Algunas propiedades de las Matrices de Toeplitz Complejas

Presentado por: Maicol Andres Ardila Amado



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Proyecto Curricular de Matemáticas

Bogotá D.C

2020

Algunas propiedades de las Matrices de Toeplitz Complejas

Presentado por: Maicol Andres Ardila Amado

Dirigido por: Samuel Barreto Melo

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al titulo de:

Matemático



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Proyecto Curricular de Matemáticas

Bogotá D.C

2020

Índice

1. Resumen **2**

2. Introducción **4**

3. Objetivos **6**

3.1. Objetivo General 6

3.2. Objetivos Específicos 6

4. Preliminares **9**

4.1. Álgebra Lineal 9

4.2. Análisis Funcional 14

4.3. Álgebras C^* 21

5. Normas en el conjunto de matrices de Toeplitz **25**

6. Matrices de Toeplitz Involutivas y la DFT **48**

6.1. DFT 49

6.2. Matrices Involutivas 59

7. Un operador fiel sobre $M_n(\mathbb{C})$ **66**

8. Algunas aplicaciones **69**

8.1. Estadística 69

8.2. Filtros 70

9. Conclusiones **72**

10. Apéndice **74**

11. Bibliografía **77**

Agradecimientos

Principalmente quiero agradecer a las dos personas más importantes en mi vida; que siempre me han apoyado y acompañado, mis padres, porque sin ellos no habría podido sobrellevar todos estos años. Madre, gracias por cada madrugada y noche trasnochando por mí, cada preocupación y por cada muestra de amor que me das día a día, nunca olvides que sin tu apoyo esto no hubiera sido posible. Padre, gracias por cada consejo y sobretodo por ser mi gran ejemplo a seguir durante todos estos años; sin tus regaños, reclamos y cada cosa que hiciste para forjarme no seria quien soy hoy en día, no puedo ni quiero imaginar que seria de mí sin todo eso; en fin, los amo con todo mi corazón gracias por ser como son y por existir en mi vida.

No podía escribir esto sin mencionarlos a ustedes seis, mis amigos, hermanos, compañeros y apoyo; David, Gustavo, Camilo, Karl, Jairo y Shirley, ¿Qué seria de mí sin ustedes? Gracias por cada momento junto a mí, por ser quienes son y por estar a mi lado incondicionalmente. Esto también se los debo a ustedes, por cada noche que no los vi, por cada palabra de apoyo que me han dado y por que se el orgullo que sienten con mis logros; gracias por ser mi familia ***"Peritos"****.*

Durante mi estadía en la universidad conocí personas totalmente increíbles, gracias a mis compañeros de carrera con quienes me reí, estresé y hasta enfade, gracias por cada risa en clase, cada recuerdo juntos, por eso y mucho más esto también es de ustedes. A esa persona que estuvo conmigo durante casi toda mi carrera, que me apoyo, me dio amor, me entendió y me ayudo a pesar de que no tenía una remota idea de lo que yo hacia; gracias por cada momento junto a mí, por entenderme y hacerme tan inmensamente feliz cada día que pasamos juntos, ***"I saw you standing there****", gracias por esos años juntos.*

Por último, gracias a todos los profesores que me acompañaron durante este proceso, en especial al profesor Samuel Barreto que me aconsejo y ayudo durante todo el desarrollo de este trabajo de grado.

1. Resumen

Este trabajo de grado tiene como referencia el capítulo cuatro del artículo *"On some properties of Toeplitz matrices "* [9], en el cual se hace un énfasis a las matrices de Toeplitz con entradas en los números complejos. El objetivo del trabajo es hacer un estudio a fondo de los resultados dados en el artículo mencionado, mostrando así la demostración paso a paso de cada uno de estos, ejemplificando los resultados principales y dando algunas aplicaciones de estas matrices.

Principalmente se hace un estudio de las normas de Frobenius y Operador, definidas sobre el sub-álgebra de las matrices de Toeplitz. Uno de los resultados principales da una relación entre el conjunto $M_n(\mathbb{C})$ y su respectiva sub-álgebra de matrices de Toeplitz, esta relación puede dar pie a la posible extensión de las aplicaciones que se muestran al final del trabajo.

El teorema de Lin tiene gran importancia ya que este es necesario para demostrar el teorema mencionado anteriormente; otro resultado de suma importancia es el teorema 5.5 ya que permite generalizarse al ámbito de las álgebras C^*. Por último, uno de los objetivos en el trabajo es el de relacionar las matrices circulares con la Transformada Discreta de Fourier (DFT), esta relación se da en el capítulo cinco junto con un estudio de las principales propiedades de la DFT.

Palabras clave: Matriz de Toeplitz, Operador fiel, Transformada Discreta de Fourier, Matriz involutiva, Matriz circulante.

Abstract

This monograph is using as a reference The chapter four of the article *"On some properties of Toeplitz matrices "* [9], this article emphasizes Toeplitz matrices over the field of complex numbers. The objective of this monograph is to make an in-depth study of the results given in the above mentioned article, for this I will show the step-by-step prove of each result, exemplifying the main results and giving some applications of these matrices.

Mainly I made a study of the Frobenius and Operator norms defined over the subalgebra of Toeplitz matrices. One of the main results gives a relationship between the set $M_n(\mathbb{C})$ and its respective subalgebra of Toeplitz matrices, this relationship can lead to the possible extension of the applications shown at the end of this monograph.

Lin's theorem has great importance since it is necessary to prove the aforementioned theorem. Another important result is the theorem 5.5 since it allows generalization to the area of $C*$ −algebras . Finally, one of the objectives in this monograph is to relate the circular matrices to the Discrete Fourier Transform (DFT), this relationship is given in chapter five with a study of the main properties of the DFT.

Keywords: Toeplitz matrices, Faithful operator, Discrete Fourier Tranform, Involutory matrices, Circulant matrices.

2. Introducción

El conjunto de las matrices cuadradas de orden n en un anillo A es conocido y notado como $M_n(A)$, en este conjunto se pueden encontrar varios subconjuntos de los cuales se trabajaran con solo algunos, estos son las matrices involutivas, nilpotentes, triangulares superiores e inferiores y claramente, las matrices de Toeplitz. El objetivo de este trabajo de grado abarcara el subconjunto de las matrices de Toeplitz del conjunto $M_n(\mathbb{C})$, es decir, se trabajara con matrices cuyas entradas están sobre el anillo de los números complejos.

Teniendo en claro el enfoque que se le dará a este documento, se define la matriz de Toeplitz de tamaño $n \times n$ denotada por $T = [t_{ij}] = [t_{i-j}]$ esta dada por:

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots \\ t_2 & t_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_0 \end{pmatrix}$$

En palabras, se pueden definir las matrices de Toeplitz como aquellas que tienen la misma entrada en cada una de sus diagonales; teniendo definido el objeto principal de trabajo se hará un estudio sobre este. El estudio que se realizara toma como base el cuarto capítulo del articulo *On some properties of Toeplitz matrices* [9], en el cual se enuncian los resultados principales sobre la teoría que se estudiara, pero al no ser el objetivo de los autores en el documento, no se da una demostración de varios de estos resultados y por lo tanto lo que se pretende en este trabajo de grado es realizar un estudio detallado de estos resultados el cual se hará en 4 capítulos titulados como sigue: Preliminares, Normas sobre el conjunto de matrices de Toeplitz, Un operador fiel sobre $M_n(\mathbb{C})$ y Algunas aplicaciones.

En el capítulo 3, se hace un estudio básico del álgebra lineal, el análisis funcional y las álgebras C^*, en el cual se dan conceptos y resultados necesarios para el desarrollo y comprensión del presente trabajo de grado.

En el capítulo 4, se relaciona el conjunto $M_n(\mathbb{C})$ con su respectivo subconjunto de matrices de Toeplitz esto mediante una distancia que se definirá en el mismo capítulo, además se definirán las normas de Frobenius y la norma en operador para estas matrices y se darán resultados que relacionaran estas dos normas con el objetivo de probar que una matriz y su matriz de Toeplitz asociada son aproximada y conjuntamente diagonalizables como se define en [3].

En el capítulo 5 se dará una relación entre las matrices de Toeplitz involutivas y la Transformada Discreta de Fourier (DFT) esto con el objetivo de dar una introducción teórica para el capítulo 6 en el cual se definirá lo que es un operador fiel y se hallara un operador de esta clase que cumplirá algunas propiedades más, el cual estará definido del conjunto $M_n(\mathbb{C})$ en su subconjunto de matrices circulares con lo cual se culminaría el estudio que se quiere hacer sobre estas matrices.

Por ultimo luego del estudio hecho, en el capítulo 7 se darán algunas aplicaciones de las matrices de Toeplitz las cuales estarán enfocadas principalmente en el área de los procesos estocásticos y la teoría de señales.

3. Objetivos

3.1. Objetivo General

1. Estudiar las propiedades de las Matrices de Toeplitz con entradas en el anillo de los números complejos $\mathbb{C}$.

3.2. Objetivos Específicos

1. Analizar las propiedades de la norma de Frobenius y la norma en operador de las matrices de Toeplitz.
2. Relacionar la Transformada Discreta de Fourier (DFT) con las matrices circulares.
3. Dar una esperanza condicional, fiel, preservadora de trazas y de idempotencia que este definida sobre $M_n(\mathbb{C})$.

Contexto Histórico

El concepto de matriz de Toeplitz viene dado principalmente de los Operadores de Toeplitz (como se vera en la sección 3.2), este concepto fue brindado por Otto Toeplitz quien fue un matemático alemán que se especializo en el área del análisis funcional.

Toeplitz inicio sus estudios matemáticos en la Universidad de Breslau y en 1905 hizo un doctorado en Geometría Algebraica; un año después se traslado a la Universidad de Göttingen donde permaneció durante 7 años. En esta facultad también se encontraban varios matemáticos reconocidos como lo son David Hilbert, Felix Klein y Hermann Minkowski; durante su estadía Toepltiz trabajo con un grupo de jóvenes que a la vez trabajaban con Hilbert.

En los 7 años que Toeplitz estuvo en la Universidad de Göttingen este re-elaboro la teoría de funcionales lineales y las formas cuadráticas en espacios n-dimensionales, además también hizo una gran contribución a la teoría espectral escribiendo 5 artículos que están totalmente relacionados con los espectros de algunos operadores que Hilbert había estado desarrollando.

Además de las contribuciones mencionadas anteriormente Toeplitz publico un documento sobre procesos de suma en el cual descubrió las ideas básicas de lo que serian los operadores de Toeplitz. La teoría de estos operadores se volvió muy famosa y a la vez relevante en el estudio general de los operadores definidos sobre espacios de funciones; la teoría sobre estos puede hallarse en [13].

Luego de que se introdujo el concepto de matriz de Toeplitz varios matemáticos comenzaron a trabajar con las propiedades que podrían cumplir estas, uno de los resultados mas representativos al respecto fue dado en 1999 por Steven Mackey, Niloufer Mackey y Srdjan Petrovic en su articulo *"Is Every Matrix Similar to a Toeplitz Matrix?"* en el cual demostraron que toda matriz es similar a una de Toeplitz.

Luego, en 2013 los matemáticos Ke Ye y Lek-Heng Lim demostraron que toda matriz se puede ver como un producto de matrices de Toeplitz en su articulo *"Every Matrix is a Product of Toeplitz matrices"* y finalmente en 2016 los matemáticos Dan Kucerovsky, Kaveh Mousalvand y Aydin Sarraf publicaron su articulo *"On Some Propierties of Toeplitz matrices"* en el cual tomaron casos particulares de matrices de Toeplitz para hallar la cantidad de estas que serán invertibles, involutorias y nilpotentes; además de esto el articulo culmina con un estudio sobre las matrices de Toeplitz complejas.

4. Preliminares

A continuación se darán algunos conceptos y resultados básicos que son necesarios para el estudio de las propiedades de las matrices de Toeplitz. Los primeros conceptos que intuitivamente se deben presentar son los relacionados con el álgebra lineal, ya que es bien conocido que el estudio de las matrices en general se realiza en esta área de las matemáticas.

Gran parte de las propiedades que se estudiaran sobre las matrices de Toeplitz estarán relacionadas con las distintas normas que se pueden definir sobre este tipo de objetos matemáticos, por lo tanto se hará una pequeña introducción a las propiedades de estas como se hace en la teoría del análisis funcional.

Por ultimo, en la demostración de algunos resultados se utilizan algunas definiciones de la teoría de álgebras C^* por lo tanto se dará una pequeña introducción a este tema, abarcando así las definiciones necesarias para el desarrollo de estos resultados. Se debe tener en cuenta que en el desarrollo de este capítulo se omitirán las pruebas de los resultados ya que estas hacen parte de los cursos básicos y además se podrán encontrar estas demostraciones en la bibliografía de la cual se extrajeron los resultados.

4.1. Álgebra Lineal

En esta sección se presentaran definiciones y resultados necesarios para el estudio que se realizara posteriormente, se hará un énfasis a la teoría de espacios vectoriales y en especial de los espacios vectoriales de matrices; en este ultimo se hará un estudio sobre la función determinante y sus propiedades. La teoría que se presenta a continuación es tomada de [6].

Definicion 4.1. ***Espacios Vectoriales*** *Un espacio vectorial sobre un cuerpo K es un conjunto V no vacío, dotado de las siguientes dos operaciones para las cuales sera cerrado y además cumplirán las siguientes propiedades:*

$$Suma\,(+) : V \times V \longrightarrow V$$
$$(u, v) \longmapsto w = u + v$$

(i) $u + v = v + u$ *(Propiedad Conmutativa)*

(ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(Propiedad Asociativa)*

(iii) $\exists e \in V : u + e = u \forall u \in V$ *(Existencia del elemento Neutro)*

(iv) $\forall u \in V, \exists - u \in V : u + (-u) = e$ *(Existencia del elemento Inverso)*

$$Producto\,por\,escalar\,(\cdot) : V \times \mathbb{K} \longrightarrow V$$
$$(u, a) \longmapsto w = a \cdot u$$

(i) $a \cdot (b \cdot u) = b \cdot (a \cdot u)$ *(Propiedad Asociativa)*

(ii) $\exists 1 \in K : 1 \cdot u = u \cdot 1 = u, \forall u \in V$ *(Existencia del Escalar Neutro)*

(iii) $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ *(Propiedad Distributiva)*

(iv) $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ *(Propiedad Distributiva)*

Definicion 4.2. ***(Subespacio)*** *Un subespacio M de un espacio vectorial V sobre el anillo $\mathbb{F}$ es un subconjunto no vacío de V que es cerrado bajo la suma de vectores y la multiplicación por escalar. Un subespacio de un espacio vectorial es inmediatamente por definición un espacio vectorial por si mismo.*

Definicion 4.3. ***(Span o Generado)*** *Si $v_1, ..., v_k$ son vectores dados en un espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}$, entonces se define el generado por el conjunto $\{v_1, ..., v_k\}$ notado por $span\{v1, ..., v_k\}$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales entre estos vectores, en otras palabras*

$$span\{v_1, ..., v_k\} = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j : \quad \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F} \right\}$$

Definicion 4.4. ***Independencia Lineal*** *Un conjunto de vectores $v_1, ..., v_k$ en un espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}$ sera llamado* ***linealmente independiente*** *sobre $\mathbb{F}$ si los únicos escalares $\alpha_1, ..., \alpha_k$ para los cuales*

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0$$

son $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$; en caso contrario los vectores serán llamados ***linealmente dependientes****.*

Definicion 4.5. ***(Base, Dimensión)*** *Un conjunto de vectores $v_1, ..., v_k$ forma una base de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}$ si*

- *$span\{v_1, ..., v_k\} = V$.*
- *Los vectores $v_1, ..., v_k$ son linealmente independientes.*

Con estos conceptos base se procederá a definir lo que es una matriz a modo de ejemplo, para así introducir toda la teoría sobre estos objetos.

Ejemplo 4.1. *Se define* ***matriz*** *de tamaño $n \times m$ como un arreglo bidimensional de n filas por m columnas cuyas entradas son numéricas, entonces una matriz A de tamaño $m \times n$ se nota como sigue*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La notación de A se puede resumir de la forma $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. El conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en el anillo numérico $\mathbb{F}$ es notado por $M_{mn}(\mathbb{F})$; se puede dotar a este conjunto con la operación de suma y producto por escalar definidas como sigue

$$\begin{array}{rccc} (+): & M_{mn}(\mathbb{F}) \times M_{mn}(\mathbb{F}) & \to & M_{mn}(\mathbb{F}) \\ & (A, B) = ((a_{ij}), (b_{ij})) & \mapsto & A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} (\cdot): & \mathbb{F} \times M_{mn}(\mathbb{F}) & \to & M_{mn}(\mathbb{F}) \\ & (\alpha, A) = (\alpha, (a_{ij})) & \mapsto & \alpha \cdot A = (\alpha a_{ij}) \end{array}$$

Con estas operaciones el conjunto $M_{mn}(\mathbb{F})$ es un $\mathbb{F}$ espacio vectorial.

Adicionalmente se puede definir otra operación la cual es la multiplicación usual de matrices y viene dada como sigue

$$\begin{array}{rccc} (\times): & M_{mn}(\mathbb{F}) \times M_{mn}(\mathbb{F}) & \to & M_{mn}(\mathbb{F}) \\ & (A, B) = ((a_{ij}), (b_{ij})) & \mapsto & A \times B = \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot b_{rj} \right) \end{array}$$

En la operación anterior se especifica que esta es la multiplicación usual de matrices ya que existen varias formas de multiplicar matrices, en este trabajo se hace referencia al producto de Schur y el de Kronecker notados por $A*B$ y $A \otimes B$ respectivamente. La forma en que se definen estos dos productos es la siguiente

$$\begin{array}{rccc} (*): & M_{mn}(\mathbb{F}) \times M_{mn}(\mathbb{F}) & \to & M_{mn}(\mathbb{F}) \\ & (A, B) = ((a_{ij}), (b_{ij})) & \mapsto & A * B = (a_{ij} \cdot b_{ij}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} (\otimes): & M_{mn}(\mathbb{F}) \times M_{mn}(\mathbb{F}) & \to & M_{mn}(\mathbb{F}) \\ & (A, B) = ((a_{ij}), (b_{ij})) & \mapsto & A \otimes B = (a_{ij} \cdot B) \end{array}$$

El producto de Kronecker de dos matrices da como resultado una matriz por bloques, esto es, cada entrada de la matriz resultante es una matriz; en este caso, cada entrada es una matriz multiplicada por una constante, se tiene ademas que el tamaño de la matriz resultado es $m^2 \times n^2$.

