UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS



FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

EL TEOREMA DE LAX-MILGRAM Y UNA APLICACIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.

EDDISON ANDRÉS GIL PINILLA

Bogotá, D.C
2016

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS



FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

EL TEOREMA DE LAX-MILGRAM Y UNA APLICACIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.

EDDISON ANDRÉS GIL PINILLA

Trabajo de Grado presentado como parte de los requisitos para la obtención del título de Matemático por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Director:

MILTON DEL CASTILLO LESMES ACOSTA

Bogotá, D.C
2016

Dedicado a mi madre y en memoria de mi padre.

Agradecimientos

Quiero dar un sentido agradecimiento principalmente al profesor Milton Lesmes que con sus aportes y sus conocimientos le dieron forma a este trabajo, al profesor Samuel Barreto por sus aportes que guiaron este y al profesor Oriol Mora, quien a pesar de sus dificultades logró dictar su curso de Análisis Funcional, el cual es la base de este trabajo.

También quiero agradecer a mi hermano William por su confianza puesta en mí, a mis amigos y compañeros que de manera distinta contribuyeron y apoyaron mi proceso de formación,y por último pero no menos importante a la Universidad Distrital, ya que tras darme la oportunidad para realizar mi formación profesional él cual culmino con este trabajo.

Índice general

Capítulos **Página**

Introducción **V**

1. Preliminares **1**

1.1. Definiciones y conceptos 1

1.2. El Teorema de Representación de Riesz 22

2. El Teorema de Lax-Milgram **27**

2.1. El Teorema 27

2.2. Dos demostraciones alternativas 35

2.3. Algunos resultados del Teorema de Lax-Milgram 44

3. Aplicaciones **51**

3.1. Definiciones previas 51

3.2. Las ecuaciones de Poisson 56

3.2.1. Condiciones de Frontera de Dirichlet 57

3.2.2. Condiciones de Frontera Neumann 60

3.3. El problema de Sturm-Lioville 61

A. Algunos Espacios Duales 66

B. El Teorema de Hahn-Banach 69

Conclusiones 85

Bibliografia 87

Introducción

En este trabajo de grado, se trata de dar un acercamiento a los fundamentos de una herramienta del análisis funcional importante, el Teorema de Lax-Milgram para espacios de Hilbert y algunas aplicaciones presentadas a las distintas ecuaciones diferenciales. En principio para abordar este Teorema se necesita unos preliminares del análisis funcional básico y además gran énfasis en el Teorema de representación de Riesz, los conceptos presentados son primordiales para comprender la demostración del teorema, sin embargo las aplicaciones permitirán dar un enfoque a la importancia y el alcance de este Teorema.

El Teorema de Lax-Milgram no se limita a espacios de Hilbert, tiene una ampliación a espacios más generales, como la generalización del Teorema de Lax-Milgram a espacios $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_{A'}$, también a espacios de Banach y algunas generalizaciones con nombre propio como el Teorema Nečas-Babušca-Lax-Milgram que es para $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert cualesquiera y finalmente el teorema de Lions-Lax Milgram. En esté caso se presentará el caso más básico del Teorema, y el que fue presentado en 1945 por Peter D. Lax y Arthur N. Milgram como herramienta auxiliar a la solución de ecuaciones diferenciales parciales, pero con el tiempo y los complementos fue dando bases para teorías completas, tal como los espacios de Sobolev. Precisamente las aplicaciones estarán en este espacio, como la formulación de las ecuaciones de Poisson y el problema de Sturm-Lioville.

El siguiente mapa dará una estructuración de esta monografía.

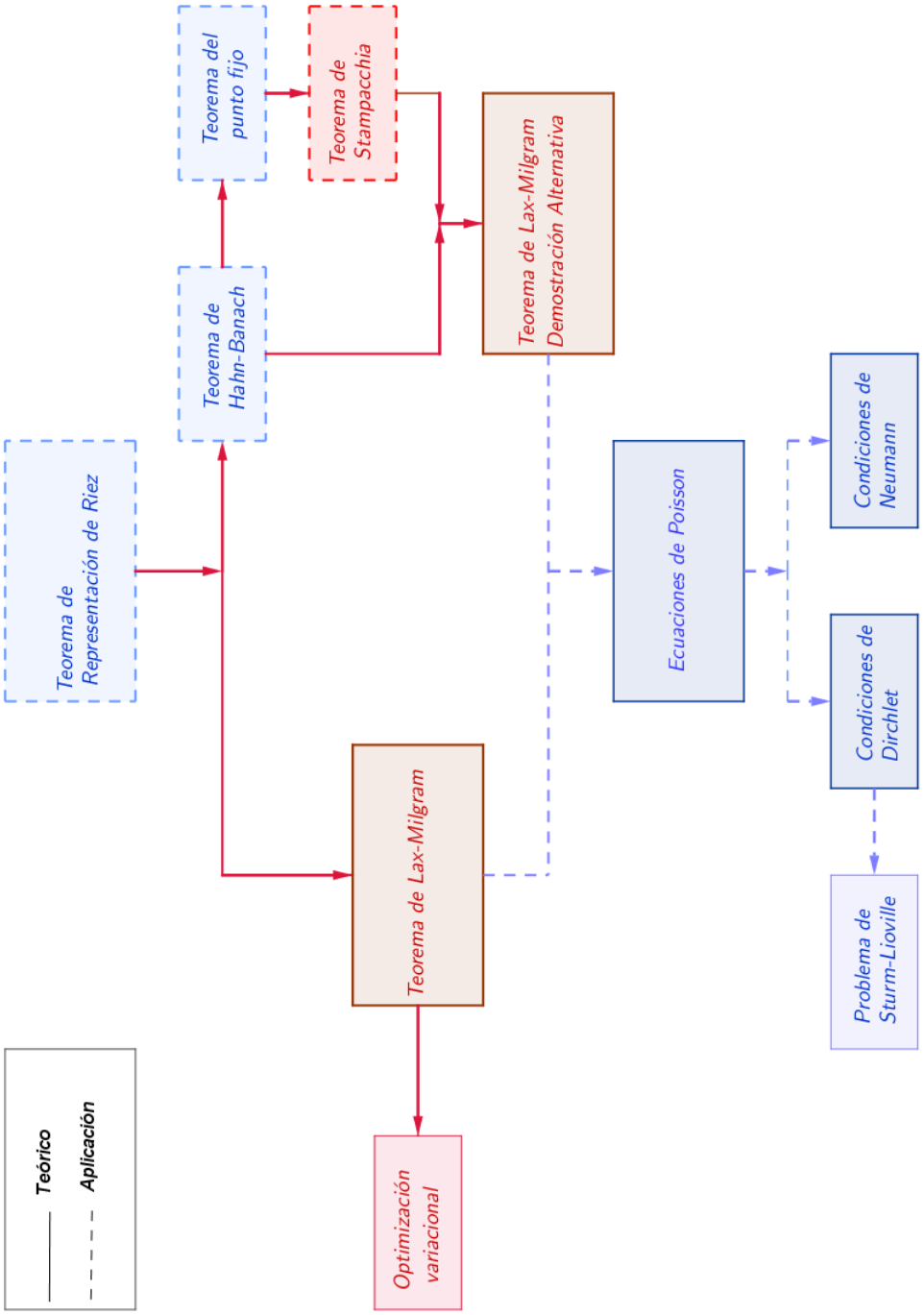


Figura 1: Diagrama sobre la trayectoria lógica del trabajo.

1 Preliminares

La finalidad de este capítulo es estudiar los conceptos preliminares básicos para la formulación del Teorema de Lax-Milgram. El teorema se demostrará en el siguiente capitulo, donde se formulará algunos ejemplos del teorema.

Dentro de los pre requisitos se quiere el **Teorema de Representación de Riesz** esencial para la demostración del Teorema de Lax-Milgram que es el objetivo del trabajo. Otros pre requisitos importantes a tener en cuenta son los conceptos de álgebra lineal, análisis matemático y topología.

1.1 Definiciones y conceptos

El contexto para el desarrollo del teorema requiere inicialmente una topología métrica, es decir un espacio topológico donde se define una **métrica**.

Definición 1.1 (Espacio métrico). *Un espacio métrico es un par ordenado (X, d), donde X es un conjunto y d es una función que llamaremos **métrica**, que es, una función definida en $X \times X$ tal que para todo $x, y, z \in X$ se tiene*

(M1) *d es de valor real, finita y no negativa.*
(M2) *$d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.*
(M3) *$d(x, y) = d(y, x)$*
(M4) *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$* ***(Desigualdad triangular)***

Teorema 1.1 (Cerradura, conjunto cerrado). *Sea M un subconjunto no vacío de un espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$ y $\overline{M}$ su cerradura. Entonces $x \in \overline{M}$ si y solo si existe una sucesión $(x_n) \in M$ tal que $x_n \longrightarrow x$.*

Demostración. Sea $x \in \overline{M}$. Si $x \in M$, la sucesión es del tipo $(x, x, \cdots)$. Si $x \notin M$, este es un punto de acumulación de M. Así para cada $n = 1, 2, \cdots$ la bola $B(x, 1/n)$ contiene un $x_n \in M$, y $x_n \to x$.
Para la suficiencia, sea M cerrado y $x_n \to x$, entonces $x \in M$ o cada vecindad de x contiene puntos de $x_n \neq x$, así que x es un punto de acumulación de M. Así $x \in \overline{M}$, por la definición de cerrado. ∎

Teorema 1.2 (Subespacio completo). *Un subespacio M de un espacio métrico completo $\mathbb{X}$ es completo así mismo si y sólo si el conjunto M es cerrado en $\mathbb{X}$.*

Demostración. Supongamos que M es completo. Por el Teorema 1.1, para cada $x \in \overline{M}$ existe una sucesión (x_n) en M el cual converge a x. Como (x_n) es de Cauchy y M completo, entonces (x_n) converge en M. Así $x \in M$ y como el x es arbitrario se tiene que $M = \overline{M}$ y así M es cerrado.
Para la suficiencia, supongamos que M es cerrado y (x_n) es de Cauchy en M. Entonces $x_n \to x \in \mathbb{X}$, el cual implica que $x \in \overline{M}$ por el Teorema 1.1, y $x \in M$ por ser cerrado $(M = \overline{M})$. Como (x_n) es una sucesión de Cauchy arbitraria converge en M, entonces M es completo. ∎

La siguiente definición nos dará una noción de "longitud" del elemento, en un espacio vectorial.

Definición 1.2 (Espacio vectorial normado, espacio de Banach). *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo K =($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), es **normado** si se puede definir una función que llamaremos **norma**, la cuál mapea*

$$\begin{aligned} \|.\| : \mathbb{V} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \|x\| \end{aligned}$$

y debe cumplir las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} &\textbf{(N1)} && \|x\| \geq 0 \\ &\textbf{(N2)} && \|x\| = 0 \iff x = 0 \\ &\textbf{(N3)} && \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \\ &\textbf{(N4)} && \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

*La última propiedad es una manera equivalente de ver la **desigualdad triangular** cuando se tiene espacios vectoriales normados. Los espacio vectoriales normados se notarán como $(\mathbb{V}, \|.\|)$.*

*Un **espacio de Banach** es un espacio normado completo (completo en la métrica inducida por la norma.)*

Sin embargo hay otro espacio que define un espacio métrico implícitamente, son los **espacios vectoriales normado** y sobre este se basará nuestro trabajo de aquí en adelante.

Teorema 1.3 (Métrica inducida por una norma). *Sea* $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ *entonces se define*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

entonces d *es una función métrica. Esto se llama la métrica inducida por la norma.*

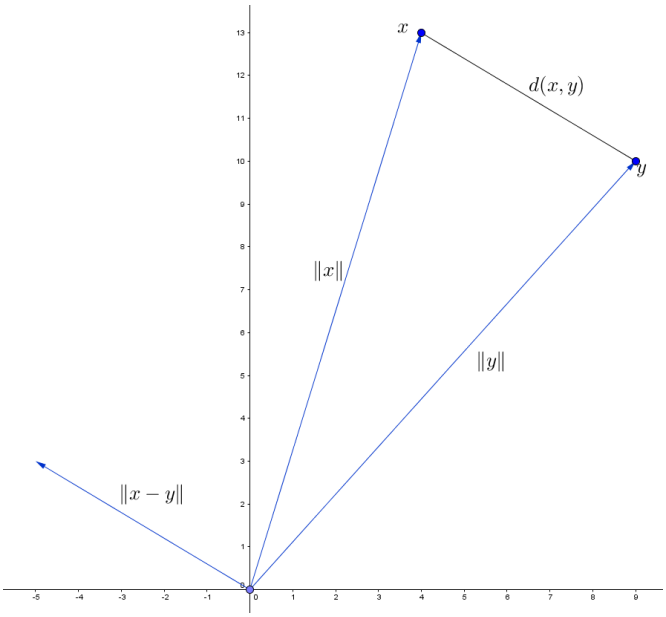


Figura 1.1: Ilustración del Teorema 1.3 para $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Notemos que el rango de la función $\|\cdot\|$ es real, además por **N1**, queda demostrado **M1**.

Para probar **M2**, supongamos

$$d(x, y) = \|x - y\| = 0$$

por **N2**, tenemos

$$x - y = 0$$

Como la doble implicación se tiene entonces **M2** esta demostrado.

Para **M3** supongamos que tenemos

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\|$$

Por **N3** tenemos

$$d(x,y) = |-1|\|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$$

La última propiedad es **N4**, para esto supongamos que $x, y, z \in \mathbb{V}$, así

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| = \|x-y+z-z\| \\ &= \|(x-z)+(z-y)\| \end{aligned}$$

Por **N4** tenemos la desigualdad

$$d(x,y) \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$$

Así como los espacios vectoriales normados siempre inducen una norma, NO necesariamente un espacio métrico induce una norma en un espacio vectorial, como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1. Consideremos la métrica en el espacio de todas las sucesiones complejas (acotadas y sin acotar), donde $x = \{\xi_j\}$ y $y = \{\eta_i\}$

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}.$$

Es claro que **N1** y **N2** se cumplen, sin embargo **N3** no, note que

$$d(\alpha x, \alpha y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\alpha\xi_j - \alpha\eta_j|}{1+|\alpha\xi_j-\alpha\eta_j|} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\alpha||\xi_j-\eta_j|}{1+|\alpha||\xi_j-\eta_j|}$$

Por otro lado

$$|\alpha| d(x,y) = |\alpha| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\alpha||\xi_j-\eta_j|}{|\alpha|+|\alpha||\xi_j-\eta_j|}.$$

Teorema 1.4. *La bola cerrada unitaria*

$$\tilde{B}(0,1) = \{x \in X | ||x|| \leq 1\},$$

en un espacio normado es convexa.

Demostración. Sea $x, y \in \tilde{B}$ dos puntos cualesquiera, entonces para cualquier $z \in M$ se tiene que

$$\begin{aligned} ||z|| &= ||\alpha x + (1-\alpha)y|| \\ &\leq ||\alpha x|| + ||(1-\alpha)y|| \\ &= \alpha||x|| + (1-\alpha)||y|| \\ &\leq \alpha + (1-\alpha) = 1 \end{aligned}$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$. ∎

El resultado anterior es muy útil en el sentido que permite conocer si un espacio métrico define una norma. Para tal efecto consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. Consideremos la métrica en $\mathbb{R}^2$

$$\phi(x) = (\sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2})^2,$$

donde $x = (\xi_1, \xi_2)$, si dibujamos la "esfera" $\phi(x) = 1$, obtenemos Fig (1.2), y es claro que cualquier segmento sobre estos puntos no conexo, por lo tanto la métrica $\phi(x)$ no es norma.

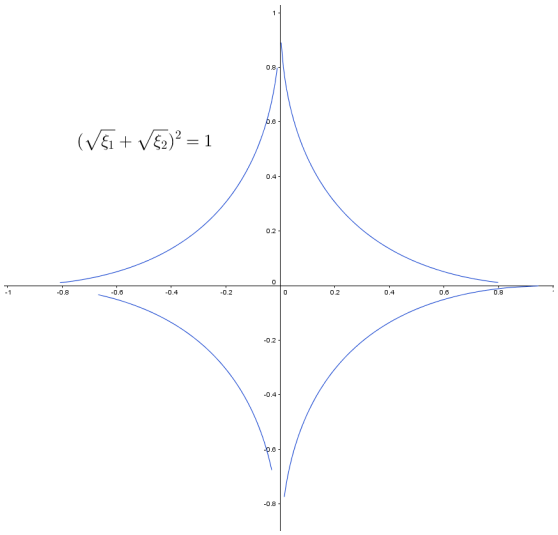


Figura 1.2: Gráfica de $\phi(x) = 1$

A continuación demostraremos un lema muy importante en un espacio normado, el cual nos permite acotar inferiormente la norma de una combinación lineal con respecto a las normas de sus escalares.

Lema 1.1 (Norma de una combinación lineal). Sea $\{x_1, \cdots, x_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio normado $\mathbb{V}$ (de cualquier dimensión). entonces existe un número $c > 0$ tal que para cada elección de $a_1, \cdots, a_n$ tenemos,

$$\|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + \cdots + |a_n|) \tag{1.1}$$

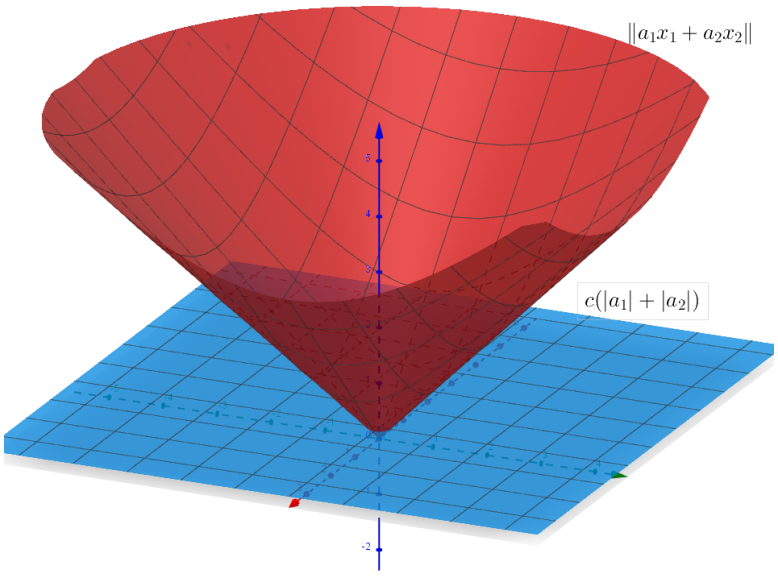


Figura 1.3: Imagen para el caso $\mathbb{R}^2$ cuando $a_1 = a_2 = 1$

Demostración. Escribiremos $s = |a_1| + \cdots + |a_n|$. Si $s = 0$, todos los $a_j = 0$, así (1.1) es valido para cualquier c. Sea $s > 0$. Entonces (1.1) es equivalente a la desigualdad la cual obtenemos de (1.1) dividiendo sobre s y escribiendo $\beta_j = a_j/s$ que es

$$\|\beta_1x_1 + \cdots + \beta_nx_n\| \geq c \tag{1.2}$$

Note que $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$ pues

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |\beta_j| &= \frac{|a_1|}{s} + \frac{|a_2|}{s} \cdots \frac{|a_n|}{s} \\ &= \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{s} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así, esto es suficiente para probar la existencia de un $c > 0$ tal que (1.2) cumple para cada $n - upla$ de escalares $\beta_1, \cdots, \beta_n$ con $\sum |\beta_j| = 1$.
Supongamos que esto es falso, entonces existe una sucesión (y_m) de vectores

$$y_m = \beta_1^m x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1 \right)$$

tal que

$$\|y_m\| \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando} \qquad n \longrightarrow \infty$$

Ahora razonemos como sigue. Si $\sum |\beta_j^{(m)}| = 1$, tenemos que $|\beta_j^{(m)}| \leq 1$. Así para cada j fijo la sucesión

$$(\beta_j^{(m)}) = (\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \cdots)$$

es acotada. Como consecuencia del teorema de Bolzano-Weierstrass, $\beta_1^{(m)}$ tiene una subsucesión convergente. Sea β_1, denota el limite de la primera subsucesión, y $(y_{1,m})$ denota la correspondiente subsucesión de (y_m). Por el mismo argumento, $(y_{1,m})$ tiene una subsucesión $(y_{2,m})$ para el cual la correspondiente subsucesión de escalares $(\beta_2^{(m)})$; sea β_2 este limite.

