k'} \tilde{p}_k\tilde{p}_{k'} e^{i(k+k')ja} \\
&= \sum_k\sum_{k'} \tilde{p}_k\tilde{p}_{k'}\delta_{k,k'} \\
&= \sum_k \tilde{p}_k\tilde{p}_{-k}
\end{aligned} \tag{4.2.48}$$

Se hace un tratamiento similar para el otro termino del Hamiltoniano obtiendo

$$\begin{aligned}
\sum_j (x_{j+1}-x_j)^2 &= \sum_j \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k \tilde{x}_k\left(e^{ik(j+1)a} - e^{ikja}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k'} \tilde{x}_{k'}\left(e^{ik'(j+1)a} - e^{ik'ja}\right)\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_j\sum_k\sum_{k'} \tilde{x}_k\tilde{x}_{k'}\left(e^{ik(j+1)a} - e^{ikja}\right)\left(e^{ik'(j+1)a} - e^{ik'ja}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_j\sum_k\sum_{k'} \tilde{x}_k\tilde{x}_{k'}\left(e^{ikja}\left(e^{ika}-1\right)e^{ik'ja}\left(e^{ik'a}-1\right)\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_j\sum_k\sum_{k'} \tilde{x}_k\tilde{x}_{k'}e^{i(k+k')ja}\left(\left(e^{ika}-1\right)\left(e^{ik'a}-1\right)\right) \\
&= \sum_k\sum_{k'} \tilde{x}_k\tilde{x}_{k'}\left(\left(e^{ika}-1\right)\left(e^{ik'a}-1\right)\right)\delta_{k,k'} \\
&= \sum_k \tilde{x}_k\tilde{x}_{-k}\left(\left(e^{ika}-1\right)\left(e^{-ika}-1\right)\right) \\
&= \sum_k \tilde{x}_k\tilde{x}_{-k}\left(\left(e^{ika}-1\right)\left(e^{-ika}-1\right)\right) \\
&= \sum_k \tilde{x}_k\tilde{x}_{-k}(2-2cos(ka))
\end{aligned} \tag{4.2.49}$$

haciendo uso de la identidad $1 - cos(ka) = 2sin^2(\frac{ka}{2})$ podemos reescribir la ecuación (4.2.49) como

$$\sum_j (x_{j+1}-x_j)^2 = \sum_k \tilde{x}_k\tilde{x}_{-k}\left(4sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)\right) \tag{4.2.50}$$

De esta manera podemos expresar el Hamiltoniano como

$$\hat{H} = \sum_k \left[\frac{1}{2m} \hat{p}_k \hat{p}_{-k} + \frac{1}{2} m\omega_k^2 \hat{x}_k \hat{x}_{-k} \right] \tag{4.2.51}$$

donde $\omega_k^2 = (4K/m) sin^2(ka/2)$.
A pesar de haber considerado este modelo como acoplado donde cada masa estaba fuertemente ligada con su vecina, el tratamiento desarrollado anteriormente por medio de la transformación de fourier nos permite desacoplar las excitaciones del sistema en el espacio recíproco al espacio real[37] en otras palabras esta transformación soluciona el problema del acople. Nótese que para la ecuación (4.2.51) se retomó la notación de operadores con los "sombreros"sobre las variables, estos se habían omitido para realizar los cálculos y evitar confusiones pero no debemos olvidar que estos son realmente operadores en la cuantización canónica. Debido a que se requiere que $\hat{p}_j$ y $\hat{x}_j$ sean operadores hermitianos[38] por definición tenemos automaticamente que $p_k^\dagger = \hat{p}_{-k}$ y $\hat{x}_k^\dagger = \hat{x}_{-k}$, continuemos con escribir los operadores creación y aniquilación así:

$$\hat{a}_k = \sqrt{\frac{m\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{x}_k + \frac{i}{m\omega_k} \hat{p}_k \right) \tag{4.2.52}$$

$$\hat{a}_k^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{x}_k - \frac{i}{m\omega_k} \hat{p}_k \right) \tag{4.2.53}$$

los cuales tienen las relaciones de conmutación $[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0$ y $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$. Podemos despejar de las ecuaciones (4.2.52) y (4.2.53) para obtener:

$$\hat{x}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_k}} \left(\hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger \right) \tag{4.2.54}$$

$$\hat{p}_k = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_k}{2}} \left(\hat{a}_k - \hat{a}_{-k}^\dagger \right) \tag{4.2.55}$$

De manera similar a lo desarrollado en la ecuación (4.2.23) es decir haciendo $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ obtenemos

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \tag{4.2.56}$$

Donde

$$H_0 = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} \hbar\omega_k \tag{4.2.57}$$

Este último es un resultado crucial ya que hemos encontrado la *energía de punto cero* para N osciladores acoplados, cada posible modo de oscilación aporta una energía de punto cero que en principio es infinita; podríamos decir que este término no tiene consecuencias físicas observables, pero en el siguiente capítulo veremos que este es el ingrediente principal del efecto Casimir, donde se usará la técnica de renormalización para deshacerse del término infinito de energía.

4.2.4. El Operador Campo

Luego de lo discutido en las secciones anteriores donde se han introducido los operadores creación y aniquilación $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{a}$ los cuales crean y aniquilan partículas sobre el sistema, hemos visto que existen diferentes representaciones en las cuales podemos escribir los diferentes operadores,

una de estas es la representación de momentos[37] en las cuales los operadores creación y aniquilación aplicados a estado Ψ_0 crean o aniquilan partículas con un estado de momento p, con n_p partículas en dicho estado los cuales son escritos de la forma $\hat{a}^\dagger_{p_m}$ y $\hat{a}_{p_m}$. Podemos ilustrar lo anterior con la siguiente analogía:[37]

$$Osciladores\ Cuánticos\ E = \sum_{k=1}^{N} n_k \hbar\omega_k$$

$$Partículas\ identicas\ E = \sum_{m=1}^{N} n_{p_m} E_{p_m} \qquad (4.2.58)$$

Ahora haciendo uso apropiado de la combinación lineal para operadores se construye el *Operador Campo* el cual también crea y aniquila partículas, aunque con una particularidad, esta vez se crean y se aniquilan partículas localizadas en ubicaciones espaciales [37]. Este operador se define

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \hat{a}^\dagger_p e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \qquad (4.2.59)$$

el cual crea una partícula con posición x, mientras $\hat{a}^\dagger_p$ crea una partícula en un estado de momento p, de manera similar se define el operador $\hat{\phi}(x)$ como

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \hat{a}_p e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \qquad (4.2.60)$$

el cual destruye una partícula en la posición x, mientras $\hat{a}_p$ destruye una partícula en el estado de momento p. Los operadores campo satisfacen las relaciones de conmutación. Por ejemplo

$$\begin{aligned}\left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)\right] &= \frac{1}{V} \sum_{pq} e^{\frac{i}{\hbar}(p\cdot x - q\cdot y)} \left[\hat{a}_p, \hat{a}^\dagger_p\right] \\ &= \frac{1}{V} \sum_{pq} e^{\frac{i}{\hbar}(p\cdot x - q\cdot y)} \delta_{pq} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{p} e^{\frac{i}{\hbar}p\cdot(x-y)} = \delta^{(3)}(x-y)\end{aligned} \qquad (4.2.61)$$

De la misma manera y debido a que el operador campo está formado por los operadores creación y aniquilación tenemos

$$\left[\hat{\phi}^\dagger(x), \hat{\phi}^\dagger(y)\right] = \left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\right] = 0 \qquad (4.2.62)$$

Estos resultados representan operadores campo para partículas bosónicas como los fotones, el cual será utilizado para analizar el efecto Casimir más adelante.

