UNA INTRODUCCIÓN A LOS WAVELETS COMPLEJOS Y FILTRADO DE SEÑALES

Jhon Alejandro Gómez Fernandez

Trabajo de grado dirigido por:
Samuel Barreto Melo



Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de ciencias y educación
Proyecto curricular de matemáticas
Bogotá D.C.
2018

Nota de aceptación:

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

Firma del Director

_____

Firma del Jurado 1

_____

Firma del Jurado 2

Bogotá D.C, 2018

Dedicatoria

A Dios quien supo guiarme por el buen camino, me alento en los momentos difíciles y me ha bendecido durante toda mi vida.

A mi familia quienes por ellos soy lo que soy. Para mis padres Carlos y Leidy, que me han brindado todo su amor incondicional, ayuda y comprensión en los problemas que se presentan, y aun más por darme los valores, principios y coraje para conseguir mis objetivos .

Índice general

Introducción 3
Planteamiento del Problema 5

1. Objetivos **6**
1.1. Objetivo General 6
1.2. Objetivos Específicos 7

2. Preliminares **8**
2.1. Espacio de Hilbert 8
2.1.1. Ortogonalidad. Bases Ortonormales 9
2.2. Análisis de Fourier 10
2.2.1. Funciones Periódicas 10
2.2.2. Coeficientes y Series de Fourier 10
2.2.3. Transformada Discreta de Fourier 11
2.2.4. Transformada Rápida de Fourier 15

2.2.5. Transformada de Fourier 16
2.2.6. Limitaciones del Análisis de Fourier 17

3. Wavelets en R **18**
3.1. Bases de la Función Escala 18
3.2. Análisis Multiresolución 21

4. Transformada Wavelet **26**

5. Introducción a los Wavelets Complejos **28**

6. Aplicación **31**

7. Conclusiones **37**

Apéndices **39**
Referencias 39

Introducción

Existen demasiados puntos de referencia para organizar la historia de la teoría de las wavelets de distintas maneras. Esto es causa de que gran parte del trabajo de esta teoría fue desarrollado alrededor de los años 30's pero éste parecía ser simplemente esfuerzos separados y no parte de una teoría compacta, así que se decide establecer a la década de los 80's como punto decisivo en el desarrollo de la teoría wavelet.

Antes de 1930 la rama de las matemáticas que dio origen a la teoría de las wavelets comenzó con los trabajos de análisis de frecuencias de Joseph Fourier en 1807, cuando se introdujo la expansión de señales periódicas como lo es la sumatoria de senos y cosenos.

Después de los descubrimientos de Fourier en 1807 los matemáticos poco a poco fueron cambiando sus ideas de análisis en frecuencias por ideas de análisis en escala. Lo cual es, analizar una función $f(x)$ creando estructuras matemáticas que varian en escala.

En los principios del siglo XX con el descubrimiento de la física cuántica y posteriormente con la mecánica ondulatoria aplicada en la Física atómica, se comenzó a gestar la idea de que la materia estaba formada por pequeñisimos entes en oscilación permanente y que se manifestaban en forma microscópica como la materia que conocemos.

La primera mención hecha de wavelet fue por Alfred Haar en 1909 y una de las propiedades

de la wavelet Haar era su soporte compacto. Sin embargo, esta wavelet poseia varias limitaciones al no ser continua.

Esta nueva teoría abrió el paso para la aplicación de algunos conceptos matemáticos que si bien no eran nuevos, ahora si llamarían la atención, y uno de ellos fue el de las formas de ondas atómicas usadas por el físico Dennis Gabor en 1946 quien además de una manera premonitoria visualizó la importancia que podrían éstas tener en el procesamiento de señales.

Gabor utilizó una transformada de Fourier Sf ventaneada usando la estructura dad por Haar en 1910 correlacionando una señal $s(f)$ con cada átomo de la siguiente manera

$$Sf(u,\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t-u)e^{-it\zeta}dt$$

donde $g(t)$ es una función conocida como "función atómica de Gabor", u es el corrimiento en el tiempo y ζ especifica la traslación en frecuencia de la Transformada de Fourier de $g(t)$, esto es:

$$G_{u\zeta}(W) = G(W-\zeta)e^{-iu(W-\zeta)}$$

Más de treinta años después de Gabor y setetnta años de Haar en los 80's Morlet y Grossman reactivaron la colaboración fundamental entre las teorías de la física atómica y el procesamiento de señales y formalizaron lo que hoy se conoce como la transformada continua de onduleta (continuous wavelet transform, CWT), esto fue el catalizador de un rápido crecimiento y dedicación hacia la aplicación de esta transformada desarrollándose posteriormente la transformada continua de onduletas, (discret wavelet transform, DWT), con gran utilidad en casi todos los ámbitos de la tecnología actual como es el caso del análisis de vibraciones.

En 1984 el ingeniero Jean Morlet ayudado por el Físico cuántico Alex Grossman utilizan por primera vez el término "wavelet"para definir las funciones que son usadas para muestrear la señal que se desea analizar y proponen la ecuación siguiente:

$$S(\tau,a) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*(\frac{t-\tau}{a})dt$$

donde ψ^* es el conjugado de la wavelet madre que será escalada y corrida punto a punto para determinar los niveles de comparación con la señal $s(t)$. El valor de $a = \frac{f}{f_0}$de la escala o dilatación de la wavelet, con f_0 como frecuencia central y el corrimiento o traslación en el tiempo.

Planteamiento del Problema

En el siguiente trabajo se pretende introducir el concepto de Wavelet y Transformada Wavelet; Para ello, se estudiará el árticulo de Nick Kingsbury [2] y tendremos sustento en [1]. La Transformada Wavelet es una herramienta matemática desarrollada a mediados de los años '80 y muy útil para el análisi local de señales no estacionarias y de rápida transitoriedad, al igual que la Transformada de Fourier con Ventana, mapea la señal en una representación de tiempo-escala. La diferencia está en que la Transformada Wavelet provee análisis de multiresolución con ventanas dilatadas.

Al momento de estudiar señales con pulso e intermitencia, se ha detectado que Fourier da muy poca información, ya que se pierde casi toda la información temporal, con lo cual se introducirá y estudiará la Transformada Wavelet para determinar su mejora frente a la otra y el motivo por el cual esta es más acertada.

CAPÍTULO 1

Objetivos

1.1. Objetivo General

Introducir y dar una explicación acerca de los Wavelets complejos y la CTW, con ayuda del análisis de Fourier y los avances en Wavelets hasta el momento.

1.2. Objetivos Específicos

Los objetivos específicos que contribuirán a desarrollar el *objetivo general* del trabajo son los siguientes:

- Deasrrollar los conceptos previos que se necesitan para introducir el tema.
- Dar una aplicación de la CTW.

CAPÍTULO 2

Preliminares

Para una mejor comprensión de los capítulos siguientes desarrollaremos aquí algunos conceptos matemáticos necesarios para nuestro trabajo. Se definirán los conceptos de Espacio de Hilbert, se desarrollará una breve descripción del Análisis de Fourier y sus limitaciones, y de los Wavelets en general.

2.1. Espacio de Hilbert

El espacio H de Hilbert es un espacio vectorial cuyos elementos pertenecen al plano complejo **C**. sea **H** el conjunto de los elementos del espacio H. Los vectores complejos de este conjunto pueden ser sumados con las reglas usuales de la aritmética de vectores y multiplicados por escalares.