$y_1 =$	$\beta_1^1 x_1$	$\beta_2^1 x_2$	$\cdots$	$\beta_n^1 x_n$
$y_2 =$	$\beta_1^2 x_1$	$\beta_2^2 x_2$	$\cdots$	$\beta_n^2 x_n$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$y_m =$	$\beta_1^m x_1$	$\beta_2^m x_2$	$\cdots$	$\beta_n^2 x_n$
	$\exists(y_{1,m})$	$\exists(y_{2,m})$	$\cdots$	$\exists(y_{n,m})$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\cdots$	$\downarrow$
	β_1	β_2	$\cdots$	β_n

Continuando este razonamiento n-veces obtenemos una subsucesión $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2} \cdots)$ de (y_m) donde los términos son de la forma

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j \qquad \left(\sum |\gamma_j^{(m)}| = 1 \right)$$

con escalares $\gamma_j^{(m)}$ que satisface $\gamma_j^{(m)} \longrightarrow \beta_j$ cuando $m \longrightarrow \infty$. Así, cuando $m \longrightarrow \infty$

$$y_{n,m} \longrightarrow y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$$

donde $\sum |\beta_j| = 1$, así que no todos los β_j pueden ser 0. Como $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, tenemos así $y \neq 0$. Por otro lado, $y_{n,m} \longrightarrow y$

implica $\|y_{n,m}\| \longrightarrow \|y\|$, por la continuidad de la norma. Como $\|y_m\| \longrightarrow 0$ y $(y_{n,m})$ es una sucesión de (y_m), debemos tener $\|y_{n,m}\| \longrightarrow 0$. Así $\|y\| = 0$, por **N2** se tiene que y=0. Esto contradice el hecho de que $y \neq 0$, así el lema queda probado. ∎

Definición 1.3 (Normas equivalentes). *Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice que es equivalente a una norma $\|\cdot\|_0$ sobre X si existen números positivos a y b tal que para todo $x \in \mathbb{V}$ tenemos*

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$$

Teorema 1.5 (Normas equivalentes en una topología). *Sea $\mathbb{V}$ un espacio normado y sea $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_0$ dos normas equivalentes, entonces inducen la misma topología en $\mathbb{V}$.*

Demostración. Por definición entonces existen a y b números positivos tales que

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0 \tag{1.3}$$

para todo $x \in \mathbb{V}$. Como $\mathbb{V}$ es espacio normado, entonces induce una métrica, llamemos $d(x,y) = \|x-y\|$ y $d_0(x,y) = \|x-y\|_0$ las métricas inducidas con $x, y \in \mathbb{V}$, así de (1.3) se tiene que

$$\begin{aligned} d_0(x,y) &\leq cd(x,y) \quad \text{con } 1/a = c \\ d(x,y) &\leq bd_0(x,y) \end{aligned}$$

Para ver que dos topologias son equivalentes, se debe mirar que $f : (\mathbb{V}, d) \longrightarrow (\mathbb{V}, d_0)$ es un homeomorfismo. Tomemos a $k = \text{máx}(b,c)$ y así para todo $\epsilon > 0$ y haciendo $\delta = \frac{\epsilon}{k}$ se tiene que si

$$\begin{aligned} d(x,y) < \delta \Rightarrow d_0(x,y) &\leq cd(x,y) \\ &< c\delta \\ &< k\delta \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

De igual manera si

$$\begin{aligned} d_0(x,y) < \delta \Rightarrow d(x,y) &\leq bd_0(x,y) \\ &< b\delta \\ &< k\delta \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto las normas generan el mismo espacio topológico. ∎

Definición 1.4 (Operador lineal). *Un operador lineal T es un operador tal que*

(i) el dominio $\mathfrak{D}(T)$ de T es un espacio vectorial y el rango $\mathfrak{R}(T)$ se encuentra en un espacio vectorial con entradas al mismo campo,
(ii) para todo $x, y \in \mathfrak{D}(T)$ y un escalar α,

$$T(x+y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

Observación 1.1. Desde ahora haremos la notación $Tx = T(x)$ por simplicidad. También se debe tener en cuenta la siguiente simbología:
$\mathfrak{D}(T)$ denota el dominio de T.
$\mathfrak{R}(T)$ denota el rango de T.
$\mathcal{N}(T)$ denota el espacio nulo o núcleo de T.

Ejemplo 1.3 (Operador Integral). Un operador lineal T de $C[a,b]$ (funciones continuas en el intervalo $[a,b]$) sobre el mismo puede ser definido por

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau)d\tau$$

Note que $C[a,b]$ es un espacio vectorial y además para $x, y \in C[a,b]$ se verifica

$$T(x+y)(t) = \int_a^t (x+y)(\tau)d\tau = \int_a^t x(\tau)+y(\tau)d\tau = \int_a^t x(\tau)d\tau + \int_a^t y(\tau)d\tau = Tx(t)+Ty(t)$$

y un escalar α

$$T(\alpha x) = \int_a^t (\alpha x)(\tau)d\tau = \alpha \int_a^t x(\tau)d\tau = \alpha Tx(t)$$

Así el operador integral es un operador lineal.

Definición 1.5 (Espacio nulo). *Sea T un operador lineal, el espacio nulo de T es el conjunto de $x \in \mathfrak{D}(T)$ tal que $Tx = 0$.*

Teorema 1.6 (Rango y espacio nulo). *Sea T un operador lineal entonces*

(a) El rango $\mathfrak{R}(T)$ es un espacio vectorial.
(b) Si $dim\mathfrak{D}(T) = n < \infty$, entonces $dim\mathfrak{R} \leq n$
(c) El espacio nulo $\mathcal{N}(T)$ es un espacio vectorial.

Demostración. El item (a) y (c), la prueba es inmediata, pues basta aplicar la definición.

(b) Escojamos n+1 elementos $y_1, \cdots, y_{n+1}$ de $\mathfrak{R}(T)$ de manera arbitraria. Entonces tenemos $y_1 = Tx_1, \cdots, y_{n+1} = Tx_{n+1}$ para algunos $x_1, \cdots, x_{n+1}$ en $\mathfrak{D}(T)$. Como $\dim \mathfrak{D}(T) = n$, este conjunto $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ debe ser linealmente dependiente. Así

$$a_1 x_1 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1} = 0$$

para algunos escalares $a_1, \cdots, a_{n+1}$, no todos son cero. Como T es lineal y T0=0, aplicando T a la ecuación anterior

$$T(a_1 x_1 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1}) = 0 = a_1 y_1 + \cdots + a_{n+1} y_{n+1} = 0$$

Esto muestra que $\{y_1, \cdots, y_{n+1}\}$ es linealmente dependiente porque el conjunto de los a_j no todos son 0. Recordemos que el subconjunto de $\mathfrak{R}(T)$ fue escogido de manera arbitraria, concluimos que el subconjunto de $n+1$ o más elementos en $\mathfrak{R}(T)$ no es linealmente independiente. Por definición se tiene que $\dim \mathfrak{R}(T) = n$.

Teorema 1.7 (Operador Inverso). *Sea $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios vectoriales, ambos reales o ambos complejos. Sea $T : \mathfrak{D}(T) \longrightarrow \mathbb{W}$ un operador lineal con dominio $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathbb{V}$ y rango $\mathfrak{R}(T) \subseteq \mathbb{W}$. Entonces*

(a) La inversa $T^{-1} : \mathfrak{R}(T) \longrightarrow \mathfrak{D}(T)$ existe si y solo si

$$Tx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

(b) Si T^{-1} existe, este es un operador lineal.
(c) Si $\dim \mathfrak{D}(T) = n < \infty$ y T^{-1} existe, entonces $\dim \mathfrak{R}(T) = \dim \mathfrak{D}(T)$.

La siguiente definición nos dá una noción de acotación para un operador lineal.

Definición 1.6 (Operadores lineales acotados). *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios normados y $T : \mathfrak{D}(T) \longrightarrow \mathbb{W}$ un operador lineal, donde $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathbb{V}$. El operador T se dice acotado si existe un número real $c \geq 0$ tal que para todo $x \in \mathfrak{D}(T)$,*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|.$$

Observación 1.2. En la definición anterior por simplicidad se denotó la norma en $\mathbb{W}$ y la norma $\mathbb{V}$ con el mismo símbolo $\|\cdot\|$.

En este momento solo nos interesa encontrar el c más pequeño posible junto con los x distintos de cero de $\mathfrak{D}(T)$, pues

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c \tag{1.4}$$

Así que la respuesta a esa incógnita se encuentra en el sup de los c. Esta cantidad es denotada por $\|T\|$; así

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathfrak{D}(T)-\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{1.5}$$

$\|T\|$ es llamada la norma del operador T. Note que si $c = \|T\|$ es

$$\|Tx\| = \|T\|\|x\|. \tag{1.6}$$

Teorema 1.8 (Dimensión finita). *Si un espacio normado $\mathbb{X}$ es finito dimensional, entonces cada operador linear sobre $\mathbb{X}$ es acotado.*

Demostración. Sea $\dim \mathbb{X} = n$ y $\{e_1, \cdots, e_n\}$ una base para X. Tomemos cualquier $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$. Entonces obtenemos

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j T e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \|Te_j\| \leq \max_k \|Te_k\| \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|$$

A la última suma aplicamos el lema 1.1 con $\alpha_j = \xi_j$ y $x_j = e_j$. entonces obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \right\| = \frac{1}{c}\|x\|.$$

Juntando,

$$\|Tx\| \leq \gamma \|x\| \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\|$$

Así por la definición 1.6 vemos que T es acotada. ∎

A continuación se presentará el teorema más importante de los operadores lineales acotados.

Teorema 1.9 (Continuidad y acotación). *Sea $T : \mathfrak{D}(T) \longrightarrow \mathbb{Y}$ sea un operador lineal, donde $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathbb{X}$ y $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ son espacio normados. Entonces:*

(a) *T es continuo si y solo si T es acotado.*

(b) *Si T es continuo en un solo punto, este es continuo.*

Demostración. **(a)** Para $T = 0$ la prueba se tiene trivial. Sea $T \neq 0$ entonces $\|T\| \neq 0$. Asumamos que T es acotado y consideremos arbitrariamente un $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$. Para cualquier $\epsilon > 0$. Entonces, como T es lineal, para cada $x \in \mathfrak{D}(T)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \quad donde \quad \delta = \frac{\epsilon}{\|T\|}$$

obtenemos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\| < \|T\|\delta = \epsilon$$

Así $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$ es arbitrario, esto muestra que T es continuo.

A la inversa, asumamos que T es continua en un punto arbitrario $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| \leq \delta \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{D}(T) \text{ satisface} \quad \|Tx - Tx_0\| \leq \epsilon. \tag{1.7}$$

Ahora tomaremos cualquier $y \neq 0 \in \mathfrak{D}(T)$ y el conjunto

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y. \quad Entonces \quad x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|}y.$$

Así $\|x - x_0\| = \delta$, podemos usar (1.7). Como T es lineal, tenemos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\|$$

y (1.7) implica

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\| \leq \epsilon. \quad \text{Así} \quad \|Ty\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}\|y\|.$$

Esto puede escribirse como $\|Ty\| \leq c\|y\|$, donde $c = \epsilon/\delta$, y así mostramos que T es acotada.

(b) Continuidad de T en un punto implica que T es acotada por la segunda parte de (a), que a su vez implica continuidad en todo T por (a).

∎

Corolario 1.1 (Continuidad, espacio nulo). Sea T un operador lineal acotado. Entonces

(a) $x_n \longleftarrow x$ [donde $x_n, x \in \mathfrak{D}(T)$] implica $Tx_n \longrightarrow Tx$.

(b) El espacio nulo $\mathcal{N}(T)$ es cerrado.

Demostración. **(a)** Cuando $n \longrightarrow \infty$,

$$\|Tx_n - T_x\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\|\|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

.

(b) Para cada $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ existe una sucesión $(x_n) \in \mathcal{N}(T)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ por el Teorema 1.1. Así $Tx_n \longrightarrow Tx$ por la parte **(a)**. Se tiene que $Tx = 0$ cuando $Tx_n = 0$, así que $x \in \mathcal{N}(T)$. Como $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ es arbitrario, entonces $\mathcal{N}(T)$ es arbitrario.

∎

La siguientes definiciones van a ser de gran ayuda para el teorema de Hahn-Banach.

Definición 1.7 (Igualdad, restricción y extensión de operadores). *Dos operadores T_1 y T_2 son definidos **iguales**, y escribimos*

$$T_1 = T_2$$

si estos tienen el mismo dominio $\mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{D}(T_2)$ y si $T_1x = T_2x$ para todo $x \in \mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{D}(T_2)$.

*La **restricción** de un operador $T : \mathfrak{D}(T) \longrightarrow \mathbb{Y}$ a un subconjunto $B \subseteq \mathfrak{D}(T)$ es denotado por*

$$T|_B$$

y es el operador definido por

$$T|_B : B \longrightarrow \mathbb{Y}, \qquad T|_B = Tx \text{ para todo } x \in B.$$

*Una **extensión** de T a un conjunto $M \supseteq \mathfrak{D}(T)$ es un operador*

$$\tilde{T} : M \longrightarrow \mathbb{Y} \quad \text{tal que} \quad \tilde{T}|_{\mathfrak{D}(T)} = T,$$

que es, $\tilde{T}x = Tx$ para todo $x \in \mathfrak{D}(T)$.[Así T es una restricción de $\tilde{T}$ en $\mathfrak{D}(T)$].

A continuación se define el funcional lineal que es uno de los objetos matemáticos que requerimos para nuestro estudio.

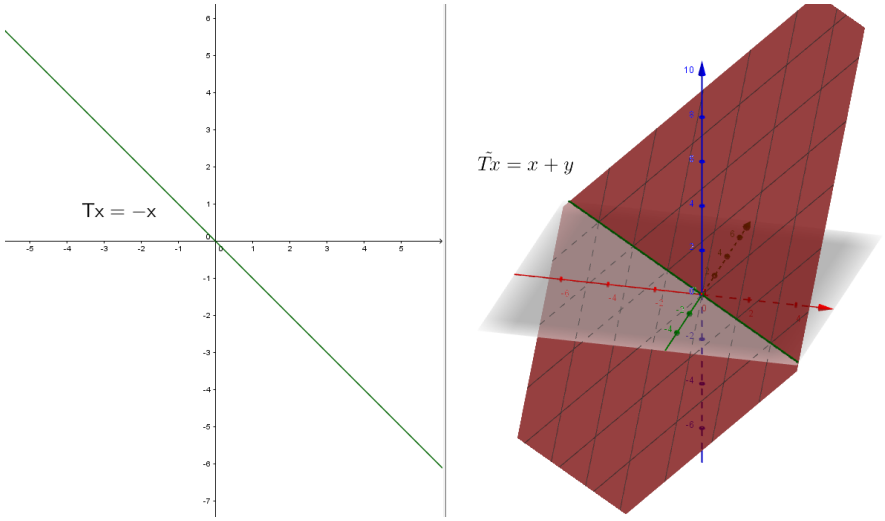


Figura 1.4: A la izquierda tenemos el operador $Tx = -x$ con $\mathfrak{D}(T) = \mathbb{R}$, a la derecha tenemos una extensión $\tilde{T}x = x + y$ con $\mathfrak{D}(\tilde{T}) = \mathbb{R}^2$.

Definición 1.8 (Funcional lineal). *Un **funcional lineal** f es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y rango en el campo de escalares K de $\mathbb{V}$; así.*

$$f : \mathfrak{D}(f) \longrightarrow K,$$

donde $K = \mathbb{R}$ si $\mathbb{V}$ es real y $K = \mathbb{C}$ si $\mathbb{V}$ es complejo.

Ejemplo 1.4 (Producto punto). La familia del producto punto con un factor fijo define un funcional $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de

$$|f(x)| = |x \cdot a| = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3,$$

donde $a = (a_j) \in \mathbb{R}^3$ es fijo.
f es lineal. Miremos ahora que f es acotado, en efecto,

$$|f(x)| = |x \cdot a| \leq \|x\|\|a\|,$$

tal que $\|f\| \leq \|a\|$ siguiendo (1.5) si tomamos el supremo sobre todos los x de norma 1. Por otro lado, si hacemos x=a y usando (1.6) obtenemos

$$\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

Así la norma de f es $\|f\| = \|a\|$.

Definición 1.9 (Espacio dual y doble dual). *Es de vital importancia que el conjunto de todos los funcionales lineales definido en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ puede en si mismo ser transformado en un espacio vectorial. Este espacio es denotado por $\mathbb{V}^*$ y es llamado el* ***espacio dual algebraico*** *de $\mathbb{V}$.*

Podemos ir más allá y considerar el dual algebraico $(\mathbb{V}^*)^*$ de $\mathbb{V}^*$, cuyos elementos son los funcionales lineales definidos sobre $\mathbb{V}$. Nosotros denotaremos a $(\mathbb{V}^*)^*$ por $\mathbb{V}^{**}$ y lo llamaremos ***el segundo espacio dual algebraico*** *de $\mathbb{V}$.*

Observación 1.3. Podemos obtener un $g \in \mathbb{V}^{**}$, el cual es un funcional lineal definido sobre $\mathbb{V}^*$,escogiendo un $x \in \mathbb{V}$ fijo y obtenemos

$$g(f) = g_x(f) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{V} \text{ fijo, } f \in \mathbb{V}^* \text{ variable.})$$

Definición 1.10 (Mapeo canónico). *Para cada $x \in \mathbb{V}$ existe una correspondencia $g_x \in \mathbb{V}^{**}$. Esto define un mapeo*

$$\begin{aligned} C : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{V}^{**} \\ x &\longmapsto g_x \end{aligned}$$

C es llamado el ***mapeo canónico*** *de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{V}^{**}$.*

Observación 1.4. Es fácil probar que C es lineal, entonces C es también llamado el embebimiento canónico de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{V}^{**}$.