En el estudio de las matrices es importante recalcar el funcional (concepto que se definirá en la siguiente sección) determinante, el cual es usado en conceptos posteriores.

Definicion 4.6. ***(Determinante de una matriz)***

El determinante de una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ *es un funcional* $det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *el cual satisface las siguientes reglas*

1. $\det(I_n) = 1$
2. $\det(A)$ *es un funcional multi-lineal en las filas de* A.
3. *Si dos filas de* A *son idénticas entonces* $\det(A) = 0$.
4. *Si* B *es la matriz obtenida al sumar o multiplicar una de las filas de* A *por otra fila de* A *entonces* $\det(B) = \det(A)$.
5. *Si* A *tiene una fila cuyas entradas son todas cero entonce* $\det(A) = 0$.
6. *Si dos filas de* A *son linealmente dependientes entonces* $\det(A) = 0$.

Con esta definición se puede introducir ahora el concepto de los valores y vectores propios de una matriz.

Definicion 4.7. ***(Valores y Vectores Propios, Polinomio Característico)***

Dada una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F})$ *con* $\mathbb{F}$ *un campo cualquiera, entonces un escalar* $\lambda \in \mathbb{F}$ *sera un valor propio para* A *si y solo si* $\det(A - \lambda I_n) = 0$*; la función* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ *es un polinomio y por definición sus ceros son los valores propios, este polinomio es llamado* ***polinomio característico de*** A.

Una vez conocidos los valores propios de la matriz A *entonces los vectores propios serán los vectores* v *tales que* $(A - \lambda I_n) \cdot v = 0$.

Definicion 4.8. ***(Polinomio Mínimo)***

Dada una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F})$ *con* $\mathbb{F}$ *un campo cualquiera, se define el polinomio mínimo de* A *como el polinomio de menor grado tal que* $p(A) = 0$

Definicion 4.9. ***(Traza de una Matriz)***

Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ con $\mathbb{F}$ un campo cualquiera se define la traza de A como la siguiente función

$$\begin{array}{rccc} (tr): & M_n(\mathbb{F}) & \to & \mathbb{F} \\ & (A) = ((a_{ij})) & \mapsto & tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{array}$$

Para culminar esta sección de preliminares se definirán algunos tipos de matrices que son usadas a lo largo del trabajo, las cuales cumplirán algunas propiedades especiales.

Definicion 4.10. *Sea $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz con $\mathbb{F}$ un campo cualquiera, entonces*

1. *A se dice **diagonal** si $a_{ij} = \delta_{ij}$.*
2. *A es una matriz **invertible** si existe $A^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.*
3. *A y B se dicen **semejantes** si existe una matriz invertible $P \in \mathbb{F}$ tal que $P^{-1}AP = B$.*
4. *A se dice **diagonalizable** si esta es semejante a una matriz diagonal.*
5. *A se dice **involutiva** si $A = A^{-1}$.*
6. *Sea $k \in \mathbb{N}$ entonces se dice que A es **nilpotente de grado** k si $A^k = 0$.*
7. *Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ entonces la matriz **transpuesta conjugada o adjunta** de A notada por A^* estará dada por $a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}$.*

4.2. Análisis Funcional

En esta sección se hará un estudio de los espacios métricos y especialmente en los espacios normados, se trabajaran de forma general estos últimos y luego se particularizaran estos resultados en los espacios conformados por matrices, definiendo así las normas que se trabajaran durante el desarrollo del documento.

Además de esto, en el campo del análisis funcional el estudio de las matrices se puede hacer mediante los operadores lineales, por lo tanto es de esperar hacer una introducción con respecto a estos últimos. Las definiciones y resultados que se plantearan a continuación fueron extraídos de [7].

Definicion 4.11. ***(Espacio métrico, métrica.)*** *Un espacio métrico es un par* (X, d)*, donde* X *es un conjunto y* d *es una métrica en* X*, esto es, una función definida en* $X \times X$ *tal que para todo* $x, y, z \in X$ *se tiene*

(M1) d *es de valor real, finita y no negativa.*

(M2) $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ ***(Simetría)***

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ***(Desigualdad triangular)***

Definicion 4.12. ***(Convergencia de una sucesión, limite.)*** *Una sucesión* (x_n) *en un espacio métrico* $X = (X, d)$ *es llamada convergente si existe* $x \in X$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

En este caso x *es llamado el limite de* (x_n) *y se escribe*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

o simplemente $x_n \longrightarrow x$*. En este caso se dice que* (x_n) *converge a* x *o que tiene limite* x*. Si* (x_n) *no es convergente, es llamada divergente.*

Definicion 4.13. ***(Sucesión de Cauchy, Completitud.)*** *Una sucesión* (x_n) *en un espacio métrico* $X = (X, d)$ *es llamada de Cauchy (o fundamental) si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $N = N(\varepsilon)$ *tal que*

$$d(x_m, x_n) \qquad \text{para cada } m, n > N$$

El espacio X *se llama* ***completo*** *si cada sucesión de Cauchy en* X *converge.*

Definicion 4.14. ***(Espacio normado, Espacio de Banach.)*** *Un espacio normado X es un espacio vectorial con una norma definida en el. Un espacio de Banach es un espacio normado completo. Donde una* ***norma*** *en un espacio vectorial X es una función a valor real en X cuyo valor en un $x \in X$ es denotado por $\|x\|$ y que tiene las siguientes propiedades*

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Donde x, y son vectores arbitrarios de X y α es un escalar cualquiera.

Dada una norma en X se define mediante esta una métrica la cual estará dada por $d(x, y) = \|x - y\|$.

Ejemplo 4.2. ***Espacio Euclidiano*** $\mathbb{R}$ ***y espacio unitario*** $\mathbb{C}$**.** *En la sección anterior se vio que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son espacios vectoriales, se definirá ahora una norma sobre ellos con lo cual estos serán espacios normados (mas especialmente de Banach); entonces sea $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ un elemento de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ entonces se define la norma euclidea como sigue*

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_n|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}$$

Esta norma también es nortada comúnmente por $\|x\|_2$

Ejemplo 4.3. ***Normas en*** $M_n(\mathbb{C})$**.** *Como se dijo en un principio, el objetivo de esta sección es definir las normas que se usaran para el desarrollo posterior. Antes de definir las normas que se trabajaran se debe tener en cuenta que una norma definida en $M_n(\mathbb{C})$ debe cumplir una propiedad aparte de las que cumplen las normas generalmente, esta es que $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$; con esto en mente se procederá a definir las dos normas sobre $M_n(\mathbb{C})$ que se trabajaran.*

1. ***Norma de Frobenius:*** $\|A\|_F = \left(\sum_{ij} |\, a_{ij}\,|^2\right)^{1/2} = (tr(A^*A))^{1/2}$

2. ***Norma Operador:*** $\|A\|_2 = \max_{x\in\mathbb{R}^2:\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = (\lambda_{max}(A^*A))^{1/2}$.

   En la definición anterior hay que hacer una distinción entre $\|A\|_2$, $\|x\|_2$ y $\|Ax\|_2$ ya que a pesar de que la notación de las normas sea la misma no significa que se este hablando de la misma norma, esta notación se da por la relación entre estas mediante la definición dada.

   En el primer caso se habla de la norma de la matriz A que se esta definiendo, el segundo caso se refiere a la norma euclidea vista en el ejemplo anterior para el vector x que cumple la condición dada y por ultimo en $\|Ax\|_2$ se debe tener en cuenta que el producto de la matriz A con el vector x dará como resultado una matriz de tamaño $1 \times n$ y por lo tanto esta se puede ver como un vector vertical pudiendo así aplicar la norma euclidea ya definida a este vector.

Al estar los espacios normados y de Banach definidos sobre un espacio vectorial es de esperar pensar en el subespacio de estos; se introducirá este concepto a continuación.

Definicion 4.15. ***(Subespacio de un espacio normado.)*** *Un subespacio Y de un espacio normado X es un subespacio de X considerado como espacio vectorial, dotado con la norma obtenida al restringir la norma de X al subconjunto Y.*

Definicion 4.16. ***(Subespacio de un espacio de Banach.)*** *Un subespacio Y de un espacio de Banach X es un subespacio de X considerado como espacio vectorial. Por lo tanto no se requiere que Y sea completo.*

En la definición anterior se dijo que no es necesario que un subespacio de un espacio de Banach sea completo, en el siguiente teorema se dará la condición necesaria y suficiente para que un subespacio se completo.

Teorema 4.1. *Un subespacio Y de un espacio de Banach X es completo si y solo si el conjunto Y es cerrado en X.*

Se pueden considerar funciones entre espacios vectoriales y en particular entre espacios normados, en este caso las funciones son llamadas operadores. Es de especial interés el estudio de los operadores que preservan las dos operaciones algebraicas de un espacio vectorial, en el sentido de la siguiente definición.

Definicion 4.17. ***(Operador Lineal.)*** *Un operador lineal T es un operador tal que*

(i) El dominio $\mathcal{D}(T)$ es un espacio vectorial y el rango $\mathcal{R}(T)$ se encuentra en un espacio vectorial sobre el mismo anillo.

(ii) Para todo $x, y \in \mathcal{D}(T)$ y para todo escalar α se tiene que

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

Como el estudio principal en este documento son las matrices es de importancia dar una relación entre los operadores lineales y el conjunto de matrices en general.

Ejemplo 4.4. *Una matriz real $A = (\alpha_{jk})$ con r filas y n columnas define un operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ por medio de la ecuación $y = Ax$ donde $x = (\xi_j)$ tiene n componentes y $y = (\eta_j)$ tiene r componentes; además los dos vectores son escritos como vectores columna, esto por la convención usual de la multiplicación de matrices. Escribiendo la multiplicación de matrices se obtiene lo siguiente*

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

La linealidad del operador T se tiene ya que la multiplicación de matrices es una operación lineal. Si A es una matriz compleja, esta puede definir un operador lineal de $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^r$.

Definicion 4.18. ***(Operador Lineal Acotado.)*** *Sean X, Y espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ un operador lineal, donde $\mathcal{D}(T) \subseteq X$. El operador T es llamado acotado si existe un numero real c tal que para todo $x \in \mathcal{D}(T)$*

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$$

Definicion 4.19. ***(Norma de un Operador.)*** *Sean X, Y espacios normados, dado un operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ con $\mathcal{D}(T) \subseteq X$, se define la norma del operador T como sigue*

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(T), x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

Si $\mathcal{D}(T) = \{0\}$ se define $\|T\| = 0$.

Lema 4.1. *Sea T un operador lineal acotado, entonces*

(a) Una forma alternativa para la norma de T es

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(T); \|x\|=1} \|T(x)\|$$

(b) La norma de un operador cumple con la definición de norma dada.

Teorema 4.2. *El espacio vectorial $B(X, Y)$ de todos los operadores lineales acotados del espacio normado X al espacio normado Y es por si mismo un espacio normado con la norma definida por*

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(T), x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in \mathcal{D}(T); \|x\|=1} \|T(x)\|$$

Teorema 4.3. *Si Y es un espacio de Banach, entonces $B(X, Y)$ también lo sera.*

Definicion 4.20. ***(Espacio con producto interno, espacios de Hilbert.)*** *Un espacio con producto interno (o un espacio pre-Hilbert) es un espacio vectorial X con un producto interno definido en X. Un* ***espacio de Hilbert*** *es un espacio con producto interno completo (esto con respeto a la métrica definida por el producto interno), donde un* ***producto interno*** *en X es una función de $X \times X$ en el anillo*

de escalares K de X; esto es, para cada par de vectores $x, y \in X$ existe un escalar asociado a ellos el cual es denotado por $\langle x, y\rangle$ y es llamado producto escalar de x y y. Además de esto el producto escalar debe cumplir las siguientes propiedades para cada vector $x, y, z \in X$ y cada escalar $\alpha \in K$

(IP1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(IP2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

(IP3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(IP4) $\langle x, x\rangle \geq 0$ *y* $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Teorema 4.4. ***(Subespacios de un espacio de Hilbert.)*** *Si Y un subespacio de un espacio de Hilbert H, entonces:*

(a) Y es completo si y solo si Y es cerrado en H.

(b) Si Y es de dimensión finita, entonces Y es completo.

(c) Si H es separable, entonces Y lo es. Mas generalmente, todo subconjunto de un espacio con producto interno separable, es separable.

Un producto interno puede definir una norma en X dada por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ y además una métrica en X dada por $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$.

Anteriormente se dio una forma de relacionar los operadores lineales con el conjunto $M_n(\mathbb{C})$, se puede considerar el subespacio de las matrices de Toeplitz con entradas complejas y ver a que clase de operadores esta asociado este subespacio, para esto se darán algunas definiciones tomadas de [12].

Definicion 4.21. ***(Espacios $L^p(\mathbb{T})$.)*** *Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \mid z \mid = 1\}$ y $1 \leq p < \infty$, se definen entonces los espacios*

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} : \quad \int_{\mathbb{T}} \mid f(\lambda) \mid^p d\lambda < \infty; \quad \text{donde } d\lambda = \frac{1}{2} d\theta \right\}$$

Definicion 4.22. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$ se define ε_n sobre $\mathbb{T}$ como $\varepsilon_n(z) = z^n$, note que si $z = e^{i\theta}$ entonces $\varepsilon_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$. En particular $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ resulta ser una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$ con el producto interno*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta$$

Definicion 4.23. ***(Espacios de Hardy.)*** *Sea $1 \leq p < \infty$ se define el espacio de Hardy H^p como sigue*

$$H^p = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\varepsilon_n(e^{i\theta})d\theta = 0 \text{ si } n > 0 \right\}$$

Ejemplo 4.5. ***Operadores de Toeplitz en H^2.*** *Considere H^2 el espacio de Hardy como se definió anteriormente, además considere la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{T})$ sobre H^2 la cual es llamada **Proyección de Szegö** y es denotada por P. Dada una función $f \in L^2(\mathbb{T})$ el operador lineal T_f puede ser definido en H^2 como sigue*

$$T_f(g) = P(fg), \qquad g \in H^2$$

T_f es llamado el operador de Toeplitz con símbolo f. En [13] se afirma que la matriz asociada a un operador de Toeplitz definido en un espacio de Hardy (considerando la base natural) es constante en las diagonales paralelas a la diagonal principal, lo cual implica que la matriz asociada a un operador de Toeplitz es de Toeplitz.

4.3. Álgebras C^*

El estudio que se realizara en esta sección sera dar las definiciones y resultados básicos sobre las álgebras C^*. Por lo tanto esta sección estará enfocada en dar algunos conceptos fundamentales y llevarlos hacia nuestro objeto principal de trabajo que son las matrices de Toeplitz.

Entre los conceptos que se trabajaran esta el espectro de un elemento, ya que sera el concepto mas usado en varios teoremas de este documento; finalmente los resultados y definiciones presentados a continuación fueron extraídos de [2].

Definicion 4.24. ***(Álgebra de Banach)*** *Sea A un álgebra, entonces A es de Banach si esta es compleja y además es un espacio de Banach bajo alguna norma que tiene la propiedad de ser submultiplicativa, esto es $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in A$.*

La definición anterior justifica lo dicho al inicio del ejemplo 4.3, ya que se especifica que al definir una norma en $M_n(\mathbb{C})$ esta debe cumplir que es submultiplicativa; en este orden de ideas el primer ejemplo que se puede tener de un álgebra de Banach es el conjunto $M_n(\mathbb{C})$ con la suma y producto usual y la norma de Frobenius o de Operador ya definidas anteriormente.

Definicion 4.25. ***(Espectro de un elemento)*** *Sea A un álgebra de Banach y $x \in A$ entonces el* ***espectro*** *de x en A esta definido por*

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad x - \lambda 1 \text{ no es invertible}\}$$

Definicion 4.26. ***Involución, $*-$álgebra de Banach***

Una involución en un álgebra de Banach A es un automorfismo isometrico lineal y conjugado usualmente denotado por $x \mapsto x^*$; en otras palabras $*$ debe cumplir lo siguiente para todo $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\bullet (x+y)^* = x^* + y^* \qquad \bullet\ (xy)^* = y^* x^*$$
$$\bullet (x^*)^* = x \qquad \bullet\ (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$$
$$\bullet \|x^*\| = \|x\|$$

Si a un álgebra de Banach se le dota con una involución entonces esta se denomina ***$*-$álgebra de Banach***

Definicion 4.27. ***Álgebra*** *C^* Un álgebra C^* sera un $*-$álgebra de Banach cuya norma asociada satisface el siguiente axioma llamado el axioma C^*.*

$$\|x^* x\| = \|x\|^2$$

Ejemplo 4.6. *Dado un espacio de Hilbert cualquiera $\mathcal{H}$ entonces el conjunto de todos los operadores lineales definidos sobre el $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sera un álgebra C^* con la norma usual definida sobre un operador y la involución sera el operador adjunto.*

Ejemplo 4.7. *Si se extiende la noción de operador a su matriz asociada entonces del ejemplo anterior se tiene que el conjunto $M_n(\mathbb{C})$ es un álgebra C^* con la norma de operador ya definida y la involución estará dada por la adjunta de una matriz.*

Definicion 4.28. *Sea A un álgebra C^* y $x \in A$, entonces existen clasificaciones para el elemento x que están dadas como sigue:*

- *x es Auto adjunto si $x = x^*$.*
- *x es normal si $x^*x = xx^*$.*
- *x es una proyección si $x = x^* = x^2$.*
- *x es una isometría parcial si x^*x es una proyección.*

Si además A es unitaria (esto es, que contiene un elemento unidad notado como 1) entonces existen las siguientes clasificaciones

- *x es una isometría si $x^*x = 1$.*
- *x es co-isometría si $xx^* = 1$.*
- *x es unitario si $x^*x = xx^* = 1$.*

Del axioma C^* y de las definiciones dadas anteriormente se puede concluir que toda proyección no nula y cada isometría parcial no nula (en particular cada unitario) tienen norma 1. Las anteriores definiciones se relacionan de forma directa con el espectro del elemento, esta relación está dada en el siguiente resultado.