El espacio H está dotado por una métrica y de un producto interno. Consideraremos en particular el espacio H formado por funciones vectoriales f_n. si f y g son funciones

del conjunto **H** de H, el producto interno para este conjunto de funciones es un escalar definido por

$$< f, g >= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx$$

donde $f^*(x)$ es el complejos conjugado de $f(x)$. El producto escalar o interno de la función f con si misma es un número real no negativo. En particular, si la función $f \in \mathbf{C}$, entonces satisface la condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

este espacio métrico recibe el nombre de Espacio de Hilbert $\mathbf{L}^2[-\infty, \infty]$

2.1.1. Ortogonalidad. Bases Ortonormales

Se dice que dos vectores x e y son ortogonales en un espacio de Hilbert H si su producto interno es cero:

$$< x, y >= 0$$

Se le llama conjunto ortogonal a aquel conjunto de vectores en el cual cualquier par de sus elemntos es ortogonal. Además, este conjunto es ortonormal si la norma de los vectores es igual a uno:

$$||x|| = \sqrt{< x, x >} = 1$$

También se define a la base ortonormal de **H** como un conjunto ortonormal maximal en **H** si cualquier vector en **H** puede ser representado como el límite de las combinaciones lineales de los elementos de una base ortonormal [3].

2.2. Análisis de Fourier

En 1807, Jean B. Fourier demostró que una función podía ser desarrollada en términos de series trigonométricas, y que se podían obtener, por integración, fpormulas para los coeficientes del desarrollo. Para comprender mejor esto daremos algunas definiciones previas.

2.2.1. Funciones Periódicas

Dado que los términos de las series trigonométricas son periódicos es lógico deducir que las funciones que se van a desarrollar mediante dichas series deben ser también periódicas.

Se dice que una función $f(x)$ tiene un período P si para todo x, $f(x+P) = f(x)$, donde P es una constante positiva. El menor valor de $P > 0$ se llama el período mínimo de $f(x)$ [4].

2.2.2. Coeficientes y Series de Fourier

Los desarrollo en series de Fourier, tienen dos aplicaciones fundamentales:

- representar una función $f(x)$ definida en el intervalo $(-c, c)$, para los valores de x en ese intervalo, o
- representar una función periódica con periodo $2c$ para los valores de x.

La función $f(x)$ puede ser proyectada en una base ortonormal de funciones $\phi_k(x)$, de la siguiente forma:

$$f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + ... + c_k\phi_k(x) + ... \quad para \quad (-c, c), \quad k = 1, 2, ...$$

Se espera que el desarrollo de $f(x)$ converja a la funci+on $f(x)$ [5] Se puede demostrar que los coeficientes de c_k de la suma son los coeficientes de Fourier de $f(x)$ con respecto a la base ortonormal $\phi_k(x)$ [5]. Estos coeficientes pueden expresarse como:

$$c_k = \int_{-c}^{c} f(x)\phi_k^*(x)dx, \quad para \quad k = 1, 2, ...$$

siendo ϕ^* el complejo conjugado de ϕ.

La Serie de Fourier genérica correspondiente a la función $f(x)$, se define como:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x)$$

Si $f(x)$ está definida en el intervalo $(0, 2\pi)$ y tiene período 2π, la serie de Fourier que corresponde a $f(x)$ sobre la base ortogonal de senos y cosenos se define como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n cos(kx) + b_n sen(kx)),$$

donde los coeficientes de Fourier a_k y b_k se definen como

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) cos(kx) dx & \text{con } k = 1, 2, ... \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) sen(kx) dx & \text{con } k = 1, 2, ... \end{cases}$$

Puede observarse que los coeficientes de Fourier de la función transformada representan la contribución de cada función seno y coseno para cada frecuencia.

Usando la identidad de Euler podemos escribir la serie de Fourier de $f(x)$ como combinación lineal de funciones exponenciales complejas:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

donde las funciones $e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ constituyen un conjunto ortonormal [3].

Los coeficientes de Fourier de $f(x)$, respecto de esta base, pueden representarse como:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

2.2.3. Transformada Discreta de Fourier

Definición 1 ($l^2(\mathbb{Z}_N)$). Sea z una funcion definida en un conjunto finito

$$\mathbb{Z}_N = \{0, 1, ..., N-1\}$$

Para ahorrar espacio, vamos a escribir a z horizontalmente en lugar de verticalmente

$$z = (z(0), z(1), ..., z(N-1))$$

Sin embargo, cuando sea conveniente, notaremos a z con el vector

$$z = \begin{bmatrix} z(0) \\ z(1) \\ . \\ . \\ . \\ z(N-1) \end{bmatrix}$$

Entonces, en lugar de $\mathbb{C}^N$ escribimos $l^2(\mathbb{Z}_N)$ de la siguiente forma,

$$l^2(\mathbb{Z}_N) = \{z = (z(0), z(1), ..., z(N-1)) : z(j) \in \mathbb{C}, 0 \leq j \leq N-1\}$$

Nota 2.2.1. *En esta notación, el producto interno en $l^2(\mathbb{Z}_N)$ es*

$$< z, w >= \sum_{k=0}^{N-1} z(k)\bar{w(k)}$$

Con la norma asociada

$$\|z\| = (\sum_{k=0}^{N-1} |z(k)|^2)^{1/2}$$

(llamada la norma l^2).

Definición 2. Definimos $E_0, E_1, ..., E_{N-1} \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ por

$$E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi imn/N} \quad , para \quad 0 \leq m, n \leq N-1$$

Nota 2.2.2. *El conjunto $\{E_0, E_1, ..., E_{N-1}\}$ es una base ortonormal para $l^2(\mathbb{Z}_N)$*

Definición 3. Para $m = 0, 1, ..., N-1$, definimos $F_m \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ por

$$F_m(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi imn/N} \quad , para \quad n = 0, ..., N-1$$

Nosotros llamamos F la base de Fourier para $l^2(\mathbb{Z}_N)$

Definición 4 (Transformada Discreta de Fourier). Sea $z = (z(0), ..., z(N-1)) \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Para $m = 0, 1, ..., N-1$, definimos

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i m n / N}.$$

Obteniendo

$$\hat{z} = (\hat{z}(0), \hat{z}(1), ..., \hat{z}(N-1)).$$

Entonces $\hat{z} \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. El mapeo$\hat{}$: $l^2(\mathbb{Z}_N) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}_N)$, el cual toma z en $\hat{z}$, es llamada la Transformada Discreta de Fourier, generalmente abreviada DTF.

Proposición 1. *Sea* $z = (z(0), z(1), ..., z(N-1)), w = (w(0), w(1), ..., w(N-1)) \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. *Entonces,*

I) *(Fórmula de inversión de Fourier)*

$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i m n / N} \quad , para \quad n = 0, 1, ..., N-1$$

II) *(Relación de Parseval)*

$$< z, w >= \frac{1}{N} < \hat{z}, \hat{w} >$$

III) *(Fórmula de Plancherel)*

$$\|z\|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{z}\|^2$$

Nota 2.2.3. *La DTF puede ser representada por una matriz (ya que el mapeo que toma z en ẑ es una transformación lineal). Para simplificar notación, definimos*

$$\omega_N = e^{-2\pi i / N}$$

entonces

$$\omega_N^{-mn} = e^{2\pi i m n / N}.$$

En esta notación

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \omega_N^{mn}$$

Definición 5. Sea W_N la matriz $[w_{mn}]_{0\leq m,n\leq N-1}$ tal que $w_{mn} = \omega_N^{mn}$. Esto es,

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \omega_N^3 & .. & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \omega_N^6 & .. & \omega_N^{2(N-1)} \\ 1 & \omega_N^3 & \omega_N^6 & \omega_N^9 & .. & \omega_N^{3(N-1)} \\ . & . & . & . & .. & . \\ . & . & . & . & .. & . \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \omega_N^{3(N-1)} & .. & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Definición 6 (Transformada Discreta de Fourier Inversa). Para $w = (w(0), w(1), ..., w(N-1)) \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Definimos

$$\check{w}(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} w(m)e^{2\pi imn/N} \quad , para \quad n = 0, 1, ..., N-1.$$

Obtenemos

$$\check{w} = (\check{w}(0), \check{w}(1), ..., \check{w}(N-1)).$$

El mapeo $\check{}: l^2(\mathbb{Z}_N) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}_N)$, es la Transformada Discreta de Fourier Inversa, o IDTF.