Definición 1.11 (Algebraicamente reflexivo). *Si C es sobreyectivo (así biyectivo), tal que $\mathfrak{R}(C) = \mathbb{V}^{**}$, entonces $\mathbb{V}$ se dice que es* ***algebraicamente reflexivo****.*

Teorema 1.10 (Espacios Duales). *El espacio dual $\mathbb{V}^*$ de un espacio $\mathbb{V}$ es un espacio de Banach. (Donde $\mathbb{V}$ no necesariamente lo es).*

Ejemplo 1.5 (El espacio R^n). El espacio dual de R^n es R^n.

Ejemplo 1.6 (El espacio l^1). El espacio dual de l^1 es l^∞.

Ejemplo 1.7 (El espacio l^p). EL espacio dual de l^p es l^q; donde, $1 < p < \infty$ y q es el conjugado de p, que es, $1/p + 1/q = 1$.

En el Apéndice A se hará una demostración de los ejemplos 1.5 y 1.6.

A continuación daremos una definición que nos ayudara a ver la noción de ángulo entre espacios vectoriales, normalmente del álgebra lineal se tiene estos conceptos, pero en este caso se generaliza para espacios vectoriales cualesquiera.

Definición 1.12 (Espacio con producto interno. Espacio de Hilbert). *Un espacio con producto interno (o espacio Pre-Hilbert) es un espacio vectorial $\mathbb{V}$ con un producto interno definido sobre $\mathbb{V}$. Aquí un* ***producto interno*** *sobre $\mathbb{V}$ es*

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\mapsto K \\ \langle x, y \rangle &\mapsto \alpha \end{aligned}$$

donde $\langle x, y \rangle$ se llamara el producto interno de x e y, tal que para cualesquiera vectores x,y,z y escalares α tenemos

$$\begin{aligned} &\textbf{(PI1)} && \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ &\textbf{(PI2)} && \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \\ &\textbf{(PI3)} && \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \\ &\textbf{(PI4)} && \langle x, x \rangle \geq 0 \\ & && \langle x, x \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

Un Espacio de Hilbert es un espacio con producto interno completo.

A modo de comentario se dirá que para un espacio con producto interno $\mathbb{X}$ se define la norma

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

y una métrica sobre $\mathbb{X}$ dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

Así un espacio con producto interno es un espacio normado, y un espacio de Hilbert es un espacio de Banach.

Teorema 1.11 (Ley del paralelogramo). *Todo espacio con $\mathbb{X}$ con producto interno cumple la ley del paralelogramo, es decir para $x, y \in \mathbb{X}$ se tiene*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Demostración. Por la aclaración anterior y las propiedades de producto interno tenemos que

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2,$$

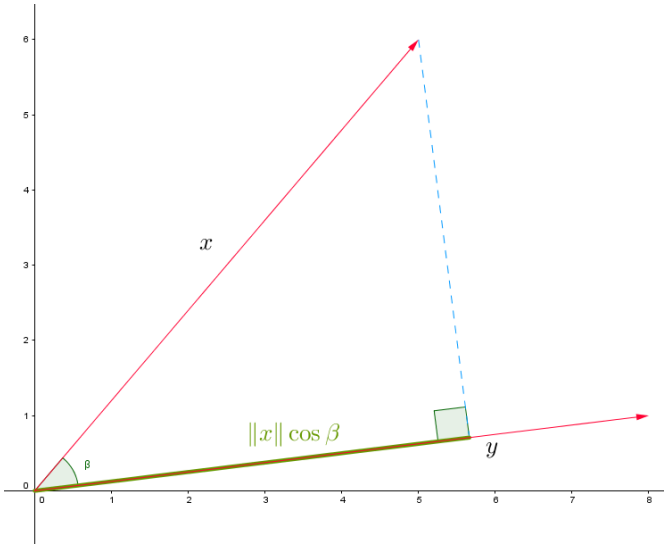


Figura 1.5: Ejemplo del producto punto en $\mathbb{R}^2$. la expresión $\|x\| \cos \beta$ se llama la proyección de x sobre y

de manera similar

$$\|x - y\| = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2.$$

Sumando los dos resultados tendremos

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

∎

Observación 1.5. No todo espacio normado es espacio de producto interno, el teorema anterior nos da un criterio para saberlo.

Ejemplo 1.8. El espacio $C[a, b]$ de todas las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ con la norma definida

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

es un espacio de Banach, pero no es un espacio de Hilbert. En efecto podemos ver que esta norma no cumple con la ley del paralelogramo, Teorema 1.11. Si tomamos $x(t) = 1$ y $y(t) = (t - a)/(b - a)$, tendremos que $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ y

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t - a}{b - a},$$

$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{t - a}{b - a}.$$

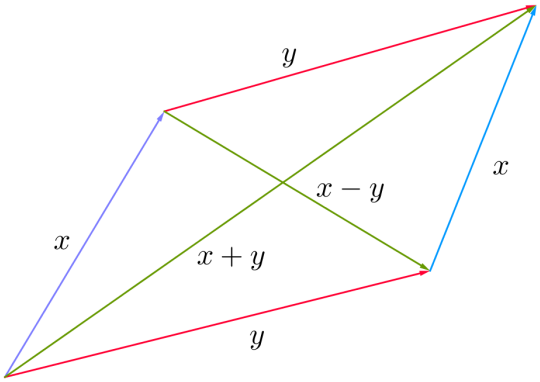


Figura 1.6: Paralelogramo con lados x y y en el plano.

Así $\|x+y\| = 2, \|x-y\| = 1$ y

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5 \quad \text{pero} \quad 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4.$$

Esto completa la prueba.

Definición 1.13 (Ortogonalidad). *Un elemento x de un espacio con producto interno $\mathbb{X}$ se dice que es ortogonal a un elemento $y \in \mathbb{X}$ si*

$$\langle x, y\rangle = 0$$

También decimos que x y y son ortogonales, y escribimos $x \perp y$. Similarmente $A, B \subseteq \mathbb{X}$ escribimos $x \perp A$ si $x \perp a$ para todo $a \in A$, y $A \perp B$ si $a \perp b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$.

Corolario 1.2 (Teorema de Pitágoras). Si $x \perp y$ en un espacio con producto interno $\mathbb{X}$ se tiene

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Lema 1.2 (Desigualdad de Schwarz). Un producto interno y la correspondiente norma satisfacen la desigualdad de Schwarz esto es

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

donde la igualdad se tiene si y sólo si $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependientes.

Demostración. Si $y = 0$, entonces la desigualdad se cumple, pues $\langle x, 0\rangle = 0$. Sea $y \neq 0$. Para cada escalar α tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \alpha y\|^2 &= \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \bar{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha[\langle y, x\rangle - \bar{\alpha}\langle y, y\rangle]. \end{aligned}$$

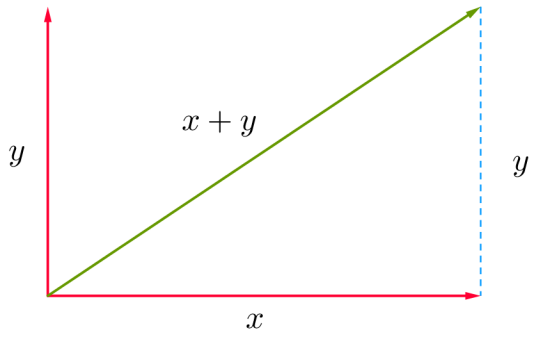


Figura 1.7: Ilustración de teorema de Pitágoras en el plano

Vemos que la expresión en corchetes cuadrado $[\cdots]$ es cero si escojemos $\bar{\alpha} = \langle y, x\rangle / \langle y, y\rangle$. Reescribiendo la desigualdad

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2};$$

aquí usamos que $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$. Ahora si multiplicamos por $\|y\|^2$, tendemos

$$0 \leq \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2$$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

La igualdad se deriva si y sólo si $y = 0$ o $\|x - \alpha y\|^2 = 0$, así $x - \alpha y = 0$, por lo tanto $x = \alpha y$, lo cual muestra la dependencia lineal. ∎

Teorema 1.12 (La minimización del vector). *Sea $\mathbb{X}$ un espacio con producto interno y $M \neq \emptyset$ un subconjunto convexo el cual es completo (en la métrica inducida por el producto interno). Entonces para cada $x \in \mathbb{X}$ dado, existe un único $y \in M$ tal que*

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| = \|x - y\|$$

Demostración. **(a)** Existencia: Por la definición de ínfimo, existe una sucesión $(y_n) \in M$ tal que

$$\delta_n \longrightarrow \delta \quad donde \quad \delta_n = \|x - y_n\|. \tag{1.8}$$

Mostraremos que (y_n) es de Cauchy. Primero escribiremos $y_n - x = v_n$, así tendremos que $\|v_n\| = \delta_n$

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \geq 2\delta,$$

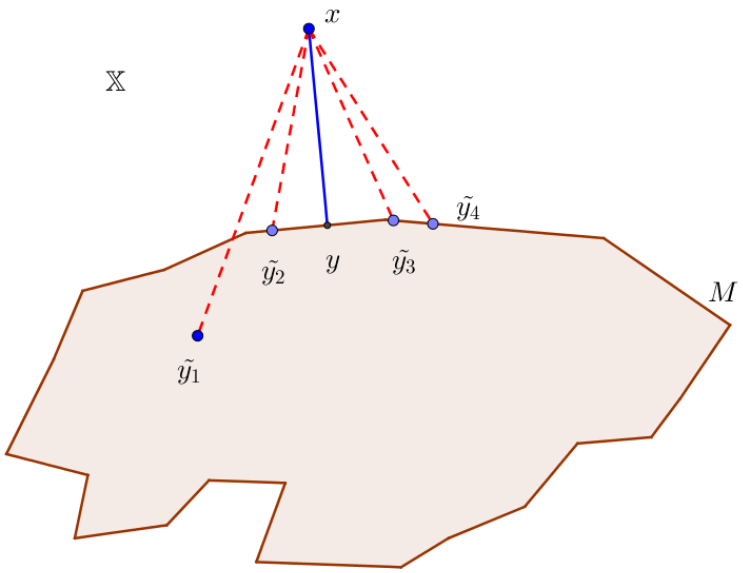


Figura 1.8: Ilustración en $\mathbb{R}^2$ del Teorema 1.12

porque M es convexo, se tiene que $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in \boldsymbol{M}$. Además, tenemos

$$v_n - v_m = y_n - x - y_m + x = y_n - y_m.$$

Así por la identidad del paralelogramo, Teorema 1.11

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 &= -\|v_n + v_m\| + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2) \\ &\leq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2), \end{aligned}$$

así por (1.8) se tiene que si $n, m \to \infty$ entonces $\delta_n, \delta_m \to \delta$ y $\|y_n - y_m\| \to 0$ esto implica que (y_n) es de Cauchy. Como $\boldsymbol{M}$ es completo, (y_n) converge, digamos que $y_n \longrightarrow y$. Como $y \in \boldsymbol{M}$, tenemos que $\|x - y\| \geq \delta$. También por (1.8),

$$\|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \longrightarrow \delta.$$

Esto muestra que $\|x - y\| = \delta$

(b) Unicidad. Asumamos que $y, y_0 \in \boldsymbol{M}$ y ambos satisfacen

$$\|y - x\| = \delta \quad y \quad \|y_0 - x\| = \delta.$$

Por la identidad del paralelogramo (Teorema 1.11)

$$\begin{aligned}\|y-y_0\|^2 &= \|(y-x)-(y_0-x)\|^2\\ &= 2\|y-x\|^2+2\|y_0-x\|^2-\|(y-x)+(y_0-x)\|^2\\ &= 2\delta^2+2\delta^2-2^2\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|^2.\end{aligned}$$

En la derecha, $\frac{1}{2}(y+y_0)\in M$, así que

$$\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|\geq\delta.$$

Esto implica, que el lado derecho sea menor o igual a $2\delta^2+2\delta^2-4\delta^2=0$. Así que por **N1** de tiene que $\|y-y_0\|\leq 0$ y por el argumento anterior se tiene que $\|y-y_0\|\geq 0$, por lo tanto $\|y-y_0\|=0$ y por **N2** se tiene que $y=y_0$.

∎

Observación 1.6. El elemento y anterior es llamado la proyección de x sobre M y se denotará

$$y=P_M x$$

Lema 1.3 (Ortogonalidad). En el Teorema 1.12, sea M un subespacio completo Y y $x\in\mathbb{X}$ fijo. Entonces z=x-y es ortogonal a Y.

Demostración. Razonemos por contradicción, y supongamos que $z\perp Y$ es falso, así que para cualquier $y_1\in Y$ tal que

$$\langle z,y_1\rangle=\beta\neq 0 \tag{1.9}$$

Claramente, $y_1\neq 0$ de otra manera $\langle z,y_1\rangle=0$. Además, para cualquier escalar α,

$$\begin{aligned}\|z-\alpha y_1\|^2 &= \langle z-\alpha y_1, z-\alpha y_1\rangle\\ &= \langle z,z\rangle-\bar{\alpha}\langle z,y_1\rangle-\alpha[\langle y_1,z\rangle-\bar{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle]\\ &= \langle z,z\rangle-\bar{\alpha}\beta-\alpha[\bar{\beta}-\bar{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle].\end{aligned}$$

La expresión en corchetes cuadrado $[\cdots]$ es cero si escogemos

$$\bar{\alpha}=\frac{\bar{\beta}}{\langle y_1,y_1\rangle}.$$

Por el Teorema 1.12 tenemos $\|z\|=\|x-y\|=\delta$, cambiando esto en nuestra ecuación

$$\|z-\alpha y_1\|^2=\|z\|^2-\beta\frac{\bar{\beta}}{\langle y_1,y_1\rangle}=\|z\|^2-\frac{|\beta|^2}{\langle y_1,y_1\rangle}=\delta^2-\frac{|\beta|^2}{\langle y_1,y_1\rangle}<\delta^2.$$

Pero esto es imposible porque tenemos

$$z - \alpha y_1 = (x - y) - \alpha y_1 = x - y_2 \quad donde \quad y_2 = y + \alpha y_1 \in Y$$

así $\|z - \alpha y_1\| \geq \delta$ por la definición de δ. Así (1.9) no se tiene, y el lema queda probado. ∎

1.2 El Teorema de Representación de Riesz

Con todo lo anterior estamos en condiciones de probar el Teorema de Representación de Riesz para espacio de Hilbert, este teorema es esencial para las demostraciones del teorema central el **Teorema de Lax-Milgram**, sin embargo, debemos definir y demostrar un teorema pequeño, y posterior al Teorema de Representación de Riesz, se tendrá un resultado importe para los espacios de Hilbert.

Definición 1.14 (Suma directa). *Un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice que tiene es **suma directa** de dos subespacios Y y Z de $\mathbb{V}$, y se escribe*

$$\mathbb{V} = Y \oplus Z,$$

si cada $x \in \mathbb{V}$ tiene una representación única

$$x = y + z \quad con\ y \in Y, z \in Z$$

Entonces Z es llamado un complemento algebraico de Y en $\mathbb{V}$ y viceversa, y Y, Z es llamado el par complementario de subespacios en $\mathbb{V}$.

En el caso de un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, el interés concierne a las representaciones de $\mathbb{H}$ como una suma directa de un subespacio cerrado Y y este es el **complemento ortogonal**

$$Y^{\perp} = \{z \in \mathbb{H} | z \perp Y\},$$

El cual es el conjunto de todos los vectores ortogonales a Y.

Teorema 1.13 (Teorema de la suma directa). *Sea Y cualquier subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Entonces*

$$\mathbb{H} = Y \oplus Z$$

con $Z = Y^{\perp}$.

Demostración. Como $\mathbb{H}$ es completo y Y es cerrado, Y es completo por el Teorema 1.2, además Y es convexo, el Teorema 1.12 y el Lema 1.3 implican que para cada $x \in \mathbb{H}$ existe un $y \in Y$ tal que

$$x = y + z \tag{1.10}$$

donde $z \in Z = Y^{\perp}$. Para probar la unicidad, asumamos que

$$x = y + z = y_1 + z_1$$

donde $y, y_1 \in Y$ y $z, z_1 \in Z$. Entonces $y - y_1 = z_1 - z$. Como $y - y_1 \in$ y $z_1 - z \in Z = Y^{\perp}$. vemos que $y - y_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$. Esto implica que $y = y_1$. Así también $z = z_1$. ∎

y en (1.10) es llamado la **proyección ortogonal** de x sobre Y.

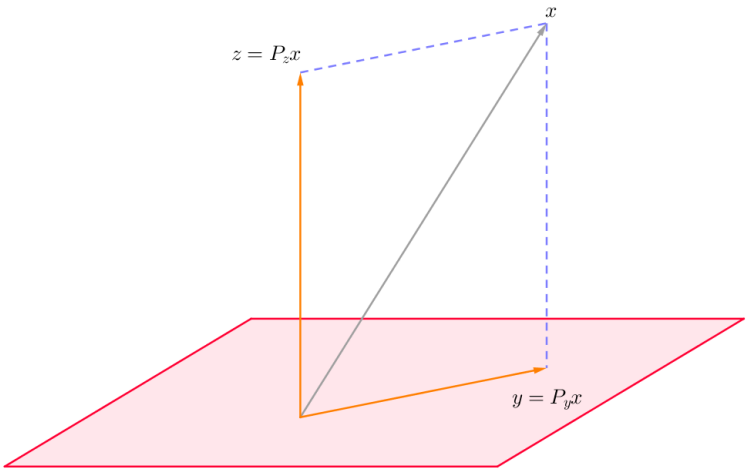


Figura 1.9: Ejemplo del Teorema 1.13 en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 1.9. Tomemos $\mathbb{H} = \mathbb{R}^2$ y una proyección de un punto $x = (\xi_1, \xi_2)$ sobre el eje ξ_1, que a su vez desempeña e papel de Y; la proyección es $y = (\xi_1, 0)$. Note que $Z = Y^{\perp}$ proyecta sobre el eje ξ_2, la proyección es $z = (0, xi_2)$, y además

$$x = y + z.$$

Teorema 1.14 (Teorema de Representación de Riesz para Funcionales Sobre Espacio de Hilbert). *Cada funcional lineal acotado f sobre un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ puede ser representado en términos de un producto interno, más precisamente*

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \tag{1.11}$$

donde z depende de f, se determina de manera única por f y tiene norma

$$\|z\| = \|f\|. \tag{1.12}$$

Demostración. La demostración de este teorema se hará en 3 partes

(a) f tiene una representación única (1.11),
(b) z en 1.11 es único,
(c) la formula (1.12) se cumple.