Teorema 4.5. *Sea A un álgebra C^* y x un elemento normal de A, entonces*

1. *x es auto adjunto si y solo si $\sigma_A(x) \subseteq \mathbb{R}$.*
2. *x es unitario si y solo si $\sigma_A(x) \subseteq \{\lambda : \ \mid \lambda \mid = 1\}$.*
3. *x es unitario si y solo si $\sigma_A(x) \subseteq \{0, 1\}$.*

El último concepto que se introducirá en esta sección sera el de álgebra de Von-Neumann, en el cual no se hará énfasis, ya que como se dijo solo sera necesaria la definición de este objeto matemático para tener una idea de sobre el tipo de elementos que se están trabajando.

Definicion 4.29. ***(Álgebra de Von-Neumann)*** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea M un $*-$subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $M = M''$ donde M'' es el doble subgrupo derivado de M. En particular M sera un álgebra C^*.*

Comentario 4.1. *Se debe tener que cada álgebra de Von-Neumann debe ser necesariamente cerrado en la topología débil.*

5. Normas en el conjunto de matrices de Toeplitz

En esta sección se definirá una métrica que medirá que tan lejos esta una matriz de ser de Toeplitz, además se va a asociar una matriz de Toeplitz T_A a cualquier matriz A como sigue:

$$t_{1j} = \frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{k} a_{1+l,j+l} \quad 1 \le j \le n-1, \quad k = n-j$$

$$t_{i1} = \frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{k} a_{i+l,1+l} \quad 1 \le i \le n-1, \quad k = n-i$$

$t_{ij} = t_{i+l,j+l} \quad i+l \le n, \quad j+l \le n, \quad t_{1n} = a_{1n}, \quad t_{n1} = a_{n1}.$

Ejemplo 5.1. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3i & 6+7i \\ 4 & 2+i & 3-i \\ 5+i & -i & 2+2i \end{pmatrix}$ *entonces las entradas de* T_A *están dadas por*

$$t_{1,1} = \frac{1}{(3-1)+1}\sum_{l=1}^{3-1} a_{1+l,1+l} = \frac{a_{2,2}+a_{3,3}}{3} = \frac{(2+i)+(2+2i)}{3} = \frac{4}{3}+i$$

$$t_{1,2} = \frac{1}{(3-2)+1}\sum_{l=1}^{3-2} a_{1+l,2+l} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{1} a_{1+l,2+l} = \frac{a_{2,3}}{2} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$t_{2,1} = \frac{1}{(3-2)+1}\sum_{l=1}^{3-2} a_{2+l,1+l} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{1} a_{2+l,1+l} = \frac{a_{3,2}}{2} = -\frac{i}{2}$$

Con esto se obtiene que

$$T_A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}+i & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i & 6+7i \\ \frac{-1}{2}i & \frac{4}{3}+i & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \\ 5+i & \frac{-1}{2}i & \frac{4}{3}+i \end{pmatrix}$$

Se puede observar que $d(A,T_A) = \|A-T_A\|_2 = 4.12182 \neq 0$ *donde* $\|\cdot\|_2$ *la norma operador. Si A es una matriz de Toeplitz entonces* $d(A,T_A) = 0$.

Ejemplo 5.2. *Existe otra forma de asociar una matriz de Toeplitz a cualquier matriz A, se forma la matriz* T_A *mediante la primera fila y columna de A, extendiendo estas de forma diagonal para que así se forme una matriz de Toeplitz; las entradas de* T_A *estarán dadas por las ecuaciones*

$$t_{1,i} = a_{1,i} \qquad t_{j,1} = a_{j,1} \qquad t_{i,j} = t_{i+l,j+l} \qquad con\ 1 \leq i + l, j + l \leq n$$

Esta forma es mas aplicativa por la facilidad de construir la matriz asociada en entornos de programación; en este caso se toma una imagen inicial, se le asigna su matriz de colores asociada y a esta ultima se le halla la matriz de Toeplitz asociada obteniendo así una distorsión de la imagen, a continuación se vera la distorsión generada



Figura 1: Imagen Lena

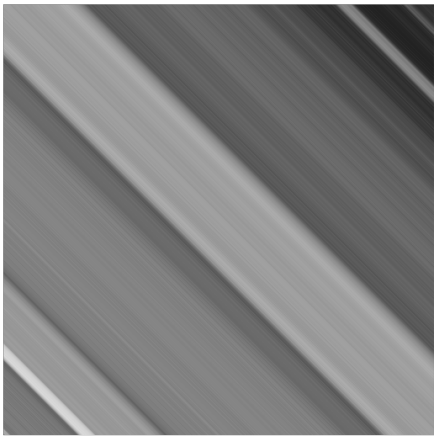


Figura 2: Matriz de Toeplitz asociada a Lena

Teorema 5.1. *Si T_A es la matriz de Toeplitz asociada a la matriz A tal que $\|T_A - A\|_2 < \varepsilon$ donde $\varepsilon > 0$, entonces:*

(i) $\|[T_A, A]\|_2 < 2\varepsilon \min\{\|T_A\|_2, \|A\|_2\}$

(ii) Si A es auto adjunta, entonces T_A también lo es y además si $\|A\|_2 \leq 1$ y $\|T_A\|_2 \leq 1$ entonces A y T_A son aproximada y conjuntamente diagonalizables en el significado de Bronstein y Glashoff [3].

Demostración.

(i) Suponga que $\|T_A - A\|_2 < \varepsilon$ donde $\varepsilon > 0$ entonces se tienen las siguientes dos desigualdades

$$\begin{aligned}
\|[T_A, A]\|_2 &= \|T_A A - A T_A\|_2 \\
&= \|T_A A - A T_A - T_A^2 + T_A^2\|_2 \\
&\leq \|T_A A - T_A^2\|_2 + \|T_A^2 - A T_A\|_2 \\
&= \|T_A(A - T_A)\|_2 + \|T_A(T_A - A)\|_2 \\
&= \|T_A\|_2 \|A - T_A\|_2 + \|T_A\|_2 \|T_A - A\|_2 \\
&= 2\|T_A\|_2 \|A - T_A\|_2 \\
\|[T_A, A]\|_2 &< 2\varepsilon \|T_A\|_2
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\|[T_A, A]\|_2 &= \|T_A A - A T_A\|_2 \\
&= \|T_A A - A T_A - A^2 + A^2\|_2 \\
&\leq \|T_A A - A^2\|_2 + \|A^2 - A T_A\|_2 \\
&= \|A(T_A - A)\|_2 + \|A(A - T_A)\|_2 \\
&= \|A\|_2 \|A - T_A\|_2 + \|A\|_2 \|T_A - A\|_2 \\
&= 2\|A\|_2 \|A - T_A\|_2 \\
\|[T_A, A]\|_2 &< 2\varepsilon \|A\|_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que $\|[T_A, A]\|_2 < 2\varepsilon \,\text{mín}\{\|T_A\|_2, \|A\|_2\}$.

(ii) Primero se vera que si A es auto-adjunta entonces T_A también lo es. En efecto por como se definieron las entradas de la matriz de Toeplitz T_A asociada a A se tiene lo siguiente:

$$t_{ij} = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{k} a_{i+l,j+l} = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{k} \overline{a_{i+l,j+l}} = \overline{t_{ij}}$$

Luego T_A es auto-adjunta.

Ahora, para ver que si $\|A\|_2 \leq 1$ y $\|T_A\|_2 \leq 1$ entonces A y T_A son aproximada y conjuntamente diagonalizables se dará la definición presentada en [3] y se utilizaran los resultados necesarios que se dan ahí. A continuación se presentaran dichas definiciones y teoremas.

Definicion 5.1. ***Matrices conjuntamente diagonalizables.*** *Dos matrices A,B son conjuntamente diagonalizables si existe una matriz unitaria U tal que* $U^*AU = \Lambda_A$ *y* $U^*BU = \Lambda_B$ *son diagonales.*

Nota: En general dos matrices no son conjuntamente diagonalizables, pero se puede aproximar su diagonalizacion minimizando la expresión $\min\limits_{U} J(A,B,U)$ con $U^*U = I$ y $J(A,B,U) = off(U^*AU) + off(U^*BU)$ donde $off(A) = \sum\limits_{i\neq j} \mid a_{ij} \mid^2$ es la suma de los cuadrados absolutos de los elementos que están fuera de la diagonal principal. Por ultimo, sea $J(A,B) = \min\limits_{U^*U=I} J(A,B,U)$.

Teorema 5.2. ***Teorema de Lin.*** *Existe una función* $\varepsilon(\delta)$ *que satisface* $\lim\limits_{\delta\to 0}\varepsilon(\delta) = 0$ *con la siguiente propiedad: Si A, B son dos matrices auto-adjuntas de tamaño* $n\times n$ *que satisfacen* $\|A\|_2, \|B\|_2 \leq 1$ *y* $\|[A,B]\|_2 \leq \delta$*, entonces existe un par de matrices conmutativas* A'*,* B' *que satisfacen* $\|A - A'\|_2 \leq \varepsilon(\delta)$ *y* $\|B - B'\|_2 \leq \varepsilon(\delta)$.

La demostración de este teorema se divide en dos casos, el primero considerando matrices complejas hermitianas y el segundo usando matrices reales simétricas, pero al estar haciéndose un estudio plenamente sobre las matrices complejas entonces solo se considerara el primer caso mencionado, si se quiere ver una demostración para el caso de matrices reales se puede ver en [10].

Para demostrar el caso en cuestión de este teorema se tomara como referencia a [5], en particular, el capítulo 1 y 2 del documento, ya que en estos se dan los resultados necesarios para la demostración del teorema deseado.

Teorema 5.3. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que para todo n y cualquier par de matrices auto adjuntas* $a, b \in M_n(\mathbb{C})$ *tales que* $\|a\|, \|b\| \leq 1$ *y* $\|ab - ba\| < \delta$ *existe un par de matrices auto adjuntas conmutativas* $a', b' \in M_n(\mathbb{C})$ *tales que* $\|a - a'\| + \|b - b'\| < \varepsilon$.

Comentario 5.1. *Si se considera $x = a+bi$ con a, b elementos auto-adjuntos entonces*

$$\begin{aligned} x^*x - xx^* &= (a^* - b^*i)\cdot(a+bi) - (a+bi)\cdot(a^* - b^*i) \\ &= a^*a + a^*bi - b^*ia - b^*ibi - (aa^* - ab^*i + bia^* - bib^*i) \\ &= a^2 + abi - bai + (bi)^2 - a^2 + abi - bai - (bi)^2 \\ x^*x - xx^* &= 2i(ab - ba) \end{aligned}$$

Se ve que hablar sobre la aproximación de matrices conmutativas auto-adjuntas a un par dado de conmutativas auto-adjuntas es equivalente a hablar de la aproximación de una matriz normal a una cerca a normal. Por lo tanto el Teorema 5.3 puede ser enunciado como "casi normal implica cerca a normal ".

La prueba de este teorema estará dada en el contexto de las álgebras C^* pero no se usara alguna teoría técnica o muy profunda. Solo se usaran las funciones en este tipo de álgebras; considere una sucesión (n_j) de números naturales y defina las siguientes álgebras C^*:

$$M = \{(a_j) \mid a_j \in M_{n_j}(\mathbb{C}), sup\|a_j\| < \infty\}$$

$$A = \{(a_j) \mid a_j \in M_{n_j}(\mathbb{C}), lim\|a_j\| = 0\}$$

Estas álgebras son el álgebra de las sucesiones acotadas y de las sucesiones nulas respectivamente. Claramente A es un ideal de M y por lo tanto se puede considerar el álgebra C^* cociente M/A y la función cociente $\pi : M \to M/A$. A continuación, se darán los resultados necesarios para la demostración del teorema 5.3:

Lema 5.1. *Para cada elemento normal $x \in M/A$, cada subconjunto finito o contablemente finito F de $\mathbb{C}$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un elemento normal $y \in M/A$ con $\|x - y\| \leq \varepsilon$ y $Sp(y) \cap F = \varnothing$.*

Demostración. Recuerde que toda matriz $x \in M_{n_j}(\mathbb{C})$ tiene una descomposición polar de la forma $x = u \mid x \mid$ donde $\mid x \mid = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$ y $u \in M_{n_j}(\mathbb{C})$ es una matriz unitaria.

Luego, cada elemento en M tiene una descomposición polar unitaria (Ya que por como se definió M se tiene que $M \subset M_{n_j}(\mathbb{C})$). Si $x \in M/A$ entonces $x = \pi(y)$ para algún $y \in M$, pero $y = v \mid y \mid$ para alguna elemento unitario $v \in M$, de donde $x = \pi(v \mid y \mid) = \pi(v)\pi(\mid y \mid) = \pi(v) \mid \pi(y) \mid = \pi(v) \mid x \mid$ donde $\pi(v)$ es un elemento unitario de M/A. Por lo tanto, cada elemento de M/A tiene una descomposición polar.

Sea $x \in M/A$ un elemento normal, entonces se puede escribir $x = u \mid x \mid$. Se define el elemento $y = u(\mid x \mid + \varepsilon I)$; donde I denota la matriz unidad, se vera que este elemento es normal; para esto se debe ver primero que por la identidad $x^*x = xx^*$ se tiene que u y $\mid x \mid$ conmutan, se sabe por definición que $x = u \mid x \mid$ de donde $x^* = \mid x \mid^* u^*$ y además se sabe que x es un elemento normal, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
x^*x &= xx^* \\
(u \mid x \mid)(\mid x \mid^* u^*) &= (\mid x \mid^* u^*)(u \mid x \mid) \\
(u \mid x \mid)(\mid x \mid^* u^*) &= \mid x \mid^* (u^*u) \mid x \mid \\
(u \mid x \mid)(\mid x \mid^* u^*) &= \mid x \mid^* I \mid x \mid \\
(u \mid x \mid)(\mid x \mid^* u^*) &= \mid x \mid^* \mid x \mid \\
(u \mid x \mid)(\mid x \mid^* u^*)u &= \mid x \mid^* \mid x \mid u \\
(u \mid x \mid) \mid x \mid^* (u^*u) &= \mid x \mid^* \mid x \mid u \\
(u \mid x \mid) \mid x \mid^* I &= \mid x \mid^* \mid x \mid u \\
u \mid x \mid \mid x \mid^* &= \mid x \mid^* \mid x \mid u
\end{aligned}
$$

Para continuar se vera que $\mid x \mid = \mid x \mid^*$

$$
\begin{aligned}
\mid x \mid = (x^*x)^{\frac{1}{2}} \quad &\Rightarrow \quad \mid x \mid^2 = x^*x \\
&\Rightarrow \quad (\mid x \mid^2)^* = xx^* \\
&\qquad\qquad = x^*x \\
&\qquad\qquad = \mid x \mid^2 \\
&\Rightarrow \quad (\mid x \mid^*)^2 = \mid x \mid^2 \\
&\Rightarrow \quad \mid x \mid^* = \mid x \mid
\end{aligned}
$$

De donde reemplazando esto en $u \mid x \parallel x \mid^* = \mid x \mid^* \mid x \mid u$ se tiene que $u \mid x \mid^2 = \mid x \mid^2 u$. Con este resultado se puede ver lo siguiente:

$$\begin{aligned}
yy^* &= u(\mid x \mid + \varepsilon I)(\mid x \mid^* + \bar{\varepsilon} I)u^* \\
&= (u \mid x \mid + \varepsilon u)(\mid x \mid^* u^* + \bar{\varepsilon} u^*) \\
&= u \mid x \parallel x \mid^* u^* + \bar{\varepsilon} u \mid x \mid u^* + \varepsilon u \mid x \mid^* u^* + \varepsilon\bar{\varepsilon} uu^* \\
&= u \mid x \parallel x \mid^* u^* + \bar{\varepsilon} \mid x \mid uu^* + \varepsilon u \mid x \mid^* u^* + \mid \varepsilon \mid uu^* \\
&= u \mid x \parallel x \mid u^* + \bar{\varepsilon} \mid x \mid uu^* + \varepsilon u \mid x \mid u^* + \mid \varepsilon \mid uu^* \\
&= \mid x \mid u \mid x \mid u^* + \bar{\varepsilon} \mid x \mid uu^* + \varepsilon \mid x \mid uu^* + \mid \varepsilon \mid uu^* \\
&= \mid x \parallel x \mid uu^* + \bar{\varepsilon} \mid x \mid uu^* + \varepsilon \mid x \mid uu^* + \mid \varepsilon \mid uu^* \\
&= \mid x \parallel x \mid I + \bar{\varepsilon} \mid x \mid I + \varepsilon \mid x \mid I + \mid \varepsilon \mid I \\
&= (\mid x \parallel x \mid + \bar{\varepsilon} \mid x \mid + \varepsilon \mid x \mid + \mid \varepsilon \mid)I \\
yy^* &= (\mid x \mid^2 + (\bar{\varepsilon} + \varepsilon) \mid x \mid + \mid \varepsilon \mid)I
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned}
y^*y &= (\mid x \mid^* + \bar{\varepsilon} I)u^*u(\mid x \mid + \varepsilon I) \\
&= (\mid x \mid^* + \bar{\varepsilon} I)I(\mid x \mid + \varepsilon I) \\
&= (\mid x \mid^* + \bar{\varepsilon} I)(\mid x \mid + \varepsilon I) \\
&= \mid x \mid^* \mid x \mid + \bar{\varepsilon} I \mid x \mid + \mid x \mid^* \varepsilon I + \mid \varepsilon \mid I \\
&= (\mid x \parallel x \mid + \bar{\varepsilon} \mid x \mid + \varepsilon \mid x \mid + \mid \varepsilon \mid)I \\
y^*y &= (\mid x \mid^2 + (\bar{\varepsilon} + \varepsilon) \mid x \mid + \mid \varepsilon \mid)I
\end{aligned}$$

Luego, claramente $yy^* = y^*y$, por lo tanto se tiene que el elemento y así definido es un elemento normal. Además, la matriz y es invertible; en efecto:

$$\begin{aligned}
Det(y) &= Det(u(\mid x \mid + \varepsilon I)) \\
&= Det(u)Det(\mid x \mid + \varepsilon I)
\end{aligned}$$

Como $\mid x \mid^* = \mid x \mid$ entonces por definición se tiene que $\mid x \mid$ es una proyección de donde su norma es igual a uno y por lo tanto no se puede tener que su determinante sea nulo; ademas como u es una matriz unitaria entonces su determinante es no nulo y se concluye que $Det(y) = Det(u)Det(\mid x \mid +\varepsilon I) \neq 0$ lo cual prueba que la matriz y es invertible.