Nota 2.2.4. *Tenemos las siguientes propiedades:*

I) *Con esta notación, para $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$,*

$$(\hat{z})\check{}(n) = z(n)$$

II) *Dado que la DTF es una transformación lineal invertible, la matriz W_N es invertible [1], y tenemos que $z = w_N^{-1}\hat{z}$. Sustituyendo $\hat{z} = w$ y $z = \check{w}$ tenemos*

$$\check{w} = W_N^{-1}w.$$

A continuación, consideramos cómo se comporta la DFT bajo algunas operaciones importantes. La primero de estas es la traslación.

Definición 7. Sea $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ y $k \in \mathbb{Z}$. Definimos

$$(R_k z)(n) = z(n-k) \quad para \quad n \in \mathbb{Z}$$

$R_k z$ es llamado la traslación de z por k. Llamamos R_k la traslación por el operador k.

Ejemplo 2.2.1. *Sea* $N = 6, k = 2$ *y* $z = (2, 3 - i, 2i, 4 + i, 0, 1)$. *Entonces, por ejemplo*

$$(R_2 z)(0) = z(0 - 2) = z(-2) = z(4) = 0$$

De la misma forma, $(R_2 z)(1) = z(-1) = z(5) = 1$, *etc. Obtenemos*

$$R_2 z = (0, 1, 2, 3 - i, 2i, 4 + i)$$

Este es el efecto de R_2 *en* z, *el cual mueve las componentes dos posiciones a la derecha, excepto las dos últimas, las cuales fueron rotadas en las dos primeras posiciones.*

La siguiente operación que consideramos es la conjugación compleja.

Definición 8. Para $z = \in l^2(\mathbb{Z}_N)$, sea $\bar{z}$ dado por el vector

$$\bar{z} = (\bar{z(0)}, ..., \bar{z(N-1)})$$

esto es, $\bar{z}(n) = \bar{z(n)}$

2.2.4. Transformada Rápida de Fourier

La Transfomada Rápida de Fourier es un eficiente algoritmo que permite calcular la DTF y su inversa.

Definición 9. Sea $M \in \mathbb{Z}$ y $N = 2M$. Si $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$, definimos

$$u_k = z_{2k}, \qquad para \quad k = 0, 1, ..., M - 1,$$
$$v_k = z_{2k+1}, \qquad para \quad k = 0, 1, ..., M - 1,$$

Además, se notará $\hat{z}$ la DTF de z en $l^2(\mathbb{Z}_N)$, y $\hat{u}, \hat{v}$ las DTFs de u,v respectivamente, en $l^2(\mathbb{Z}_M)$

Lema 2.1. *En el contexto de la definición anterior, para* $m = 0, 1, ..., M - 1$ *se tiene que*

$$\hat{z}(m) = \hat{u}(m) + e^{-2\pi i m/N} \hat{v}(m)$$

También, para $m = M, M + 1, ..., N - 1$ *sea* $l = m - M$. *Los valores correspondientes de* l *son* $l = 0, 1, ..., M - 1$. *Entonces*

$$\hat{z}(m) = \hat{z}(l + m) = \hat{u}(l) - e^{-2\pi i l/N} \hat{v}(l)$$

2.2.5. Transformada de Fourier

Para obtener una representación que pueda ser válida para todos los valores de x cuando $f(x)$ no es periódica, es natural intentar extender la representación de los coeficientes y la serie de Fourier dejando que c tienda a infinito, lo que da lugar a la Transformada de Fourier [5].

Definición 10. Se dice que una función $f \in \mathbf{L}^n(\mathbb{R})$ si

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^n < \infty$$

Para la Transformada de Fourier, trabajaremos sobre $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, que formalmente es,

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 < \infty\}$$

$\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial con la adición y multiplicación por escalar de funciones [1].

Definición 11. Para $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$, definimos

$$\hat{f}(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\varepsilon} dx$$

Llamamos $\hat{f}$ la Transformada de Fourier de f.

Para $g \in \mathbf{L}^1$ y $x \in \mathbb{R}$, definimos g, la Transformada Inversa de Fourier de g, por

$$\check{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(\varepsilon) e^{ix\varepsilon} d\varepsilon$$

Nota 2.2.5. *La Inversa de la Transformada de Fourier, la podemos obtener de la siguiente forma:*

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-x)$$

Lema 2.2. *Supongamos $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R})$. Entonces,*

I) $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R})$

II) *(Relación de Parseval)* $< \hat{f}, \hat{g} >= 2\pi < f, g >$

III) *(Fórmula de Plancherel)* $||\hat{f}|| = \sqrt{2\pi}||f||$

Demostración. ver [1] página 369.

Nota 2.2.6. *La Transformada de Fourier es una transformación de Fourier uno-a-uno de* $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R})$ *en sí mismo.*

Teorema 2.1. *Supongamos* $f, g \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R})$*. Entonces se cumple,*

I) *(Relación de Parseval)* $< \hat{f}, \hat{g} >= 2\pi < f, g >$

II) *(Formula de Plancherel)* $||\hat{f}|| = \sqrt{2\pi}||f||$

III) $< \check{f}, \check{g} >= \frac{1}{2\pi} < f, g >$

IV) $||\check{f}|| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||f||$

Demostración. Ver [1] página 372.

2.2.6. Limitaciones del Análisis de Fourier

La Transformada de Fourier es ampliamente utilizada en análisis y procesamiento de señales con grandes aportes en los casos en que estas señales son periódicas y lo suficientemente regulares, pero no ocurre lo mismo para señales no estacionarias (cuyo espectro varia con el tiempo).

La Transformada de Fourier detecta la presencia de una señal pero no brinda información acerca de la evolución en el tiempo de las características espectrales de la señal, así como el instante de la aparición de una singularidad en una señal transitoria.

CAPÍTULO 3

Wavelets en R

3.1. Bases de la Función Escala

En éste capítulo se va a construir el Sistema Wavelet, el cual es un conjunto ortonormal completo en $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ que consiste de un cierto conjunto de traslaciones y dilataciones de una sola función ψ.

Definición 12. Para $\varphi, \psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ y $j, k \in \mathbb{Z}$, definimos $\varphi_{j,k}, \psi_{j,k} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ como,

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) \quad y \quad \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

El factor $2^{j/2}$ en la definición de $\varphi_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$ es incluido para que la norma de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ sea la misma para todo j, k:

$$\begin{aligned} ||\psi_{j,k}||^2 &= \int_{\mathbb{R}} |2^{j/2}\psi(2^j x - k)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^j |\psi(2^j x - k)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\psi(y)|^2 dy = ||\psi||^2 \end{aligned}$$

similarmente para $\varphi_{j,k}$, con un cambio de variable $y = 2^j x - k$ en la integral.
Otra forma de expresar lo anterior es

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j(x - 2^{-j}k))$$

Definición 13. Un Sistema Wavelet para $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ es un conjunto ortonormal completo de la forma

$$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

para algún $\psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Las funciones $\psi_{j,k}$ son llamadas ***wavelets***. La función ψ es llamada ***la madre wavelet*** y la función φ el llamado ***el padre wavelet***.