(a) Si $f = 0$, entonces $z = 0$, así tenemos que

$$Ox = \langle x, 0\rangle = 0$$

$$\|O\| = \|z\| = 0$$

se cumple (1.11) y (1.12). Supongamos que $f \neq 0$. Una motivación a la idea de esta prueba es preguntarse que propiedades necesita Z si existe una representación como la (1.11). Primero notemos que $z \neq 0$ porque de lo contrario caeríamos en el caso anterior con $f = 0$. Segundo, si $\langle x, z\rangle = 0$ para todo x, tendríamos que $f(x) = 0$, en otras palabras seria el espacio nulo $\mathcal{N}(f)$ de f. Así $z \perp \mathcal{N}(f)$. Y esta sugiere considerar $\mathcal{N}(f)$ y su complemento ortogonal $\mathcal{N}(f)^{\perp}$.
$\mathcal{N}(f)$ es un espacio vectorial (Teorema 1.6) y es cerrado (Corolario 1.1). Además como $f \neq 0$, esto implica que existe $x \in \mathbb{H}$, tal que $f(x) \neq 0$, así $\mathcal{N}(f) \neq \mathbb{H}$, y por el Teorema 1.13 se concluye que $\mathcal{N}(f) \neq \{0\}$. Así $\mathcal{N}(f)^{\perp}$ contiene un $z_0 \neq 0$ y formaremos el conjunto

$$v = \{v_0 \in \mathbb{H} | v_0 = f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}, x \in \mathbb{H}\}$$

Aplicando f a v_0, tenemos

$$\begin{aligned} f(v_0) &= f(f(x)z_0 - f(z_0)x) \\ &= f(f(x)z_0) - f(f(z_0)x) \\ &= f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0 \end{aligned}$$

Esto muestra que $v_0 \in \mathcal{N}(f)$, como $z_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \langle v_0, z_0\rangle &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0\rangle \\ &= \langle f(x)z_0, z_0\rangle - \langle f(z_0)x, z_0\rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0\rangle - f(z_0)\langle x, z_0\rangle \\ &= f(x)\|z_0\|^2 - f(z_0)\langle x, z_0\rangle \end{aligned}$$

Note que $\|z_0\|^2 \neq 0$, por lo tanto

$$f(x)\|z_0\|^2 = f(z_0)\langle x, z_0\rangle$$

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}\langle x, z_0\rangle$$

$$f(x) = \left\langle x, \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0 \right\rangle$$

Por lo tanto si hacemos $z = \dfrac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0$, entonces

$$f(x) = \langle x, z\rangle$$

Y como la escogencia del x fue arbitraria, entonces 1.11 queda probado.

(b) Probemos que z es único. Supongamos que para todo $x \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle x, z_1\rangle = \langle x, z_2\rangle \\ &= \langle x, z_1\rangle - \langle x, z_2\rangle = 0 \\ &= \langle x, z_1 - z_2\rangle \end{aligned}$$

Escogiendo en particular $x = z_1 - z_2$, se tiene

$$\langle z_1 - z_2, z_1 - z_2\rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0.$$

Así $z_1 - z_2 = 0$, por lo tanto $z_1 = z_2$

(c) Finalmente probemos (1.12). Sea $f \neq 0$. Entonces $z \neq 0$. Por (1.11) con $x = z$ y por ser f acotado se tiene

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = f(z) \leq \|f\|\|z\|,$$

como $\|z\| \neq 0$, entonces dividiendo por $\|z\|$

$$\|f\| \geq \|z\|.$$

Por otro lado de (1.11) y la desigualdad de Schwarz (Lema 1.2) se tiene

$$|f(x)| = |\langle x, z\rangle| \leq \|x\|\|z\|$$

Aplicando el supremo en la circunferencia de radio 1 y centro en 0,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z\rangle| \leq \|z\|$$

Así $\|f\| = \|z\|$.

Ejemplo 1.10. Cualquier funcional lineal acotado f sobre $\mathbb{R}^3$ puede ser representado por un producto punto.

En general sabemos que todo funcional en $\mathbb{R}^3$ es acotado, sea $x = (\eta_1, \eta_2\eta_3)$y por le Teorema de representación de Riesz (Teorema 1.14), existe un $z = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ que depende de f tal que

$$f(x) = \langle x, z\rangle = x \cdot z = \eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2 + \eta_3\xi_3$$

Ejemplo 1.11. Del ejemplo anterior podemos tomar un caso particular, y mirar de manera explicita como el Teorema de Representación de Riesz, también nos da las pautas para encontrar el z que asegura que existe.
Tomemos el funcional en $\mathbb{R}^3$, $f(x) = 4\eta_1 - \eta_3$. Encontremos un elemento cualquiera del $\mathcal{N}(f)$, es fácil observar que $(1, 0, 4) \in \mathcal{N}(f)$, encontremos el $z_0 \in \mathcal{N}^\perp$.

$$(1, 0, 4) \cdots (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 + 4\xi_3 = 0$$

$$\xi_1 = -4\xi_3$$

así $z_0 = (-4\xi_3, 0, \xi_3)$ donde $\xi_3 \in \mathbb{R}$, el teorema nos dice que

$$z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0$$

así

$$z = \frac{\overline{f(-4\xi_3, 0, \xi_3)}}{17\xi_3^2}(4\xi_3, 0, \xi_3) = \frac{-17\xi_3}{17\xi_3^2}(-4\xi_3, 0, \xi_3) = \frac{-1}{\xi_3}(-4\xi_3, 0, \xi_3) = (4, 0, -1)$$

y finalmente por el ejercicio anterior

$$f(x) = \langle x, z\rangle = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \cdot (4, 0, -1) = 4\eta_1 - \eta_3$$

Dado que la versión anterior del Teorema de Representación de Riesz tiene algunas condiciones restrictivas donde la más exigente es que se tenga un producto interno. Sin embargo la anterior tiene una implicación importante para los espacio de Hilbert y que mencionaremos a continuación.

Teorema 1.15 (Espacios de Hilbert). *Cada espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ es reflexivo.*

2 El Teorema de Lax-Milgram

El Teorema de Lax-Milgram fue presentado por primera vez en 1954, en una recopilación por la Universidad de Princestone llamada "Parabolic Equation". En esta recopilación se presento a modo de Lema, y se aceptó así, pero la importancia de su uso y las siguientes generalizaciones terminaron dándole el nombre de Teorema.

El Teorema de Lax-Milgram es uno de los tantos teoremas de representación que existen, lo interesante de este teorema es que toma un funcional de dos variables, sesquilineal, acotada, coerciva y lo representa en un funcional lineal acotado. Por eso es natural pensar en el uso del Teorema de representación de Riesz. Como se mencionó antes también vamos a hacer una demostración vía el Teorema de Hahn-Banach y el Teorema del Punto fijo de Banach extraída de [1] y [3], esto se puede porque el teorema de Lax-Milgram esta fuertemente relacionado con los espacios duales y la convexidad de estos.

2.1 El Teorema

Primero necesitamos hacer unas definiciones previas a la demostración del teorema.

Definición 2.1 (Formas Sesquilineales). *Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ sean espacios vectoriales sobre el mismo campo $K(=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$. Entonces una* ***forma (o funcional) sesquilineal*** *B sobre $\mathbb{V}\times\mathbb{W}$ es un mapeo*

$$B : \mathbb{V}\times\mathbb{W} \to K$$

tal que para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{V}$ y $y_1, y_2 \in \mathbb{W}$ y todos los escalares α, β,

$$\begin{aligned}
&\textbf{(a)} \quad B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)\\
&\textbf{(b)} \quad B(x_1, y_1 + y_2) = B(x_1, y_1) + B(x_1, y_2)\\
&\textbf{(c)} \quad B(\alpha x_1, y_1) = \alpha B(x_1, y_1)\\
&\textbf{(d)} \quad B(x_1, \beta y_1) = \bar{\beta} B(x_1, y_1)
\end{aligned}$$

*Así B es lineal en el primer argumento y conjugado lineal en solo el segundo. Si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son reales ($K = \mathbb{R}$), entonces **(d)** es simplemente*

$$B(x, \beta y) = \beta B(x, y)$$

*y B es llamada **bilineal** pues es lineal para ambos argumentos.*
Además si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son espacios normados y existe un número real c tal que para todo x, y

$$|B(x, y)| \leq c\|x\|\|y\|,$$

entonces B se dice que es acotado, y el número

$$\|B\| = \sup_{\substack{x \in X - \{0\} \\ y \in Y - \{0\}}} \frac{|B(x, y)|}{\|x\|\|y\|} = \sup_{\substack{\|x\| = 1 \\ \|y\| = 1}} |B(x, y)|$$

*es llamada la **norma** de B.*

Ejemplo 2.1. Sea $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espacio de Hilbert y $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ sea un operador lineal acotado, tomemos a $x \in \mathcal{H}_1$ e $y \in \mathcal{H}_2$, ahora denotemos a B como

$$\begin{aligned}
B : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 &\to \mathbb{C}\\
(x, y) &\to B(x, y) = \langle Tx, y \rangle
\end{aligned}$$

con $\langle , \rangle$ el producto interno en H_2, entonces para $x, x_1, x_2 \in H_1$ e y, y_1, y_2

$$\begin{aligned}
B(x_1 + x_2, y) &= \langle T(x_1 + x_2), y \rangle\\
&= \langle Tx_1 + Tx_2, y \rangle\\
&= \langle Tx_1, y \rangle + \langle Tx_2, y \rangle\\
&= B(x_1, y) + B(x_2, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(x, y_1 + y_2) &= \langle Tx, y_1 + y_2 \rangle\\
&= \langle Tx, y_1 \rangle + \langle Tx, y_2 \rangle\\
&= B(x, y_1) + B(x, y_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\alpha x, y) &= \langle T(\alpha x), y\rangle \\ &= \langle \alpha T x, y\rangle \\ &= \alpha B(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x, \beta y) &= \langle Tx, \beta y\rangle \\ &= \overline{\beta}\langle Tx, y\rangle \\ &= \overline{\beta} B(x, y) \end{aligned}$$

Ahora miremos la acotación

$$|B(x, y)| = |\langle Tx, y\rangle|$$

por la desigualdad de Schwarz (Lema 1.2), se tiene que

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \|Tx\|\|y\|$$

Como T es acotada, existe un $c \in \mathbb{R}$

$$\|B(x, y)\| \leq c\|x\|\|y\|$$

Así h es un funcional sesquilineal acotado.

Ejemplo 2.2. Definamos a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ espacios de Banach, tomemos a $x \in \mathcal{B}_1$ e $y \in \mathcal{B}_2$

$$\begin{aligned} B : \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to B(x, y) = \|x * y\| \end{aligned}$$

es claro que para $x_1, x_2 \in B_1$ e $y \in B_2$

$$\begin{aligned} B(x_1 + x_2, y) &= \|(x_1 + x_2)y\| \\ &= \|x_1 y + x_2 y\| \\ &\leq \|x_1 y\| + \|x_2 y\| \\ &= B(x_1, y) + B(x_2, y) \end{aligned}$$

Por lo tanto B no es sesquilineal.

Definición 2.2 (Forma Coerciva). *Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K} = (\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y $B(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ una forma sesquilineal. Se dice que B es **fuertemente coerciva** si existe una constante $\delta > 0$ tal que*

$$B(x, x) \geq \delta\|x\|^2.$$

Observación 2.1. Una propiedad de la forma sesquilineal más débil que ser coerciva fuerte es la positividad, lo que es

$$B(x, x) \geq 0.$$

Ejemplo 2.3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, sea $\langle , \rangle$ el producto interno en h es una forma sesquilineal entonces para $x \in \mathcal{H}$, se tiene

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

así que para todo $0 < \delta \leq 1$ se tiene que

$$\langle x, x \rangle \geq \delta \|x\|^2$$

Así el producto interno en un espacio de Hilbert es fuertemente coercivo.

Ejemplo 2.4. Tomemos la forma bilineal de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida $B(x, y) = x * 3y$, esta forma es coerciva, pues

$$B(x, x) = 3x^2 \geq \delta |x|^2 = \delta x^2$$

para $\delta \in (0, 3]$.

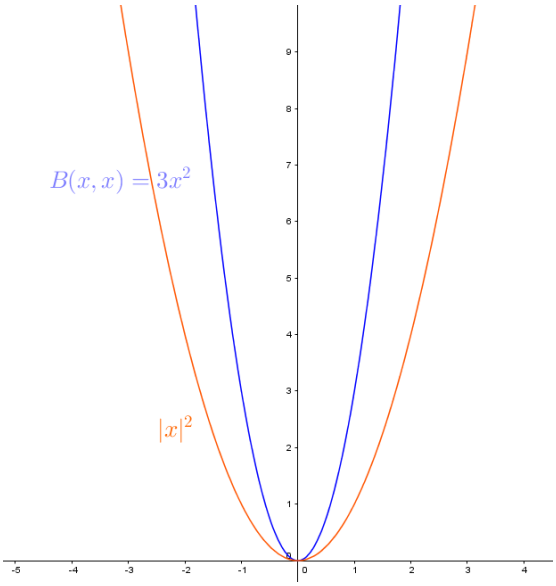


Figura 2.1: Imagen del ejemplo 2.4

Teorema 2.1 (Teorema de Lax-Milgram). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, y*

$$B(\cdot,\cdot) : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{K} = (\mathbb{R},\mathbb{C})$$

una función de dos vectores con las siguientes propiedades:

(1) $B(x,y)$ es un funcional sesquilineal.
(2) B es acotada, es decir existe una constante c tal que para todo x y y en $\mathcal{H}$

$$|B(x,y)| \leq c\|x\|\|y\|. \tag{2.1}$$

(3) B es fuertemente coerciva, es decir existe una contante positiva δ tal que

$$B(x,x) \geq \delta\|x\|^2 \tag{2.2}$$

Para todo $x \in \mathcal{H}$.
Entonces para cada funcional lineal acotado F en $\mathcal{H}^*$, existe un único vector $y_0 \in \mathcal{H}$ que depende de F y este último esta representado por

$$F(x) = B(x,y_0). \tag{2.3}$$

Demostración. La demostración constará de 4 pasos esenciales

(a) Construir un Operador lineal acotado.
(b) Ver que el subespacio $\mathfrak{R}(T)$ es cerrado.
(c) $\mathfrak{R}(T) = \mathcal{H}$
(d) Probaremos (2.3)

(a) Tomemos el funcional $B(x,y)$ y para un y_0 fijo notemos que

$$F_{y_0}(x) = B(x,y_0)$$

Miremos que $F_{y_0}(x)$ es lineal. En efecto por (1) vemos que para $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ se verifica

$$F_{y_0}(\alpha x_1+\beta x_2) = B(\alpha x_1+\beta x_2, y_0) = \alpha B(x_1,y_0)+\beta B(x_2,y_0) = \alpha F_{y_0}(x_1)+\beta F_{y_0}(x_2),$$

además por (2.1) se verifica que

$$\|F_{y_0}\| = \|B(x,y_0)\| \leq c\|x\|\|y_0\| = d\|x\|$$

con $d = c\|y_0\|$. Así F_{y_0} es un funcional lineal acotado. Ahora aplicando el Teorema de Representación de Riesz (1.14), decimos que existe un único $z \in \mathcal{H}$ que depende de F_{y0} tal que

$$F_{y_0}(x) = B(x, y_0) = \langle x, z_F \rangle \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Como la elección de z_F depende del funcional F_{y_0}, y cada funcional F_{y_0} depende de la escogencia del y_0 entonces podemos definir el siguiente funcional

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ y & \to & Ty = z_F \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} & \to & \mathbb{K} \\ (x, y) & \to & B(x, y) = \langle x, Ty \rangle \end{array}$$

Este operador es lineal y acotado, en efecto para $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle x, T(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle &= B(x, \alpha y_1 + \beta y_2) \\ &= \bar{\alpha} B(x, y_1) + \bar{\beta} B(x, y_2) \\ &= \bar{\alpha} \langle x, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle x, y_2 \rangle \\ &= \langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\ &= \langle x, \alpha T y_1 + \beta T y_2 \rangle \end{aligned}$$

Por (2.1) se tiene

$$\begin{aligned} \|Ty\|^2 = \langle Ty, Ty \rangle = B(Ty, y) &\leq c\|Ty\|\|y\| \\ \|Ty\|^2 - c\|Ty\|\|y\| &\leq 0 \\ \|Ty\|(\|Ty\| - c\|y\|) &\leq 0 \end{aligned}$$

Como la única opción que se tiene es que $\|Ty\| - c\|y\| \leq 0$ entonces concluimos que $\|Ty\| \leq c\|y\|$.

(b) Veamos ahora que $\Re(T)$ es un subespacio cerrado. Haciendo $x = y \neq 0$ se tiene que por el Teorema de Representación de Riesz

$$B(y, y) = \langle y, z \rangle,$$

usando la la desigualdad de Schwarz (1.2) y (2.2) tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\delta\|y\|^2 \leq B(y, y) = \langle y, z \rangle \leq |\langle y, z \rangle| \leq \|y\|\|z\| \tag{2.4}$$

dividiendo a ambos lados de la desigualdad por $\|y\|$, se deduce que $\delta\|y\| \leq \|z\|$. Por otro lado si $y \in \mathcal{N}(T)$, usando el resultado anterior

$$Ty = 0 \iff \|Ty\| = 0 \iff \|z\| = 0 \iff \delta\|y\| = 0 \iff \|y\| = 0$$

por lo tanto $\mathcal{N}(T) = \{0\}$y tenemos que T es inyectivo.

Por lo anterior, tenemos que para $y_n \in \mathcal{H}$ existe un $z_n \in \mathcal{H}$ de manera que $Ty_n = z_n$, así por ser B sesquilineal y para $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$

$$B(x, y_n - y_m) = \langle x, T(y_n - y_m)\rangle = \langle x, Ty_n - Ty_m\rangle = \langle x, z_n - z_m\rangle.$$

Si suponemos que $\{y_n\}$ es de Cauchy, por (2.4) tenemos que para todo $\frac{\epsilon}{\|T\|} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|T(y_n - y_m)\| \leq \|T\|\|y_n - y_m\| \leq \epsilon$$

entonces $\{Ty_n\}$ también es de Cauchy, como $\mathcal{H}$ es de Hilbert, así $\{y_n\} \to y$, y como T es continua, se tiene que $\{Ty_n\} \to T_y = z_F$, de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} B(x, y_n) &= \lim_{n\to\infty} \langle x, Ty_n\rangle \\ B(x, \lim_{n\to\infty} y_n) &= \langle x, \lim_{n\to\infty} Ty_n\rangle \\ B(x, y) &= \langle x, z_F\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto $Ty = z_F$ lo cual muestra que $\mathfrak{R}(T)$ es completo, y por el teorema del subespacio completo (1.2) se tiene que $\mathfrak{R}(T)$ es cerrado.