4.2.5. La Ecuación de K-G en la Teoría Cuántica de Campos

Campo Escalar con Masa:

Se propone la siguiente densidad lagrangiana que describe partículas para las cuales su única característica fundamental es la masa; esto puede ser para partículas bosónicas como el bosón de Higgs o cualquier otra con spin cero.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{\hbar^2}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2c^2\phi^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2}\partial_0\phi\partial^0\phi + \frac{\hbar^2}{2}\partial_1\phi\partial^1\phi + \frac{\hbar^2}{2}\partial_2\phi\partial^2\phi + \frac{\hbar^2}{2}\partial_3\phi\partial^3\phi - \frac{1}{2}m^2c^2\phi^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2}(\partial^0)^2\phi - \frac{\hbar^2}{2}(\partial^1)^2\phi - \frac{\hbar^2}{2}(\partial^2)^2\phi - \frac{\hbar^2}{2}(\partial^3)^2\phi - \frac{1}{2}m^2c^2\phi^2\end{aligned} \qquad (4.2.63)$$

Desarrollemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para esta densidad lagrangiana:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0$$

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}\right)+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_1\phi)}\right)+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_2\phi)}\right)+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_3\phi)}\right)$$

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)=\hbar^2\left[(\partial^0)\phi-(\partial^1)\phi-(\partial^2)\phi-(\partial^3)\phi\right]=\hbar^2\partial^\mu\phi$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)=\hbar^2\partial_\mu(\partial^\mu\phi)=\hbar^2\partial_\mu\partial^\mu\phi=\hbar^2\Box^2\phi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=m^2c^2\phi$$

De manera que la ecuación de Euler-Lagrange para esta densidad lagrangiana nos queda de la forma: $(\hbar^2\Box^2+m^2c^2)\phi=0$ Lo que corresponde a la ecuación de K-G. De lo que podemos concluir que :

1. La ecuación de K-G en teoría cuántica de campos sirve para describir un campo escalar.

2. La ecuación de K-G en teoría cuántica de campos describe la evolución temporal de partículas de spin cero como los piones o el bosón de Higgs.

3. La ecuación de K-G es fundamental en la introducción a la teoría cuántica de campos ya que fue la primera solución relativista que se obtuvo aplicada a la mecánica cuántica.

4.3. Tensor Momento-Energía:

Como vimos en el sección anterior haciendo uso de la variación para la acción de K-G y aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene la ecuación de K-G, resaltando que esta ya no es una ecuación de onda relativista, ya vimos que estas ecuaciones relativistas sufren patologías como la densidad de probabilidad negativa y soluciones de energía negativa etc. En la QFT se proporciona un marco natural para trabajar con un número de partículas variable y se solucionan dichas patologías de manera intuitiva, de lo cual hablaremos más adelante.
Ahora miraremos otra consecuencia de realizar una variación sobre la densidad lagrangiana con un potencial general $U(\phi)$, en donde discutiremos qué relación existe de realizar estas variaciones bajo simetrías continuas de traslación espacio-temporal y que leyes de conservación se derivan de esta.

Proponemos una densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ de la siguiente forma: $\mathcal{L}=\frac{\hbar^2}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-U(\phi)$ siendo $\mathcal{L}$ una densidad lagrangiana general; por consecuencia la acción $S[\phi]$ vendrá dada por: $S[\phi]=\int d^4x\mathcal{L}=\int d^4x\frac{\hbar^2}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-U(\phi)$.

4.3.1. Traslación Espacio-temporal:

Se define una traslación espacio-temporal; la cual realiza una transformación a las coordenadas de la siguiente manera:

$$\tilde{x}^\mu=x^\mu+a^\mu \tag{4.3.65}$$

Donde el término a^μ son números constantes los cuales relacionan las coordenadas espacio-temporales entre diferentes observadores. Ahora se pretende analizar qué sucede con el campo, las derivadas del campo y en general la acción bajo este tipo de transformaciones. Por un lado tenemos que el campo en este caso al ser un escalar; es decir un número es invariante bajo estas

transformaciones es decir, sea cual sea el valor de las coordenadas espacio-temporales para los diferentes observadores el valor de dicho campo debe ser el mismo de tal manera que:

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu) = \phi(x^\mu) \rightarrow \delta\phi = \tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu) - \phi(x^\mu) = 0 \tag{4.3.66}$$

Se debe tener en cuenta que (4.3.63) solo aplica para campos escalares, ahora analicemos que sucede con las derivadas del campo.

$$\partial_\mu\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \tag{4.3.67}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^0} = \frac{\partial\tilde{x}^0}{\partial x^0}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^0} + \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^0}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^1} + \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial x^0}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial\tilde{x}^3}{\partial x^0}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^3} = \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^0} \tag{4.3.68}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^1} = \frac{\partial\tilde{x}^0}{\partial x^1}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^0} + \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^1} + \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial x^1}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial\tilde{x}^3}{\partial x^1}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^3} = \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^1} \tag{4.3.69}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial\tilde{x}^0}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^0} + \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^1} + \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial\tilde{x}^3}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^3} = \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^2} \tag{4.3.70}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^3} = \frac{\partial\tilde{x}^0}{\partial x^3}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^0} + \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^3}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^1} + \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial x^3}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial\tilde{x}^3}{\partial x^3}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^3} = \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^3} \tag{4.3.71}$$

Donde la expresión (4.3.66), (4.3.67), (4.3.68) y (4.3.69) son resultado de realizar regla de la cadena sobre la ecuación (4.3.63) para las respectivas coordenadas espacio-temporales, debido al tipo de transformación utilizada las derivadas cruzadas son nulas por lo cual ni el campo ni sus derivadas cambian bajo esta transformación por consiguiente la acción se mantendra invariante; $S[\tilde{\phi}] = S[\phi]$.

4.3.2. Transformación Infinitesimal:

Por experiencia de las secciones anteriores, sabemos que las transformaciones convenientes son las infinitesimales, esto es lo que nos dice el principio variacional para la acción o el lagrangiano, es lo que nos permite deducir cantidades conservadas y preservar las ecuaciones de movimiento. Para nuestro caso una transformación infinitesimal significa que $(a^\mu)^2 \simeq 0$ de lo que se obtiene:

$$\tilde{\phi}(x^\mu + a^\mu) = \phi(x^\mu) \tag{4.3.72}$$

Expandiendo en polinomio de taylor el primer término de (4.3.70) $f(x+a) \approx f(x) + f'(x)a$

$$\tilde{\phi}(x^\mu) + \partial_\mu\tilde{\phi}(x^\mu)a^\mu = \phi(x^\mu) \tag{4.3.73}$$

$$\tilde{\phi}(x^\mu) - \phi(x^\mu) = -\partial_\mu\tilde{\phi}(x^\mu)a^\mu \tag{4.3.74}$$

$$\delta\phi = -\partial_\mu\tilde{\phi}(x^\mu)a^\mu \tag{4.3.75}$$

La ecuación (4.3.73) y la ecuación (4.3.64) no son la mismo, hay que recordar que para (4.3.64) las coordenadas espacio-temporales son diferentes para cada observador mientras que en (4.3.73) las coordenadas son exactamente las mismas; razón por la cual ($\delta\phi \neq 0$). Esto lo podemos representar de la siguiente manera:

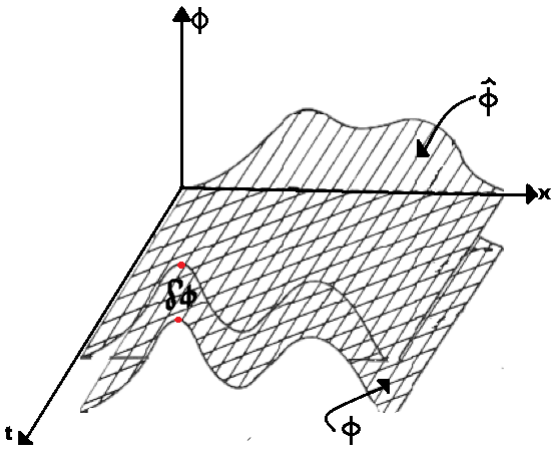


Figura 5: Traslación infinitesimal Pasiva

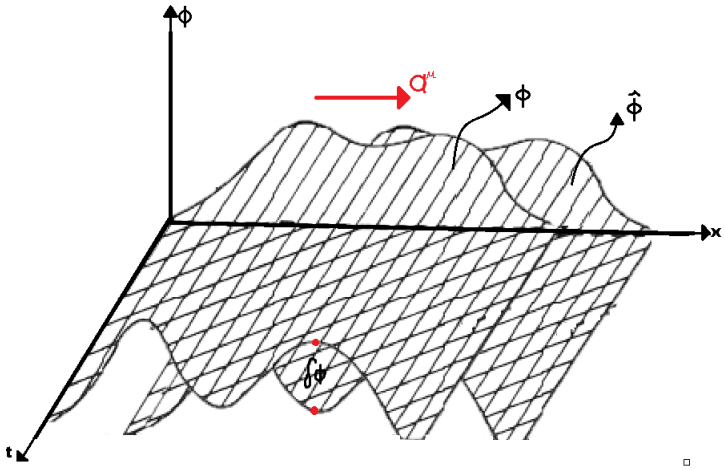


Figura 6: Traslación infintesimal Activa

En donde las Figuras 5 y 6 son representaciones diferentes de la traslación espacio-temporal del campo bajo una misma interpretación es decir ambas son equivalentes y correctas.
Ahora como la densidad lagrangiana depende del campo y sus derivadas esta debe variar de la misma manera en como lo hace el campo bajo transformaciones infinitesimales es decir:

$$(\delta\mathcal{L})_s = -a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \tag{4.3.76}$$