Para garantizar la existencia de un sistema wavelet se debe definir el análisis multiresolución (MRA), luego se procederá que todo MRA produce un sistema wavelet pero no todos los sistemas wavelets provienen de un MRA.

Definición 14. Wavelets Continuos. Los wavelets continuos son de la forma

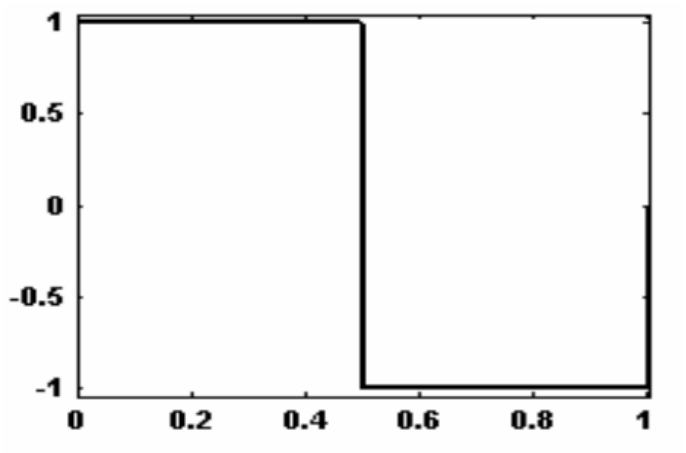
$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\frac{x-u}{s}, \quad u, s \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3.1.1. *Wavelet Haar Algunos wavelets están dados por una función explícita, como los siguientes:*

- ***Wavelet Haar.*** *Este wavelet está dador por la siguiente función:*

$$s(t) = \begin{cases} 1 & , \ 0 < t < 0,5 \\ -1 & , \ 0,5 < t < 1 \\ 0 & , \ e.o.c \end{cases}$$

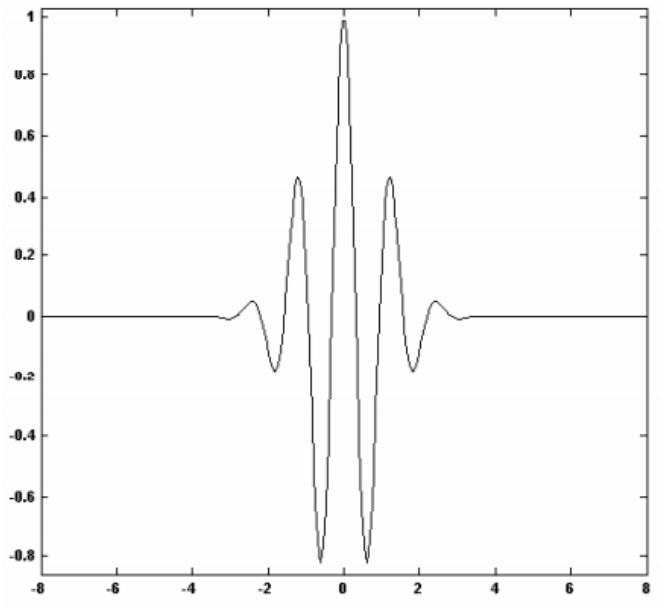
  gráficamente tenemos:



- ***Wavelet de Morlet.*** *Este wavelet está dado por*

$$s(t) = e^{-t^2/2} cos(5t)$$

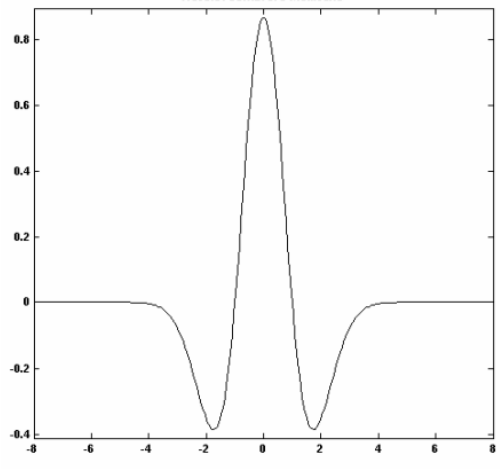
y gráficamente es:



- ***Wavelet Sombrero Mexicano.*** *Este wavelet no es más que la segunda derivada de la función de distribución gaussiana*

$$s(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} e^{-t^2/2}(1 - t^2)$$

y gráficamente es:



Nota 3.1.1. *Si* $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *es un sistema wavelet, entonces por el Teorema 4.10 [1] toda* $f \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R})$ *puede ser escrita de la forma*

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} < f, \psi_{j,k} > \psi_{j,k}.$$

Esta es llamada la identidad wavelet, y el mapeo que toma f a la sucesión de coeficientes

$$\{< f, \psi_{j,k} >\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

es llamado la Transformada Wavelet (Discreta).

3.2. Análisis Multiresolución

El análisis multiresolución es una técnica que permite analizar señales en múltiples bandas de frecuencia.

Stéphane Mallat determino las condiciones que deben satisfacer la sucesión de subespacios para que sean un sistema wavelet, como sigue.

Definición 15. Un análisis multiresolución (o MRA) con función de escalamiento o padre wavelet φ es una sucesión $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de subespacios de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ que tienen las siguientes propiedades:

I) (Monotonicidad) La sucesión es creciente, esto es, $V_j \subset V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

II) (Existencia del wavelet padre) Existe una función $\varphi \in V_0$ tal que el conjunto $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal y

$$V_0 = \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{0,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})\}.$$

III) (Propiedad de dilatación) Para cada j, $f(x) \in V_0$ sisi $f(2^j x) \in V_j$.

IV) (Propiedad de intersección trivial) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

V) (Densidad) $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ es denso en $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Por definición, la parte v significa que para cualquier $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que cada $f_n \in \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, esto es,

$$||f_n - f|| \longrightarrow 0 \quad cuando \quad n \longrightarrow \infty.$$

Esta definición es difícil de entender a primera vista, el siguiente ejemplo es de gran ayuda.

Ejemplo 3.2.1. ***Haar MRA*** *Para cada $j,k \in \mathbb{Z}$, sea $I_{j,k}$ el intervalo $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$. Un intervalo de la forma $I_{j,k}$ es llamado Intervalo Diádico. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, sea*

$$V_j = \{f \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}) : \ paratodo \ k \in \mathbb{Z}, f \ es \ constante \ en \ I_{j,k}\}$$

Es claro que cualquier intervalo diádico de longitud 2^{-j-1} esta contenido en un intervalo diádico de longitu 2^{-j}.

Si $f \in V_j$, en otras palabras, si f es constante en intervalos diádicos de longitud 2^{-j}, entonces f es constante en intervalos diádicos de longitud 2^{-j-1} y asi $f \in V_{j+1}$. Entonces $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de subespacios crecientes. Si tenemos

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & si \ \ 0 \leq x < 1 \\ 0 & si \ \ x < 0 \ \ o \ \ x \geq 1 \end{cases}$$

entonces el conjunto $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal ya que los soportes de diferentes $\varphi_{0,k}$ no se superposicionan. Mientras que, toda $f \in V_0$ puede ser escrita como

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi_{0,k}$$

donde c_k es el valor de f en $[k, k+1)$. Nótese que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = ||f||^2 < \infty$, así que la existencia del padre wavelet se tiene.