(c) Ahora probaremos que $\mathfrak{R}(T) = \mathcal{H}$. Supongamos que esto es falso es decir $\mathfrak{R}(T) \neq \mathcal{H}$, como $\mathfrak{R}(T)$ es cerrado podemos usar el Teorema de la Suma Directa (1.11) y representar a $\mathcal{H} = \mathfrak{R}(T) \oplus \mathfrak{R}(T)^{\perp}$, entonces para $w_0 \neq 0$, $w_0 \in \mathfrak{R}(T)^{\perp}$, asi por (2.4) existe $\delta > 0$ y

$$\delta\|w_0\| \leq B(w_0, w_0) = \langle w_0, Tw_0\rangle = 0,$$

la única opción que existe es que $\|w_0\| = 0 \iff w = 0$, lo cual es una contradicción así que $\mathfrak{R}(T) = \mathcal{H}$. Así T es biyectiva y podemos decir que la ecuación $Ty = z_F$ tiene solución única.

(d) Probemos (2.3), por el Teorema de Representación de Riesz (1.14), para cada funcional lineal acotado F en $\mathcal{H}$, existe un único z_F tal que

$$F(x) = \langle x, z_F\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Entonces existe un único $y_0 \in \mathcal{H}$, tal que satisface $Ty_0 = z_F$ y

$$B(x, y_0) = \langle x, Ty_0\rangle = \langle x, z_F\rangle = F(x) \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

así queda demostrado el teorema.

Note que el Teorema de Lax Milgram generaliza el Teorema de Representación de Riesz en los espacios de Hilbert, pues un funcional lineal acotado ya no solo se representa por el producto interno, sino por cualquier forma sesquilineal coercitiva más adelante veremos que cuando la forma es simétrica se vuelve un producto interno. Una pregunta común es si el Teorema de Lax-Milgram generaliza al Teorema de representación de Riesz, ¿que relación existe entre $\|F\|$ y $\|y_0\|$? , ¿se tiene la igualdad como pasa con el Teorema de Representación de Riesz?. El siguiente Teorema dará respuesta a estas preguntas, naturalmente este completa la demostración del Teorema de Lax-Milgram, sin embargo en [12] y se menciona el teorema como se ha hecho aquí.

Teorema 2.2 (Dependencia continua). *Con las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram (Teorema 2.1), sea y_0 el elemento asociado al Funcional F. Entonces se tiene que*

$$\|y_0\| \leq \frac{1}{\delta}\|F\|,$$

donde δ es la constante coerciva.

Demostración. Sea T el operador de la demostración del Teorema de Lax-Milgram, este es biyectivo y continuo, de esta manera la ecuación $Ty = z_F$ tiene solución única, y por ser coerciva de B existe un $\delta > 0$

$$\delta\|y_0\| \leq B(y_0, y_0) \leq \langle y_0, Ty_0\rangle \leq |\langle y_0, Ty_0\rangle| \leq \|y_0\|\|Ty_0\| = \|y_0\|\|z_F\|$$

Por el Teorema de Representación de Riesz (Teorema 1.14), se tiene que $\|z_F\| = \|F\|$, reemplazando esto en la desigualdad anterior tenemos

$$\|y_0\| \leq \frac{1}{\delta}\|F\|.$$

Observación 2.2. Con el Teorema de Lax-Milgram y el corolario anterior, ya podemos ver como este generaliza el Teorema de Representación de Riesz, naturalmente el producto interno en un espacio de Hilbert es sesquilineal y coercivo, con $\delta = 1$, se obtiene la igualdad de las normas del Teorema 1.14.

Ejemplo 2.5. Del ejemplo 2.4 tomemos la forma $B(x, y) = 3xy$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, esta forma es bilineal y coerciva y también es acotada, en efecto

$$B(x, y) = 3xy \leq c\|x\|\|y\|$$

con $c \in [3, \infty)$. Por otro lado tenemos que todo funcional en $\mathbb{R}$ tiene la forma $F(x) = ax$ con $a \in \mathbb{R}$ y siempre es acotado. Entonces el Teorema de Lax-Milgram asegura la existencia de un y_0. Como están dadas las condiciones es fácil saber que

$$y_0 = \frac{a}{3}$$

pues dependiendo de F se tiene el y_0.

2.2 Dos demostraciones alternativas

Como se vio en la sección anterior, la demostración del Teorema de Lax-Milgram depende fuertemente del Teorema de Representación de Riesz, sin embargo existe una manera más elegante y sencilla de probar el mismo resultado, gracias a una extensión del Teorema de Hahn-Banach, esta demostración es sacada de [1], y la idea es reproducir esta con detalle.

Corolario 2.1 (Corolario de Mazur). Sea $\mathbb{M}$ un subespacio lineal cerrado de un espacio de Banach $\mathbb{B}$. Entonces, para cualquier $x_0 \in \mathbb{B} - \mathbb{M}$, existe un funcional lineal continuo f_0 sobre $\mathbb{B}$ tal que

$$f_0(x_0) > 1 \quad \text{y} \quad f_0(x) = 0$$

con $x \in \mathbb{V}$.

Observación 2.3. En el apéndice B se da desarrollo detallado para llegar del teorema de Hahn-Banach (forma analítica) hasta el teorema de Mazur, para finalmente probar el teorema presentado aquí como el Corolario de Mazur.

Teorema 2.3 (Teorema de Lax-Milgram). *Ver Teorema 2.1.*

Demostración (Alternativa). Al igual que la demostración anterior

1. Definir un operador T.
2. Ver que T es inyectiva y $\mathfrak{R}(T)$ es cerrado en $\mathcal{H}^*$.
3. Demostrar que $\mathfrak{R}(T) = \mathcal{H}^*$.
4. Existencia y unicidad de y_0.

1. Fijemos el elemento $y \in \mathcal{H}$, entonces la aplicación

$$B(\cdot, y) : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$$

es un funcional lineal sobre $\mathcal{H}$ para la primera entrada (heredada de la forma sesquilineal). Definimos entonces la siguiente transformación

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H} &\to \mathcal{H} \\ y &\to T_y = B(\cdot, y) \end{aligned}$$

2. Por ser B sesquilineal y acotado, entonces T es lineal y acotado. Además T es acotado, pues note que

$$\delta\|y\|^2 \leq |B(y,y)| = |T_y(y)| = \|y\| \left| T_y\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right| \leq \|y\| \sup_{\|y\|=1}\{y \in \mathcal{H}\} = \|y\|\|T_y\|$$

es decir

$$\delta\|y\| \leq \|T_y\|$$

Veamos que

$$y \in \mathcal{N}(T) \iff T_y = 0 \iff \|T_y\| = 0 \iff \|y\| = 0 \iff y = 0$$

Así T es inyectiva. Por otro lado tomemos una sucesión $\{z_n\} \in \mathfrak{R}(T)$ y que $\{z_n\} \to z \in \mathcal{H}$. Como T es inyectivo entonces existe un $y_n \in \mathcal{H}$ tal que $z_n = T_{y_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces veamos que

$$\|z_n - z_m\| = \|T_{y_n} - T_{y_m}\| = \|T_{(y_n - y_m)}\| \geq \delta\|y_n - y_m\|,$$

pero $\{z_n\}$ es de Cauchy pues era una sucesión convergente, por lo que $\{y_n\}$ también será de Cauchy. Y como estamos sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $\{y_n\}$ converge a un elemento $y \in \mathcal{H}$. Como T es continua entonces se tiene que $T_y = z$ por lo tanto $z \in \mathfrak{R}(T)$. Así $\mathfrak{R}(T)$ es cerrado.

Probaremos que $\mathfrak{R}(T) = \mathcal{H}^*$. Supongamos lo contrario, es decir, que existe un $\tilde{f} \in \mathcal{H}^*$ tal que $\tilde{f} \notin \mathfrak{R}(T)$ (con $\tilde{f} \neq 0$). Por el Corolario 2.1, existe $z \in \mathcal{H}^{**}$ tal que $z(\tilde{f}) > 1$ y $z(f) = 0$ para $f \in \mathfrak{R}(T)$. Como $\mathcal{H}$ es reflexivo, podemos identificar a z con un $x \in \mathcal{H}$, así que

$$\tilde{f}(x) > 1 \quad y \quad T_y(x) = 0 = B(x,y)$$

para todo $y \in \mathcal{H}$. Como B es coerciva

$$B(x,y) = 0 > \delta\|x\|^2,$$

así $x = 0$, como $\tilde{f}$ es lineal, entonces $\tilde{f}(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Lo cual contradice el hecho que $\tilde{f} \neq 0$. Por lo tanto $\mathfrak{R}(T) = \mathcal{H}^*$.

Por último (3), implica que para cada $f \in \mathcal{H}^*$, existe un elemento $y_0 \in \mathcal{H}$ tal que $f = T_{y_0}$, es decir

$$f(x) = T_{y_0}(x) = B(x, y_0),$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Dicho elemento es único por biyectividad de T. Así queda demostrado de nuevo el Teorema de Lax Milgram. ∎

Se puede ver que esta herramienta simplifica la demostración, aunque implícitamente se utiliza el Teorema de Representación de Riesz, pues al decir que $\mathcal{H}$ es reflexivo tenemos en cuenta el Teorema 1.15.

Otra manera de demostrar el Teorema de Lax-Milgram es usando la teoría del punto fijo de Banach. Si embargo la demostración no es directa en cuanto a la aplicación de esta, sino por medio de un resultado un poco más general que el Teorema de Lax-Milgram, llamado El Teorema de Stampacchia, este teorema hace que Lax-Milgram se vuelva un corolario, por la importancia del Teorema de Stampacchia vale la pena ser mencionado. Comenzaremos dando unas definiciones para el teorema del punto fijo en contracciones.

Definición 2.3 (Punto fijo). *Un **punto fijo** de un mapeo*

$$T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$$

de un conjunto $\mathbb{X}$ sobre él mismo es un $x \in \mathbb{X}$ el cual su imagen es el mismo, en otras palabras

$$Tx = x$$

Ejemplo 2.6. Tomemos a $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y sea $T : x \to x^2$ entonces existen dos puntos fijos, $x = 0$ y $x = 1$.

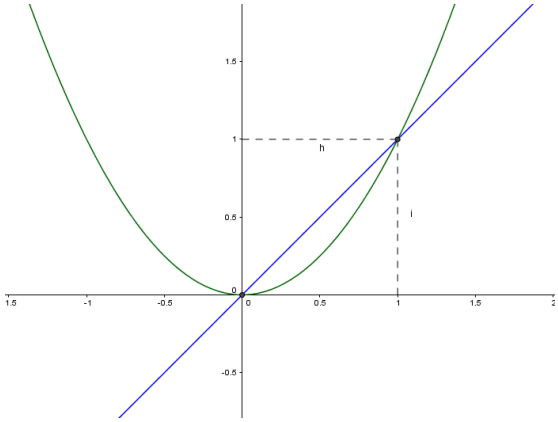


Figura 2.2: Figura del ejemplo 2.5.

Ejemplo 2.7. Tomemos cualquier conjunto $\mathbb{X}$ y sea T cualquier función de traslación es decir, para $x, y \in \mathbb{X}$ se tiene que $Tx = x + y$ no tiene ningún punto fijo.

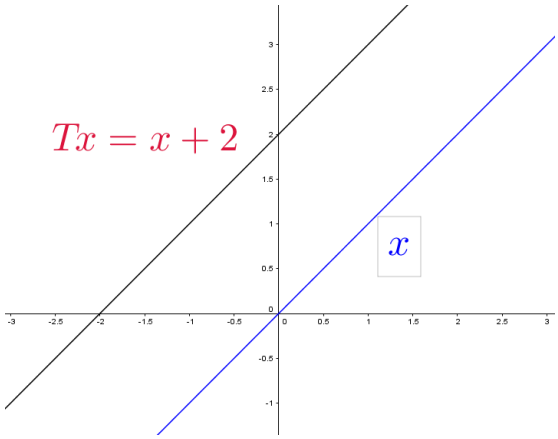


Figura 2.3: Ejemplo 2.6 en $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y con $y = 2$.

Definición 2.4 (Contracción). *Sea $\mathbb{X} = (\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico. Un mapeo $T : \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ es llamado una contracción sobre $\mathbb{X}$ si existe un número real $0 < \alpha < 1$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{X}$*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y).$$

Ejemplo 2.8. Sea $\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ y sea el mapeo $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ definido como

$$Tx = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

es una contracción. En efecto sea $x, y \in \mathbb{X}$

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &= \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{y}{2} - \frac{1}{y}\right| \\ &= \left|\frac{x-y}{2} + \frac{y-x}{xy}\right| \\ &= \left|\frac{xy(x-y) - 2(x-y)}{2xy}\right| \\ &= |x-y|\left|\frac{xy-2}{2xy}\right| \\ &= |x-y|\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| \\ &\leq 1/2|x-y| \end{aligned}$$

Donde $\alpha = 1/2$.

Teorema 2.4 (Teorema del punto fijo de Banach (Teorema de contracción)). *Consideremos un espacio métrico $\mathbb{X} = (\mathbb{X}, \mathbb{d})$, donde $\mathbb{X} \neq \emptyset$. Supongamos que $\mathbb{X}$ es completo y sea $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ una contracción sobre $\mathbb{X}$. Entonces tiene precisamente un punto fijo.*

Demostración. Escojamos cualquier $x_0 \in \mathbb{X}$ y definamos la siguiente sucesión iterativa

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \quad \cdots, \quad x_n = T^n x_0$$

Claramente, esta es una sucesión de imágenes de x_0 bajo la aplicación repetida de T. Mostraremos que x_n es de Cauchy, en efecto como T es una contracción tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ \cdots &\leq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Así por la desigualdad triangular y por la formula de la serie geométrica tenemos que para $n > m$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}), \cdots, d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < 1$, en el numerado tendremos que $1 - \alpha^{n-m} < 1$, por lo tanto

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^m \frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$

En la parte derecha, $0 < \alpha < 1$ y $d(x_0, x_1)$ es fija, así que podemos hacer la parte derecha tan pequeña como queramos para un m lo suficientemente grande. Esto prueba que (x_m) es de Cauchy. Como $\mathbb{X}$ es completo, (x_m) es convergente, digamos $x_m \to x$.Mostraremos que este limite x es un punto fijo del mapeo T.
Por la desigualdad triangular y porque T es contracción tenemos

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &= d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x) \end{aligned}$$

Si hacemos la iteración, podemos hacer una suma parecida a la anterior tan pequeña cualquier $\epsilon > 0$ porque cuando m es lo suficientemente grande $x_m \to x$. Por lo que concluye que $d(x, Tx) = 0$, así que $x = Tx$. Esto muestra que x es punto fijo de T.
Ahora probemos que x es único punto fijo. Supongamos que existe otro $\tilde{x} = T\tilde{x}$ entonces tendremos que

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leq \alpha d(x, \tilde{x})$$

pero como $\alpha < 1$, entonces la única opción posible que existe es que $d(x, \tilde{x}) = 0$, de este modo $x = \tilde{x}$ y queda probado el teorema. ∎

Ejemplo 2.9. Tomemos la contracción del ejemplo 2.8, el Teorema 2.4 nos asegura la existencia de un único punto fijo, dada la naturaleza del ejemplo es fácil encontrarlo

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{1}{x} &= x \\ \frac{x^2+2}{2x} - x &= 0 \\ \frac{x^2+2-2x^2}{2x} &= 0 \\ x^2 - 2x^2 &= -2 \\ x &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Comprobando

$$T(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

De esta manera $\sqrt{2}$ es el único punto fijo de T.

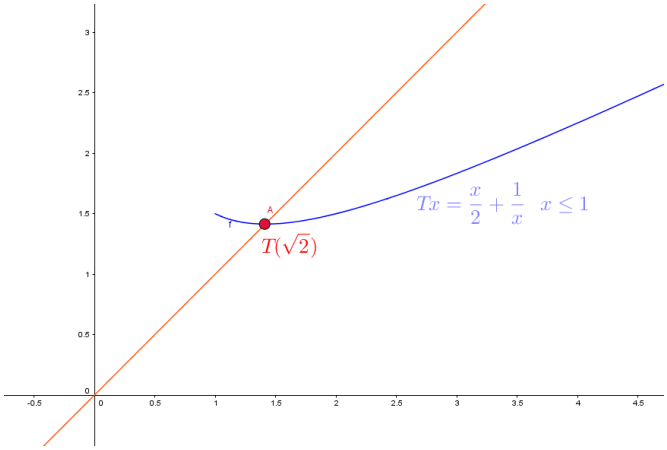


Figura 2.4: Ejemplo 2.9

Para finalizar esta sección demostraremos el Teorema de Stampacchia pues no sé puede hablar de Lax-Milgram sin este teorema, porque la similitud es notoria, de todas maneras este trabajo de grado lo demostraremos con el fin de llegar a una nueva demostración del Teorema de Lax-Milgram usando el teorema del punto fijo como se muestra en [3]. Antes de esto necesitaremos probar un lema referente a las proyecciones.