Donde el índice s representa que esta variación se realiza sobre la simetría utilizada en este caso simetría de traslación espacio-temporal dada por (4.3.63) comparemos esta variación con la realizada por medio las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$(\delta\mathcal{L})_{E-L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \tag{4.3.77}$$

$$(\delta\mathcal{L})_{E-L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) \tag{4.3.78}$$

Aplicando la ecuación (4.1.21) sobre (4.3.76) tenemos:

$$(\delta\mathcal{L})_{E-L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) \tag{4.3.79}$$

Entendiendo (4.3.77) como la derivada de un producto se obtiene:

$$(\delta\mathcal{L})_{E-L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) \tag{4.3.80}$$

Para que (4.3.74) y (4.3.78) sean lo mismo debemos imponer la variación $(\delta\phi)_s$ también se realice sobre la simetria en la cual estamos trabajando.

$$\begin{aligned}
(\delta\mathcal{L})_{E-L} &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\delta\phi)_s\right) = (\delta\mathcal{L})_s = -a^\alpha\partial_\alpha\mathcal{L} \\
&= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(-a^\beta\partial_\beta\phi)\right) = -a^\alpha\partial_\alpha\mathcal{L} \\
&\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(a^\beta\partial_\beta\phi)\right) - a^\alpha\partial_\alpha\mathcal{L} = 0 \\
&\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(a^\beta\partial_\beta\phi)\right) - a^\mu\mathcal{L}\right] = 0 \\
&\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(a^\beta\partial_\beta\phi)\right) - \delta^\mu_\beta a^\beta\mathcal{L}\right] = 0 \\
&a^\beta\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\beta\phi)\right) - \delta^\mu_\beta\mathcal{L}\right] = 0
\end{aligned} \tag{4.3.81}$$

A pesar de que los terminos a^β sean infinitesimales no son cero por lo cual de la ecuación (4.3.79) tenemos que

$$\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\beta\phi)\right) - \delta^\mu_\beta\mathcal{L}\right] = 0 \tag{4.3.82}$$

Donde se imponen condiciones de conservación y se define el tensor momento-energía como

$$T^\mu_\beta = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\beta\phi)\right) - \delta^\mu_\beta\mathcal{L} \rightarrow T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial^\nu\phi) - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{4.3.83}$$

4.3.3. Componentes del Tensor Momento-Energìa

Sabiendo la estructura del tensor M-E calculamos sus componentes para la densidad lagrangiana propuesta al inicio de este capitulo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{\hbar^2}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - U(\phi) \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left(\dot\phi^2 - (\partial_1\phi)^2 - (\partial_2\phi)^2 - (\partial_3\phi)^2\right) - U(\phi) \rightarrow \dot\phi = \partial_0\phi
\end{aligned} \tag{4.3.84}$$

1. Analizando la estructura del tensor tenemos que para la derivada del primer termino de (4.3.81)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial(\partial_\nu\phi\partial^\nu\phi)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \\
&= \frac{\hbar^2 g^{\nu\alpha}}{2}\frac{\partial(\partial_\nu\phi\partial_\alpha\phi)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \\
&= \frac{\hbar^2 g^{\nu\alpha}}{2}(\delta^\nu_\mu\partial_\alpha\phi + \partial_\nu\phi\delta^\alpha_\mu) \\
&= \frac{\hbar^2}{2}(\partial^\mu\phi + \partial^\mu\phi) = \hbar^2\partial^\mu\phi
\end{aligned} \tag{4.3.85}$$

   para este lagrangiano en concreto tenemos

$$T^{\mu\nu} = \hbar^2\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} = T^{\nu\mu} \tag{4.3.86}$$

2. Componentes del Tensor M-E.

$$T^{00} = \hbar^2\dot{\phi}^2 - g^{00}\mathcal{L}$$
$$T^{00} = \hbar^2\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\partial_1\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_2\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_3\phi)^2\right] + U(\phi)$$
$$T^{00} = \frac{\hbar^2}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{\hbar^2}{2}(\nabla\phi)^2 + U(\phi) = \mathcal{H} \tag{4.3.87}$$
$$T^{01} = \hbar^2(\dot{\phi})(\partial^1\phi) - g^{01}\mathcal{L} = -\hbar^2\dot{\phi}\partial_1\phi = T^{10} \tag{4.3.88}$$
$$T^{02} = \hbar^2(\dot{\phi})(\partial^2\phi) - g^{02}\mathcal{L} = -\hbar^2\dot{\phi}\partial_2\phi = T^{20} \tag{4.3.89}$$
$$T^{03} = \hbar^2(\dot{\phi})(\partial^3\phi) - g^{03}\mathcal{L} = -\hbar^2\dot{\phi}\partial_3\phi = T^{30} \tag{4.3.90}$$

$$T^{11} = \hbar^2\partial^1\phi\partial^1\phi - g^{11}\mathcal{L}$$
$$T^{11} = \hbar^2\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\partial_1\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_2\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3\phi)\right]^2 - U(\phi) \tag{4.3.91}$$
$$T^{12} = \hbar^2\partial^1\phi\partial^2\phi - g^{12}\mathcal{L} = \hbar^2\partial_1\phi\partial_2\phi = T^{21} \tag{4.3.92}$$
$$T^{13} = \hbar^2\partial^1\phi\partial^3\phi - g^{13}\mathcal{L} = \hbar^2\partial_1\phi\partial_3\phi = T^{31} \tag{4.3.93}$$

$$T^{22} = \hbar^2\partial^2\phi\partial^2\phi - g^{22}\mathcal{L}$$
$$T^{11} = \hbar^2\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\partial_1\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_2\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3\phi)^2\right] - U(\phi) \tag{4.3.94}$$
$$T^{23} = \hbar^2\partial^2\phi\partial^3\phi - g^{23}\mathcal{L} = \hbar^2\partial_2\phi\partial_3\phi = T^{32} \tag{4.3.95}$$

$$T^{33} = \hbar^2\partial^3\phi\partial^3\phi - g^{33}\mathcal{L}$$
$$T^{33} = \hbar^2\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\partial_1\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_2\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_3\phi)^2\right] - U(\phi) \tag{4.3.96}$$

Como podemos observar para las componentes del Tensor M-E para el campo de K-G con $U(\phi) = \frac{1}{2}m^2c^2\phi^2$ en $T^{\mu\nu}$ tenemos que T^{00} es la densidad de energía del campo o la *Densidad Hamiltoniana* $\mathcal{H}$, lo cual tiene sentido si analizamos los términos de T^{00} tenemos que dadas las unidades que se deben esperar es decir unidades de energía; el primer término son las contribuciones de cambios temporales en el campo, lo que refleja una energía cinética, el segundo término representa un costo de energía por las variaciones espaciales en el campo y finalmente el término de masa refleja una energía potencial debido al campo que se encuentra en el espacio. Tener esto en cuenta será crucial para el análisis del efecto Casimir, las demás componentes no serán necesarias para cálculos posteriores por lo cual para los alcances de este trabajo estas no son consideradas.