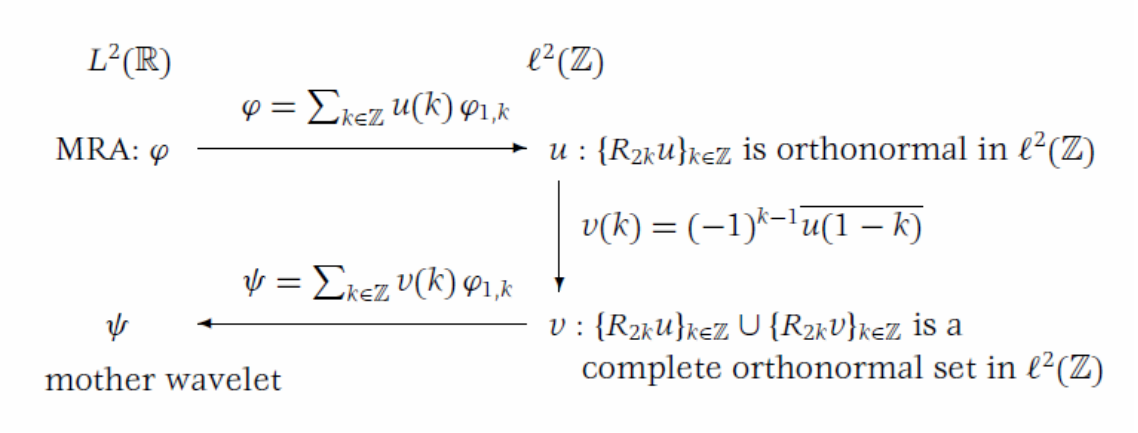
La propiedad de dilatación para un MRA sigue directamente de la definición de $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Si $f \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$, entonces f es constante en los intervalos $[0, 2^{-j})$ y $[-2^{-j}, 0)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Esto implica que f es constante en $[0, \infty)$ y $(-\infty, 0)$ de donde $f = 0$, esto es $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

La propiedad v para que sea un MRA también es cierta, pero es más difícil de probar, no se va a probar, ya que, sigue del Lemma 5.48 [1]. Asumimos enonces que $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un MRA con wavelet padre φ.

El Lemma 5.33 [1] establece que dado un wavelet padre φ para un MRA, a este le corresponde una sucesión de escalado $u \in l^2(\mathbb{Z})$ con la propiedad que las traslaciones enteras de u son ortonormales en $l^2(\mathbb{Z})$. Así tenemos mapeado nuestro problema en $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, el cual no sabemos como se encarga directamente en $l^2(\mathbb{Z})$, el cual comprendemos a la perfección.

Nosotros usamos resultados de $l^2(\mathbb{Z})$ en $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ para obtener wavelets para $\mathbb{R}$. Específicamente, por el lemma 4.47 [1] la sucesión u tiene un acompañante v de tal forma que u y v forman el primer paso para la construcción de un sistema wavelets en $l^2(\mathbb{Z})$. En el mismo camino que φ corresponde a u, nosotros definimos a ψ correspondiente a v. Esto genera una duvusuón ortogonal de $V_1 = V_0 \oplus W_0$, lo cual corresponde a la división ortogonal de $l^2(\mathbb{Z})$ derivada del primer paso para la construcción de in sistema wavelet para $\mathbb{Z}$. Por dilatación, una división similar $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ se mantiene en el mismo nivel. Tomando la unión de los sitemas ortonormales $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ para el complemento ortogonal de los espacios W_j hacen un sistema wavelet para $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Lo anterior se puede resumir en la siguiente figura.



Lema 3.3. *Supongamos que $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un MRA con wavelet padre φ y una sucesión de escalado $u \in l^1(\mathbb{Z})$. Definimos $v \in l^1(\mathbb{Z})$ por*

$$v(k) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}, \quad para \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Definimos

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\varphi_{1,k}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k).$$

Entonces $\{\psi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es in conjunto ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$. Sea

$$W_0 = \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\psi_{0,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Entonces

$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$

Demostración. *Ver[1] página 389.*

El siguiente teorema es un resultado muy útil y es de gran importancia.

Teorema 3.2. *Mallat's Theorem.*
Supongamos que $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un MRA con wavelet padre φ y una sucesión de escalamiento $u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$. Definimos $v = (v(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ y ψ donde $v(k)$ y $\psi(x)$ están dados por el Lema 3.3. Entonces $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema wavelet en $L^2(\mathbb{R})$

Demostración. *Ver [1] página 391.*

Ejemplo 3.2.2. *Retomando el MRA de Haar (ejemplo 3.2.1.) y aplicando el Teorema 3.2. encontramos el respectivo sistema wavelet para* $L^2(\mathbb{R})$. *La clave es encontrar los coeficientes* $u(k), k \in \mathbb{Z}$ *en la relación de escalado. La ortonormalidad del conjunto* $\{\varphi_{1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *esta dada por*

$$u(k) =< \varphi, \varphi_{1,k} >$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. *Note que* $\varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2}\varphi(2x-k)$ *es* $\sqrt{2}$ *para* $k/2 \leq x < (k+1)/2$ *y* 0 *para otros* x. *Además el computo de* $< \varphi, \varphi_{1,k} >$ *es fáci, y obtenemos* $u(0) = 1/\sqrt{2}$, *y* $u(j) = 0$ *si* $j \notin \{0,1\}$. *Podemos revisar esto haciendo lo siguiente: La relación de escala con estos valores es equivalente a*

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1),$$

Lo cúal es fácil de verificar. Para v *tenemos* $v(0) = -1/\sqrt{2}, v(1) = 1/\sqrt{2}$ *y* $v(j) = 0$ *para otros* j. *De aqui la madre wavelet es*

$$\psi(x) = -\varphi(2x) + \varphi(2x-1) = \begin{cases} -1 & si \;\; 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & si \;\; 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & si \;\; x < 0 \;\; o \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

Entonces,

$$\psi_{j,k}(x) = \begin{cases} -2^{j/2} & si \;\; \frac{k}{2^j} \leq x < \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ 2^{j/2} & si \;\; \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \leq x < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & si \;\; x < \frac{k}{2^j} \;\; o \;\; x \geq \frac{k+1}{2^j} \end{cases}$$

No es difícil ver que es un conjunto ortonormal y la completes viene dada por el Teorema 3.2. Con lo cual tenemos un ejemplo de un sistema wavelet.

CAPÍTULO 4

Transformada Wavelet

La transformada Wavelet continua permite el análisis de una señal en un segmento localizado de esta y consiste en expresar una señal continua como una expansión de términos o coeficientes del producto interno entre la señal y una Función Wavelet Madre $\psi(t)$. Una Wavelet Madre es una función localizada, perteneciente al espacio $L^2(\mathbb{R})$, que contiene todas las funciones con energía finita y funciones de cuadrado integrable definidas

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \int |f(t)|^2 = E < \infty$$

De esta manera se cuenta con una única ventana modulada y a partir de esta se genera una completa familia de funciones elementales mediante dilataciones o contracciones y traslaciones en el tiempo $\psi_{u,s}(t)$, denominados átomos wavelet o wavelet hijas que cumplen con todas las condiciones de la forma:

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi(\frac{t-u}{s})$$

La Wavelet Madre debe cumplir con la condición de admisibilidad

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{w} dw < \infty$$

Lo que quiere decir que la función $\psi(t)$ este bien localizada en el tiempo, es decir, que la función oscile alrededor de un eje y su promedio sea cero, matemáticamente $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$, y que la transformada de Fourier $\hat{\psi}(w)$ sea un filtro continuo pasa-banda, con rápido decrecimiento hacia el infinito y hacia $w = 0$.