Lema 2.1. Sea $K \subset \mathcal{H}$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo. Entonces para cada $x \in \mathcal{H}$ entonces existe un único $y_0 = P_K x$ si y solo si $y_0 \in K$ y

$$\langle x - y_0, v - y_0 \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K$$

Demostración. Asumamos que $y_0 \in K$ satisface que $\|x - y_0\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$ y sea $w \in K$. Tenemos

$$v = (1-t)y_0 + tw \in K \quad \forall t \in [0,1]$$

y por lo tanto

$$\|x - y_0\| \leq \|x - [(1-t)y_0 + tw]\| = \|(x - y_0) - t(w - y_0)\|.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \|x - y_0\|^2 &\leq \|x - y_0\|^2 - 2t\langle x - y_0, w - y_0\rangle + t^2\|w - y_0\|^2, \\ 2\langle x - y_0, w - y_0\rangle &\leq t\|w - y_0\|^2 \quad \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

Así cuando $t \to 0$ tenemos que

$$\langle x - y_0, w - y_0 \rangle \leq 0.$$

Para la suficiencia, asumamos que y_0 satisface $\langle x - y_0, v - y_0\rangle \leq 0$. Entonces tenemos

$$|y_0 - x|^2 - |v - x|^2 = 2\langle x - y_0, v - y_0\rangle - |y_0 - v|^2 \leq 0 \quad \forall v \in K.$$

Esto significa que $y_0 = P_K x$. ∎

Teorema 2.5 (Teorema de Stampacchia). *Asumamos que $B(x, y)$ es una forma sesquilineal, coerciva y acotada sobre $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sea $K \subset \mathcal{H}$ un subconjunto no vacío, cerrado y convexo. Entonces, dado cualquier $f \in \mathcal{H}^*$, existe un único elemento $y_0 \in K$ tal que*

$$B(x - y_0, y_0) \geq f(x - y_0) \quad \forall x \in K. \tag{2.5}$$

Demostración. Por el Teorema de Representación de Riesz 1.14 existe un único z de manera que

$$f(x) = \langle x, z\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Por otro lado si fijamos a $y \in \mathcal{H}$, entonces el mapeo

$$\begin{aligned} \phi_y : \mathcal{H} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \phi_y(x) = B(x, y) \end{aligned}$$

y por la sesquilinealidad de la forma B, ϕ_y es lineal ahora miremos que es continuo, pues

$$\begin{aligned} |\phi_y| &= \sup_{\|x\|=1} |\phi_y(x)| \\ &= \sup_{\|x=1\|} \|B(x, y)\| \\ &\leq c\|y\| \end{aligned}$$

Usando nuevamente el Teorema de Representación de Riesz encontramos que existe un único z_ϕ en $\mathcal{H}$, pero como ϕ depende de y, entonces a este elemento lo notaremos como Ay tal que

$$B(x, y) = \langle x, A_y\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Notemos que A es un operador definido como

$$\begin{aligned} A : \mathcal{H} &\to \mathcal{H} \\ y &\to Ay \end{aligned}$$

este es lineal, en efecto

$$\begin{aligned} B(x, y_1) + B(x, y_2) &= \langle x, Ay_1\rangle + \langle x, Ay_2\rangle \\ &= \langle x, Ay_1 + Ay_2\rangle \end{aligned}$$

y

$$B(x, y_1 + y_2) = \langle x, A(y_1 + y_2)\rangle$$

Así $A(y_1 + y_2) = Ay_1 + Ay_2$. Para $k \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$B(x, ky) = \langle x, A(ky)\rangle \quad \text{y} \quad B(x, ky) = \overline{k}B(x, y) = \overline{k}\langle x, Ay\rangle = \langle x, kAy\rangle$$

Así $A(ky) = kAy$. Por tanto A es un operador lineal. Miremos que A es acotado, pues

$$B(Ay, y) = \langle Ay, Ay\rangle = \|Ay\|^2$$

y

$$|B(Ay, y)| \leq k\|Ay\|\|y\|$$

de esta manera

$$\|A_y\| \leq k\|y\| \quad \forall y \in \mathcal{H}. \tag{2.6}$$

También A cumple con una propiedad derivada de la coercividad de B,

$$\langle y, Ay\rangle = B(y, y) \geq \delta\|y\|^2 \quad \forall y \in \mathcal{H}. \tag{2.7}$$

Sí (2.5) tiene solución única $y_0 \in K$, entonces para $\rho > 0$, (2.5) es equivalente a

$$\begin{aligned}
\rho B(x, y) = \rho\langle x - y_0, Ay_0\rangle &\geq \rho f(x - y_0) \quad \forall x \in K \\
0 &\geq \rho f(x - y_0) - \rho\langle x - y_0, Ay_0\rangle \quad \forall x \in K \\
0 &\geq \rho\langle f, x - y_0\rangle - \rho\langle Ay_0, x - y_0\rangle \quad \forall x \in K \\
0 &\geq \langle \rho f - \rho Ay_0 + y_0 - y_0, x - y_0\rangle \quad \forall x \in K
\end{aligned}$$

En la penúltima línea se opta por la notación del funcional, que por el Teorema de Representación de Riesz son iguales. Por el Lema 2.1,

$$y_0 = P_K(\rho f - \rho Ay_0 + y_0)$$

Para cada $y \in K$, definimos el conjunto $S_y = P_K(\rho x - \rho Ay + y)$. Debemos escoger adecuadamente el $\rho > 0$ para que S sea una contracción. Como P_K es una distancia decreciente [1] se cumple que

$$\|P_K x_1 - P_K x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

[1] Ver [3], capítulo 5.

De esta manera usando 2.6 y 2.7 se tiene que

$$\begin{aligned}
\|Sy_1 - Sy_2\|^2 &\leq \|(\rho f - \rho A y_1 + y_1) - (\rho f - \rho A y_2 + y_2)\|^2 \\
&= \|(y_1 - y_2) - \rho(Ay_1 - Ay_2)\|^2 \\
&= \|(y_1 - y_2) - \rho(A(y_1 - y_2))\|^2 \\
&= \langle (y_1 - y_2) - \rho(A(y_1 - y_2)), (y_1 - y_2) - \rho(A(y_1 - y_2))\rangle \\
&= \|y_1 - y_2\|^2 - 2\rho\langle A(y_1 - y_2), y_1 - y_2\rangle + \rho^2\|A(y_1 - y_2)\|^2 \\
&\leq \|y_1 - y_2\|^2 - 2\rho\delta\|y_1 - y_2\|^2 + \rho^2 c^2\|y_1 - y_2\|^2 \\
&= \|y_1 - y_2\|(1 - 2\rho\delta + \rho^2 c^2)
\end{aligned}$$

Para encontrar $\rho > 0$, debemos hacer

$$k^2 = 1 - 2\rho\delta + \rho^2 c^2 \quad \leq \quad 1$$

Donde $0 < \rho < \dfrac{2\delta}{c^2}$, y encontramos que S tiene un único punto fijo por el Teorema 2.4, por lo tanto y_0 es único y soluciona la desigualdad 2.5. ∎

Finalmente gracias a este resultado nos queda muy sencillo demostrar el Teorema de Lax-Milgram. No obstante la similitud es notoria la generalidad del Teorema de Stampacchia es mayor.

Corolario 2.2 (Teorema de Lax Milgram.). Ver Teorema 2.1.

Demostración. Haciendo $K = \mathcal{H}$ y si $y_0 = P_{\mathcal{H}}x$ es la proyección ortogonal Lema 1.3 queda demostrado el teorema. ∎

2.3 Algunos resultados del Teorema de Lax-Milgram

Para hablar un poco del desarrollo y optimización del teorema debemos preguntarnos sobre las hipótesis, algunos resultados de este capitulo son extraídos de [1], sin embargo la intención de este es completar detallar algunas demostraciones y completarlas con el contenido de [3].

Para comenzar nuestro estudio tomemos la hipótesis que mayor información nos puede dar en esta búsqueda, es la forma coerciva, y gracias al Teorema de Lax - Milgram decimos que coerciva implica la existencia de un único y_0 tal que

$B(x, y_0)) = F(x)$ desafortunadamente la necesidad no se cumple es decir que la existencia de este elemento y_0 no dice nada acerca de la coercividad de la forma a continuación daremos un contraejemplo.

Ejemplo 2.10. Sea $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $B(x, y) = -3x * y$ y para cada $F(x) \in \mathbb{R}$ existe un único y_0 que hace $B(x, y_0) = F(x)$ para todo x, por ejemplo si $F(x) = 10x$, se tiene que $y_0 = -10/3$. Pero B no es coerciva pues $B(x, x) = -3x^2$ y no existe ningún $\delta > 0$ tal que $-3x^2 \leq \delta \|x\|^2$.

Como podemos ver la hipótesis de ser coerciva es muy fuerte y sin embargo existen algunas generalizaciones que hacen que el Teorema de Lax Milgram se vuelva un si y solo si, sin embargo eso no se tocará en este trabajo. Ahora debemos preguntarnos: ¿Bajo que condiciones se debe debilitar el Teorema de Lax Milgram para que este sea un si y solo con la coercividad?. Antes de responder a esta pregunta definiremos un concepto básico pero esencial en este capitulo.

Definición 2.5 (Forma bilineal simétrica). *Sea $B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to K = (\mathbb{R}\ o\ \mathbb{C})$ una forma bilineal, entonces se dice que es simétrica si y solo si para todo $u, v \in \mathbb{V}$ se tiene*

$$B(u, v) = B(v, u).$$

Lema 2.2. Sea B una forma bilineal simétrica, positiva y acotada. Si para cada $F \in \mathcal{H}^*$ existe una única $y_0 \in \mathcal{H}$ que cumple que $B(x, y) = F(x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces la forma B es coerciva.

Demostración. Como B es positiva tenemos entonces que $B(v-\lambda w, v-\lambda w) \geq 0$ para cualquier $v, w \in \mathbb{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. usando el hecho que B es bilineal y simétrica tenemos

$$0 \leq B(v - \lambda w, v - \lambda w) = B(v, v) - 2\lambda B(v, w) + \lambda B(w, w)$$

Si tenemos que $B(w, w) = 0$ entonces ya se cumpliría el teorema, pues $w = 0$.Si $B(w, w) \neq 0$, entonces hagamos $\lambda = \frac{B(v,w)}{B(w,w)}$. Entonces de esto tenemos

$$0 \leq B(v, v) - 2\frac{B(v, w)^2}{B(w, w)} + \frac{B(v, w)^2}{B(w, w)} = B(v, v) - \frac{B(v, w)^2}{B(w, w)^2}$$

Despejando

$$B(v, w) \leq B(u, u)^{1/2} B(w, w)^{1/2}.$$

Ahora tomemos a $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ la tranformación dada por $Ty = B(\cdot, y)$. Por hipótesis para cada $F \in \mathcal{H}^*$, entonces la preimagen de bajo T de F existe y es única, así que T

es biyectiva. Como T es biyectiva en un espacio de Hilbert, este es acotado por debajo, por lo que existe un δ tal que $\delta\|y\| \leq \|Ty\|$ para toda $y \in \mathcal{H}$. De esta manera

$$\begin{aligned} \delta\|y\| \leq \|Ty\| &= \sup\left\{\frac{Ty(x)}{\|x\|}, x \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{B(x,y)}{\|x\|}, x \neq 0\right\} \leq \frac{B(x,x)^{1/2}B(y,y)^{1/2}}{\|x\|} \quad \forall x \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Como esto se tiene para toda y, entonces haciendo $y = x$ obtenemos

$$\delta\|x\|^2 \leq B(x,x) \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

El mayor interés del Teorema de Lax-Milgram radica en que generaliza el Teorema de representación de Riesz, pero ¿Que hipotesis debemos debilitar para que el teorema de Lax Milgram sea una reformulación de el Teorema de Representación de Riesz?. Aunque la pregunta parezca complicada, se simplifica haciendo que nuestra forma B sea un producto interno. El siguiente Lema nos dará la solución.

Lema 2.3. Sea B una forma bilineal, coerciva y simétrica entonces B es un producto interno.

Demostración. Por la bilinealidad se tiene **IP1** y **IP2** y la simétria dará **IP3**, solo faltaría demostrar **IP4**, por la coercividad tenemos que

$$B(x,x) \geq \delta\|x\| \geq 0$$

y

$$0 = B(x,x) \geq \delta\|x\| \Rightarrow x = 0$$

Así B es un producto interno.

Además se puede decir que gracias a la coercividad y el acotamiento de B la norma inducida por el producto interno es $B(x,x) = \|x\|_B^2$ y la norma del espacio $\mathcal{H}$.

$$\delta\|x\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B(x,x) = \|x\|_B^2 \leq c\|x\|_{\mathcal{H}}\|x\|_{\mathcal{H}} = c\|x\|_{\mathcal{H}}^2$$

Una ventaja grande de que la forma sea simétrica es que además de que el problema tenga solución única, se puede encontrar de manera explicita la y_0, y esta se llama minimizar el problema variacional. El siguiente teorema nos ilustrará este mínimo, donde el variacional sera $J(v)$.

Teorema 2.6 (Minimización del problema variacional de Lax-Milgram). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea B una forma bilineal simétrica, acotada y coerciva entonces $y_0 \in \mathcal{H}$ cumple*

$$B(x, y_0) = F(x) \quad \forall x \in \mathcal{H} \tag{2.8}$$

si y sólo si el variacional

$$J(y_0) = \frac{1}{2}B(y_0, y_0) - F(y_0) = \min_{y\in\mathcal{H}} \left\{ \frac{1}{2}B(y, y) - F(y) \right\}. \tag{2.9}$$

Además el variacional J tiene único mínimo.

Demostración. Supongamos que es valida la ecuación (2.8). Por el Lema 2.3 tenemos que B es un producto interno en $\mathcal{H}$ de esta manera

$$B(u, u)^{1/2} = \|u\|_B$$

Por el Teorema de Representación de Riesz (1.14) tenemos que existe un único elemento $g \in \mathcal{H}$ tal que

$$F(v) = B(v, g) \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

Pero por hipótesis existe un único y_0 tal que $F(v) = B(v, y_0)$, de esta manera igualando tendremos

$$B(v, g) - B(v, y_0) = B(v, g - y_0) = 0$$

La solución a este problema es donde y_0 es la proyección sobre $\mathcal{H}$ de g por el producto escalar α. Por el Teorema de la minimización del vector (Teorema 1.12), el cúal existe un único y_0 de manera que

$$\|g - y_0\|_B = \min_{y\in\mathcal{H}} \left\{ \|g - y\|_B \right\}$$

De esta manera aplicando cuadrados a ambos lados podemos deducir que

$$B(g - y_0, g - y_0) = \min_{y\in\mathcal{H}} \{ B(g - y, g - y) \}$$

Y tomado la parte derecha deducimos la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} B(g - y, g - y) &= B(g, g) + B(y, y) - 2B(g, y) \\ &= B(g, g) + B(y, y) - 2F(y) \\ &= \frac{1}{2}(B(g, g) + B(y, y)) - F(y) \end{aligned}$$

De esta manera se tiene que

$$\frac{1}{2}(B(g,g)+B(y_0,y_0))-F(y_0)=\min_{y\in\mathcal{H}}\left\{\frac{1}{2}(B(g,g)+B(y,y))-F(y)\right\}$$

Restando a ambos lados $\frac{1}{2}B(g,g)$ pues nunca depende de v, obtenemos la forma del variacional (2.9).

Ahora supongamos que es valida la ecuación 2.9, en esta caso el variacional J tiene un único mínimo en $y_0\in\mathcal{H}$, definamos

$$\begin{aligned}\phi(t)=J(y_0+tx) &= \frac{1}{2}B(y_0+tx,y_0+tx)-F(y_0+tx)\\ &= \frac{1}{2}B(y_0,y_0)+B(tx,y_0)+\frac{t^2}{2}B(x,x)-tF(x)-F(y_0)\\ &= \left(\frac{1}{2}B(y_0,y_0)-F(y_0)\right)+t\left(B(x,y)-F(x)\right)+\frac{t^2}{2}B(x,x)\\ &= J(y_0)+t\left(B(x,y)-F(x)\right)+\frac{t^2}{2}B(x,x)\end{aligned}$$

así que la derivada de ϕ debe ser igual a cero en $t=0$ para todo $x\in\mathcal{H}$, de esta manera

$$\phi'(0)=B(x,y_0)-F(x)=0\quad\forall x\in\mathcal{H}$$

de esta manera se cumple la ecuación 2.8.

Finalmente para ver que este mínimo es único tomemos cualquier $x\neq 0$ tal que

$$\begin{aligned}J(x+y_0) &= \frac{1}{2}B(x+y_0,x+y_0)-F(x+y_0)\\ &= \frac{1}{2}B(x,x)+B(x,y_0)+\frac{1}{2}B(y_0,y_0)-F(x)-F(y_0),\\ &= \left(\frac{1}{2}B(y_0,y_0)-F(y_0)\right)+[B(x,y)-F(x)]+\frac{1}{2}B(x,x),\\ &= J(y_0)+\frac{1}{2}B(x,x),\\ &\geq J(y_0)+\frac{1}{2}\delta\|x\|^2,\\ &\geq J(y_0).\end{aligned}$$

Por lo que y_0 es el único mínimo del variacional J. ∎

Por último se demostrará un teorema de gran utilidad, este generaliza el Teorema de Lax-Milgram en el sentido de los dominios, pues la idea de este es hacerlo en subconjuntos convexos y cerrados de un espacio de Hilbert. Este Teorema nos dá una idea de la importancia y el alcanzé del Teorema de Lax-Millgram.

Teorema 2.7 (Minimación del problema variacional de Stampacchia). *Sea W un conjunto no vacío, convexo y cerrado en un espacio $\mathcal{H}$ de Hilbert y sea $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal,acotada y coerciva. Entonces para cada $F \in \mathcal{H}^*$ existe un único $y_0 \in W$ tal que $J(y_0) = \inf_{w\in W} J(w)$ donde :*

$$J(w) = \frac{1}{2}B(w,w) - F(w).$$

Demostración. Primero veamos que el variacional J es acotado inferiormente

$$J(w) \geq \frac{1}{2}\delta\|w\|^2 - \|F\|\|w\| = \frac{1}{2\delta}(\delta\|w\| - \|F\|)^2 - \frac{\|F\|^2}{2\delta} \geq -\frac{\|F\|^2}{2\delta}$$

Como el variacional J es acotado inferiormente y es no vacío existe el ínf y lo definimos como $a = \inf_{w\in W} J(w)$ y la sucesión $(w_n) \in W$ de manera que

$$\lim_{n\to\infty} J(w_n) = a$$

De esta manera

$$\begin{aligned}
\delta\|w_n - w_m\|^2 &\leq B(w_n - w_m, w_n - w_m),\\
&= B(w_n, w_n) - B(w_n, w_m) - B(w_m, w_n) + B(w_m, w_m),\\
&= 2J(w_n) + 2J(w_m) - [B(w_n + w_m, w_n + w_m) - 2F(w_n) - 2F(w_m)],\\
&= 4J(w_n) + 4J(w_m) - [2B(w_n + w_m, w_n + w_m) - 4F(w_n + w_m)],\\
&= 4J(w_n) + 4J(w_m) - \left[8B\left(\frac{w_n + w_m}{2}, \frac{w_n + w_m}{2}\right) - 8\left(F\frac{w_n + w_m}{2}\right)\right],\\
&= 4J(w_n) + 4J(w_m) - 8J\left(\frac{w_n + w_m}{2}\right),\\
&\leq 4J(w_n) + 4J(w_m) - 8a,
\end{aligned}$$

notemos que por la hipótesis de convexidad $\frac{w_n + w_m}{2} \in W$. Cuando $n, m \to \infty$ entonces tenemos que $J(w_n) \to a$ y $J(w_m) \to a$, de está manera $\|w_n - w_m\| \to 0$. En otras palabras la sucesión (w_n) es de Cauchy y por ser $\mathcal{H}$ de Hilbert entonces existe un $y_0 \in \overline{W}$ tal que $w_n \to y_0$, además $y_0 \in W$ pues es cerrado. Por otro es claro que J(w) es continua pues B y F por hipótesis lo son implica que

$$J(y_0) = \lim_{n\to\infty} J(w_n) = \inf_{w\in W} J(w) = a$$

Ahora probaremos que esta y_0 es única, pues supongamos que existen y_1 que son soluciones. Entonces la sucesión $(y_{0,1})_n = \{y_0, y_1, y_0, y_1, \cdots\}$ cumple con que en

$$\lim_{n\to\infty}(y_{0,1})_n = y_0 \quad o \quad \lim_{n\to\infty}(y_{0,1})_n = y_1$$

entonces por hipótesis se tendrá que

$$\lim_{n\to\infty} J(y_{0,1})_n = \inf_{w\in W} J(w)$$

Pero como se probó anteriormente $(y_{0,1_n})$ es de cauchy, entonces $y_0 = y_1$ y queda demostrado el teorema. ∎

Estos resultados variacionales son de gran importancia en la solución de ecuaciones diferenciales y la física, pues ayudad a optimizar un función, en la mayoría de veces una energía. En el capitulo 3 veremos una aplicación del Problema de Sturm-Lioville, donde básicamente se remite a buscar una solución de un ecuación tipo Dirichlet.