3. Ahora procedemos a calcular la traza del Tensor M-E

$$\begin{aligned} Traz\,(T^{\mu\nu}) &= T^{00} + T^{11} + T^{22} + T^{33} \\ &= 2\left(\dot{\phi}^2 - U(\phi)\right) \end{aligned} \tag{4.3.97}$$

Capítulo 5

EFECTO CASIMIR

Numerosos trabajos, que tratan sobre las propiedades del vacío cuántico hacen alusión al 1948 en referencia al trabajo de *H.B.G. Casimir*, quien en ese año propuso la existencia de un nuevo efecto el cual eventualmente fue llamado en su nombre. Originalmente consistía en la modificación de la energía de vacío provocada por la introducción de dos placas paralelas, neutras, perfectamente conductoras en el vacío, la cual producía una atracción entre las placas.[39] Hoy en día este efecto teórico no es solo considerado para la configuración de dos placas metálicas, también para cualquier modificación de las condiciones de frontera sobre los modos de energía de punto cero de cualquier campo cuántico es cuestión. En el modelo sin condiciones de frontera los valores de energía asociados al Hamiltoniano para los estados de punto cero de energía suelen ser despreciados, inclusive si son valores infinitos, estos valores pueden ser absorbidos redefiniendo el origen de la energía[40]. El objetivo de Casimir era observar que la presencia de placas neutras conductoras modifica la energía de vacío y la diferencia de energías con y sin fronteras debía ser una cantidad en principio medible.
En este capítulo estudiaremos el efecto Casimir, derivaremos el efecto para la configuración original; placas plano paralelas perfectamente conductoras. Teniendo en cuenta los infinitos modos de oscilación, es decir, energía infinita aplicaremos el método de renormalización para eliminarlo y obtener un resultado finito. Analizaremos el desarrollo local del efecto Casimir por medio del tensor momento-energía para el campo escalar, finalmente analizaremos algunas de sus verificaciones experimentales comparando los resultados con el modelo teórico usado.

5.1. Configuración Placas Plano-Paralelas

En el capítulo anterior en la sección para el *campo escalar* encontramos el valor para la contribución de energía de punto cero

$$\mathcal{H}_0 = \sum_n \frac{1}{2}\hbar\omega_n. \tag{5.1.1}$$

Energía que es originada por los diferentes modos de los osciladores armónicos cuánticos. Como hemos nombrado antes este término en principio es infinito, sin embargo hay situaciones experimentales donde estas energías de punto cero se manifiestan en efectos reales. Un ejemplo de esto es comparar las energías de punto cero entre dos placas paralelas neutras perfectamente conductoras y fuera de ellas, esto conduce a un resultado de energía finita y genera la fuerza que mostraremos más adelante. Debido a que el efecto Casimir tiene una predicción realista la cual está dada por la *QFT*, se requiere cuantizar el campo electromagnético, para simplificar los cálculos siguiendo a [41] consideraremos un campo escalar sin masa en el espacio-tiempo plano 1+1-dimensional para el cual se imponen las condiciones de frontera que simulan las placas

$$\phi(x_\mu)_{x_1=0} = \phi(x_\mu)_{x_1=a} = 0. \tag{5.1.2}$$

Pensemos que las dos placas paralelas son cuadradas de longitud L separadas por una distancia a, como se muestra en la Figura 7, además, las placas son perfectamente conductoras y neutras. Cada oscilador armónico cuántico está asociado a un modo de oscilación del campo electromagnético, por lo tanto podemos escribir la energía de punto cero asociada a este campo como la ecuación (5.1.1).

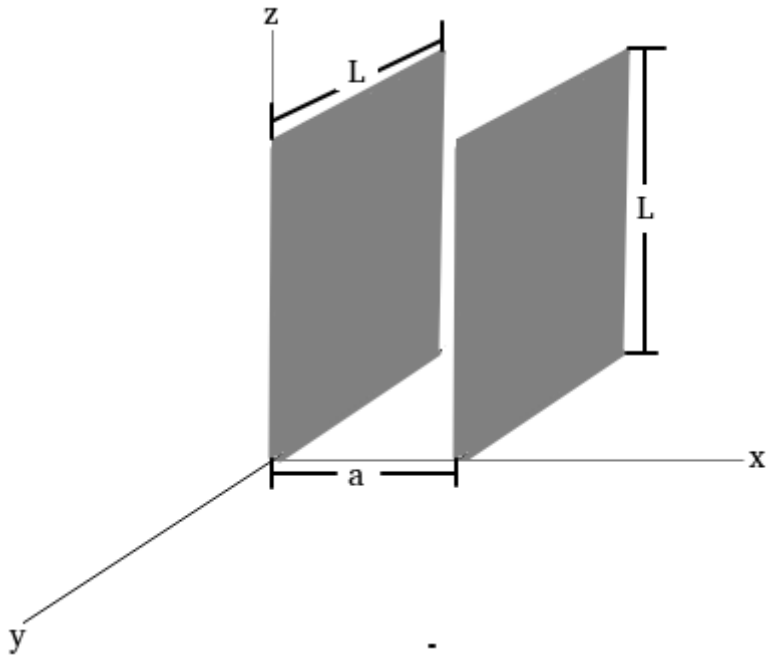


Figura 7: Placas plano paralelas

La ecuación de movimiento para campos clásicos sin masa es $\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$ y la solución general que cumple las condiciones de frontera está dada por

$$\phi(x_\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-\omega_n x_0} + B_n e^{\omega_n x_0}) \sin \omega_n x_1, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{a}, \tag{5.1.3}$$

Al cuantizar el campo $\phi(x_\mu) \to \hat{\phi}(x_\mu)$ en el espacio plano, que corresponda a los diferentes modos para el presente caso tenemos

$$\hat{\phi}(x_\mu) = \sqrt{\frac{2c}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_n}} \left[\hat{a}_n e^{-i\omega_n x_0} + \hat{a}_n^\dagger e^{i\omega_n x_0}\right] \tag{5.1.4}$$

Necesitamos calcular la energía del campo asociada sólo al intervalo entre las placas, $0 < x_1 < a$ por lo cual asumimos que $\phi(x_\mu) = 0$ fuera de este intervalo. Recordando que para sistemas continuos tenemos que

$$\hat{H} = \int_0^a d^3x \mathcal{H} \tag{5.1.5}$$

La expresión anterior para la configuración considerada en el espacio plano 1+1-dimensional se reduce a

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2} \int_0^a dx \left[\left(\frac{\partial \hat{\phi}(x_\mu)}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\phi}(x_\mu)}{\partial x_1} \right)^2 \right] \tag{5.1.6}$$

Ahora analicemos este Hamiltoniano operando sobre el estado del vacío es decir $\langle 0|\hat{H}|0\rangle$ y usando las relaciones de conmutación definidas para los operadores creación y aniquilación

$$\langle 0|\hat{a}_m \hat{a}_n^\dagger|0\rangle = \delta_{mn}, \quad \langle 0|\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger|0\rangle = \langle 0|\hat{a}_m \hat{a}_n|0\rangle = \langle 0|\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n|0\rangle = 0 \tag{5.1.7}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el primer término del Hamiltoniano conlleva

$$= \langle 0| \frac{\hbar^2}{2} \int_0^a dx \left[\sqrt{\frac{2c}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_n}} i\omega_n \left[-\hat{a}_n e^{-i\omega_n x_0} + \hat{a}_n^\dagger e^{i\omega_n x_0} \right] \right]^2 |0\rangle \tag{5.1.8}$$

Antes de continuar analicemos la ecuación (5.1.8), realizando una suma finita, tomemos los primeros tres terminos de la suma:

$$\begin{aligned}
&= \langle 0| \frac{\hbar^2 c}{a} \int_0^a dx \left(\frac{\sin \omega_1 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_1}} i\omega_1 \left[-\hat{a}_1 e^{-i\omega_1 x_0} + \hat{a}_1^\dagger e^{i\omega_1 x_0} \right] \right)^2 + \left(\frac{\sin \omega_2 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_2}} i\omega_2 \left[-\hat{a}_2 e^{-i\omega_2 x_0} + \hat{a}_2^\dagger e^{i\omega_2 x_0} \right] \right)^2 \\
&+ \left(\frac{\sin \omega_3 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_3}} i\omega_3 \left[-\hat{a}_3 e^{-i\omega_3 x_0} + \hat{a}_3^\dagger e^{i\omega_3 x_0} \right] \right)^2 \\
&+ \frac{\sin \omega_1 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_1}} i\omega_1 \left[-\hat{a}_1 e^{-i\omega_1 x_0} + \hat{a}_1^\dagger e^{i\omega_1 x_0} \right] \frac{\sin \omega_2 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_2}} i\omega_2 \left[-\hat{a}_2 e^{-i\omega_2 x_0} + \hat{a}_2^\dagger e^{i\omega_2 x_0} \right] \\
&+ \frac{\sin \omega_1 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_1}} i\omega_1 \left[-\hat{a}_1 e^{-i\omega_1 x_0} + \hat{a}_1^\dagger e^{i\omega_1 x_0} \right] \frac{\sin \omega_3 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_3}} i\omega_3 \left[-\hat{a}_3 e^{-i\omega_3 x_0} + \hat{a}_3^\dagger e^{i\omega_3 x_0} \right] \\
&+ \frac{\sin \omega_2 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_2}} i\omega_2 \left[-\hat{a}_2 e^{-i\omega_2 x_0} + \hat{a}_2^\dagger e^{i\omega_2 x_0} \right] \frac{\sin \omega_1 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_1}} i\omega_1 \left[-\hat{a}_1 e^{-i\omega_1 x_0} + \hat{a}_1^\dagger e^{i\omega_1 x_0} \right] \\
&+ \frac{\sin \omega_2 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_2}} i\omega_2 \left[-\hat{a}_2 e^{-i\omega_2 x_0} + \hat{a}_2^\dagger e^{i\omega_2 x_0} \right] \frac{\sin \omega_3 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_3}} i\omega_3 \left[-\hat{a}_3 e^{-i\omega_3 x_0} + \hat{a}_3^\dagger e^{i\omega_3 x_0} \right] \\
&+ \frac{\sin \omega_3 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_3}} i\omega_3 \left[-\hat{a}_3 e^{-i\omega_3 x_0} + \hat{a}_3^\dagger e^{i\omega_3 x_0} \right] \frac{\sin \omega_1 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_1}} i\omega_1 \left[-\hat{a}_1 e^{-i\omega_1 x_0} + \hat{a}_1^\dagger e^{i\omega_1 x_0} \right] \\
&+ \frac{\sin \omega_3 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_3}} i\omega_3 \left[-\hat{a}_3 e^{-i\omega_3 x_0} + \hat{a}_3^\dagger e^{i\omega_3 x_0} \right] \frac{\sin \omega_2 x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_2}} i\omega_2 \left[-\hat{a}_2 e^{-i\omega_2 x_0} + \hat{a}_2^\dagger e^{i\omega_2 x_0} \right] |0\rangle
\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Realizando un poco de álgebra y utilizando (5.1.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar c}{a} \int_0^a dx \left[\frac{(\sin \omega_1 x_1)^2}{2\omega_1} (-\omega_1^2) \langle 0| \left[\hat{a}_1 \hat{a}_1 e^{-2i\omega_1 x_0} + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger e^{2i\omega_1 x_0} - \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \right] |0\rangle \right] \\
&+ \left[\frac{(\sin \omega_2 x_1)^2}{2\omega_2} (-\omega_2^2) \langle 0| \left[\hat{a}_2 \hat{a}_2 e^{-2i\omega_2 x_0} + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger e^{2i\omega_2 x_0} - \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right] |0\rangle \right] \\
&+ \left[\frac{(\sin \omega_3 x_1)^2}{2\omega_3} (-\omega_3^2) \langle 0| \left[\hat{a}_n \hat{a}_3 e^{-2i\omega_3 x_0} + \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3^\dagger e^{2i\omega_3 x_0} - \hat{a}_3 \hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 \right] |0\rangle \right]
\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

es evidente que los terminos cruzados de la sumatoria se anulan debido a los criterios de conmutación por lo cual (5.1.8) se reduce a:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar c}{a} \int_0^a dx \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\sin \omega_n x_1)^2}{2\omega_n} (-\omega_n^2) \langle 0| \left[\hat{a}_n \hat{a}_m e^{-2i\omega_n x_0} + \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger e^{2i\omega_n x_0} - \hat{a}_n \hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m \right] |0\rangle \right] \\
&= \frac{\hbar c}{a} \int_0^a dx \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\sin \omega_n x_1)^2}{2\omega_n} (-\omega_n^2) \langle 0|\hat{a}_n \hat{a}_m|0\rangle \, e^{-2i\omega_n x_0} + \langle 0|\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger|0\rangle \, e^{2i\omega_n x_0} - \langle 0|\hat{a}_n \hat{a}_m^\dagger|0\rangle - \langle 0|\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m|0\rangle \right] \\
&= \frac{\hbar c}{a} \int_0^a dx \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin \omega_n x_1)^2}{2\omega_n} (\omega_n^2) \right] = \frac{\hbar c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left[\int_0^a dx (\sin \omega_n x_1)^2 \right] \\
&= \frac{\hbar c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left[\frac{a}{2} - \frac{1}{4\omega_n} \sin 2a\omega_n \right].
\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Ahora de manera similar con el segundo término del Hamiltoniano se obtiene

$$\begin{aligned}
&= \langle 0| \frac{\hbar^2}{2} \int_0^a dx \left[\sqrt{\frac{2c}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \omega_n x_1}{\sqrt{2\hbar\omega_n}} \omega_n \left[\hat{a}_n e^{-i\omega_n x_0} + \hat{a}_n^\dagger e^{i\omega_n x_0} \right] \right]^2 |0\rangle \\
&= \frac{\hbar c}{a} \int_0^a dx \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \omega_n x_1)^2}{2\omega_n} (\omega_n^2) \right] = \frac{\hbar c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left[\int_0^a dx (\cos \omega_n x_1)^2 \right] \\
&= \frac{\hbar c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{4\omega_n} \sin 2a\omega_n \right]
\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

finalmente encontramos

$$\begin{aligned}
\langle 0|\hat{H}|0\rangle &= \frac{\hbar c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{4\omega_n} \sin 2a\omega_n + \frac{a}{2} - \frac{1}{4\omega_n} \sin 2a\omega_n \right] \\
\xi_0(a) &= \frac{\hbar c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(a) = \frac{\hbar c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \frac{\hbar c \pi}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} n
\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

Como se espera, esta energía de punto cero ξ_0 es divergente. Sin embargo, esta divergencia es diferente que la energía de punto cero del vacío ya que $\xi_0 = \xi_0(a)$ depende de la distancia a entre las placas. La energía de punto cero del vacío puede ser obtenida cuando el límite de $\xi_0(a)$ con $a \to \infty$

$$\xi_0^{vac} = \lim_{a \to \infty} \xi_0(a). \tag{5.1.14}$$

Antes de calcular la diferencia de energías $\Delta\xi_0(a) = \xi_0(a) - \xi_0^{vac}$ la cual provoca la fuerza de Casimir debemos usar la técnica de renormalización y asi sustraer las cantidades infinitas de la expresión (5.1.13) obteniendo un valor de $\Delta\xi$ finito.

5.1.1. Regularización y Renormalización

Tomando de manera explícita el valor obtenido para $\Delta\xi(a)$ este carece de sentido físico debido a que la diferencia entre dos cantidades infinitas no está definida[41]. El camino estándar que permite deducir las cantidades finitas y por consiguiente con sentido físico se conoce como regularización seguido de una renormalización. La **regularización** se refiere al procedimiento que permite introducir información o parámetro extra sobre una teoría que en principio está mal definida o es divergente y así obtener una cantidad finita a menos que este parámetro se establezca como cero. Luego de la regularización se derivan unas cantidades que son divergentes y otros pequeños valores que contienen el parámetro de corte, los diferentes términos pueden contener potencias o logaritmos divergentes, así como los términos que son finitos. La **renormalización** consiste en eliminar los términos divergentes y quedarse únicamente con los términos finitos en la expresión, luego de la renormalización se establece el limite cuando el parámetro tiende a cero y los términos restantes dan el resultado final.
Apliquemos este procedimiento a la ecuación (5.1.13) el primer paso es introducir el parámetro de corte para regularizar

$$\xi_0(a, \beta) = \frac{\hbar c \pi}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} n \exp\left[-n\beta\right] \tag{5.1.15}$$

donde β es el parámetro de corte, la serie regularizada converge para $\beta > 0$, mientras que se recupera la expresión original divergente en el límite $\beta \to 0$. Reescribiendo (5.1.15) y analizando

el comportamiento cuando $\beta \to 0$

$$\xi_0(a,\beta) = -\frac{\hbar c\pi}{2a} \lim_{\beta\to 0} \frac{\partial}{\partial\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-n\beta\right] \tag{5.1.16}$$

Si observamos el valor absoluto del término que contiene a la sumatoria es < 1 si n y $\beta > 0$ por lo cual podemos reescribir la sumatoria como una serie geométrica[41], es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} \;\; |r| < 1 \to r = \exp\left[-\beta\right] \tag{5.1.17}$$