La transformada Wavelet de una función $f(t)$ a una escala y una posición , es calculada por la correlación de $f(t)$ con una $\psi_{u,s}(t)$ de la forma

$$CWTf(u,s) =< f, \psi_{u,s} >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{u,s}(t)dt$$

$$CWTf(u,s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{s}}\psi(\frac{t-u}{s})dt$$

Para escalas pequeñas $(s < 1)$, con la CWT se obtiene información localizada en el dominio del tiempo $f(t)$ de y para escalas $(s > 1)$ la información de $\hat{f}(w)$ se presenta localizada en el dominio de la frecuencia. La transformada wavelet maneja un plano de tiempoescala, pero también puede ser de tiempo-frecuencia, para esto se recurre al Teorema de Parseval y de esta manera es posible definir la transformada Wavelet en el dominio de la frecuenciatransformada Wavelet en el dominio de la frecuencia

$$CWTf(u,s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\sqrt{s}\psi^*(sw)e^{jwu}dw$$

Nota 4.0.1. *La Transformada Wavelet Discreta viene dada por*

$$DWTf(j,k) = 2^{\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(2^j t - k)dt$$

Para poder introducir el término de escala y frecuencia, es necesario ante todo definir una constante (c), que permite realizar un cambio de variable de una escala a una frecuencia w:

$$s \longrightarrow w = \frac{c}{s}$$

De igual manera, es posible realizar una Transformada Wavelet inversa, que permita reconstruir la señal, a partir de la CWT (que preserva la energía de la señal) y las $\psi_{u,s}(t)$

$$f(t) = C_\psi \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CWTf(u,s)\psi_{u,s}(t)\frac{duds}{s^2}$$

Nota 4.0.2. *De manera muy general, la Transformada Wavelet de una función $f(t)$ es la descomposición de $f(t)$ en un conjunto de funciones $\psi_{s,t}$, que forman una base y son llamadas las "Wavelets".*

CAPÍTULO 5

Introducción a los Wavelets Complejos

Wavelet Dual-Tree Complex.

La TW compleja de doble árbol (TWC-DA) desarrollado por N. G. Kingsbury en 1998, corresponde a una mejora de la TWD, con importantes propiedades adicionales. El TWC-DA ha recibido recientemente un gran interés en el procesamiento de señales, debido principalmente a su dirección selectiva y cerca de desplazamiento de propiedades invariantes.

Definida como una forma de transformada wavelet discreta que genera coeficientes complejos mediante el uso de un árbol doble de filtros de ondas pequeñas para obtener partes reales e imaginarias, es decir, el TWC-DA utiliza dos árboles separados que forman pares de filtros de Hilbert que conducen a coeficientes reales e imaginarios complejos en cada sub-banda (Cada árbol contiene filtros puramente reales, pero los dos árboles producen las partes real e imaginaria, respectivamente, de cada coeficiente wavelet compleja). Como se enuncio anteriormente esta transformación, surge con el fin de proporcionar una mejor resolución direccional (filtros direccionalmente selectivos) en dos o más dimensiones y la invariancia de cambio aproximada en comparación con

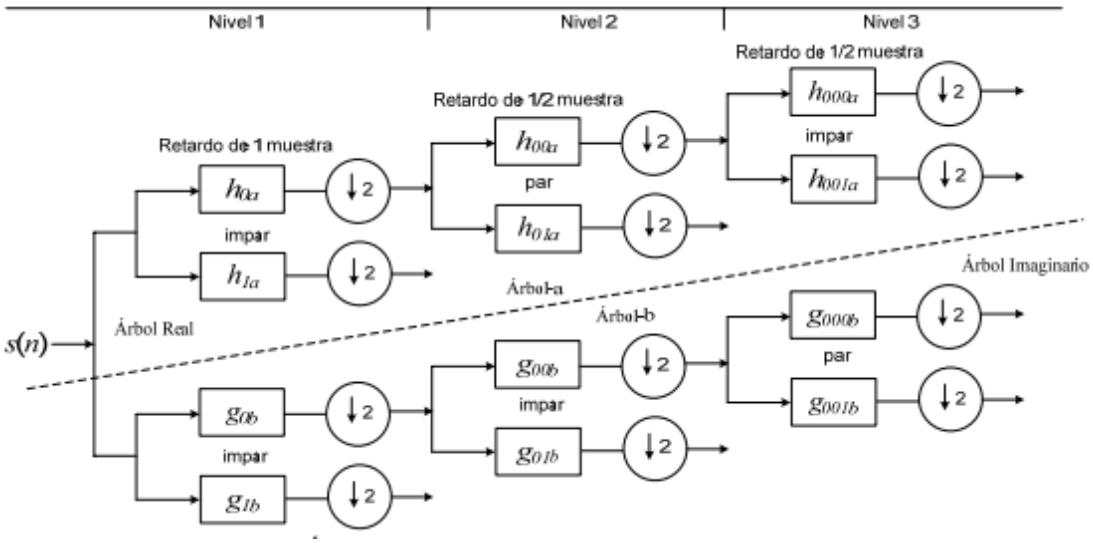
la TWD convencional.

El sistema TWC-DA es una potente herramienta para la eliminación de ruido de imagen y vídeo debido a su desplazamiento y rotación alrededor de la invariancia, además es particularmente adecuada para otras señales multidimensionales . La invariancia cerca de desplazamiento y la mejora de la selectividad direccional han facilitado excelentes resultados en la eliminación de ruido, la fusión y otras aplicaciones de procesamiento de imágenes . Características del TWC-DA:

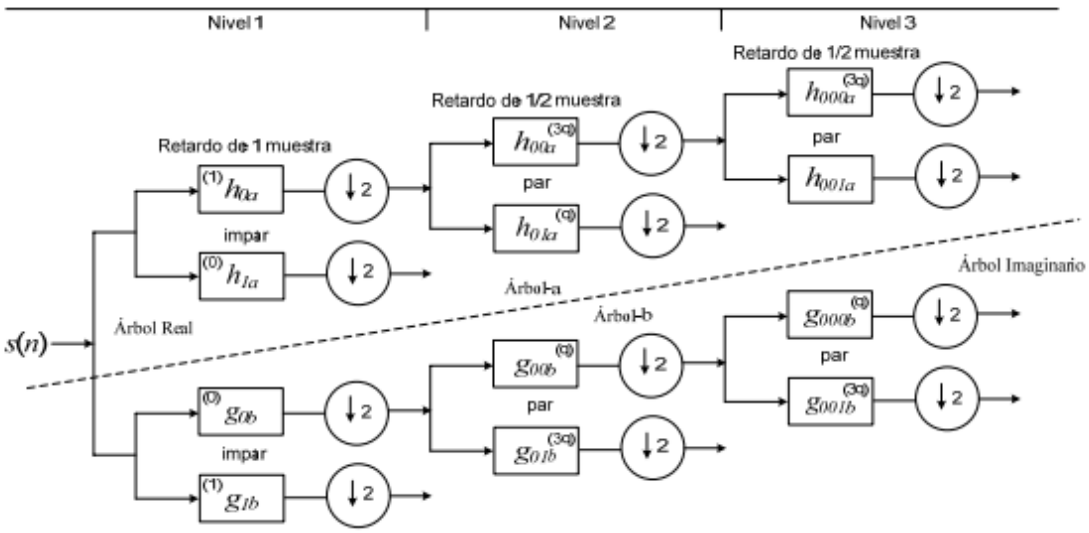
- Filtrado direccionalmente selectivo en 2 o más dimensiones.
- Factor de redundancia de tan solo 2^m : 1 para señales m-dimensiones.
- Reconstrucción perfecta con filtros de fase lineal cortos.
- Redundancia limitada 2:1 en 1-D, 4:1 en 2-D etc.