Ahora como u y $\mid x \mid +\varepsilon I$ son matrices cuadradas del mismo orden (n_j) entonces se tiene que $Det(u(\mid x \mid +\varepsilon I)) = Det(u)Det(\mid x \mid +\varepsilon I)$, al ser u una matriz unitaria se tiene que $\mid Det(u) \mid = 1$ de donde $Det(u) \neq 0$.

Por último se debe ver que $\|x - y\| \leq \varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x - u(\mid x \mid +\varepsilon I)\| \\
&= \|u \mid x \mid -u \mid x \mid -u\varepsilon I\| \\
&= \|u \cdot (-\varepsilon I)\| \\
&\leq \|u\| \cdot \| - \varepsilon I\| \\
&= \left(\max_{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_n = 1} \|ux\|_n \right) \cdot \| - \varepsilon I\| \\
&= (\lambda_{max}(u^* u))^{\frac{1}{2}} \mid -\varepsilon \mid \cdot \|I\| \\
&= (\lambda_{max}(I))^{\frac{1}{2}} \mid -\varepsilon \mid (\lambda_{max}(I))^{\frac{1}{2}} \\
&= \varepsilon \cdot \lambda_{max}(I) \\
\|x - y\| &\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

En otras palabras, el conjunto de elementos normales invertibles es denso en el conjunto de elementos normales. Este es también relativamente abierto, ya que el conjunto de los elementos invertibles en M/A es un subconjunto abierto de M/A.

Al aplicar el homeomorfismo $x \to x - \lambda I$ en el conjunto de los elementos normales de M/A, se encuentra que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ el conjunto de elementos normales $x \in M/A$ con $\lambda \in Sp(x)$ es denso y relativamente abierto en el conjunto de elementos normales.

Ahora sea $F \subset \mathbb{C}$ con F finito o contable infinito, por el Teorema de Categorías de Baire, el conjunto de elementos normales y con $Sp(y) \cap F = \varnothing$ es denso en el conjunto de elementos normales, lo cual completa la demostración. □

Para cada $\varepsilon > 0$ considere la ε-cuadricula Γ_ε en $\mathbb{C}$ y su correspondiente enrejado Σ_ε de "puntos centrales" en Γ_ε definidos por:

$$\Gamma_\varepsilon = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid \quad x \in \varepsilon\mathbb{Z} \text{ o } y \in \varepsilon\mathbb{Z}\}$$

$$\Sigma_\varepsilon = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid \quad x \in \varepsilon(\mathbb{Z} + 1/2) \text{ o } y \in \varepsilon(\mathbb{Z} + 1/2)\}$$

Lema 5.2. *Para cada elemento normal $x \in M/A$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un elemento $y \in M/A$ con $Sp(y) \subseteq \Gamma_\varepsilon$ y $\|x - y\| < \varepsilon$.*

Demostración. Por el Lema 1 se tiene que existe un elemento normal $x_1 \in M/A$ tal que

$$\|x - x_1\| < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\varepsilon, \quad Sp(x_1) \cap \Sigma_\varepsilon = \varnothing$$

Ahora, se considera una retracción continua $f : \mathbb{C}/\Sigma_\varepsilon \to \Gamma_\varepsilon$ la cual cumple que $\|f(z) - z\| < \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{C}/\Sigma_\varepsilon$, de donde si se toma $y = f(x_1)$ se puede obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x - f(x_1) + x_1 - x_1\| \\
&\leq \|x - x_1\| + \| - f(x_1) + x_1\| \\
&= \|x - x_1\| + \|f(x_1) - x_1\| \\
&< \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon \\
&= \varepsilon \\
\|x - y\| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Se vera ahora que $Sp(y) \subseteq \Gamma_\varepsilon$; por definición de f y al ser $y = f(x_1)$ se tiene que $y \in \Gamma_\varepsilon$ de donde $y = \varepsilon m + \varepsilon n i$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces se considera el numero complejo y en su forma matricial $y = \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon m & -\varepsilon n \\ \varepsilon n & \varepsilon m \end{smallmatrix}\right)$ y sea $\lambda \in Sp(y)$ entonces $y - \lambda I = f(x_1) - \lambda I$ no es invertible, esto es :

$$\begin{aligned}
Det(y - \lambda I) &= 0 \\
\left| \begin{pmatrix} \varepsilon m & -\varepsilon n \\ \varepsilon n & \varepsilon m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| &= 0 \\
\begin{vmatrix} \varepsilon m - \lambda & -\varepsilon n \\ \varepsilon n & \varepsilon m - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
(\varepsilon m - \lambda)^2 + (\varepsilon n)^2 &= 0 \\
\varepsilon^2 m^2 - 2\varepsilon m\lambda + \lambda^2 + \varepsilon^2 n^2 &= 0 \\
\lambda^2 - 2\varepsilon m\lambda + (\varepsilon^2 m^2 + \varepsilon^2 n^2) &= 0
\end{aligned}$$

Ahora, se resolverá la ecuación cuadrática para hallar el valor de λ:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2\varepsilon m \pm \sqrt{(-2\varepsilon m)^2 - 4(\varepsilon m^2 + \varepsilon^2 n^2)}}{2} \\
&= \frac{2\varepsilon m \pm \sqrt{4\varepsilon^2 m^2 - 4\varepsilon^2 m^2 - 4\varepsilon^2 n^2}}{2} \\
&= \frac{2\varepsilon m \pm \sqrt{-4\varepsilon^2 n^2}}{2} \\
&= \frac{2\varepsilon m \pm i\sqrt{4\varepsilon^2 n^2}}{2} \\
&= \frac{2\varepsilon m \pm i2\varepsilon n}{2} \\
\lambda &= \varepsilon m \pm i\varepsilon n
\end{aligned}$$

Luego, por definición de Γ_ε se tiene que $\lambda \in \Gamma_\varepsilon$ y por lo tanto $Sp(y) \subset \Gamma_\varepsilon$ lo cual culmina la demostración. □

Lema 5.3. *Sea x un elemento normal de M/A. Suponga que V es un subconjunto relativamente abierto de $Sp(x)$ y que V es homeomorfo al intervalo abierto unitario. Entonces para cada $\lambda_0 \in V$ y cada $\varepsilon > 0$, existirá un elemento normal $y \in M/A$ tal que $Sp(y) \subset Sp(x)\backslash\{\lambda_0\}$ y $\|x - y\| < \epsilon$.*

Demostración. Sea $X = Sp(x)$. Sea U un subconjunto relativamente abierto de V que satisface lo siguiente

$$\lambda_0 \in U \subseteq \bar{U} \subseteq V, \quad \operatorname{diam}(U) \leq \varepsilon$$

Eligiendo un homeomorfismo f_0 de V en $\mathbb{T}\backslash\{-1\}$, donde $\mathbb{T}$ es el circulo unitario en el plano complejo. Se puede extender f_0 a una función continua $f : X \to \mathbb{T}$ tomando $f(z) = -1 \ \forall z \in X\backslash V$, sea $u = f(x)$, por como se definió la función f se tiene que $f(x) \in \mathbb{T}$ y por lo tanto $u = f(x)$ es un elemento unitario. Sea $a \in M$ con $\pi(a) = u$ y sea $a = v \mid a \mid$ la descomposición polar para a donde v es un elemento unitario en M. Como $\pi(\mid a \mid) = \mid \pi(a) \mid = \mid u \mid = 1$ entonces

$$\begin{aligned}
\pi(v) &= \pi(a \mid a \mid^*) \\
&= \pi(a)\pi(\mid a \mid^*) \\
&= \pi(a)\pi(\mid a \mid)^* \\
&= \pi(a)(1)^* \\
\pi(v) &= u
\end{aligned}$$

Como f_0 es un homeomorfismo en V entonces sera continua en este conjunto y por lo tanto $W = f_0(U)$ sera un subconjunto abierto de $\mathbb{T}$ (al ser U abierto), además sea 1_W la función característica correspondiente a este conjunto. Por el calculo de funciones de Borel en álgebras de Von-Neumann se tiene que la función 1_W define una proyección en M, la cual puede ser obtenida expresando v como una secuencia (v_j) de matrices unitarias. Sea $e \in M/A$ la proyección $\pi(1_W(v))$.

Suponga que $\varphi : X \to \mathbb{C}$ es una función continua cuyo cero esta en $X\backslash V$, entonces

$$\hat{\varphi}(z) = \begin{cases} \varphi \circ f_0^{-1}(z), & \text{si } z \in \mathbb{T}\backslash\{-1\} \\ 0 & \text{si } z = -1 \end{cases}$$

sera una función continua al φ y f_0^{-1} serlo, además de esto se vera que $\varphi = \hat{\varphi} \circ f$, en efecto sea $z \in V$ arbitrario

$$\begin{aligned}
(\hat{\varphi} \circ f_0)(z) = \hat{\varphi}(f_0(z)) &= \begin{cases} \varphi \circ f_0^{-1}(f(z)), & \text{si } f(z) \in \mathbb{T}\backslash\{-1\} \\ 0 & \text{si } f(z) = -1 \end{cases} && \cdot\text{Por definicion de } \hat{\varphi}. \\
&= \begin{cases} \varphi \circ f_0^{-1}(f(z)), & \text{si } z \in X \\ 0 & \text{si } z \in X\backslash V \end{cases} && \cdot\text{Por definicion de } f. \\
&= \begin{cases} \varphi \circ f_0^{-1}(f_0(z)), & \text{si } z \in X \\ 0 & \text{si } z \in X\backslash V \end{cases} && \cdot\text{Por definicion de } f. \\
&= \begin{cases} \varphi(z), & \text{si } z \in X \\ 0 & \text{si } z \in X\backslash V \end{cases} && \cdot\text{Ya que } f_0 \text{ es biyectiva.} \\
(\hat{\varphi} \circ f_0)(z) &= \varphi(z) && \cdot \text{ Por definicion de } \varphi.
\end{aligned}$$

con esto se tiene que $\hat{\varphi}(u) = \hat{\varphi}(f(x)) = \varphi(x)$. Ahora, por definición de función característica se tiene que $1_W(v)$ sera igual a 1 o a 0, pero estos elementos conmutan con cualquier elemento al ser la unidad y el elemento nulo respectivamente, por lo tanto $1_W(v) \cdot v = v \cdot 1_W(v)$ de donde

$$\begin{aligned}
\pi(1_W(v) \cdot v) &= \pi(v \cdot 1_W(v)) \\
\pi(1_W(v)) \cdot \pi(v) &= \pi(v) \cdot \pi(1_W(v)) && \cdot\text{Ya que } \pi \text{ es una proyeccion.} \\
e \cdot u &= u \cdot e && \cdot\text{Ya que } \pi(v) = u \text{ y por definicion del elemento } e.
\end{aligned}$$

Con esto, se ve ahora que e conmuta con $\varphi(x)$, por lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(e \cdot u) &= \hat{\varphi}(u \cdot e) \\
e \cdot \hat{\varphi}(u) &= \hat{\varphi}(u) \cdot e && \cdot \text{ Ya que } \hat{\varphi} = \varphi \circ f_0^{-1} \text{ y } f_0^{-1} \text{ es un homeomorfismo.} \\
e \cdot \varphi(x) &= \varphi(x) \cdot e && \cdot \text{ Ya que } \hat{\varphi}(u) = \varphi(x).
\end{aligned}$$

Ahora se agregaran algunas consideraciones extra a la función φ, se supone que φ es constante igual a 1 en U, entonces $\hat{\varphi}$ sera constante igual a 1 en $W = f_0(U)$, lo cual implica que $\varphi(x) \cdot e = e \cdot \varphi(x) = e$. Ahora, si φ se anula en $X \backslash U$, entonces $\hat{\varphi}$ se anula en $\mathbb{T} \backslash W$ y por lo tanto en este caso se tendría que $\varphi(x) \cdot e = e \cdot \varphi(x) = \varphi(x)$.

Sea $h : X \to [0,1]$ una función continua con $h\,|_{\bar{U}} = 1$ y $h\,|_{X \backslash V} = 0$. Por lo visto anteriormente se tiene que $h(x) \cdot e = e \cdot h(x) = e$ entonces la función $z \mapsto zh(z)$ se anula en $X \backslash V$ y por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
x \cdot e &= x \cdot (h(x) \cdot e) && \cdot \text{Ya que } h(x) \cdot e = e \cdot h(x) = e \\
&= (x \cdot h(x)) \cdot e \\
&= e(x \cdot h(x)) && \cdot \text{Ya que la funcion } z \mapsto zh(z) \text{ se anula en } X \backslash V \\
&= (ex)h(x) \\
x \cdot e &= e \cdot x
\end{aligned}$$

Ahora se probara que

$$sp_{e(M \backslash A)e}(xe) \subseteq \bar{U}; \quad sp_{(1-e)(M \backslash A)(1-e)}(x(1-e)) \subseteq X \backslash U$$

Para esto es suficiente mostrar que $\varphi(xe) = 0$ y que $\psi(x \cdot (1-e)) = 0$ para cada par de funciones $\varphi, \psi : X \to \mathbb{C}$, donde φ se anula en $\bar{U}$ y ψ se anula en $X \backslash V$ (y donde las funciones continuas operan en la respectiva álgebra lateral). Se puede asumir que φ es igual a 1 en $X \backslash V$. Por el argumento anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi(x \cdot (1-e)) &= \psi(x) \cdot (1-e) \\
&= \psi(x) - \psi(x) \cdot e \\
\psi(x \cdot (1-e)) &= 0 && \cdot \text{ Ya que } e \cdot \psi(x) = \psi(x) \cdot e = \psi(x).
\end{aligned}$$

Y además

$$\begin{aligned}
\varphi(xe) &= \varphi(x) \cdot e \\
&= e - (1 - \varphi(x)) \cdot e \\
\varphi(xe) &= 0 && \cdot \text{ Ya que } \varphi \equiv 0 \text{ en } X \backslash V.
\end{aligned}$$

Lo cual era lo deseado. Ahora sea $\lambda_1 \in U\backslash\{\lambda_0\}$ y sea $y = \lambda_1 e + (1-e)x$, se vera que y es normal, para esto se considera $y = \lambda_1 e + x - ex$ entonces $y^* = \overline{\lambda_1} e^* + x^* - x^* e^*$ de donde

$$\begin{aligned} yy^* &= (\lambda_1 e + x - ex)\cdot(\overline{\lambda_1} e^* + x^* - x^* e^*) \\ &= \lambda_1\overline{\lambda_1} ee^* + \lambda_1 ex^* - \lambda_1 ex^* e^* + \overline{\lambda_1} xe^* + xx^* - xx^* e^* - \overline{\lambda_1} exe^* - exx^* + exx^* e^* \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} y^* y &= (\overline{\lambda_1} e^* + x^* - x^* e^*)\cdot(\lambda_1 e + x - ex) \\ &= \overline{\lambda_1}\lambda_1 e^* e + \overline{\lambda_1} e^* x - \overline{\lambda_1} e^* ex + \lambda_1 x^* e + x^* x - ex^* x - \lambda_1 x^* e^* e - xx^* e^* + exx^* e^* \end{aligned}$$

Ahora, como $xe = ex$ entonces $x^* e^* = e^* x^*$ y además

$$e = \pi(1_W(v)) \Rightarrow e* = [\pi(1_W(v))]^* = \pi((1_W(v))^*) = \pi\left(\overline{1_W(v)}\right) = \pi(1_W(v)) = e$$

reemplazando estos resultados en la igualdad anterior se concluye que $yy^* = y^* y$; por lo tanto y es normal. Ahora $sp(y) \subseteq \{\lambda_1\} \cup (X\backslash U) \subseteq X\backslash\{\lambda_0\}$ y por ultimo

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|x - \lambda_1 e - x + ex\| \\ &= \|xe - \lambda_1 e\| \\ &= \|(x - \lambda_1)e\| \\ &\leq \sup_{x' = [\not{\in}(x-\lambda_1)e] \in U} \|x'\| \\ &= \operatorname{diam}(U) \\ &\leq \varepsilon \\ \|x - y\| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Con lo cual se culmina la demostración del resultado. □

Lema 5.4. *Sea $\varepsilon > 0$ y sea x un elemento normal de M/A cuyo espectro esta contenido en Γ_δ para algún $\delta > 0$. Entonces existe un elemento normal $y \in M/A$ con espectro finito y con $\|x - y\| \leq \varepsilon$.*

Demostración. Aplicando el Lema 4.3 un numero finito de veces se obtiene un elemento normal $x_1 \in M/A$ con $\|x - x_1\| < \varepsilon/2$ y con la propiedad de que cada componente conexa de $sp(x_1)$ tiene diametro menor que $\varepsilon/2$. Ahora, cada $\lambda_1 \in sp(x_1)$ esta contenido en algún subconjunto abierto y cerrado de $sp(x_1)$ de diametro menor que $\varepsilon/2$, por lo tanto $sp(x_1)$ tiene una partición compuesta de una familia finita de subconjuntos abiertos y cerrados no vacíos $V_1, V_2, ..., V_n$ de $sp(x_1)$ cuyo diametro es menor que $\varepsilon/2$. Sea $\lambda_j \in V_j$ y observe que existe una retracción continua dada por

$$f : sp(x_1) \to \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$$

que satisface $| f(z) - z | \leq \varepsilon/2 \ \forall z \in sp(x_1)$, entonces $y = f(x_1)$ es un elemento normal con espectro $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ y con $\|x - y\| < \varepsilon$, lo cual culmina la demostración. □

Se puede ver que los últimas conclusiones hechas en la demostración anterior son análogos a los que se hicieron en la demostración del Lema 4.2, por lo cual no se hicieron los pasos de cada una de estas. Con estos resultados, se puede proceder a la demostración del Teorema 5.3.