3 Aplicaciones

En este capitulo se mostrará algunos ejemplos importantes del uso del Teorema de Lax-Milgram a la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, en los cuales soluciona problemas de la física como las ecuaciones de Poisson y el problema Sturm-Lioville ambos con condiciones de extremo fijo.

Antes de entrar al detalle de la aplicación de nuestro teorema se deben introducir conceptos y resultados venidos del análisis funcional y la teoría de la medida, como son los espacios de Sobolev. Es de gran importancia dichos espacios, pues es una mirada distinta proporcionada por Sergei Sobolev en los años 30 para solucionar ecuaciones diferenciales parciales a través de la derivada débil. Cabe resaltar que el lector debe tener conocimientos básicos en teoría de la medida para entender algunas notaciones y definiciones.

3.1 Definiciones previas

Definición 3.1 (Espacio de Medida clase L^p). *Si $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p = L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$ consiste de todas las clases μ − equivalentes de una $\mathcal{X}$−medida, entonces se dice que $f \in L^p$ si*

$$\int_X |f|^p d\mu \leq +\infty$$

Además dos funciones son μ−equivalentes si son iguales en casi toda parte.

Observación 3.1. En adelante μ será la medida de Lesbegue y decimos que $f \in L^p(\mu)$ definimos

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{1/p}$$

y llamamos a $\|f\|$ la norma en $L^p(\mu)$.

Observación 3.2. En este capítulo el mayor interes esta en las funciones de clase L^2, pues es el único de la familia L^p que es espacio de Hilbert, siendo la completación de l^2 y con producto interno definido como

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)g(x)dx$$

Para ver la demostración de este ver [9] y [2].

Definición 3.2 (Funciones de soporte compacto). *Se dice que una función tiene* ***Soporte compacto*** (C_c^1) *si la adherencia del conjunto donde no es nula conforma un conjunto cerrado y acotado.*

Ejemplo 3.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} |x| < 1 \\ 0 & \text{si} |x| \geq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

Entonces en la adherencia de $\overline{(-1, 1)} = [-1, 1]$ es cerrado y acotado, por la tanto f es de soporte compacto.

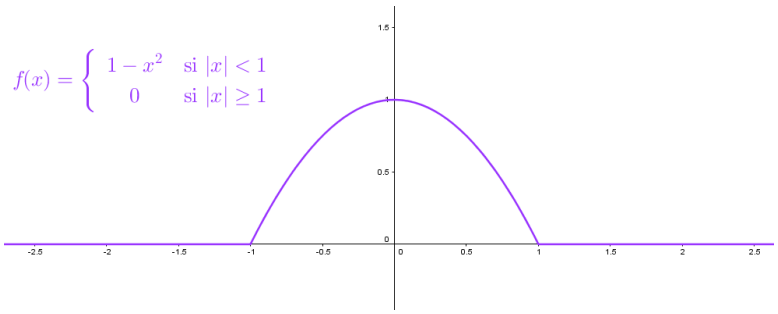


Figura 3.1: Imagen del ejemplo 3.1

Ejemplo 3.2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida como

$$g(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

Esta función va desapareciendo en el infinito, es decir $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0$, no es de soporte compacto, pues su adherencia no es acotada.

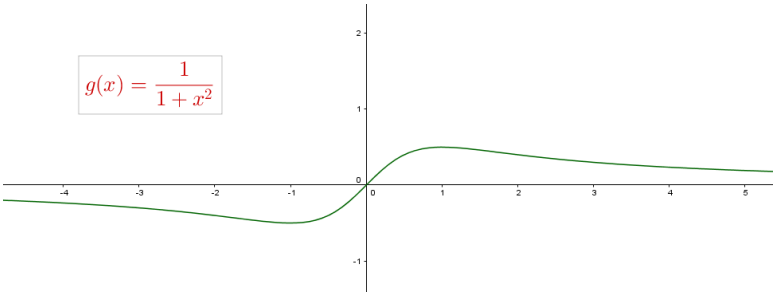


Figura 3.2: Figura del ejemplo 3.2

Definición 3.3 (Multi-indice). *Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, y sea $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, donde $a_j \in \mathbb{N}$ con $j = 1, 2, \cdots, n$, un multi-indice y debemos usar la notación*

$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha 1} \cdots \partial_n^{\alpha n}, \quad \text{donde} \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Si T es una distribución $D^\alpha T$ denotará la derivada de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ de T en el sentido de la distribución.

Definición 3.4 (Derivada débil). *Sea f una función en el espacio de Lebesgue $L^1([a,b])$. Decimos que $g \in L^1([a,b])$ es una derivada débil de f si*

$$\int_a^b f(x)\phi'(x)dx = -\int_a^b g(x)\phi(x)dx$$

para toda función infinitamente diferenciables ϕ con $\phi(a) = \phi(b) = 0$. De manera más general si $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ (el espacio de las funciones localmente integrables) para cualquier abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sea α un multi-indice, decimos que g es la α^{th} derivada débil de g si

$$\int_\omega f\, D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_U g\phi,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty$.

Ejemplo 3.3. Sea la $f : [-1,1] \to [0,1]$ definida como el valor absoluto $f(x) = |x|$, el cual no es diferenciable en $x = 0$, pero tiene una derivada débil
$g : [-1,1] \to [-1,1]$ definida como la función signo dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0; \\ 0, & \text{si } x = 0; \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pues notemos que para cualquier $\phi \in C_c^1$, en particular la del ejemplo 3.1

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} |x| < 1 \\ 0 & \text{si} |x| \geq 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |x|(-2x)dx &= -2\left[\int_0^1 x^2 dx - \int_{-1}^0 x^2 dx\right] \\ &= -2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{1} g(x)(1-x^2) &= -\left[\int_0^1 (1-x^2)dx - \int_{-1}^0 (1-x^2)\right] \\ &= -\left[1 - \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta manera se prueba que la función signo es derivada débil para la función valor absoluto.

Definición 3.5 (El espacio de Sobolev $W^{1,p}$). *Sea $\Omega = (a, b)$ un intervalo abierto, posiblemente no acotado, y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define como*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega f\phi' = -\int_\Omega g\phi \quad \forall \phi \in C_c^1(\Omega) \right\}$$

Además el conjunto

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Para $f \in W^{1,p}(\Omega)$ denotaremos $f' = g$.

Ejemplo 3.4. En el ejemplo 3.3, $f(x) = |x| \in W^{1,p}$ para cada $1 \leq p < \infty$ donde $f' = g$ y g es la función signo. Por otro lado $g \notin W^{1,p}$ para ningún $1 \leq p < \infty$

Observación 3.3. El espacio $W^{1,p}$ esta equipado con la norma

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p}$$

o aveces, si $1 \leq p < \infty$, con la norma equivalente $(\|f\|_{L^p}^p + \|f'\|_{L^p}^p)^{1/p}$. El espacio H^1 esta equipado con el producto interno

$$\langle f, g\rangle_{H^1} = \langle f, g\rangle_{L^2} + \langle f', g'\rangle_{L^2} = \int_a^b (fg + f'g')$$

y con la norma asociada

$$\|f\|_{H^1} = (\|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

Además de esto el espacio H^1 es separable de Hilbert. [1]

Definición 3.6 (El espacio H_p^1). *Dado un $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ la cerradura de $C_c^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. El conjunto*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

El espacio $W_0^{1,p}$ esta equipado con la norma de $W^{1,p}(\Omega)$, y el espacio H_0^1 esta equipado con el producto interno de H^1.

Lema 3.1. Existe una constante C (depende solo sobre $|I| \leq \infty$) tal que

$$\|f\|_{L^\infty(I)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(I)}$$

La demostración de este teorema no se hará, sin embargo se puede ver en el capítulo 8 de [3].

Teorema 3.1 (Desigualdad de Poincaré). *Supongamos que I es un intervalo acotado. Entonces existe una constante C (dependiendo de $\|I\| < \infty$) tal que*

$$\|f\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|f'\|_{L^p}(I) \quad \forall f \in W_0^{1,p}(I).$$

En otras palabras, sobre $W_0^{1,p}$, la cantidad $\|u'\|_{L^p(I)}$ es una norma equivalente de la norma $W^{1,p}$.

Demostración. Sea $f \in W_0^{1,p}(I)$ con $I = (a, b)$. Como $f(a) = 0$, por el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$\|f(x)\|_{W^{1,p}} = \|f(x) - f(a)\|_{W^{1,p}} = \left\|\int_a^x f'(t)dt\right\|_{W^{1,p}} \leq \|f'\|_{L^1}.$$

Por el lema 3.1 se tiene que existe una constante K que depende solo de $|I| \leq \infty$ tal que

$$\frac{1}{K}\|f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{W^{1,p}} \leq \|f'\|_{L^1},$$

[1] Ver capitulo 8 de [3].

de esta manera

$$\|f\|_{L^\infty} \leq K\|f'\|_{L^1},$$

aplicando la desigualdad de Hölder

$$\|f\|_{W^{1,p}} \leq K\|f'\|_{L^p}\|1\|_{L^q}$$

y haciendo a $C = K\|1\|_{L^q}$ se demuestra el teorema. ∎

Observación 3.4. La forma general de la desigualdad de Poincaré se toma sobre un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y queda formulado con el Laplaciano es decir

$$\|f\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|\Delta f\|_{L^p}(I) \quad \forall f \in W_0^{1,p}(I).$$

3.2 Las ecuaciones de Poisson

Las ecuaciones de Poisson son una herramienta de gran uso en la física y la ingeniería. Se debe al matemático y físico francés Simeón Denis Poisson, que la publicó en 1812. Nuestro interés radica que es una aplicación inmediata al Teorema de Lax-Milgram. La idea es introducir las generalidades de esta ecuación.

Si una difusión u onda esta en proceso estacionario (Independiente del tiempo), entonces $u_t = 0$ y $u_{tt} = 0$. De esta manera, ambas la difusión y la ecuación de onda se reducen a la **ecuación de Laplace:**

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 0 \quad \text{en una dimensión} \\ \nabla \cdot \nabla u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{en dos dimensiones} \\ \nabla \cdot \nabla u = \Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} &= 0 \quad \text{en n-dimensiones} \end{aligned}$$

Una solución de la ecuación de Laplace se llama una función armónica.
La versión no homogénea de la ecuación de Laplace es

$$\Delta u = f$$

con f una función dada. Esta ecuación se denomina Ecuación de Poisson.

Existe una técnica usada para pasar de la forma diferencial a la forma integral de la ecuación de Poisson, esta no será de gran utilidad y es llamada como la formula de Green-Ostrogradski o como la primera identidad de Green. Primero veamos este teorema

Teorema 3.2 (Teorema de la Divergencia). *Supongamos que $V \subset \mathbb{R}^n$ es cual es compacto y tiene una frontera suave y acotada S (también indicada como $\partial V = S$). Si F es un campo vectorial continuamente diferenciable sobre una vecindad de V, entonces tenemos*

$$\int_V \nabla \cdot F dx = \int_S F \cdot n dS$$

donde n denota la normal unitaria exterior y dS es el elemento diferencial de la superficie en ∂V.

Si aplicamos el teorema a kF con $k : V \to \mathbb{R}$, $k \in C_c^1(V)$. Recordando que

$$\nabla \cdot (kF) = k\nabla \cdot F + \Delta k \cdot F$$

se tiene la fórmula de integración por partes

$$\int_V (k\nabla \cdot F) dV = \int_S (kF \cdot n) dS - \int_V \Delta k \cdot F.$$

Elegimos ahora $F = \Delta u$ con $u \in C^2(V) \cap C^1(\overline{V})$, recordando la identidad

$$\Delta u \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n},$$

se obtiene la **primera identidad de Green**

$$\int_V k(\Delta u) dV = \int_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_V (\nabla k \cdot \nabla u) dV. \tag{3.3}$$

3.2.1 Condiciones de Frontera de Dirichlet

Las ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera de Dirichlet son aquellas que en el contorno del problema la función se vuelve cero, la idea es resolver el problema en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega = \Gamma$$

Notemos que la función u en estos casos es una función derivable de soporte compacto (C_c^1), por lo tanto es natural que el espacio de soluciones $V = H_0^1(\Omega)$.

Para la solución de este problema lo haremos en el caso unidimensional apoyándonos en [1] y [3], y para el caso general será en [5].

En el caso unidimensional tomemos a $\Omega = (0,1)$, y sea $f \in L^2(\Omega)$. Entonces el problema de Dirichlet tiene la forma

$$\begin{cases} u'' = -f & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Ahora multiplicando a ambos lados por una función de prueba $v(x) \in H_0^1(\Omega)$ donde se anule en la frontera se tiene que

$$u''v = -fv,$$

e integrando a ambos lados

$$\int_0^1 -u''v\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Solucionando por partes hacemos $ds = u''$ y a $t = v$, así

$$-vu'\Big|_0^1 + \int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Notemos que nuestra función $v \in H_0^1$ el primer termino se anula y concluimos diciendo

$$\int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

Si u satisface 3.5 entonces se dice que u es solución débil de 3.4. Se dice que 3.5 es la forma variacional del problema 3.4.
Definamos

$$B(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \quad y \quad F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)$$

Note que si a la ecuación de la izquierda sumaramos $\int_0^1 u(x)v(x)dx$, obtendremos que

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1} = \int_0^1 uv + u'v'\,dx$$

es un producto interno en H_0^1, por lo tanto B es una forma bilineal, es acotada, pues aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para L^2 [2]se tiene

$$\begin{aligned} |B(u,v)| = \left| \int_0^1 u'v'dx \right| &\leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

y por la desigualdad de Poincaré (Teorema 3.1) se dice que B es coerciva.

$$B(u,u) = \int_0^1 (u')^2 dx = \|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{C^2}\|u\|_{H_0^1}^2.$$

Por otro lado tenemos que $F(v)$ es lineal por la linealidad de la integral, y es acotada por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |F(v)| = \left| \int_0^1 f(x)v(x)dx \right| &\leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

De esta manera aplicando El Teorema de Lax-Milgram (2.1), se dice que existe un único $u_0 \in H_0^1$ que cumple con 3.5. Siendo u_0 la única solución débil al problema 3.4. Además B es una forma simétrica así que por el Teorema 2.6.

$$J(u_0) = \frac{1}{2}B(u_0,u_0) - F(u_0) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u_0')^2(x)dx - f(x)u_0(x).$$

Ahora para el caso general, tomemos a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado, y sea $V = H_0^1(\Omega)$ el espacio de soluciones y $f \in L^2(\Omega)$, de esta manera el problema a solucionar se vuelve

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases} \tag{3.6}$$

Aplicando la misma técnica que en el caso unidimensional, tomemos un $v \in H_0^1(\Omega)$ y de esta manera

$$\int_\Omega (-\Delta u)v d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.7}$$

a la integral de la mano izquierda podemos aplicar la identidad de Green (3.3) y obtener

$$\int_\Omega (-\Delta u)v d\Omega = -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$$

[2]Ver capítulo 11 de [9].

Pero $-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma = 0$ pues v se anula en la frontera Γ. De esta manera 3.7 queda expresado como

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.8}$$

Así la ecuación 3.8 es la forma variacional del problema 3.6. Definiendo

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega \quad \text{y} \quad F(v) = \int_\Omega f v d\Omega$$

Nuevamente tomando la forma B y si sumáramos $\int_\Omega u \cdot v d\Omega$ tenemos el producto interno en H_0^1 denotado

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v + u \cdot v d\Omega$$

De esta manera B es bilineal, la acotación se tiene de idénticamente a la que se hizo en el caso unidimensional, la coercitividad es aplicando la desigualdad de Poincaré en su forma general

$$B(u,u) = \int_\Omega (\Delta u)^2 d\Omega = \|\Delta u\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{C^2} \|u\|_{H_1^0}^2.$$

Con F se debe replicar lo mismo en el caso unidimensional.
Aplicando nuevamente el Teorema de Lax-Milgram, encontramos que existe un único u_0 que cumple con 3.8. Recordemos que esta es la única solución débil.

3.2.2 Condiciones de Frontera Neumann

A diferencia de las condiciones de frontera de Dirichlet, la de Neumann se hacen sobre los valores de la derivada del contorno. En este caso es natural pensar que las soluciones se encuentran sobre H^1. El problema de Neumann es el siguiente: sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, tomemos al conjunto de soluciones $V = H^1$, y sea $f \in L^2(\Omega)$ entonces

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\delta u}{\delta n} = 0 & \text{en } \Gamma \end{cases} \tag{3.9}$$

De la misma manera que en el caso anterior multipliquemos el problema por una función $v \in H^1(\Omega)$ así

$$\int_\Omega -v\Delta u + uvd\Omega = \int_\Omega fvd\Omega \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Tomando la integral de parte izquierda y haciendo la identidad de Green 3.3 será

$$\int_\Omega -v\Delta u + uvd\Omega = -\int_\Gamma v\frac{\delta u}{\delta n}d\Gamma + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u d\Omega + \int_\Omega uvd\Omega$$

y de acuerdo a la condición de frontera $\int_\Gamma v\frac{\delta u}{\delta n}d\Gamma = 0$ así que el problema variacional queda resumido a

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + uvd\Omega = \int_\Omega fvd\Omega \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{3.10}$$

Y reescribiendo el problema tenemos que

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + uvd\Omega \quad y \quad F(v) = \int_\Omega fvd\Omega$$

Notemos que B es exactamente el producto interno de H^1, así que es trivialmente acotado y coercivo. Por otro lado $F(v)$ es lineal heredada de la integral y además acotada pues

$$|F(v)| = \left|\int_\Omega fvd\Omega\right| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

Así que por el Teorema de Lax Milgram, existe un único u_0 que soluciona el problema de manera débil.

Aunque cabe decir que la aplicación de este Teorema puede solucionar problemas de frontera no homogéneos (la frontera es igual a una función en L^2), a partir del Teorema de la traza [3] en espacio de Sobolev. Estos problemas se puede encontrar en el capitulo de VIII de [5].