Hay dos formas de diseñar la CWT-DT, una es basada en la longitud par o impar de los filtros y la segunda emplea el diseño de 1/4 de corrimiento.

Árbol de análisis usando filtros pares o impares.



Árbol de análisis usando "Q-shift"



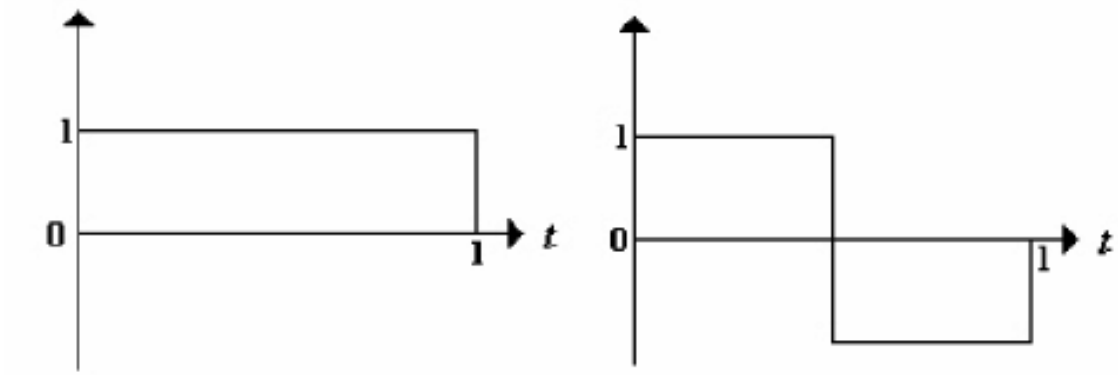
CAPÍTULO 6

Aplicación

En este capítulo, daremos algunas aplicaciones de los Wavelets.

I) **Representación de una señal sinusoidal.** A continuación se desarrollará una aproximación de la función $f(t) = sin(t)$ con $t \in [-1,7]$ para tres escalas distintas $(j = 0, j = 1, j = 2)$ mediante la función de escala (padre wavelet) y función wavelet Haar definidas así:

Función de escala y Función Wavelet Haar



$$\varphi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j t - k)$$
$$= \begin{cases} 2^{j/2} & \text{si } t_1 = \frac{k}{2^j} \leq x < \frac{1+k}{2^j} = t_2 \\ 0 & \text{si } e.o.c \end{cases}$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - k)$$
$$= \begin{cases} 2^{j/2} & \text{si } \frac{k}{2^j} \leq x < \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ -2^{j/2} & \text{si } \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \leq x < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & \text{si } e.o.c \end{cases}$$

Para una correcta aproximación de la señal se realiza el siguiente procedimiento:

I) Dependiendo de la escala o nivel de resolución a utilizar, se encuentra el intervalo en el cuál varia el parámetro de traslación (k). Para $j = 0$,

$$t_1 = -1 = \frac{k}{2^j} \qquad t_2 = 7 = \frac{1+k}{2^j}$$

Se reemplaza la escala y se obtiene el siguiente intervalo, que corresponde al número de coeficientes a hhallar $k \in [-1, 6]$.

II) Para el cálculo de los coeficientes de escala se utiliza el nuevo intervalo de k y se obtiene

$$\varphi_{0,k} = \varphi(t-k) == \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq t < 1+k \\ 0 & \text{si } e.o.c \end{cases}$$

$$c_{0,k} = \int_{-1}^{7} f(t)\varphi(t-k)dt$$

Se encuentra cada uno de los coeficientes, por ejemplo, para $k = -1$ y así sucesivamente hasta $k = 6$

$$c_{0,-1} = \int_{-1}^{0} sin(t)dt = -0,4507$$

III) Para el cálculo de los coeficientes wavelet se realiza el anterior procedimiento, reescribiendo las ecuaciones de $d_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$

$$\psi_{0,k} = \psi(t-k) == \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq t < 1/2+k \\ -1 & \text{si } 1/2+k \leq t \leq k+1 \\ 0 & \text{si } e.o.c \end{cases}$$

$$d_{0,k} = \int_{-1}^{7} f(t)\psi(t-k)dt$$

A manera de ejemplo, se calcula el coeficiente wavelet, para $k = -1$

$$d_{0,-1} = \int_{-1}^{-1/2} sin(t)dt - \int_{-1/2}^{0} sin(t)dt = -0,2149$$

IV) Una vez encontrados los coeficientes para la escala $j = 0$, se repite el procedimiento para $j = 1$ y $j = 2$. El parámetro j puede aumentar dependiendo el nivel de resolución que se desee, de esta manera se obtuvo los siguientes coeficientes:

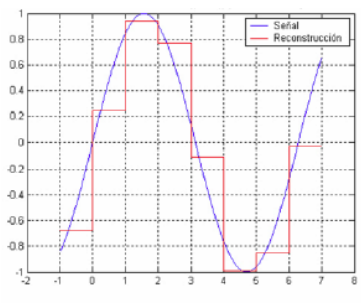
$c_{0,-1}$	-0.4597	$d_{0,-1}$	-0.2149
$c_{0,0}$	0.4597	$d_{0,0}$	-0.2149
$c_{0,1}$	0.9564	$d_{0,1}$	-0.0173
$c_{0,2}$	0.5738	$d_{0,2}$	0.1961
$c_{0,3}$	-0.3363	$d_{0,3}$	-0.2149
$c_{0,4}$	-0.9373	$d_{0,4}$	0.0516
$c_{0,5}$	-0.6765	$d_{0,5}$	-0.1735
$c_{0,6}$	0.2063	$d_{0,6}$	-0.2391

(a) Para j=0

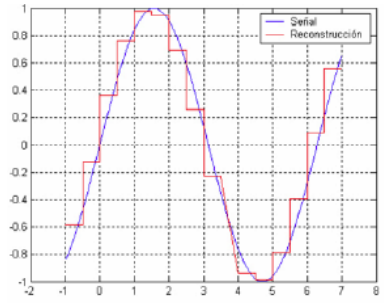
$c_{1,-2}$	-0.6746	$d_{1,-2}$	-0.091
$c_{1,-1}$	-0.2448	$d_{1,-1}$	0.1205
$c_{1,0}$	0.2448	$d_{1,0}$	0.1205
$c_{1,1}$	0.6746	$d_{1,1}$	0.0909
$c_{1,2}$	0.9391	$d_{1,2}$	0.0392
$c_{1,3}$	0.9738	$d_{1,3}$	-0.0222
$c_{1,4}$	0.7699	$d_{1,4}$	-0.0781
$c_{1,5}$	0.3777	$d_{1,5}$	-0.1149
$c_{1,6}$	-0.1071	$d_{1,6}$	-0.1236
$c_{1,7}$	-0.5656	$d_{1,7}$	-0.1020
$c_{1,8}$	-0.8857	$d_{1,8}$	-0.0555
$c_{1,9}$	-0.9889	$d_{1,9}$	0.0047
$c_{1,10}$	-0.8500	$d_{1,10}$	0.0637
$c_{1,11}$	-0.5030	$d_{1,11}$	0.1071
$c_{1,12}$	-0.0328	$d_{1,12}$	0.1243
$c_{1,13}$	0.4454	$d_{1,13}$	0.1110

(b) Para j=1

V) Finalmente, para hacer la reconstrucción de la señal se suman los coeficientes de escala y Wavelet para igual y . A continuación se puede apreciar la forma en que fue aproximada la señal para distintos niveles de esolución o escala.