Reescribiendo (5.1.16)

$$\begin{aligned} \xi_0(a,\beta) &= -\frac{\hbar c\pi}{2a} \lim_{\beta\to 0} \frac{\partial}{\partial\beta} \left[\frac{\exp\left[-\beta\right]}{1-\exp\left[-\beta\right]}\right] \\ &= \frac{\hbar c\pi}{2a} \lim_{\beta\to 0} \left[\frac{\exp\left[-\beta\right]}{\left(1-\exp\left[-\beta\right]\right)^2}\right] \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

Expandiendo el último término de la ecuación (5.1.18) por medio de la serie de Laurent[42]

$$\xi_0(a,\beta) = \frac{\hbar c\pi}{2a} \lim_{\beta\to 0} \left[\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{12} + \frac{\beta^2}{240} - \frac{\beta^4}{6048} + O(\beta^6)...\right] \tag{5.1.19}$$

Como podemos observar en la ecuación (5.1.19) el término $1/\beta^2$ diverge al evaluar el límite $\lim_{\beta\to 0}$ los demás términos en potencias de β son despreciable ya que tienden a cero. Haciendo uso de la renormalización restando este término y evaluando el límite se llega a[42]

$$\lim_{\beta\to 0} \left[\frac{\exp\left[-\beta\right]}{\left(1-\exp\left[-\beta\right]\right)^2} - \frac{1}{\beta^2}\right] = -\frac{1}{12} \tag{5.1.20}$$

Finalmente se obtiene la diferencia de energía y se deduce la fuerza de Casimir

$$\Delta\xi_0 = \xi_0(a,\beta) - \lim_{a\to\infty} \xi_0(a,\beta) = -\frac{\hbar c\pi}{24a} \tag{5.1.21}$$

$$F(a) = \frac{d}{da}\Delta\xi_0 = -\frac{\hbar c\pi}{24a^2} \tag{5.1.22}$$

Siendo (5.1.22) el resultado crucial de este trabajo, definida como la *Fuerza de Casimir* el carácter del signo nos da información sobre el sentido de la fuerza que actúa entre las placas las cuales se están acercando entre sí.
Un cálculo similar considerando el espacio plano 3+1-dimensiones lleva a la fuerza de Casimir por unidad de área o *Presión de Casimir*

$$P(a) = \frac{F(a)}{A} = -\frac{\hbar c\pi^2}{240} a^{-4} \tag{5.1.23}$$

El anterior resultado fue el obtenido por Casimir en su artículo original[43], como se ha dicho esta fuerza por unidad de área es atribuida al cambio de la energía de punto cero del vacío en presencia de las placas y sin ellas. Al observar las constantes $\hbar$ y c se evidencia que el efecto Casimir es un fenómeno cuántico relativista [40].

5.2. Verificaciones Experimentales

El escenario en el cual dos cuerpos macroscopicos en el vacío interactuen el uno con el otro debido a la modificación de el vacío es, quizas, una de las cosas más intrigantes de la física cuántica. Desde su origen en 1948, el ahora conocido *efecto Casimir* ha mostrado un increible progreso de investigación. Como se mostró en la sección anterior, la fuerza por unidad de area de dos placas perfectamente conductoras separadas por una distancia de a is $P(a) = -\hbar c\pi^2/240a^4$. Como se ha dicho antes, esta interacción comienza a ser bastante dominante para pequeñas distancias de separación, la presión entre dos placas separadas por una distancia $a = 10nm$ es $10^5 Pa$[44], para dos placas de $1cm^2$ separadas por $1\mu m$ experimentan una fuerza $10^7 N$[44]. En sus primeros intentos para tratar de observar el fenómeno se demostró una dificultad: hacer que la separación de dos cuerpos macroscópicos sea de distancias microscòpicas es una tarea enrevesada, consecuentemente estos primeros experimentos aunque inconclusos y un algo difusos abrieron la puerta para un posterior desarrollo. Las cosas estuvieron algo tranquilas hasta 1997 [44] cuando la era moderna del efecto Casimir comenzó, con las mediciones realizadas por *Lamoreaux* no solo se mostró que las predicciones cualitativas realizadas por Casimir eran correctas, ademas fue posible obtener información cuantitativa de los experimentos, siguiendo a Lamoreaux una cantidad significante de grupos contribuyeron rapidámente al incremento de la calidad y cantidad de experimentos, desarrollando asi mediciones más precisas de la interacción [44].

En el presente capítulo se presenta una descripción general de algunas de las verificaciones experimentales que corroboran el efecto Casimir, para abordar como se hicieron las diferentes verificaciones debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones experimentales generales [44]:

1. Un dispositivo capaz de medir la interacción entre los cuerpos, usualmente el dispositivo usado es un transductor mecánico, donde la interacción produce un cambio en sus caracteristícas físicas, bien sea la posición del transductor o su frecuencia de resonancia.

2. El dispositivo usado necesita ser calibrado contra una fuerza bien conocida, en su mayoria esta calibración depemde de la geometria del experimento y se usa una interacción electrostática entre los cuerpos.

3. Para garantizar la calidad de las mediciones, se debe tener cuidado para reducir el ruido que se genera en el dispositivo, por lo tanto se deben reducir al minimo las vibraciones producidas por el ambiente.

4. Las fuerzas residuales entre los cuerpos deben ser minimizadas y apropiadamente consideradas, esto significa que deben entenderse y de ser posible reducirse en proporción al error experimental de la medición, usualmente las fuerzas que se deben considerar son la fuerza gravitacional a pesar de no poderse anular usualmente es pequeña dentro del rango del error experimental la cual con una cuidadosa elección de la geometria se puede considerar constante dentro de la separación de las placas, la fuerza magnética aunque regularmente no se usan materiales magnéticos, cuando se usan se debe tener en cuenta su magnetización de ser permanente esto podría alterar significativamente la interacción de Casimir, por último para la fuerza eléctrica se deben tener en cuenta una gran variedad de consideraciones entre estas la diferencia de potencial entre los cuerpos lo que conducirá a una capacitancia y por consiguiente una interación entre las placas, esto se puede remediar eligiendo materiales adecuados que minimicen la interacción u obteniendo la capacitancia en función de la separación entre las placas y asi calibrar de manera adecuada el dispositivo de medición.

5. La separación entre las placas debe ser determinada con precisión, a pesar de poderse controlar la separación de diferentes maneras[44], esta debe medirse en todas las posiciones en las que se realice el experimento.

Experimentos representativos

En esta sección haremos una breve descripción del enfoque utilizado, pero sin una discusión profunda de los detalles experimentales y las tecnicas usadas. Aunque la fuerza de Casimir predicha por unidad de área entre dos placas paralelas es grande para distancias de separación muy pequeñas, la determinación experimental de dicha fuerza fue una trabajo muy difícil en la década de 1950 debido a las limiticiones tecnológicas que dificultaban colocar dos placas paralelas a distancias cortas, si bien las técnicas para posicionar cuerpos con precisión han mejorado enormemente, todavía sigue siendo una tarea compleja intentar alinear dos superficies planas. Sin embargo la primera medición experimental fue llevada a cabo en 1958 por Marcus Sparnaay en Philips en Eindhoven[15]

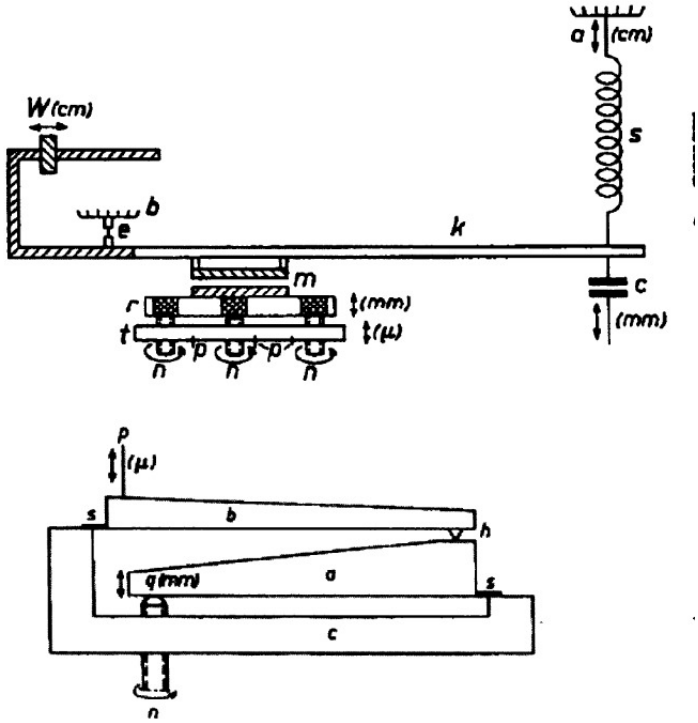


Figura 8. *Esquema del aparato utilizado por Sparnaay*[15].