Demostración Teorema 5.3. Suponga que el Teorema 5.3 es falso, por el comentario 4.1 se tiene que existirá una sucesión (n_j) de números naturales y una sucesión (x_j) de matrices $x_j \in M_{n_j}(\mathbb{C})$ con $\|x_j\| \leq 1$ tales que

$$\|x_j^* x_j - x_j x_j^*\| \to 0$$

ahora sea $\varepsilon > 0$, cada x_j tendrá una distancia de al menos ε al conjunto de matrices normales en $M_{n_j}(\mathbb{C})$. Sean M, A las álgebras C^* correspondientes a la sucesión (n_j) definidas en un principio, sea $x = (x_j) \in M$ y $y = \pi(x) \in M/A$ entonces y es normal; entonces por el Lema 4.4 existe un elemento normal $y' \in M/A$ con espectro finito y tal que $\|y - y'\| < \varepsilon/4$.

Existe un elemento normal $x' = (x'_j) \in M$ con $\pi(x') = y'$, para ver esto se toman p, q polinomios complejos de una variable, así que $p(sp(y')) \subseteq \mathbb{R}$ y $(q \circ p)(\lambda) = \lambda$ $\forall \lambda \in sp(y')$. Entonces $p(y')$ es auto-adjunto y $y' = q(p(y'))$.

Sea z cualquier elemento de M tal que $\pi(z) = p(y')$, entonces $\frac{z+z^*}{2}$ es auto-adjunto y $\pi(\frac{z+z^*}{2}) = p(y')$, entonces tomando $x' = q(\frac{z+z^*}{2})$ se tiene el resultado. Por definición de norma en un álgebra cociente existe un $a = (a_j) \in A$ tal que

$$\begin{aligned} \|x - x' - a\| &= \|\pi(y) - \pi(y') - a\| \\ &= \|y - y'\| + \varepsilon/4 \\ &\leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 \\ &= \varepsilon/2 \\ \|x - x' - a\| &= \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Escoja j tal que $\|a_j\| < \varepsilon/2$ entonces $\|x_j - x'_j\| < \varepsilon$, lo cual contradice la elección de x_j. □

Con este resultado se puede demostrar el Teorema 5.2, a continuación se realizara esta demostración.

Demostracion Teorema 5.2. Como A, B son auto-adjuntas, $\|A\|_2, \|B\|_2 \leq 1$ y $\|[A, B]\|_2 < \delta$, entonces por el Teorema 5.3 existe un par de matrices conmutativas A', B' tales que $\|A - A'\| + \|B - B'\| \leq \epsilon$, esto $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0$ considerando entonces $\delta \to 0$ y $\varepsilon(\delta) = \varepsilon$ con $\lim \varepsilon = 0$ se obtiene el resultado. □

Lema 5.5. *Sean A, B, C y D matrices auto-adjuntas $n \times n$ y sea U una matriz unitaria $n \times n$. Entonces*
$| J(A, B, U) - J(C, D, U) | \leq \|A + C\|_F \|A - C\|_F + \|B + D\|_F \|B - D\|_F$. *Donde*

$$\|A\|_F = \left(\sum_{ij} | a_{ij} |^2 \right)^{1/2} = tr(A^* A)^{1/2}$$

denota la norma de Frobenius.

Demostración. Para conveniencia en la notación se define $J(A, U) = off(U^* A U)$, tal que $J(A, B, U) = J(A, U) + J(B, U)$, también se puede expresar esto como

$$J(A, U) = tr((M \circ (U^* A U))^* (M \circ (U^* A U)))$$

Donde M es una matriz con entradas de la forma $m_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ y "$\circ$" el producto de matrices de Schur (o de Hadamard). Se vera ahora la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} tr((X+Y)^*(X-Y)) &= tr((X^*+Y^*)(X-Y)) \\ &= tr(X^*X - X^*Y + Y^*X - Y^*Y) \\ &= tr(X^*X) - tr(X^*Y) + tr(Y^*X) - tr(Y^*Y) \end{aligned}$$

Ahora como X, Y son matrices auto-adjuntas entonces se tiene que $X = X^*$ e $Y = Y^*$ por lo tanto $tr(X^*Y) = tr(XY) = tr(Y^*X)$ por lo tanto se tiene lo siguiente:

$$tr((X+Y)^*(X-Y)) = tr(X^*X) - tr(Y^*Y) = tr(X^*X - Y^*Y)$$

Ahora, si $X = M \circ (U^*AU)$ e $Y = M \circ (U^*CU)$ se tendrá que:

$$\begin{aligned} \mid J(A,U) - J(C,U) \mid &= \mid tr((M \circ (U^*AU))^*(M \circ (U^*AU))) - tr((M \circ (U^*CU))^*(M \circ (U^*CU))) \mid \\ &= \mid tr((M \circ (U^*AU))^*(M \circ (U^*AU)) - (M \circ (U^*CU))^*(M \circ (U^*CU))) \mid \\ &= \mid tr((M \circ (U^*AU) + M \circ (U^*CU))^*(M \circ (U^*AU) - M \circ (U^*CU))) \mid \\ \mid J(A,U) - J(C,U) \mid &= \mid tr((M \circ (U^*(A+C)U)^*)(M \circ (U^*(A-C)U))) \mid \end{aligned}$$

El ultimo renglón se tiene por la distributividad del producto de matrices usual y del producto de Schur para matrices. Ahora, haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que $\mid tr(X^*Y) \mid \leq \|X\|_F \|Y\|_F$, con lo cual:

$$\begin{aligned} \mid J(A,U) - J(C,U) \mid &= \mid tr((M \circ (U^*(A+C)U)^*)(M \circ (U^*(A-C)U))) \mid \\ &\leq \|M \circ (U^*(A+C)U)\|_F \|M \circ (U^*(A-C)U)\|_F \\ &\leq \|(U^*(A+C)U)\|_F \|(U^*(A-C)U)\|_F \\ &= \|A+C\|_F \|A-C\|_F \\ \mid J(A,U) - J(C,U) \mid &\leq \|A+C\|_F \|A-C\|_F \end{aligned}$$

De forma análoga se puede ver que $\mid J(B,U) - J(D,U) \mid \leq \|B+D\|_F \|B-D\|_F$.

Finalmente:

$$\begin{aligned} |\, J(A,B,U) - J(C,D,U)\,| &= |\, J(A,U) - J(C,U) + J(B,U) - J(D,U)\,| \\ &\leq |\, J(A,U) - J(C,U)\,| + |\, J(B,U) - J(D,U)\,| \\ &\leq \|A+C\|_F \|A-C\|_F + \|B+D\|_F \|B-D\|_F \\ |\, J(A,B,U) - J(C,D,U)\,| &\leq \|A+C\|_F \|A-C\|_F + \|B+D\|_F \|B-D\|_F \end{aligned}$$

Lo cual completa la demostración. □

Teorema 5.4. *Existe una función* $\hat{\varepsilon}(\delta)$ *que satisface* $\lim_{\delta\to 0}\hat{\varepsilon}(\delta) = 0$ *con la siguiente propiedad: Si A, B son dos matrices auto-adjuntas* $n \times n$ *tales que* $\|A\|_2, \|B\|_2 \leq 1$ *y* $\|[A,B]\|_2 \leq \delta$ *entonces*

$$J(A,B) \leq n\hat{\varepsilon}(\delta)$$

Demostración. Sea $\|[A,B]\|_F \leq \delta$ lo cual implica que $\|[A,B]\|_2 \leq \delta$ y $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq 1$ $\|B\|_2 \leq \|B\|_F \leq 1$. Por el Teorema 5.2 se tiene que existen un par de matrices conmutativas A', B' tales que $\|A - A'\|_F \leq \sqrt{n}\|A - A'\|_2 \leq \sqrt{n}\varepsilon(\delta)$ y $\|B - B'\|_F \leq \sqrt{n}\|B - B'\|_2 \leq \sqrt{n}\varepsilon(\delta)$.

Como A', B' son conmutativas entonces se vera que son conjuntamente diagonalizables. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de A' y $V_{A',\lambda}$ su correspondiente espacio propio, entonces si $v \in V_{A',\lambda}$ se tiene que $A'B'(v) = B'A'(v) = B'(\lambda v) = \lambda(B'v)$, por lo tanto $B'(v) \in V_{A',\lambda}$. Luego $V_{A',\lambda}$ es invariante bajo B', por lo tanto la matriz asociada a B' con respecto a la base de valores propios de A' (la cual existe al ser A' diagonalizable) es una matriz por bloques, donde cada bloque corresponde a un espacio (o valor) propio.

Al ser B' diagonalizable, entonces cada bloque lo sera. Entonces, existe un cambio de base de $V_{A',\lambda}$ tal que el bloque correspondiente a este es diagonal, esto es; la nueva base es formada por vectores propios de B'. Se puede ver que esta nueva base esta también formada por vectores propios de A, ya que esta es una base para un espacio propio de A.

Luego, esta nueva base esta formada por los vectores propios de A' y B' simultáneamente, lo cual implica que A' y B' son conjuntamente diagonalizables.

Como se acaba de ver A', B' son conjuntamente diagonalizables, esto implica que $J(A', B') = 0$ y que existe una matriz diagonalizable común $W' = \min_{U^*U=I} J(A', B', U)$; por el Lema 4 se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
J(A,B) &= J(A,B) - 0 \\
&= J(A,B) - J(A',B') \\
&\leq J(A,B,W') - J(A',B',W') \qquad \cdot \text{ Por Definicion de J(A,B) y de minimo.} \\
&\leq \|A + A'\|_F \|A - A'\|_F + \|B + B'\|_F \|B - B'\|_F \\
&= \|A + A + (A' - A)\|_F \|A - A'\|_F + \|B + B + (B' - B)\|_F \|B - B'\|_F \\
&\leq (\|A + A\|_F + \|A' - A\|_F)\|A - A'\|_F + (\|B + B\|_F + \|B' - B\|_F)\|B - B'\|_F \\
&= (\|2A\|_F + \|A - A'\|_F)\|A - A'\|_F + (\|2B\|_F + \|B - B'\|_F)\|B - B'\|_F \\
&\leq (2 + \sqrt{n}\varepsilon(\delta))\sqrt{n}\varepsilon(\delta) + (2 + \sqrt{n}\varepsilon(\delta))\sqrt{n}\varepsilon(\delta) \\
&= 2(2 + \sqrt{n}\varepsilon(\delta))\sqrt{n}\varepsilon(\delta) \\
J(A,B) &\leq 2(2 + \sqrt{n}\varepsilon(\delta))\sqrt{n}\varepsilon(\delta)
\end{aligned}
$$

Ahora se demostrara por contradicción que $2\sqrt{n} \leq n\sqrt{2}$, esto se hará por el método de contradicción; suponga que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > 2$ (ya que para $n = 2$ se tiene la igualdad) y $2\sqrt{n} \geq n\sqrt{2}$; entonces

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{k} &\geq k\sqrt{2} \\
4k &\geq 2k^2 \\
2 &\geq k
\end{aligned}
$$

Lo cual es una contradicción a la suposición de que $k > 2$ luego, la desigualdad $2\sqrt{n} \leq n\sqrt{2}$ se tiene para todo $n \geq 2$. Partiendo de esta desigualdad se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{n} &\leq n\sqrt{2} \\
2\sqrt{n}\epsilon(\delta) &\leq n\sqrt{2}\epsilon(\delta) \\
2\sqrt{n}\epsilon(\delta) + n\epsilon(\delta)^2 &\leq n\sqrt{2}\epsilon(\delta) + n\epsilon(\delta)^2 \\
2\sqrt{n}\epsilon(\delta) + n\epsilon(\delta)^2 &\leq n(\sqrt{2} + \epsilon(\delta))\epsilon(\delta) \\
(2 + \sqrt{n}\epsilon(\delta))\sqrt{n}\epsilon(\delta) &\leq n(\sqrt{2} + \epsilon(\delta))\epsilon(\delta) \\
2(2 + \sqrt{n}\epsilon(\delta))\sqrt{n}\epsilon(\delta) &\leq 2n(\sqrt{2} + \epsilon(\delta))\epsilon(\delta)
\end{aligned}
$$

Luego, se tiene la desigualdad $2(2 + \sqrt{n}\varepsilon(\delta))\sqrt{n}\varepsilon(\delta) \leq 2n(\sqrt{2} + \varepsilon(\delta))\varepsilon(\delta) = n\hat{\varepsilon}(\delta)$ donde se define $\hat{\varepsilon}(\delta) = 2(\sqrt{2} + \varepsilon(\delta))\varepsilon(\delta)$, la cual claramente satisface $\lim_{\delta \to 0} \hat{\varepsilon}(\delta) = 0$ lo cual termina la demostración. □

Con estos resultados ya dados se puede demostrar el resultado inicial (Teorema 5.1, parte *ii*).

Demostración Teorema 5.1 parte II: . Por hipótesis se tiene que A, T_A son auto-adjuntas de tamaño $n \times n$ y además que $\|A\|_2, \|T_A\|_2 \leq 1$ y además por el Teorema 5.1 parte I que ya se demostró se tiene que $\|[T_A, A]\|_2 < 2\varepsilon \min\{\|T_A\|_2, \|A\|_2\}$; si $\delta = 2\varepsilon \min\{\|T_A\|_2, \|A\|_2\}$ entonces se tienen las hipótesis necesarias para aplicar el Teorema 5.3, obteniendo que $J(T_A, A) \leq n\hat{\varepsilon}(\delta)$ donde $\lim_{\delta \to 0} \hat{\varepsilon}(\delta) = 0$, lo cual implica que se puede hacer $J(T_A, A)$ tan pequeño como se quiera que por definición implica que A y T_A son aproximada y conjuntamente diagonalizables, lo cual termina la demostración. □

Ejemplo 5.3. *Para ejemplificar el Teorema 5.1 se considera la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & bi \\ -bi & -a \end{pmatrix}$ *entonces por definición de matriz de Toeplitz asociada a A se tiene que* $T_A = \begin{pmatrix} -a & bi \\ -bi & -a \end{pmatrix}$ *Ahora, en las hipótesis que se plantean para el teorema en cuestión se tienen en cuenta las condiciones* $\|A - T_A\|_2 < \epsilon$, $\|A - T_A\|_2 \leq 1$ *y* $\|T_A\|_2 \leq 1$*; se vera entonces que condiciones deben cumplir a y b para que las hipótesis del teorema se cumplan*

- $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & bi \\ -bi & -a-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)(-a-\lambda) + b^2 i^2 = 0$$

$$-(a^2 - \lambda^2) - b^2 = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$

De donde se tendría que $\|A\|_2 = \max\{\sqrt{a^2+b^2}, -\sqrt{a^2+b^2}\} = \sqrt{a^2+b^2}$ *y así*

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq 1 \tag{1}$$

- $\det(T_A - \lambda I) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} -a-\lambda & bi \\ -bi & -a-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)^2 + b^2 i^2 = 0$$

$$(-a-\lambda)^2 - b^2 = 0$$

$$(-a-\lambda-b)(-a-\lambda+b) = 0$$

$$\lambda_1 = -a - b; \qquad \lambda_2 = -a + b$$

Con lo anterior se tendría que $\|T_A\|_2 = \max\{-a-b, -a+b\}$ *y así*

$$\|T_A\|_2 = \max\{-a-b, -a+b\} \leq 1 \tag{2}$$

Finalmente, se debe hallar $\|A - T_A\|_2$ *y acotar este valor con un* ε *tan pequeño como se quiera; entonces*

$$\|A - T_A\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \right\|_2$$
$$= 2a$$

Obteniendo así que

$$\|A - T_A\|_2 = 2a < \varepsilon \tag{3}$$

Las desigualdades en (1), (2) *y* (3) *se pueden ver gráficamente como sigue*

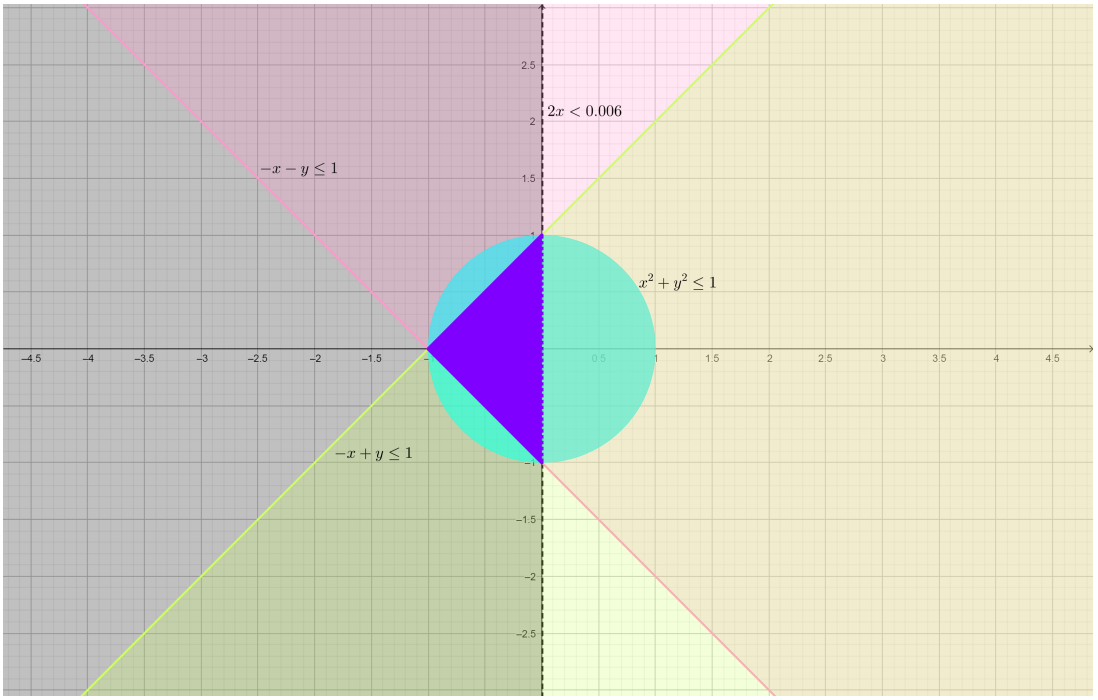


Figura 3: Gráfica condiciones halladas.