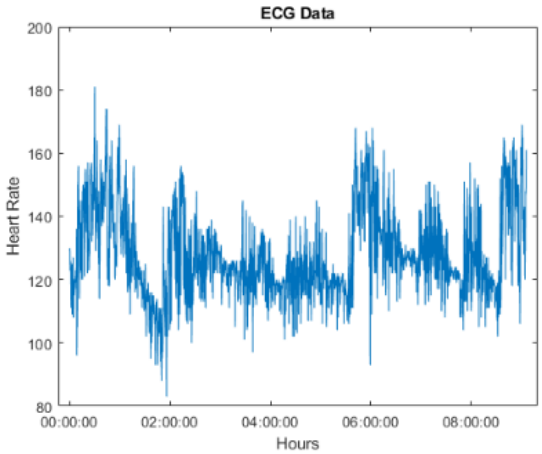
(d) Para escala j=0



(e) Para escala j=1

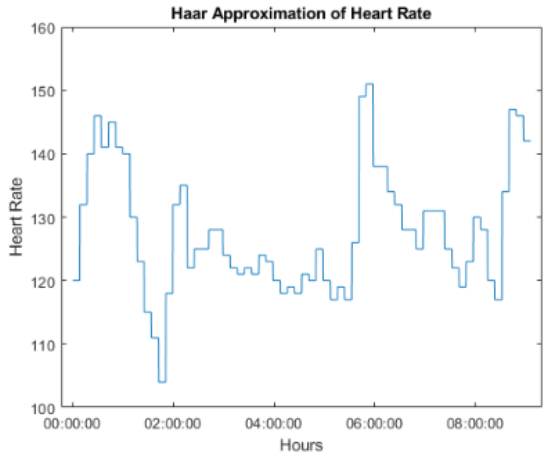
II) **Ritmo cardiaco** El siguiente ejemplo a estudiar es muy ilustrativo y práctico para entender el uso de wavelets, éste lo podemos apreciaren Matlab. Lo que se hace es cargar los datos y graficarlos, como se muestra acontinuación

```
load BabyECGData;
plot(times,HR)
xlabel('Hours')
ylabel('Heart Rate')
title('ECG Data')
```



Después haciendo uso de los wavelet Haar, graficamos los datos anteriores, obteniendo

```
figure;
plot(times,HaarHR)
xlabel('Hours')
ylabel('Heart Rate')
title('Haar Approximation of Heart Rate')
```



Se puede apreciar que el uso de wavelets en un caso donde los datos nos brindan la información no muy detallada, nos ayuda a apreciarla mejor y entenderla más fácilmente.

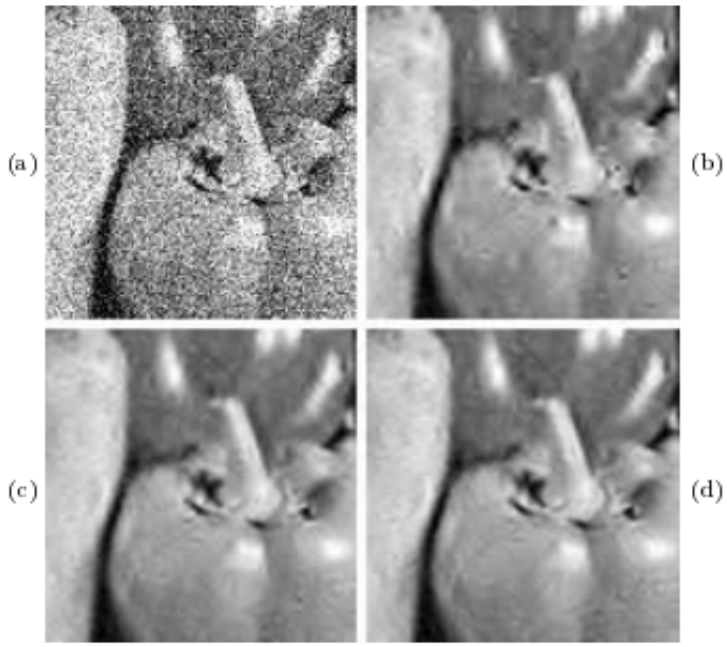
III) **Procesamiento de Imágenes con Wavelets Complejos** Nos centraremos para el siguiente ejemplo en el artículo [2]. La invarianza de cambio y la direccionalidad de la CWT se pueden aplicar ventajosamente en muchas áreas del procesamiento de imágenes, por ejemplo: eliminación de ruido, restauración, textura-modelado, filtrado direccionable, registro / procesamiento de movimiento, segmentación de objetos, y clasificación de imagen.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de eliminación de ruido. La imagen (d) es el resultado de la eliminación de ruido de la imagen (a) usando el DT-CWT y un método de umbral suave simple que suprime todos los coeficientes de ondículas complejas x de baja amplitud con un coseno elevado:

$$g(x) = \frac{1}{2}(1 - cos\{|x|/(\pi T)\} \quad para \quad |x| < T, \quad y \quad g(x) = 1 \quad enotraparte)$$

Por comparación mostramos imágenes (b) y (c) que se obtuvieron utilizando el mismo software (método de umbralización con el dwt real en sus formas diezmadas

y no definidas respectivamente). (b) muestra artefactos significativamente peores que (d), mientras que (c) es muy similar a (d) pero requiere aproximadamente cinco veces más computación. En todos los casos, los umbrales T se seleccionaron para obtener el error medio cuadrático medio de la imagen original (limpia). En la práctica, los métodos de umbralización más complicados pueden ser usados, como en Malfait Roose (1997), que utiliza campos aleatorios de Markov en conjunción con un peso no estimado. Es probable que, al reemplazar la WT con la CWT, la efectividad del MRFs en niveles de wavelets más gruesos puede mejorarse, debido a las tasas de muestreo más apropiadas de la CWt.



CAPÍTULO 7

Conclusiones

- Debido al comportamiento no-estacionario que presentan las señales reales, es indispensable que su estudio se realice a través del análisis Wavelet, permitiendo una representación y descomposición con ventanas de longitud variable, adaptadas al cambio de frecuencia de la señal, preservando la información tiempofrecuencia simultáneamente en el dominio transformado.
- El análisis Wavelet permite hacer una representación de la señal como una expansión de coeficientes del producto interno entre la Wavelet Madre, las funciones obtenidas por escalamiento y traslación de esta y la señal.
- La complejidad en el cálculo matemático de la Transformada Wavelet continua genera la necesidad de hacer una discretización de los parámetros de escala y frecuencia, obteniendo un conjunto finito de valores (coeficientes), que a través de su clasificación, análisis y reagrupamiento, permiten la implementación de algoritmos que facilitan su cálculo e interpretación.
- La Transformada Wavelet Compleja, tiene mejor desempeño para eliminar el ruido de señales e imágenes, a comparación de la DWT.

- La CWT, puede ser aplicada para análisis de voz en el caso de señales 1-D, en el caso de 2-D para imágenes de resonancia magnética.

Bibliografía

[1] **Frazier, M.W.** *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999. ISBN 0-387-98639-1.

[2] **Kingsbury, N. G.** *Image Processing With Complexs Wavelets*. Signal Processing Group, Departament pf Engineering, University of Cambridge, CB2 1PZ, UK., 1997.

[3] **Zarantonello, S. E.** *Theory and application of Wavelets*. Santa Clara University., 1997.

[4] **Murray Speigel.** *Teoría y Problemas de Análisis de Fourier*. McGraw-Hill serie de compendios Schaum., 1981.

[5] **Ruel Churchill.** *Series de Fourier y Problemas de Contorno*. McGRaw-Hill., 1978.