En el esquema superior de la Figura 8 la placa superior se equilibró ajustando la posición **a** del resorte vertical **S**, la posición y los valores de los pesos **W**, que controlaban el pivote del brazo de palanca alrededor del punto **e**, el esquema inferior, la posición vertical y angular **r** de la placa inferior se ajustó girando los tres tornillos del sistema mostrados en la *Figura 8.*
Sparnaay utilizó una balanza de resorte para medir la fuerza entre placas paralelas hechas de diferentes materiales (aluminio, cromo y acero), determinando la extensión del resorte y la capacitancia entre las placas, Sparnaay pudo alinear las placas en gran medida en separaciones superiores a $1\mu m$. Las conclusiones a las que llego Sparnaay en sus propias palabras « Hemos visto que, aunque se encuentran fuerzas atractivas, en concordancia cualitativa con la predicción de Casimir, las siguientes dificultades en nuestra configuración experimental siguen presentes: 1) Las diferencias de potencial entre las placas no se pueden medir en nuestro aparato. 2) A veces existen obstáculos que impiden realizar mediciones atractivas. La configuración experimental se está modificando ahora para hacer frente a estas dos dificultades. Los resultados se

darán en una publicación futura.»[15].

En 1996 Lamoreaux en la entonces Universidad de Washington, Seattle, llevó a cabo un revolucionario experimento el cual se considera como la primera confirmación definitiva del efecto Casimir.

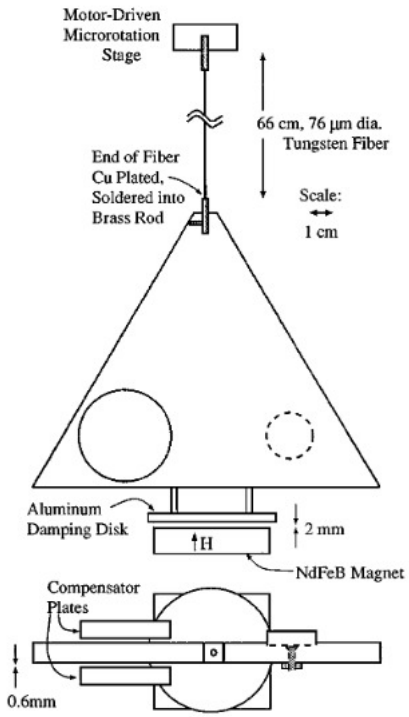


Figura 9. *Esquema del péndulo de torsión utilizado por Lamoreaux*[45].

Lamoreaux[45] utilizó un péndulo de torsión en una campana de vacío, el péndulo estaba hecho por un alambre de tungsteno con una barra perpendicular unida a él Pegada a la barra había una lente de sílice esférica cubierta de oro (ver Figura 9), el uso de una esfera en presencia de una placa permitió a Lamoreaux resolver los problemas de alienación (siempre existia el punto más cercano entre ellos) aunque introdujo una nueva como realizar los calculos para esta nueva geometría lo que complicó la aproximación en el límite cuando el radio de curvatura de la esfera se aproximaba a la separación. El espacio entre la lente cubierta de oro y una placa de cuarzo cubierta de oro se cambió por unos actuadores piezoeléctricos, la desviación angular del péndulo debida a la interacción de Casimir entre la lente y la placa inducia en el piezoeléctrico una señal de error registrada en un control de retroalimentación la cual registraba una diferencia de potencial entre las placas compensadoras, el bucle de control aplicaba una fuerza contraria a la ejercida por la torsión con el cual se realizaba la medición.

Poco después de los experimentos de Lamoreaux, Mohideen y sus colaboradores de la Universidad de California en Riverside utilizaron un microscópio de fuerza atómica modificado (AFM) por sus siglas en ingles para medir la fuerza de Casimir (ver Figura 10)

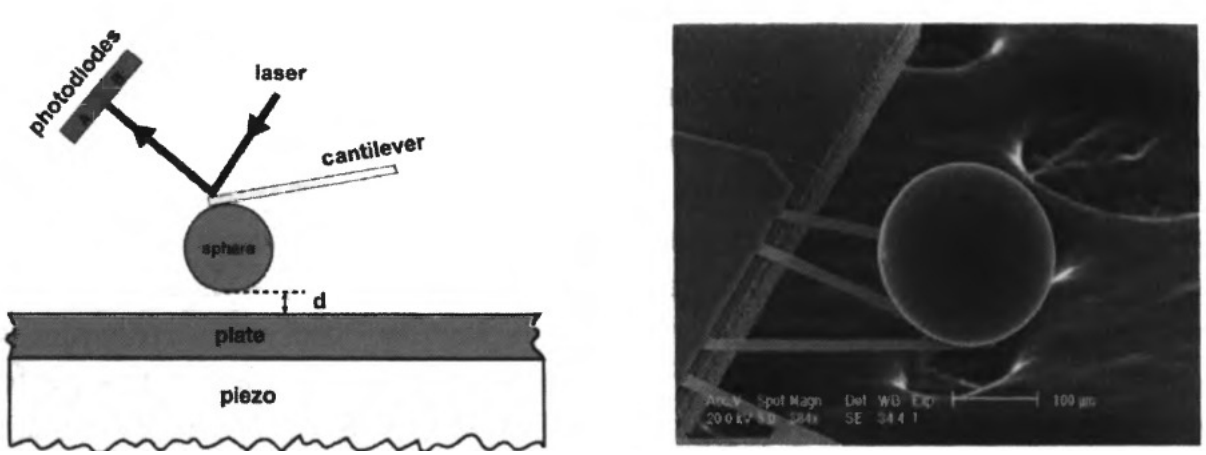


Figura 10. *Esquema del aparato usado por Mohideen* [46].

Mohideen colocó una esfera de poliestireno de 200 μm de diámetro a un voladizo de AFM sin punta, la esfera por medio de pulverización catódica se recubre con un metal, luego por medio de piezoeléctricos se juntan un disco plano recubierto con el mismo metal a una distancia **d** $\leq 100nm$. Como en la microscopía AFM, la atracción resultante entre la esfera y el disco plano genera una desviación en el canteliever la cual es monitoreada por la desviación de un laser que apunta a la parte posterior del voladizo, mediante la cual se registra el efecto generado por la fuerza de Casimir [46].

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se han estudiado los conceptos básicos del Efecto Casimir partiendo del contexto histórico y las bases teorícas concretas que permiten una formulación actualizada, completa y adecuada para la explicación del fenómeno en cuestión. La teoría cuántica de campos como se mostró y se llevo a cabo en el enfoque de la presente investigación contiene de manera unívoca los conceptos, lenguaje y bagaje matemático que permiten construir la descripción fenomenologica del efecto Casimir, poniendo en evidencia las propiedades cuánticas del estado de vacío del campo escalar.

El eje fundamental mediante el cual se construyó la solución teórica del efecto surge de manera natural gracias a la cuantización canónica la cual es la herramienta matemática que permite conectar las teorías clásicas con las cuánticas y todo lo que con ello implica, esto se mostró en la sección 4.2 al extender la densidad lagrangiana para campos clásicos a una de campos cuánticos para posteriormente obtener el tensor momento-energía que nos brinda las propiedades cualitivas y cuantitativas de los campos cuántizados involucrados.

La naturaleza misma de la cual surgió el efecto Casimir es muy diferente de las implicaciones experimentales que hoy en día se deducen de ella, recordemos que este efecto tiene su origen en el principio de incertidumbre de Heisenberg y la energía de punto cero propuesta por Planck la cual condujó a las fluctuaciones cuánticas de vacío de las que surgen fuerzas si se modifican las condiciones de frontera del vacío, lo que se conoce propiamente como Fuerzas de Casimir-Polder.