En conclusión, si se toma un punto (a, b) *que este dentro del triangulo del plano entonces la matriz A como se definió en un inicio cumple las condiciones del teorema; considérense ahora los siguientes valores*

$$a = 0.002; \qquad b = 0.2; \qquad \varepsilon = 0.006$$

$$A = \begin{pmatrix} -0.002 & 0.2i \\ -0.2i & 0.002 \end{pmatrix}; \qquad T_A = \begin{pmatrix} -0.002 & 0.2i \\ -0.2i & -0.002 \end{pmatrix}$$

Obteniendo así los siguientes valores para las normas en cuestión

$$\|A - T_A\|_2 = 0.0004; \qquad \|A\|_2 = 2.8284 \times 10^{-3}; \qquad \|T_A\|_2 = 0.198$$

Con esto, se puede decir entonces que existe una función $\hat{\varepsilon}(\delta)$ *tal que* $\lim_{\delta \to 0} \hat{\varepsilon}(\delta) = 0$ *y*

$$J(A, T_A) = \min_{U^*U=I} J(A, T_A, U) < 4 \cdot (\sqrt{2} + \hat{\varepsilon}(0.006))\hat{\varepsilon}(0.006)$$

De donde finalmente A *y* T_A *son aproximada y conjuntamente diagonalizables en el sentido de Bronstein y Glasshoff [3].*

Teorema 5.5. *Dada una matriz arbitraria* $A \in M_n(\mathbb{C})$*, existe una única matriz de Toeplitz compleja que minimiza a* $\|A-T\|_F$ *sobre todas las matrices de Toeplitz* T*.Las diagonales de esta matriz estarán dadas por la media de las diagonales de* A*.*

Demostración. Se sabe que bajo la norma de Frobenius el conjunto $M_n(\mathbb{C})$ es un espacio de Hilbert complejo, sea $\mathfrak{T} = \{T \in M_n(\mathbb{C}) : T \text{ es de Toeplitz}\}$. Sean $e_1, ..., e_{2n-1}$ las matrices de Toeplitz cuyas diagonales son cero excepto la k^{th} diagonal donde los elementos son iguales a uno. Este conjunto definirá una base ortogonal finita que genera el subespacio $\mathfrak{T}$. Así que se puede construir la proyección ortogonal de $M_n(\mathbb{C})$ en $\mathfrak{T}$ de la forma

$$P(A) = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\langle A, e_k \rangle e_k}{\|e_k\|_F}$$

Se sabe que la proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado, en un espacio de Hilbert, minimiza la norma. En este caso se tiene que $\mathfrak{T}$ es cerrado al ser de dimensión finita; es claro que las diagonales de $P(A)$ están dadas por el promedio de los elementos de la correspondiente diagonal de A, lo cual culmina nuestra demostración. □

Comentario 5.2. *El resultado anterior se tiene de forma análoga para el caso real y se puede demostrar de una forma análoga.*

6. Matrices de Toeplitz Involutivas y la DFT

A continuación se consideraran matrices de Toeplitz involutivas sobre el anillo complejo $\mathbb{C}$. La siguiente proposición a pesar de ser simple, muestra que si existe una de estas matrices entonces existen una cantidad no contable de estas.

Proposición 6.1. *Si la matriz*

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & & & \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & & & \\ \vdots & a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & a_{n+1} \\ & & & & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Es una matriz de Toeplitz involutiva sobre $\mathbb{C}$ y v es un escalar complejo distinto de cero entonces la siguiente matriz también es de Toeplitz e involutiva.

$$\begin{pmatrix} a_n & va_{n+1} & \dots & & & \\ v^{-1}a_{n-1} & a_n & va_{n+1} & & & \\ \vdots & v^{-1}a_{n-1} & a_n & va_{n+1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & va_{n+1} \\ v^{-n+1}a_1 & & & & v^{-1}a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Demostración. El resultado se tiene de forma inmediata al ver que las dos matrices dadas están relacionadas por una transformación, la cual viene dada por un producto de Schur y por definición sera una función de Schur (como se define en [8]) y al ser toda función de Schur un homomorfismo se tiene que las dos matrices dadas son homeomorfas, con lo cual las propiedades de ser de Toeplitz y ser involutiva se deben mantener. □

Con el anterior resultado es inevitable considerar una relación de equivalencia o una restricción en las clases de matrices de Toeplitz involutivas consideradas. Se presentara un teorema el cual nos dará la cantidad de clases de equivalencia que existen; para esto se hará primero un estudio de la Transformada Discreta de Fourier (DTF) la cual sera necesaria en la demostración de este resultado y posteriores.

6.1. DFT

Para definir la **DFT** se considerara el conjunto de las sucesiones complejas notado por $l^2(\mathbb{Z}_N)$ donde $N \in \mathbb{N}$ y $Z_N = \{0, 1, 2, ..., N-1\}$; entonces definiendo este conjunto formalmente se tiene que

$$l^2(\mathbb{Z}_N) = \{z = (z(0), z(1), z(2), ..., z(N-1)) : \quad z(j) \in \mathbb{C}; \quad 0 \leq j \leq N-1\}$$

este conjunto es un espacio vectorial de dimensión N con las operaciones de suma y multiplicación por escalar componente a componente definidas como sigue

$$z + w = (z(0) + w(0), z(1) + w(1), z(2) + w(2), ..., z(N-1) + w(N-1))$$

$$\alpha \cdot z = (\alpha \cdot z(0), \alpha \cdot z(1), \alpha \cdot z(2), ..., \alpha \cdot z(N-1))$$

La base canónica para $l^2(\mathbb{Z}_N)$ es $E = \{e_0, e_1, ..., e_{N-1}\}$ donde cada sucesión e_j esta dada por

$$e_j(n) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x = n \\ 0 & \text{Si } x \neq n \end{cases}$$

Otra característica que tiene este conjunto es que se puede definir en el un producto interno y una norma asociada a este dadas respectivamente como sigue

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z(k)\overline{w(k)}$$

$$\|z\| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} z(k)\overline{z(k)} \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} | z(k) |^2 \right)^{1/2}$$

Definicion 6.1. ***(Sucesión Exponencial)*** *Para cada $m \in \{0, 1, 2, ..., N-1\}$ se define la sucesión exponencial como*

$$E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi mn}{N}}$$

Lema 6.1. *El conjunto $E = \{E_0, E_1, ..., E_{N-1}\}$ es una base ortonormal de $l^2(\mathbb{Z}_N)$.*

Demostración. Sean $j, k \in \{0, 1, 2, ..., N-1\}$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle E_j, E_k \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} E_j(n)\overline{E_k(n)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi jn}{N}} \cdot \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi kn}{N}}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi(j-k)n}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{2\pi(j-k)}{N}}\right)^n
\end{aligned}$$

Ahora se consideran los siguientes dos casos

- Si $j = k$ entonces $\langle E_j, E_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{2\pi(0)}{N}}\right)^n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1^n = N.$

- Si $j \neq k$ entonces $e^{i\frac{2\pi(j-k)}{N}} \neq 1$ para $0 \leq j,\ k \leq N-1$, ya que $-1 < \frac{j-k}{N} < 1$; ahora usando la identidad para suma finita de complejos

$$\sum_{n=0}^{k-1} z^n = \frac{1 - z^k}{1 - z}; \qquad z \neq 1$$

Entonces se tendrá lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{2\pi(j-k)}{N}}\right)^n &= \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi(j-k)}{N}}\right)^N}{1 - e^{i\frac{2\pi(j-k)}{N}}} \\
&= \frac{1 - e^{2i\pi(j-k)}}{1 - e^{i\frac{2\pi(j-k)}{N}}} \\
&= \frac{1 - (cos(2\pi(j-k)) + isen(2\pi(j-k)))}{1 - e^{i\frac{2\pi(j-k)}{N}}} \\
&= \frac{1 - 1}{1 - e^{i\frac{2\pi(j-k)}{N}}} \\
\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{2\pi(j-k)}{N}}\right)^n &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que $\langle E_j, E_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{Si } j = k \\ 0 & \text{Si } j \neq k \end{cases}$, de donde $\|E_j\|^2 = \langle E_j, E_j\rangle = 1$, con lo cual el conjunto E es ortonormal además como $0 \notin E$ entonces este conjunto sera linealmente independiente y al ser $l^2(\mathbb{Z}_n)$ un espacio vectorial de dimensión N se tiene que E genera este espacio y por lo tanto E es una base ortonormal de $l^2(\mathbb{Z}_n)$. □

La ventaja de trabajar con una base ortonormal de $l^2(\mathbb{Z}_n)$ esta en que cualquier sucesión $z \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ se puede expresar de manera única como sigue:

$$z = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k E_k; \qquad \alpha_j = \langle z, E_j\rangle$$

Definicion 6.2. ***(Vector de componentes de*** z ***respecto a la base*** E***)*** *Se define el vector de componentes de z respecto a la base E como sigue*

$$[z]_E = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N-1})$$

Definicion 6.3. ***(Transformada Discreta de Fourier DFT)***

Sea $z = (z(0), z(1), z(2), ..., z(N-1)) \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. La transformada discreta de Fourier de z es de nuevo otra sucesión $\hat{z} := (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \hat{z}(2), ..., \hat{z}(N-1)) \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ donde para cada $m = 0, 1, 2, ..., N-1$

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-i\frac{2\pi mn}{N}}$$

Nótese que $(\hat{z})(m) = \sqrt{N}\langle z, E_m\rangle$, por lo tanto $\hat{z} = \sqrt{N}[z]_E$.

Ejemplo 6.1. *Sea $z = (4 + 5i, 3i, -1 + i) \in l^2(\mathbb{Z}_3)$, para calcular la DFT de esta sucesión primero expresemos cada termino $z(n)$; $n = 1, 2$ en su forma exponencial:*

- ***3i****: $r = \sqrt{3^2} = 3$, $Arg(3i) = \frac{\pi}{2}$; luego $3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.*
- ***-1+i****: $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $Arg(-1 + i) = \arctan(\frac{1}{-1}) + \pi = \frac{3\pi}{4}$; luego $-1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.*

Con esto se procederá a calcular la DFT.

$$\begin{aligned}\hat{z}(0) &= \sum_{n=0}^{2} z(n)e^{-i\frac{2\pi 0n}{3}} \\ &= \sum_{n=0}^{2} z(n)e^{0} \\ &= \sum_{n=0}^{2} z(n) \\ &= 4+5i+3i-1+i \\ \hat{z}(0) &= 3+9i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{z}(1) &= \sum_{n=0}^{2} z(n)e^{-i\frac{2\pi 1n}{3}} \\ &= (4+5i)e^{0} + 3i\cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} + (-1+i)\cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}} \\ &= (4+5i) + 3e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}} \\ &= (4+5i) + 3e^{-i\frac{\pi}{6}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}} \\ &= (4+5i) + 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) + \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right) \\ &= (4+5i) + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= 4+5i+\frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} + \frac{2-2\sqrt{3}}{4} + i\frac{2\sqrt{3}-2}{4} \\ &= \left(4+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(5-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right) \\ \hat{z}(1) &= \left(\frac{9}{2}+\sqrt{3}\right) + i\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{z}(2) &= \sum_{n=0}^{2} z(n)e^{-i\frac{4\pi n}{3}} \\ &= (4+5i)e^{0} + 3i\cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}} + (-1+i)\cdot e^{-i\frac{8\pi}{3}} \\ &= (4+5i) + 3e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}} + \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{-i\frac{8\pi}{3}} \\ &= (4+5i) + 3e^{-i\frac{5\pi}{6}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{23\pi}{12}} \\ &= (4+5i) + 3\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right) + \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-23\pi}{12}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{z}(2) &= (4+5i) + 3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} - i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\\ &= 4 + 5i - \frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} + \frac{2+2\sqrt{3}}{4} - i\frac{2+2\sqrt{3}}{4}\\ &= \left(4 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(5 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)\\ \hat{z}(2) &= \left(\frac{7}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

Luego se tiene que $\hat{z} = \left(3+9i, \left(\frac{9}{2}+\sqrt{3}\right) + i\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{7}{2}-\sqrt{3}\right) + i\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

Ahora, se puede ver la DFT como un operador de $l^2(\mathbb{Z}_N)$ en si mismo; en el siguiente teorema se darán algunas propiedades de este operador; la demostración de este se puede encontrar en la sección de apéndice.

Teorema 6.1. *Sea* $\wedge$ *el operador definido por la DFT, entonces* $\wedge$ *sera:*

(i) Lineal.

(ii) Inyectivo.

(iii) Sobreyectivo.

(iv) De periodo N*.*

De los ítem (ii) y (iii) se concluye que $\wedge$ es inyectivo y por lo tanto invertible, se denotara su operador inverso como $\vee$.

Teorema 6.2. ***Fórmula de Inversión de Fourier***

Sea $z = (z(0), z(1), z(2), ..., z(N-1)) \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ *entonces la fórmula de inversión de Fourier esta dada por*

$$z(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{i\frac{2\pi mn}{N}}; \quad n = 0, 1, 2, .., N-1$$

Demostración. Se sabe que $z = \sum_{m=0}^{\infty} \langle z, E_m \rangle E_m$, entonces para cada $n = 0, 1, 2, ..., N-1$ se tendrá lo siguiente

$$
\begin{aligned}
z(n) &= \sum_{m=0}^{\infty} \langle z, E_m \rangle E_m(n) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{z}(m)}{\sqrt{N}} E_m(n) && \cdot \text{ Ya que } \hat{z}(m) = \sqrt{N}\langle z, E_m \rangle \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{z}(m)}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi mn}{N}} \\
z(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{z}(m) e^{i\frac{2\pi mn}{N}}
\end{aligned}
$$

□

Definicion 6.4. ***(Base de Fourier)*** *Para cada $m = 0, 1, 2, ..., N-1$ se define $F_m \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ mediante*

$$F_m = \frac{1}{N} e^{i\frac{2\pi mn}{N}}, \qquad \textit{donde } n = 0, 1, 2, ..., N-1$$

Al conjunto $F = \{F_0, F_1, F_2, ..., F_{N-1}\}$ se le denomina la base de Fourier de $l^2(\mathbb{Z}_n)$.

Se puede definir cada componente de la base de Fourier mediante la base E ya definida como sigue:

$$F_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi mn}{N}} \right) = \frac{1}{\sqrt{N}} E_m(n)$$

Como consecuencia de lo anterior se tiene que F es una base ortogonal de $l^2(\mathbb{Z}_n)$, la normalidad se pierde ya que $\|F_m\| = \frac{1}{\sqrt{N}} \|E_m\| = \frac{1}{\sqrt{N}} \neq 1$. Se puede escribir la fórmula de inversión en términos de la base de Fourier como sigue:

$$
\begin{aligned}
z(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{z}(m) e^{i\frac{2\pi mn}{N}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{z}(m) \left(\frac{1}{N} e^{i\frac{2\pi mn}{N}} \right) \\
z(n) &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{z}(m) F_m(n); && n = 0, 1, 2, ..., N-1.
\end{aligned}
$$

De donde finalmente se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} z &= (z(0), z(1), z(2), ..., z(N-1)) \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \hat{z}(m) F_m(0), \sum_{m=0}^{\infty} \hat{z}(m) F_m(1), \sum_{m=0}^{\infty} \hat{z}(m) F_m(2), ..., \sum_{m=0}^{\infty} \hat{z}(m) F_m(N-1) \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{z}(m)(F_m(0), F_m(1), F_m(2), ..., F_m(N-1)) \\ z &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{z}(m) F_m \end{aligned}$$

Luego, esta fórmula de inversión de Fourier da una expansión de z en términos de la base de fourier F como sigue

$$[z]_F = (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \hat{z}(2), ..., \hat{z}(N-1)) = \hat{z}$$

Ahora, como el operador $\wedge$ es lineal, entonces este tendrá una representación matricial; para esto se reescribirá $\hat{z}(m)$ como sigue

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{\frac{-i2\pi mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \left(e^{\frac{-i2\pi}{N}} \right)^{mn}$$

Se define ahora $w_N = e^{\frac{-i2\pi}{N}}$ como una raíz n-ésima de la unidad, entonces

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) w_N^{mn}$$

Definicion 6.5. ***(Matriz de Fourier)*** *Si $W_N = [w_{m,n}]$ tal que $w_{m,n} = w_N^{mn}$ entonces*

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & w_N^3 & w_N^4 & \cdots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & w_N^6 & w_N^8 & \cdots & w_N^{2(N-1)} \\ 1 & w_N^3 & w_N^6 & w_N^9 & w_N^{12} & \cdots & w_N^{3(N-1)} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)} & w_N^{3(N-1)} & w_N^{4(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Denominada matriz de Fourier de tamaño $N \times N$.

La matriz definida anteriormente tiene la propiedad de ser una matriz de Valdermonde, por lo tanto también suele llamarse representación matricial de Vandermonde para la DFT. Este nombre también se le da ya que esta matriz es la asociada al operador DFT $\wedge$; a continuación se vera que esto es cierto.

$$W_N \cdot z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & w_N^3 & w_N^4 & \cdots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & w_N^6 & w_N^8 & \cdots & w_N^{2(N-1)} \\ 1 & w_N^3 & w_N^6 & w_N^9 & w_N^{12} & \cdots & w_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)} & w_N^{3(N-1)} & w_N^{4(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z(0) \\ z(1) \\ z(2) \\ z(3) \\ \vdots \\ z(N-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z(0) + z(1) + z(2) + \cdots + z(N-1) \\ z(0) + z(1)w_N + z(2)w_N^2 + \cdots + z(N-1)w_N^{N-1} \\ z(0) + z(1)w_N^2 + z(2)w_N^4 + \cdots + z(N-1)_N^{2(N-1)} \\ \vdots \\ z(0) + z(1)w_N^m + z(2)w_N^{2m} + \cdots + z(N-1)_N^{m(N-1)} \\ \vdots \\ z(0) + z(1)w_N^{N-1} + z(2)w_N^{2(N-1)} + \cdots + z(N-1)_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

$$W_N \cdot z = \begin{pmatrix} \hat{z}(0) \\ \hat{z}(1) \\ \hat{z}(2) \\ \vdots \\ \hat{z}(m) \\ \vdots \\ \hat{z}(N-1) \end{pmatrix}$$

$$= [z]_F$$

De donde se tendría finalmente que

$$W_N \cdot z = \hat{z}$$
$$z = W_N^{-1} \cdot \hat{z}$$

Luego, se puede realizar el calculo de la DFT mediante el producto $W_N \cdot z$, lo cual indica que W_N es la matriz asociada al operador DFT.

Ejemplo 6.2. *Considerando z como en el Ejemplo 6.1, se ve que W_3 estará dada por*

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3^4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{3}} & e^{-i\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{-i\frac{4\pi}{3}} & e^{-i\frac{8\pi}{3}} \end{bmatrix}$$
$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Definicion 6.6. ***(IDFT)*** *Sea $w = (w(0), w(1), w(2), ..., w(N-1)) \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ la* ***inversa de la transformada de Fourier discreta (IDFT)*** *de w se define como la sucesión*

$$\check{w} = (\check{w}(0), \check{w}(1), \check{w}(2), ..., \check{w}(N-1)) \in l^2(\mathbb{Z}_n)$$

donde $\check{w}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{i\frac{2\pi mn}{N}}$, $n = 0, 1, 2, ..., N-1$

Esta definición junto con la fórmula de inversión de Fourier implican que si $z \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ entonces $\check{\hat{z}} = z$; lo cual verifica que $\wedge$ y $\vee$ son operadores inversos.

Ahora, como la DFT es un operador lineal invertible, entonces su matriz asociada W_N tiene inversa y por lo tanto se tiene que si $\check{z} = W_N z \Rightarrow z = W_N^{-1}\hat{z}$ y haciendo $z = \check{w}$ se obtiene que $\check{w} = W_N^{-1} w$; el siguiente resultado dará una forma de calcular W_N^{-1} a partir de W_N.

Teorema 6.3.

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{W_N}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\check{w}(n) &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{i\frac{2\pi mn}{N}} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} w(m)\frac{e^{i\frac{2\pi mn}{N}}}{N} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} w(m)\frac{\overline{e^{\frac{-i2\pi mn}{N}}}}{N} \\
\check{w}(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} w(m)\frac{\overline{w_N^{mn}}}{N}
\end{aligned}$$

Lo anterior se tiene para $n = 0, 1, 2, ..., N-1$ lo cual muestra que la matriz del operador $\vee$ notada por WN^{-1} tiene como entrada (m, n) el elemento $\frac{\overline{w_N^{mn}}}{N}$ donde w_N^{mn} es la entrada (m, n) de la matriz W, con lo cual se concluye la demostración. □

Definicion 6.7. *Sea $z \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ y $k \in \mathbb{Z}$, la traslación de z mediante k unidades, es de nuevo otra sucesión que se nota como $R_k z$ y esta definida como*

$$R_k z = (R_k z(0), R_k z(1), R_k z(2), ..., R_k z(N-1))$$

donde $(R_k z)(n) = z(n-k)$, a R_k se le denomina el $k-$operador de traslación.

Definicion 6.8. *Sea $T : l^2(\mathbb{Z}_n) \to l^2(\mathbb{Z}_n)$ una transformación lineal, T es invariante por traslación si*

$$T(R_k z) = R_k T(z)$$

para todo $z \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ y todo $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 6.4. *Sea $T : l^2(\mathbb{Z}_n) \to l^2(\mathbb{Z}_n)$ una transformación lineal invariante por traslación. Entonces todo elemento de la base de Fourier F es un vector propio de T. En particular, T es diagonalizable.*

La importancia de este teorema es la caracterización y relación que se da entre las transformaciones lineales invariantes por traslación y la base de Fourier ya definida. La demostración del resultado se puede ver en el apéndice.

6.2. Matrices Involutivas

Definicion 6.9. ***(Matriz Periódica y Circulante)*** *Sea $A = [a_{mn}]_{0\leq m,n\leq N-1}$ una matriz dada, entonces se dice que es* ***periódica*** *de periodo N si $a_{m+N,n} = a_{mn}$ y $a_{m,n+N} = a_{mn}$. Ahora, una matriz periódica es* ***circulante*** *si para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $a_{m+k,n+k} = a_{m,n}$.*

Se puede extender la base canónica $E = \{e_0, e_1, e_2, ..., e_{N-1}\}$ de $l^2(\mathbb{Z}_n)$ a todos los enteros $\mathbb{Z}$ mediante la periodicidad N, esto es

$$e_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n + kN, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De donde $e_{n+N} = e_n$ con lo cual $R_1 e_n = e_{n+1}$; si se realiza el producto $A \cdot e_n$ el resultado sera la $n-$ésima columna de A, la demostración es como sigue:

$$(A \cdot e_n)(m) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{m,k} e_n(k) = a_{mn} \tag{4}$$

Ahora bien, como $0 \leq m \leq N-1$ entonces se obtiene toda la $n-$ésima columna de A.

Definicion 6.10. ***(Convolución y Operador de Convolución.)***

Sean $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ la ***convolución*** *$z * w \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ esta definido como el vector con componentes*

$$z * w(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(m-n)w(n); \quad \forall m$$

Ahora sea $b \in l^2(\mathbb{Z}_n)$, Se define $T_b : l^2(\mathbb{Z}_n) \to l^2(\mathbb{Z}_n)$ mediante $T_b(z) = b * z$ para todo $z \in l^2(\mathbb{Z}_n)$; cualquier transformación de la forma $T = T_b$ para algún $b \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ se denomina ***operador de convolución****.*

Definicion 6.11. *Sea $m \in l^2(\mathbb{Z}_n)$, se define $T_{(m)} : l^2(\mathbb{Z}_n) \to l^2(\mathbb{Z}_n)$ mediante*

$$T_{(m)}(z) = (m\hat{z})\check{}$$

donde $m\hat{z}$ es la sucesión que se obtiene al multiplicar punto a punto m y $\hat{z}$; toda transformación de esta forma se le denomina ***operador multiplicador de Fourier****.*

Con estas definiciones y resultados se procederá con la relación que tienen las matrices Toeplitz con la DFT, esto se hará mediante varios resultados, el primero de ellos dará la equivalencia entre cinco afirmaciones de las cuales una es sobre matrices circulantes que como se vio son un caso particular de matrices de Toeplitz.

Teorema 6.5. *Sea $T : l^2(\mathbb{Z}_n) \to l^2(\mathbb{Z}_n)$ una transformación lineal, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) T es invariante por traslación.

(ii) La matriz $A_{T,E}$ que representa a T en la base estándar E es circulante.

(iii) T es un operador de convolución.

(iv) T es un operador multiplicador de Fourier.

(v) La matriz $A_{T,F}$ que representa a T en la base de Fourier F es diagonal.

Demostración. Para demostrar este teorema se probara que $i \Rightarrow ii \Rightarrow iii \Rightarrow i$, luego se vera que $iii \Leftrightarrow iv$ y finalmente $iv \Leftrightarrow v$.

($i \Rightarrow ii$) Se quiere mostrar que $A_{T,E}$ es circulante, esto por definición es que $a_{m+k,n+k} = a_{mn}$, pero esto es equivalente a demostrar que $a_{m+1,n+1} = a_{m,n}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$
\begin{aligned}
a_{m+1,n+1} &= (A \cdot e_{n+1})(m+2) && \cdot \text{ Por (4).} \\
&= (T(e_{n+1}))(m+1) && \cdot \text{ Ya que } A \text{ es la matriz asociada al operador } T. \\
&= (T(R_1 e_n))(m+1) \\
&= R_1 T(e_n)(m+1) && \cdot \text{ Ya que } T \text{ es invariante por traslación.} \\
&= T(e_n)(m+1-1) && \cdot \text{ Por definicion del operador de traslación.} \\
&= T(e_n)(m) \\
a_{m+1,n+1} &= a_{mn}
\end{aligned}
$$

Iterando este resultado $k-$veces se tiene que $a_{m+k,n+k} = a_{mn}$ lo cual implica que $A_{T,E}$ es circulante.

$(ii \Rightarrow iii)$ Defina $b \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ como $b(n) = a_{n,0}$; ahora como A es circulante se tiene entonces que $a_{m,n} = a_{m-n,0} = b(m-n)$, luego por definición del producto de matrices se tiene lo siguiente

$$(Az)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} b(m-n) z(n) = b * z(m)$$

Ahora, como A es la matriz asociada al operador T se tiene por definición que $T(z) = Az = b * z = T_b(z)$, por lo tanto T es un operador de convolución.

$(iii \Rightarrow i)$ Sea T un operador de convolución y sean $z \in l^2(\mathbb{Z}_n)$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces para cualquier m se tiene

$$
\begin{aligned}
T_b(R_k z)(m) &= b * (R_k z)(m) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} b(m-n)(R_k z)(n) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} b(m-n) z(n-k) \\
&= \sum_{l=-k}^{N-1-k} b(m-k-l) z(l) && \cdot \text{ Eligiendo } l = n-k
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{l=-k}^{N-1-k} b((m-k)-l)z(l) \qquad \cdot \text{ Eligiendo } l = n-k$$
$$= \sum_{l=-k}^{N-1-k} (b*z)(m-k) \qquad \cdot \text{ Eligiendo } l = n-k$$
$$= R_k(b*z)(m)$$
$$T_b(R_k z)(m) = R_k T_b(z)(m)$$

Luego se tiene que T_b es invariante por traslación.

$(iii \Rightarrow iv)$ Si T_b es un operador de convolución y $m = \hat{b}$ entonces para cualquier $z \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ se tiene

$$T_b(z) = b * z$$
$$= ((b*z)\hat{})\check{}$$
$$= (\hat{b} \cdot \hat{z})\check{}$$
$$= (m \cdot \hat{z})\check{}$$
$$T_b(z) = T_{(m)}(z)$$

Luego T_b es un operador multiplicador de Fourier.

$(iv \Rightarrow iii)$ Si $T_{(m)}$ es un operador multiplicador de Fourier y $b = \check{m}$ entonces para cualquier $z \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ se tiene

$$T_{(m)}(z) = (m \cdot \hat{z})\check{}$$
$$= (\hat{b} \cdot \hat{z})\check{}$$
$$= ((b*z)\hat{})\check{}$$
$$= b * z$$
$$T_{(m)}(z) = T_b(z)$$

Luego $T_{(m)}$ es un operador multiplicador de Fourier.

$(iv \Rightarrow v)$ Sea $T_{(m)}$ un operador multiplicador de Fourier, entonces $T_{(m)}(z) = (m\hat{z})\check{}$, aplicando la DFT se tiene que $(T_{(m)}(z))\hat{}(k) = m(k)\hat{z}(k)$ de donde al aplicar la fórmula de inversión de Fourier se llega a que

$$T_{(m)} = \sum_{k=0}^{N-1} m(k)\hat{z}F_k$$

Esto implica por definición que

$$[T_{(m)}(z)]_F = (m(0)\hat{z}(0), m(1)\hat{z}(1), m(2)\hat{z}(2), ..., m(N-1)\hat{z}(N-1))$$

$$= \begin{bmatrix} m(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}(0) \\ \hat{z}(1) \\ \hat{z}(2) \\ \vdots \\ \hat{z}(N-1) \end{bmatrix}$$

$$[T_{(m)}(z)]_F = D \cdot [z]_F$$

Por lo tanto, $T_{(m)}$ se representa por la matriz diagonal D con respecto a la base de Fourier.

($v \Rightarrow iv$) Supóngase que la matriz diagonal $D = [d_{m,n}]_{0 \leq m,n \leq N-1}$ representa al operador T con respecto a la base de Fourier F. Definiendo $m(n) = d_{n,n}$, para $0 \leq n \leq N-1$, y sea $T(m)$ el correspondiente operador multiplicador de Fourier, entonces por lo hecho anteriormente se tiene que
$[T(z)]_F = D[z]_F = [T_{(m)}(z)]_F$, por lo tanto $T = T_{(m)}$ y T es un operador multiplicador de Fourier.

Con estas equivalencias se concluye que las cinco afirmaciones del teorema son equivalentes, lo cual culmina la demostración. □

En el siguiente teorema se estudiaran las clases de equivalencia generadas por la relación se semejanza entre matrices de Toeplitz; en esta demostración juega un papel importante la representación matricial de Vandermonde para la DFT.

Ejemplo 6.3. *En el siguiente teorema se tocara el concepto de matrices semejantes, para tener este concepto mas claro y ver la función que cumple se puede tomar el espacio $l^2(\mathbb{Z}_4)$ y una transformación $T : l^2(\mathbb{Z}_4) \to l^2(\mathbb{Z}_4)$ arbitraria.*

Primero se halla la matriz $A_{T,E}$ y además la matriz de Vandermond W_4 obteniendo así que $A_{T,E}$ es similar a la matriz D ya que $W_4 \cdot A_{T,E} \cdot W_4^{-1} = D$ donde D es una matriz diagonal, con esto se obtiene el siguiente diagrama para cambio el cambio de base de $l^2(\mathbb{Z}_4)$.

$$\begin{array}{ccc} l^2(\mathbb{Z}_4) & \xrightarrow{A_{T,E}} & l^2(\mathbb{Z}_4) \\ E & & E \\ W_4^{-1} \uparrow & & \uparrow W_4 \\ \uparrow & & \uparrow \\ l^2(\mathbb{Z}_4) & \xrightarrow{D} & l^2(\mathbb{Z}_4) \\ F & & F \end{array}$$

Teorema 6.6. *Existen $n+1$ clases de equivalencia de matrices de Toeplitz involutivas en $M_n(\mathbb{C})$, donde la relación de equivalencia es ser semejantes (A,B son semejantes si y solo si $\exists P \in M_n(\mathbb{C})$ invertible tal que $B = P^{-1}AP$). Además, toda clase de equivalencia contiene al menos una matriz hermitiana circular involutiva.*

Demostración. Sea T una matriz de Toeplitz involutiva. Ya que el polinomio $p(x) = x^2 - 1$ se anula en T, se sigue que el polinomio mínimo de T divide a p. Pero como p tiene raíces distintas sobre $\mathbb{C}$ se tiene que el polinomio mínimo de T tiene distintas raíces sobre $\mathbb{C}$ y de aquí que T es diagonalizable. Así, T es semejante a una matriz diagonal Λ. Sea F la representación matricial de Vandermonde para la Transformada de Fourier finita sobre $\mathbb{C}$; entonces $F^{-1}\Lambda F$ que es equivalente a T, sera una matriz hermitiana y es circular, esto se puede ver en [4] . Claramente, así se puede decir que el numero de clases de equivalencia estará dado por el numero de posibles matrices diagonales involutivas en $M_n(\mathbb{C})$, el cual es $n + 1$ fuera de equivalencias. □

Comentario 6.1. *Dos matrices diagonales están en la misma clase de equivalencia si y solo si los elementos en las diagonales son permutaciones de la otra.*

Ejemplo 6.4. *La DFT tiene una aplicación muy común a las imágenes, esta se basa en asociar una matriz a una imagen, aplicarle la DFT y luego la matriz resultante se convierte en una imagen obteniendo así una distorsión de la imagen inicial.*



Figura 4: Imagen Lena

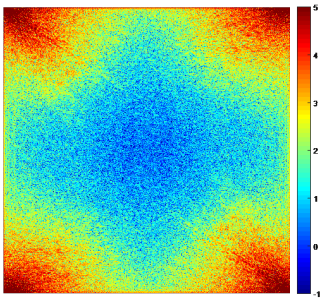


Figura 5: DFT Lena

Ademas de la distorsión generada también se pueden tomar las frecuencias altas en la Figura 4 y centrarlas en el origen del plano, obteniendo así una visión de la DFT como la que se puede ver a continuación

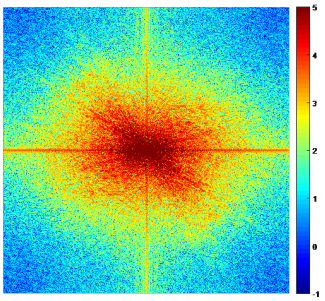


Figura 6: DFT con frecuencias altas centradas

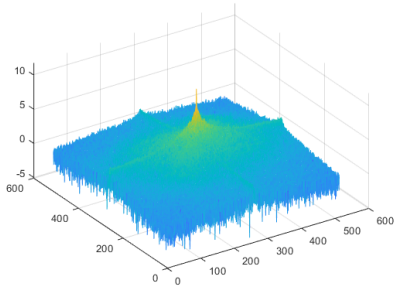


Figura 7: DFT como superficie

7. Un operador fiel sobre $M_n(\mathbb{C})$

En esta sección consideraremos una generalización del Teorema 5.5, esto con el objetivo de considerar la norma en álgebras C^* en $M_n(\mathbb{C})$; para esto se tienen que dar algunas definiciones extras, debido a que las normas en álgebras C^* carecen de propiedades generales.

Definicion 7.1. ***(Esperanza Condicional.)*** *Sean H,H' dos espacios de Hilbert de matrices y $\phi : H \to H'$ un operador. Decimos que ϕ es una esperanza condicional si $\forall D, M \in H$ con D una matriz diagonal, se tiene que:*

$$\phi(DMD^*) = D\phi(M)D^*$$

Definicion 7.2. ***(Operador Fiel.)*** *Un operador ϕ se dice fiel si y solo si $\forall M \neq 0 \in Dom(\phi)$ se tiene que $\phi(M) \neq 0$, donde 0 denota la matriz nula.*

Teorema 7.1. *Una esperanza condicional, fiel, preservadora de trazas y de idempotencia, con norma 1 de $M_n(\mathbb{C})$ en el subespacio de las circulares, esta dada por*

$$\phi(M) = F^*D(FMF^*)F$$

Donde D toma todos los elementos que no están en la diagonal principal los convierte en 0 y preserva los elementos de la diagonal principal, y F representa la Transformada Discreta de Fourier ya definida anteriormente.

Demostración. Como la función $M \mapsto FMF^*$ es una transformación unitaria que diagonaliza las circulares, solo hace falta probar que D cumple con las condiciones que se quieren para ϕ. Es inmediato ver que D es una esperanza condicional, además por como se definió $D : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ esta es preservadora de trazas, es decir $tr(M) = tr(D(M))$. Como los elementos diagonales de una matriz definida positiva son reales y no negativos, se sigue que D toma matrices definidas positivas y las envía en matrices definidas positivas y diagonales.