Aprendimos cómo el efecto Casimir debe ser tratado con razonamientos netamente matemáticos que permiten obtener resultados con significados físicos y medibles, lo cual se logro aprendiendo a tratar las divergencias de algunas cantidades las cuales son propias del procedimiento matemático; como el caso de la energía producida en la interacción, este tratamiento permitió identificar las partes finitas de los diferentes terminos que correspondan a las predicciones y propiedades físicas. Aunque existan muchos caminos diferentes para lograr una renormalización adecuada, la herramienta ofrecida por las "nuevas"matemáticas como lo es la función zeta de Riemann permiten realizar estos calculos de manera natural como se evidenció en la sección 5.1.1 obteniendo resultados convergentes gracias a la serie de Laurent.

Se mostraron algunas verificaciones experimentales del efecto Casimir infiriendo de estas lo complicado que llegó a ser medir de manera precisa la interacción macroscópica entre dos cuerpos producida por causas netamente cuánticas aunque esto permite sustentar bajo la experiencia la realidad de los campos cuánticos. Finalmente se adquirió un conocimiento básico de la teoría cuántica de campos lo que abre las puertas de futuros trabajos como el análisis del efecto Casimir en topologias curvas no triviales además de ser este trabajo de apropiación

social que le permita al estudiante inexperto incursionar por las teorías modernas que modelan nuestro universo.

Bibliografía

ESTADO DEL ARTE

[1] Bordag. M Proceedings of the Fourth Workshop on Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions. The Casimir Effect 50 Years Later pg (10-18)

[2] M. Planck, Verh.d.Deutsch.Phys.Ges.(2) 138-148 (1911).

[3] (a) W. Nernst and F.A. Lindemann, Z.Elektrochem. **17**, 817-827 (1911); M. Born and T. von Kaman, Phys.Z. 13, 297-309 (1912); **14**, 15-19, 65-71 (1913). (b) A. Einstein and O. Stern, Ann.Phys.(4) **40**, 551-560 (1913); A. Eucken, Sitz.Ber.Preuss.Akad.Wiss.(Berlin) 1912, 141-151. (c) O. Stern, Phys.Z. 14, 629-632 (1913); Z.Elektrochem. **25**, 66- 80 (1919); F.A. Lindemann and F.W. Aston, Phil.Mag.F) **37**, 523-533 (1919); (d) R.S. Mulliken, Nature **113**, 423-424 (1924); 114, 349-350 (1924).

[4] (a) W. Heisenberg, Z.Phys. **33**, 879-893 (1925). (b) E. Schrodinger, Ann.Phys.D) **79**, 489-527 (1926); D.M. Dennison, Proc.Roy.Soc. (London), 483-486 (1927). (c) E. Fermi, Z.Phys. **36**, 902-912 (1926); A. Sommerfeld, Naturwiss. **15**, 825-832 A927); 16, 374-381 (1928).

[5] Nobel Lectures: Physics 1922-1941, Elsevier, Amsterdam 1965, p.281.

[6] W. Pauli: Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik. In H. Geiger and K. Scheel, eds.: Handbuch der Physik, Band 24/1, J.Springer 1933, 83,250,272.

[7] K. Clusius: Die Nullpunktsenergie, Angewandte Chemie 56, 241- 247 (1943).

[8] (a) H. Kramers: Grundlagen der Quantentheorie. Quantentheorie des Elektrons und der Strahlung. Akademische Verlags-Gesellschaft, Leipzig 1938, esp. p.108. (b) G.C. Wick, Phys.Rev.(2) **80**, 268-272 (1950). (c) C.P. Enz and A. Thellung, Helv.Phys.Acta **33**, 839-848 (1960).

[9] G. Baym: Lectures on Quantum Mechanics, Benjamin, New York 1968, p.98.

[10] H.G.B. Casimir and D. Polder, Phys.Rev.B) 73, 360-372 (1948).

[11] H.B.G. Casimir, Proc.Kongl.Akad.v.Wetensch.(Asterdam) B51, 793-796 (1948), esp. p.793. Casimir remembered a visit of N. Bohr in 1947, who drew attention to the concept of zero-point energy.

[12] H.B.G. Casimir, Ref. 11, esp. p.795.

[13] H.G. van Bueren, Proc.Kongl.Ned.Akad.v.Wetensc(Amsterdam) **B55**,493-499 (1952).

[14] E.M. Lifschitz,.Soviet Phys.JETP 2, 73-83 1956, (submitted in September 1954)); I.I. Abrikosova and B.V. Deriagin, Dokl.Akad.Nauk SSSR 90, 1055 ff. (in Russian); J.A. Kitchener and A.P. Prosser, Nature 178, 1339-1340 (1956).

[15] M.J. Sparnaay, Physica 24, 751-764 (1958); M. Fierz, Helv.Phys.Acta 33, 855-858 (1960).

[16] L.H. Ford, Phys.Rev. Dll, 3370-3397 (1975), esp. p.3370.

[17] See, e.g., S.G. Mamayev and V.M. Mostepanenko: Casimir effect in space-times with non-Euclidian topology.

[18] M. Krech and S. Dietrich, Phys.Rev. A46, 1922-1941 1992); LA.Crawford, Quaterly J.Roy.Astr.Soc. 36, 205-218 1995); A. Romeo-i-Val, J.Phys. A : Math.Gen. 29, 3697-3705 1996).

PRELIMINARES

[19] Illana Jose Ignacio. *Teoría Cuántica de Campos*. Universidad de Granada. Departamento de Física Teorica y Cosmos. 2018 1-2.

[20] Bert Janssen. *Teoría de la relatividad general*. Universidad de Granada. 41-43

[21] Elias Norbert. *Sobre el Tiempo* Fondo de Cultura Económica. Tercera Edición 23,87-88.

[22] Tejeiro S Juan M. *Sobre la teoría especial de la relatividad*. Universidad Nacional. 2004

[23] Benavidez Izamar. *Ecuación de Dirac y ecuación de Klein-Gordon*. 2017

[24] Davydov A S. *Quantum mechanics*. Pergamon press. 1965. 116-121

[25] Sheck Florian. *Quantum Physics*. Springer. 1965. 399-404

[26] Zee A. *Quantum field theory in a nutshell*. University of California. Princeton University Press. 2003. 61,62

TEORIA DEL CAMPO ESCALAR

[27] High Energy Physics Theory Group. *Teoría cuántica de campos*. Universidad de Oviedo. 2012. 5-8

[28] Illiana Jose I. *Teoría cuántica de campos*. Universidad de Granada. 2018. 2-8

[29] Bert Janssen. *Teoría de la relatividad general*. Universidad de Granada. 13-17

[30] Lanczos Cornelius. *The variational principles of mechanics*. University of Toronto Press. 57-64

[31] https://es.wikipedia.org/wiki/Teoría-cuántica-de-campos

[32] Benavidez Izamar. *Ecuación de Dirac y ecuación de Klein-Gordon*. 2017

[33] Zee A. *Quantum field theory in a nutshell*. University of California. Princeton University Press. 2003. 61,62

[34] Bogoliubov N N, Shirkov D V. *Quantum fields*. Benjamin/Cummings publishing company inc. 1983. 53-57

[35] Davydov A S. *Quantum mechanics*. Pergamon press. 1965. 116-121

[36] Martín G Alejandro. *Tesis de grado: Efecto Casimir.* Universidad de la Laguna. 2018. 18-20

[37] Lancaster Tom, Blundell Stephen J. *Quantum field theory for the gifted amateur.* Oxford University Press. 2014. 20-27, 36, 59-61, 90-101

[38] Sheck Florian. *Quantum Physics.* Springer. 1965. 399-404

EFECTO CASIMIR

[39] Wolfgang P. Schleich. Quantum Optics in Phase Space. WILEY-VCH Primera Edición. 2001. 272-276

[40] Martín G Alejandro. *Tesis de grado: Efecto Casimir.* Universidad de la Laguna. 2018. 4-8

[41] VIATCHESLAV. F. MUKHANOV and SERGEI. WINITZKI. Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds. DRAFT VERSION. 2004. 131-134

[42] Wolfram Research, Inc., Wolfram—Alpha Knowledgebase, Champaign, IL (2016)

[43] H. B. G. Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. Proc. K. Ned. Akad. Wet., 51:793–795, 1948.

[44] Simpson W.M.R., Leonhardt U. Forces of the quantum vacuum an introduction to Casimir physics. World Scientific. 195- 2015.

[45] S.K. Lamoreaux, "Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 /im range", Phys. Rev. Lett. 78, 5 (1997).

[46] U. Mohideen and A. Roy, "Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 μm", Phys. Rev. Lett. 81, 4549 (1998).