Ahora se supone que D no es fiel, esto es que existe una matriz no nula y definida positiva tal que su imagen bajo D es 0. Pero como D no cambia los elementos de la diagonal esto significa que el elemento al que se le esta aplicando D tiene en su diagonal principal solo ceros, pero una matriz definida positiva con todos los elementos en su diagonal principal iguales a 0 es de hecho la matriz nula, lo cual contradice nuestra hipótesis de que la matriz tomada es no nula por lo tanto D es fiel. Se sabe que las esperanzas condicionales son funciones totalmente positivas y estas funciones tienen como propiedad que si la imagen de la unidad es la unidad entonces este tiene norma uno; claramente $D(I) = I$, por lo tanto D es de norma 1. Por ultimo es claro que si M es idempotente entonces $D(M)$ lo sera, por lo tanto se tiene el resultado del teorema. □

Corolario 7.1. *Existe una función lineal e idempotente de $M_n(\mathbb{C})$ en el subálgebra de las matrices circulares en $M_n(\mathbb{C})$. Además, esta función esta dada por ϕ definida en el teorema anterior.*

Demostración. Por el Teorema 1 en [11], dada cualquier función lineal idempotente L esta es una esperanza condicional de un álgebra de Von-Neumann de dimensión finita en un álgebra de Von-Neumann de dimensión finita. Por la condición de dimensión finita se tiene que la función es necesariamente normal. Por la Proposición 1.2 en [11] la función L es necesariamente fiel; luego por teorema 6.2.2 y 6.2.3 en [1] la función L es única. Como claramente ϕ es lineal y ya se vio que es idempotente entonces esta función debe ser la que se enuncia en el teorema, debido a la unicidad de esta. □

Por la unicidad de la función hallada en el teorema anterior se puede deducir de forma inmediata el siguiente corolario.

Corolario 7.2. *La función ϕ minimiza el error en la norma operador sobre todas las proyecciones idempotentes de $M_n(\mathbb{C})$ en el subálgebra de las circulares en $M_n(\mathbb{C})$.*

Los tres resultados anteriores se tiene de forma análoga para el subálgebra de las matrices anti circulares en $M_n(\mathbb{C})$; se resumirá esto en el siguiente resultado cuya demostración es análoga a los teoremas anteriores haciendo el cambio de circulares por anti-circulares.

Teorema 7.2. *Una esperanza condicional fiel, preservadora de trazas, idempotente, de norma* 1 *de* $M_n(\mathbb{C})$ *en las anti circulares esta dada por:*

$$\psi(M) = H^* D(HMH^*)H$$

Donde D *se sigue definiendo de la misma forma que antes y* $H^* = \Omega^{\frac{1}{2}} F^*$ *con* $\Omega^{\frac{1}{2}} := \Omega_n^{\frac{1}{2}} = Diag(1, \sigma_n, \sigma_n^2, ..., \sigma_n^{n-1})$ *y* $\sigma_n = e^{i\frac{\pi}{n}} = cos(\frac{\pi}{n}) + isen(\frac{\pi}{n})$.

Con estos resultados se culmina el estudio sobre las matrices de Toeplitz con entradas complejas, ya que se encontró una función lineal que mantiene la propiedad de potencialmente e involutivas, por lo tanto se puede asociar de forma directa el numero de matrices de Toeplitz complejas involutivas o idempotentes al número de matrices de Toeplitz reales mediante las funciones ϕ y ψ dependiendo de si la matriz inicial es circular o anti circular.

8. Algunas aplicaciones

8.1. Estadística

Es bien sabido que las pruebas estadísticas de significación pueden verse gravemente afectadas por la correlación. Al probar el cambio en los datos observados en puntos de tiempo en un mismo espacio, usualmente es necesario asumir un modelo de serie de tiempo para representar y explicar las correlaciones en serie. Uno de los modelos de parámetros finitos para procesos de series temporales estacionarias da lugar a la covarianza simétrica de una matriz de Toeplitz de la forma

$$\Sigma_m = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Es aquel en el cual la covarianza entre cualesquiera dos mediciones de tiempo X_t y X_{t+j} depende solo de el intervalo de tiempo j. Luego, esta es una justificación para estudiar las propiedades de las matrices de Toeplitz simétricas. En el documento *"The autocorrelation function and the spectral density function"*(1955) Wise mostró que los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ de la matriz de autocovarianza Σ_m trazara la llamada curva espectral (densidad) de el proceso temporal que es generado al observar la serie de tiempo X_j. Además, también se mostró que cada λ_i de Σ_m puede ser expresado en una serie de Fourier finita.

8.2. Filtros

Las señales son un objeto matemático que tiene como fin hacer una representación en esta área de una magnitud física o una medida respecto de algún o algunos parámetros; generalmente estos son el tiempo o espacio. El estudio de estos objetos se hace mediante el análisis de Fourier, definiendo las señales como una función de una o varias variables cuyo dominio puede ser un continuo o discreto; pero existe otra forma de definir estos objetos mediante la teoría de Filtros y Wavelets.

Para estudiar la teoría de Wavelets primero se deben definir los filtros, que serán el objeto de mayor interés en este caso ya que estos pueden definirse de tres maneras distintas, de las cuales una es mediante matrices de Toeplitz. Considere una señal $x(n)$ en un tiempo discreto que es procesada por un operador lineal invariante en el tiempo, esto es, si la entrada tiene un cambio en el tiempo, entonces la salida también tendrá un cambio equivalente en el tiempo; a estos operadores se les llama **filtros**.

Como se dijo anteriormente, los filtros pueden ser definidos o expresados en tres dominios, en cada uno de estos los filtros serán una multiplicación, los dominios de los cuales se habla se expresan como sigue

(n) : Multiplicación por una matriz de Toeplitz con entrada $h(n)$ en la $n-$ésima diagonal.
(ω) : Multiplicación por la frecuencia de respuesta $H(e^{j\omega}) = \sum f(n)e^{-j\omega n}$.
(z) : Multiplicación por la función de transferencia $H(z) = \sum h(n)z^{-n}$.

Definicion 8.1. ***(Filtro digital)***

Un filtro digital es una combinación $H = \sum h(n)S^n$, donde S genera un incremento en el tiempo de la señal y S^{-1} genera una disminución en el tiempo de la señal.

Definicion 8.2. ***(Filtros invariantes en el tiempo)***

Un filtro H se dice invariante en el tiempo si $H(Sx) = S(Hx)$, es decir que el aumento del tiempo en la señal genera también un aumento de este mismo en su imagen respecto al filtro.

Tomando H como una matriz se tiene que cada columna de H es un aumento de la anterior columna y cada diagonal de H es constante y con entrada $h(n)$ en la n–ésima diagonal; llegando así a la forma en la que se define un filtro mediante una matriz de Toeplitz.

Si se considera la j–ésima columna de H tenemos que esta es $S^j h$, se puede calcular $H(x)$ mediante la combinación $\sum x(j)(S^j h)$ de sus columnas, además de esto se puede calcular el valor de $\sum h(k)(S^k x)$, para ver mejor esta igualdad se considera la n–ésima componente de $Hx(n)$ como sigue

$$\begin{array}{ccc} \sum_j x(j)h(n-1) & = & \sum_k h(k)x(n-k) \\ \uparrow & & \uparrow \\ n-\text{ésima componente} & & n-\text{ésima componente} \\ \text{de la disminucion en } h & & \text{de la disminucion en } x \end{array}$$

La igualdad se obtiene realizando el cambio de variable $j = n-k$, la sumas anteriores actúan sobre todos los enteros, i se considera la suma finita hasta $j = N$ podría no tenerse la igualdad a la suma hasta $k = N$, a menos de que h tenga periodo N. En este ultimo caso la matriz H de tamaño $N \times N$ sera circulante.

9. Conclusiones

1. De las conclusiones mas relevantes se destaca aquella en la que se asocia una matriz de Toeplitz T_A a cualquier matriz A, hallando así una relación entre un conjunto tan especifico como lo es el de las matrices de Toeplitz y un conjunto tan grande como lo es $M_n(\mathbb{C})$.

2. En general las matrices de Toeplitz son un caso muy particular del conjunto $M_n(\mathbb{C})$, pero a pesar de esto a lo largo del estudio hecho se vio que tienen una cantidad significativa de propiedades, en especial cuando se toman las normas definidas en un conjunto.

3. En este trabajo de grado se da una gran relación entre la matriz de Toeplitz asociada a una matriz, ya que se muestra que estas dos estarán diagonalizadas por la misma matriz y que además la norma del conmutador entre ellas esta acotada por un numero dado.

   Con base en lo anterior, se puede hacer una extensión de las propiedades de las matrices de Toeplitz a cualquier matriz en general, esta extensión tendría un gran uso a las aplicaciones dadas en el capítulo 7 ya que estas se tienen generalmente para las matrices de Toeplitz, pero se puede tomar la matriz A y realizar estas aplicaciones a su asociada T_A, pudiendo así obtener un resultado similar exceptuando un error el cual podría estar relacionado con el hallado entre los conmutadores de A y T_A.

4. Durante el desarrollo del cuarto capítulo se presentaron una variedad de resultados asociados al espectro de una matriz, viendo el conjunto de matrices como un álgebra C^*; lo que se hizo en estos resultados fue dada una matriz x encontrar y lo suficientemente cercana a x (mediante la distancia heredada de la norma en el álgebra) cuyo espectro cumple una variedad de propiedades que lo relacionan con el espectro de x.

5. De las conclusiones anteriores y mediante la definición de filtro dada en el capítulo 7 se puede concluir que dado un filtro en su forma de matriz de Toeplitz se puede hallar otro filtro (dado en la misma representación) tan cercano a el como se quiera, generando así la duda de si este filtro hallado tendrá algunas propiedades compartidas con el filtro dado y además de cuales podrían ser estas propiedades y si se presenta un error muy grande al extender estas propiedades entre los filtros involucrados.

6. Una conclusión teórica es la generalización del Teorema 5,5 dada en el capítulo 6; como se dijo en este, las álgebras C^* carecen de propiedades generales, por lo tanto no siempre se puede extender un resultado de las normas en este tipo de álgebras, pero allí se pudo hallar una extensión de estas propiedades mediante lo que es un operador fiel, llevando a la conclusión de que el Teorema 5,5 es una propiedad que se comporta bien en el sentido de que se puede extender al álgebra C^*.

7. En el capítulo 7 se dieron dos aplicaciones de las matrices de Toeplitz hacia dos áreas de la matemática que están hechas para una aplicación a la cotidianidad, en el caso de la estadística las variables aleatorias asociadas al tiempo son comúnmente usadas y al tener estas una representación en matrices de Toeplitz da una justificación al estudio realizado de estas; por otra parte la teoría de señales esta totalmente asociada al análisis de Fourier, creando así una relación entre las matrices de Toeplitz (la cual también se puede ver en el capítulo 5). En conclusión, las propiedades y el estudio en general hecho no solo se puede aplicar a teorías matemáticas sino que también se aplica a contextos de la matemática aplicada.

10. Apéndice

Teorema 10.1. *Sea $T : l^2(\mathbb{Z}_n) \to l^2(\mathbb{Z}_n)$ una transformación lineal invariante por traslación. Entonces todo elemento de la base de Fourier F es un vector propio de T. En particular, T es diagonalizable.*

Demostración. Sea $m \in \{0, 1, 2, ..., N-1\}$ fijo y sea F_m el m–ésimo elemento de la base de Fourier. Entonces para $T(F_m)$ existen escalares complejos $a_0, a_1, a_2, ..., a_{N-1}$ tales que

$$T(F_m) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k F_k$$

$$T(F_m) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k F_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}} \quad \text{para todo } n \tag{6}$$

al ser F una base de $l^2(\mathbb{Z}_n)$; nótese que

$$\begin{aligned}
(R_1 F_m)(n) &= F_m(n-1) \\
&= \frac{1}{N} e^{i\frac{2\pi m(n-1)}{N}} \\
&= e^{-i\frac{2\pi m}{N}} \cdot \frac{1}{N} e^{i\frac{2\pi mn}{N}} \\
(R_1 F_m) &= e^{-i\frac{2\pi m}{N}} F_m(n) \\
T(R_1 F_m)(n) &= e^{-i\frac{2\pi m}{N}} T(F_m)(n) \\
&= e^{-i\frac{2\pi m}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k F_k(n) \\
T(R_1 F_m)(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\frac{2\pi m}{N}} F_k(n)
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
(R_1 T(F_m))(n) &= (T(F_m))(n-1) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} a_k F_k(n-1) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{i\frac{2\pi k(n-1)}{N}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\frac{2\pi k}{N}} e^{i\frac{2\pi kn}{N}}$$

$$(R_1 T(F_m))(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\frac{2\pi k}{N}} F_k(n)$$

Ahora, como por hipótesis T es invariante a traslaciones se tiene lo siguiente $T(R_1 F_m)(n) = (R_1 T(F_m))(n)$ para todo n, entonces debe cumplirse lo siguiente

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\frac{2\pi m}{N}} F_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\frac{2\pi k}{N}} F_k(n)$$

Usando la unicidad de los coeficientes de la representación de un vector en términos de la base se tiene que para cada $k = 0, 1, 2, ..., N-1$

$$a_k e^{-i\frac{2\pi m}{N}} = a_k e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \tag{7}$$

Si se toma $m \neq k$ entonces $e^{-i\frac{2\pi m}{N}} \neq e^{-i\frac{2\pi k}{N}}$ ya que $0 \leq k, m \leq N-1$. Por lo tanto, la ecuación (3) solo es valida si $a_k = 0$. De ahí que $A_k = 0$ cuando $m \neq k$, lo cual implica que la ecuación (2) se convierta en lo siguiente:

$$T(F_m)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k F_k(n) = a_m Fm(n)$$

Es decir $T(F_m)(n) = a_m F_m$ lo cual significa que F_m es un vector propio de T con valor propio a_m. Como $m \in \{0, 1, 2, ..., N-1\}$ es arbitrario entonces todo elemento de la base de Fourier F es un vector propio de T; por lo tanto T es diagonalizable, que es lo que se quería probar. □

Teorema 10.2. *Sea $\wedge$ el operador definido por la DFT, entonces $\wedge$ sera:*

(i) Lineal.

(ii) Inyectivo.

(iii) Sobreyectivo.

(iv) De periodo N.

Demostración. (i) Sean $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $m = 0, 1, 2, ..., N-1$ arbitrarios; entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{(\alpha z + \beta w)}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha z(n) + \beta w(n)) e^{\frac{-i2\pi mn}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \alpha z(n) e^{\frac{-i2\pi mn}{N}} + \sum_{n=0}^{N-1} \beta w(n) e^{\frac{-i2\pi mn}{N}} \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{\frac{-i2\pi mn}{N}} + \beta \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{\frac{-i2\pi mn}{N}} \\
\widehat{(\alpha z + \beta w)}(m) &= \alpha \hat{z}(m) + \beta \hat{w}(m)
\end{aligned}$$

(ii) Suponga que para cada $m = 0, 1, 2, .., N-1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{z}(m) = \hat{w}(m) &\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{\frac{-i2\pi mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{\frac{-i2\pi mn}{N}} \\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} (z(n) - w(n)) e^{\frac{-i2\pi mn}{N}} = 0
\end{aligned}$$

Ahora, como $e^{\frac{-i2\pi mn}{N}} \neq 0$ entonces se debe tener que $z(n) = w(n)$ para cada $n = 0, 1, 2, .., N-1$ de donde $z = w$.

(iii) Como $\wedge$ es lineal e inyectivo entonces el conjunto de imágenes de la base $\{E_0, E_1, E_2, ..., E_{N-1}\}$ dado por $\{\hat{E_0}, \hat{E_1}, \hat{E_2}, ..., \hat{E_{N-1}}\}$ es linealmente independiente en $l^2(\mathbb{Z}_n)$. Además, como la dimensión de $l^2(\mathbb{Z}_n)$ es N entonces $spam\{E_0, E_1, E_2, ..., E_{N-1}\} = \mathcal{R}(\wedge)$.

(iv) Sea $m = 0, 1, 2, ..., N-1$ arbitrario entonces

$$\begin{aligned}
\hat{z}(m+N) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{\frac{-i2\pi(m+N)n}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cdot e^{\frac{-i2\pi mn}{N}} e^{-i2\pi} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{\frac{-i2\pi mn}{N}} \\
\hat{z}(m+N) &= \hat{z}(m)
\end{aligned}$$

De los item (ii) y (iii) se concluye que $\wedge$ es inyectivo y por lo tanto invertible, se denotara su operador inverso como $\vee$. $\square$

11. Bibliografía

Referencias

[1] Arveson, W:B, *Analyticity in operator algebras. American Journal of Mathematics, 89, 578-642*, (1967).

[2] Blackadar.B, *Operator algebras: Theory of C*-algebras and von Neumann algebras*, Departmento de Matematicas de la Universidad de Nevada, Editorial Springer, (2006).

[3] Bronstein M.; Glashoff K., *Almost-Commuting matrices are almost jointly diagonalizable*, Instituto de Ciencia Computacional, Facultad de Informática, Italia, (2013).

[4] Driessel K., *A relation between some special centro-skew, near-Toeplitz, tridiagonal matrices and circulant matrices*, Departamento de Matematicas Universidad Estatal de Iowa (2011).

[5] Friis P.; Rordam M., *Almost-Commuting self-adjoint matrices - a short proof of Huaxin Lin's theorem*, 121-132, (1996).

[6] Dym H., *Linear Algebra in Action*, Estados Unidos, Universidad de Windsor, (1978).

[7] Kreyzig E., *Introductory Funtional Analysis with applications*, Estados Unidos, Rhode Island, American Mathematical Society, (2007).

[8] Kucerovsky D.; Sarraf A., *Schur multipliers and matrix products.*,Houston Journal of Mathematics, Diciembre (2014).

[9] Kucerovsky D.;Sarraf A.;Mousavand K.. *On some properties of Toeplitz matrices*, Cogent Mathematics, (2016).

[10] Terry A.; Sørensen W., *Almost commuting self-adjoint matrices - the real and self-dual cases*, Diciembre (2010).

[11] Tomiyama. J, *On proyection of norm one in W^*-algebras. Journal of Functional Analysis, 10, 373-386*, (1972).

[12] Zarate S.,*Espacios de Hardy*, (2017).

[13] Zhu K., *Operator Theory in Function Spaces*, Estados Unidos, Universidad de Nueva York, (1990).