3.3 El problema de Sturm-Lioville

El problema de Sturm-Lioville es un problema muy conocido en las ecuaciones diferenciales y la física, ya que tiene muchas variaciones en las cuales se puede resolver con ecuaciones ordinarias y parciales. Este problema inicia con la pregunta de

[3] Ver capitulo 4 de [5]

una cuerda vibrante donde se considera flexible y elástica de longitud 1. Denotaremos con $u(x,t)$ el desplazamiento transversal en punto $x \in [0,1]$ y en el instante $t \geq 0$. entonces un primer esbozo del problema radica en la ecuación

$$(\tau u_x)_x = \rho u_{tt}$$

Donde τ representa la tensión y ρ la densidad dependen de x. Al aplicar el método de variables separables al problema obtenemos

$$(\tau X')' + \lambda \rho X = 0$$

Cuando la densidad y la tensión son constantes, este problema se vuelve un problema de valores propios. Sin embargo cuando no es así se tiene el operador de Sturm-Lioville

Definición 3.7 (Operador de Sturm-Lioville). *Sea $u \in C^2[0,1]$ se define el operador de Sturm-Lioville*

$$\mathcal{L}_{p,q} u := -(pu')' + qu$$

con $p \in C^1[0,1]$, $p(x) > 0$ y $q \in C[0,1]$.

Este operador es muy importante en las ecuaciones diferenciales ordinarias, como se puede ver en el siguiente teorema

Teorema 3.3. *Toda ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden*

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \tag{3.11}$$

se puede escribir en la forma de Sturm-Lioville

$$\mathcal{L}_{p,q} y = F$$

para algunas funciones p, q y F siempre que $a_2 \in C[0,1]$ y $a_2 \neq 0$.

La demostración se deja como ejercicio al lector ya que esta es extensa, sin embargo la clave de esta es encontrar el factor integrante adecuado.

Lo que nos interesa a nosotros en este momento es encontrar solución a este problema con condiciones de Dirichlet. Entonces Supongamos que existe $\alpha > 0$ tal que $p \geq \alpha > 0$, $p \in C^1[0,1]$, $q \in C[0,1]$ y $f \in L^2(0,1)$ entonces

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{p,q} u = f & \text{en } [0,1] \\ u(1) = u(0) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Así el espacio de soluciones $V = H_0^1(0,1)$, por lo tanto debemos multiplicar en la ecuación por una función de soporte compacto v

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{p,q}u)v &= fv \quad \forall v \in H_0^1\\ (pu')'v + quv &= fv \quad \forall v \in H_0^1\\ \int_0^1 (pu')'v + quvdx &= \int_0^1 fvdx \quad \forall v \in H_0^1\end{aligned}$$

Integrando por parte la integral del lado izquierdo tenemos

$$-pu'v\big|_0^1 + \int_0^1 pu'v'dx + \int_0^1 quvdx = \int_0^1 fvdx \quad \forall v \in H_0^1$$

La expresión del lado izquierdo se anula por las condiciones de frontera de nuestro problema así que el problema variacional se resume a

$$\int_0^1 pu'v'dx + quvdx = \int_0^1 fvdx \quad \forall v \in H_0^1 \tag{3.13}$$

Encontrar una solución de esta ecuación significa encontrar una en el sentido débil a 3.12. Definiendo se tiene que

$$B(u,v) = \int_0^1 pu'v' + quvdx \quad \text{y} \quad F(v) = \int_0^1 fvdx$$

Si revisamos la forma B veremos que es bilineal, acotada y coerciva, en efecto

$$\begin{aligned}B(\alpha u + \beta w, v) &= \int_0^1 p(\alpha u + \beta w)'v' + q(\alpha u + \beta w)vdx\\ &= \int_0^1 \alpha pu'v' + \beta pw'v' + \alpha quv + \beta qwvdx\\ &= \int_0^1 \alpha pu'v' + \alpha quvdx + \int_0^1 \beta pw'v' + \beta qwvdx\\ &= \alpha B(u,v) + \beta B(w,v)\end{aligned}$$

Para la segunda componente

$$\begin{aligned}B(u, \alpha v + \beta z) &= \int_0^1 pu'(\alpha v + \beta z)' + qu(\alpha v + \beta z)dx\\ &= \int_0^1 \alpha pu'v' + \beta pu'z' + \alpha quv + \beta quzdx\\ &= \int_0^1 \alpha pu'v' + \alpha quvdx + \int_0^1 \beta pu'z' + \beta quzdx\\ &= \alpha B(u,v) + \beta B(u,z)\end{aligned}$$

así B es un forma bilineal, la acotación se obtiene de

$$\begin{aligned} |B(u,v)| &= \left|\int_0^1 pu'v'dx\right| + \left|\int_0^1 quvdx\right| \\ &\leq \int_0^1 |pu'v'|dx + \int_0^1 |quv|dx \end{aligned}$$

Como $p, q \in C[0,1]$, entonces sus normas son finitas así que existen constantes C_1 y C_2 tal que

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\text{máx}\,|p(x)|/x \in [0,1]\} \\ C_2 &= \{\text{máx}\,|q(x)|/x \in [0,1]\} \end{aligned}$$

de esta manera

$$\begin{aligned} |B(u,v)| &\leq C_1 \int_0^1 |u'v'|dx + C_2 \int_0^1 |uv|dx \\ &\leq C_1 \|u'\|_{L^2(0,1)} \|v'\|_{L^2(0,1)} + C_2 \|u\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \text{máx}(C_1, C_2)(\|u'\|_{L^2(0,1)} \|v'\|_{L^2(0,1)} + \|u\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)}) \\ &\leq \text{máx}(C_1, C_2)(\|u\|_{H_0^1(0,1)} \|v\|_{H_0^1(0,1)} + \|u\|_{H_0^1(0,1)} \|v\|_{H_0^1(0,1)}) \\ &= 2\,\text{máx}(C_1, C_2) \|u\|_{H_0^1(0,1)} \|v\|_{H_0^1(0,1)} \end{aligned}$$

Así B es acotado con constante $C = 2\,\text{máx}(C_1, C_2)$. Por último falta ver que es coerciva así que

$$\begin{aligned} B(u,u) &= \int_0^1 p(u')^2 dx + \int_0^1 qu^2 dx \\ &\geq \int_0^1 p(u')^2 dx \\ &\geq \alpha \int_0^1 (u')^2 dx \\ &= \alpha \|u'\|^2_{L^2(0,1)} \\ &\geq \alpha C^2 \|u\|^2_{H_0^1(0,1)} \end{aligned}$$

la ultima desigualdad se obtiene gracias a la desigualdad de Poincaré (3.1).Así B es coerciva con $\delta = \alpha C^2$.

Debemos comprobar que $F(v)$ es lineal y acotada,en efecto es lineal pues es heredada de la linealidad de la integral, y acotada pues

$$|F(v)| = \left|\int_0^1 fvdx\right| \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \leq \|f\|_{H_0^1(0,1)} \|v\|_{H_0^1(0,1)}$$

Donde la constante de acotación es $\|f\|_{H_0^1}$. De esta manera aplicando el Teorema de Lax-Milgram (2.1), tenemos que existe un único $u_0 \in H_0^1(0,1)$ que satisface el problema variacional (3.12), así este tiene solución en el sentido débil. Más aún como B es simétrico podemos hallar la minimización del problema variacional y decir que

$$J(u_0) = \frac{1}{2}B(u_0, u_0) - F(u_0) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u_0')^2(x) - f u_0(x) dx$$

De este modo encontramos que existe una solución única al problema de Sturm-Lioville con condiciones de Dirichlet, en un sentido físico esto nos dice que cada energía $f \in L^2$ que se le aplique a la cuerda tendrá una única vibración, y más aun la minima energía para que la cuerda vibre viene dada por $J(u_0)$.

A Algunos Espacios Duales

Como complemento de los espacios duales y espacios de Banach del capitulo 1. Se presentará las demostraciones de los espacios Duales [6] más representativos en los espaciós de Banach, los cuales son el espacio dual de $\mathbb{R}^n$, l^1 y l^p.

Definición A.1 (Isomorfismo). *Un **Isomorfismo** de un espacio X sobre un espacio normado $\tilde{\mathbb{X}}$ es una biyección de un operador lineal $T : X \to \tilde{\mathbb{X}}$ el cual preserva la norma, que es, para todo $x \in X$*

$$\|Tx\| = \|x\|$$

Teorema A.1 (El Espacio $\mathbb{R}^n$). *El espacio dual de $\mathbb{R}^n$ es $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Note que por el teorema 1.8 tenemos $\mathbb{R}^{n'} = \mathbb{R}^{n*}$, además cada $f \in \mathbb{R}^{n*}$ tiene representación de manera de combinación lineal [1]:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \gamma_k \qquad\qquad \gamma_k = f(e_k)$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz [2]

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k \gamma_k| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \right)^{1/2} \leq \|x\| \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \right)^{1/2}.$$

Si tomamos el supremum sobre toda x de norma 1 obtenemos

$$\|f\| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \right)^{1/2}$$

[1] Para ver la representación en la sección 2.9 de [6]
[2] Para ver la desigualdad de Cauchy-Schwarz en sección 1.2 de [6]

Sin embargo, para $x = (\gamma_1, \cdots, \gamma)$ la igualdad proviene del desigualdad de Cauchy-Schwarz anterior, en efecto debemos tener

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \right)^{1/2}$$

Esto prueba que la norma de f es la misma que la norma Euclidea, y $\|f\| = \|c\|$, donde $c = (\gamma_k) \in \mathbb{R}^n$. Así el mapeo de $(\mathbb{R}^n)^*$ sobre $\mathbb{R}^n$ definido como

$$\begin{aligned} f &\mapsto c \\ e_k &\mapsto f(e_k) = \gamma_k \end{aligned}$$

preserva la norma, como esta es lineal y biyectiva, esto es un isomorfismo. ∎

Teorema A.2 (Espacio l^1). *El espacio dual de l^1 es l^∞.*

Demostración. Una base de Schauder para l^1 es (e_k), donde $e_k = \delta_{kj}$ tiene 1 en la k-ésima posición y ceros en los demás sitios. Entonces cada $x \in l^1$ tiene una única representación

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k.$$

Consideremos cualquier $f \in (l^1)^*$, donde $(l^1)^*$ es el espacio dual de l^1. Como f es lineal y acotado,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k$$

donde el número $\gamma_k = f(e_k)$ se determinan de manera única por f. También $\|e_k\| = 1$ y

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\| = \|f\|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, en particular para

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |y_k| \leq \|f\|. \tag{A.1}$$

Así $(\gamma_k) \in l^\infty$.
Por otro lado, para cada $b = (\beta_k) \in l^\infty$ podemos obtener un correspondiente funcional lineal g en l^1. En efecto, debemos definir g sobre l^1 por

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k$$

donde $x = (\xi_k) \in l^1$. Entonces g es lineal, y la acotación se sigue de

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \beta_k| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |\beta_j| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\| \sup_{j\in\mathbb{N}} |\beta_j|.$$

Así $g \in l^{1'}$. Finalmente mostraremos que la norma de f es la norma del espacio l^∞. Tenemos

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k \right| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |\gamma_j| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\| \sup_{j\in\mathbb{N}} |\gamma_j|.$$

Tomando el supremum sobre todo x de norma 1, vemos que

$$\|f\| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |\gamma_j|.$$

Uniendo la desigualdad A.1 tenemos

$$\|f\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |\gamma_j|,$$

la cual es la norma de l^∞. Así esta formula puede ser escrita como $\|f\| = \|c\|_\infty$, donde $c = (\gamma_j) \in l^\infty$. Esto muestra que el mapeo lineal biyectivo de $(l^1)^*$ sobre l^∞ definido por $f \mapsto c = (\gamma_j)$ es un isomorfismo. ∎

Desafortunadamente, no podemos decir que el dual de l^∞ es l^1, sin embargo, del mismo método podemos ver que el dual de c_0 es l^1, donde c_0 es un subespacio particular de l^∞.

B El Teorema de Hahn-Banach

El teorema de Hahn-Banach, es uno de los pilares del análisis funcional, este Apéndice se dedicara a explicar el teorema y sus consecuencias, estos resultados se pueden estudiar de libros clásicos como [6], [12] y [10]. La idea fundamental de este Apéndice es dar el soporte teórico para el teorema que nos servirá en la sección 2.2.

Definición B.1 (Cadena). *Un **conjunto totalmente ordenado o cadena** es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada dos elementos del conjunto son comparables.*

Comenzaremos enunciando uno de los lemas más importantes de la matemáticas, como es el lema de Zorn, un resultado proveniente del axioma de elección. Fundamental en la demostración del Teorema de Hahn-Banch.

Lema B.1 (Lema de Zorn). Sea $M \neq \emptyset$ un conjunto parcialmente ordenado. Supongamos que cada cadena $C \subset M$ tiene una cota superior. Entonces M tiene un elemento maximal.

Definición B.2 (Funcional sublineal). *Sea p un funcional de valor real sobre un espacio vectorial $\mathbb{V}$ el cual es **subaditivo** , que es*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{V}$$

*y **positivo homogéneo**, que es para todo real $\alpha \geq 0$*

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \qquad \forall x \in \mathbb{V}$$

Ejemplo B.1. Sea $\mathcal{B}$ un espacio de Banach sobre un campo $\mathbb{K}$, entonces es fácil ver que la norma de este espacio es sublineal, pues por **N3** y **N4** se tiene que

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathcal{B}$$

Y para todo $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\|\alpha x\| = \alpha \|x\| \qquad \forall x \in \mathcal{B}$$

Ejemplo B.2. Sea el espacio vectorial l^∞, y sea $x = (\xi_n), y = (\eta_n) \in l^\infty$, entonces $p(x) = \limsup_{n\to\infty} \xi_n$ es un funcional sublineal. En efecto note que por propiedades del limite superior se cumple

$$p(x,y) = \limsup_{n\to\infty}(\xi_n + \eta_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \xi_n + \limsup_{n\to\infty} \eta_n = p(x) + p(y).$$

Y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$p(\alpha x) = \limsup_{n\to\infty}(\alpha\xi_n) = \alpha \limsup_{n\to\infty} \xi_n = \alpha p(x).$$

Observación B.1. Sea $M = \{x \in X | p(x) \leq \gamma, \gamma \geq 0\}$ es un conjunto convexo para $\alpha \in [0,1]$ y para $x, y \in X$ se cumple que

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y) \leq \alpha\gamma + (1-\alpha)\gamma = \gamma$$

Teorema B.1 (Teorema de Hahn-Banach (Extensión de funcionales lineales)). *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real y p un funcional sublineal sobre $\mathbb{V}$. Además sea f un funcional lineal el cual esta definido sobre un subespacio $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ y satisface*

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathbb{W} \tag{B.1}$$

Entonces f tiene una extensión $\tilde{f}$ de $\mathbb{W}$ a $\mathbb{V}$ que satisface

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathbb{V} \tag{B.2}$$

que es, $\tilde{f}$ es un funcional lineal sobre $\mathbb{V}$, satisface B.2 sobre $\mathbb{V}$ y $\tilde{f}(x) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{W}$.

Demostración. El procedimiento seguirá 3 pasos fundamentales a demostrar:

(a) El conjunto E de todas las extensiones lineales g de f que satisfacen $g(x) \leq p(x)$ sobre su dominio $\mathfrak{D}(g)$ puede ser parcialmente ordenado y por el lema de Zorn existe un elemento maximal $\tilde{f}$ de E.
(b) $\tilde{f}$ esta definido en todo el espacio $\mathbb{V}$.
(c) se probará una relación auxiliar que se usará en (b).

(a) Sea E el conjunto de todas las extensiones g de f el cual satisface la condición

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathfrak{D}(g)$$

Es claro que $E \neq \emptyset$ pues f es extensión de si mismo, así $f \in E$. Sobre E podemos definir un orden parcial por

$$g \leq h \qquad h \text{ es una extensión de } g$$

que es por definición $\mathfrak{D}(g) \subset \mathfrak{D}(h)$ y $h(x) = g(x)$ para cada $x \in \mathfrak{D}(g)$. En cualquier cadena $C \subset E$ definimos $\tilde{g}$ como

$$\tilde{g}(x) = g(x) \quad g \in C, \forall x \in \mathfrak{D}(g)$$

note que por definición cada $g \in C$ es un operador lineal con rango en $\mathbb{R}$, y por otro lado definimos

$$\mathfrak{D}(\tilde{g}) = \bigcup_{g \in C} \mathfrak{D}(g)$$

es un espacio vectorial, pues C es una cadena entonces todos sus elementos son comparables, y sus dominios son uniones dos a dos que por definición son espacios vectoriales. Así $\tilde{g}$ es un funcional lineal. Esta definición no es ambigua . En efecto, para $x \in \mathfrak{D}(g_1) \cap \mathfrak{D}(g_2)$ con $g_1, g_2 \in C$ tenemos que $g_1(x) = g_2(x)$, y como C es cadena se cumple que $g_1 \leq g_2$ o $g_2 \leq g_1$. Por la definición de los dominios se tiene que $g \leq \tilde{g}$ para todo $g \in C$. Así $\tilde{g}$ es una cota superior de C. Como $C \subset E$ era una cadena arbitraria , por el Lema de Zorn (Lema B.1), esto implica que E tiene un elemento maximal $\tilde{f}$. Por definición de E, esta es una extensión de f el cual cumple

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathfrak{D}(\tilde{f}). \tag{B.3}$$

(b) Mostraremos ahora que $\mathfrak{D}(\tilde{f}) = \mathbb{V}$. Supongamos que esto es falso así $\mathfrak{D}(\tilde{f}) \subset \mathbb{V}$. Entonces podemos escoger un $y_1 \in \mathbb{V} - \mathfrak{D}(\tilde{f})$ y consideremos el subespacio Y_1 de $\mathbb{V}$ que atraviesa $\mathfrak{D}(\tilde{f})$ y y_1. Note que $y_1 \neq 0$ pues $0 \in \mathfrak{D}(\tilde{f})$. Cualquier $x \in Y_1$ se puede escribir como

$$x = y + \alpha y_1 \quad y \in \mathfrak{D}(\tilde{f}).$$

Esta representación es única. En efecto, $y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \beta y_1$ con $\tilde{y} \in \mathfrak{D}(\tilde{f})$ implica $y - \tilde{y} = (\beta - \alpha) y_1$, como $y_1 \notin \mathfrak{D}(\tilde{f})$ entonces la única opción que queda es $y - \tilde{y} = 0$ y $\beta - \alpha = 0$. Esto muestra la unicidad.

Un funcional g_1 sobre Y_1 es definido por

$$g_1(x) = g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c \tag{B.4}$$

donde c es cualquier constante real. Este funcional es lineal, en efecto para $x, z \in Y_1$ y $\alpha, \beta, \xi, \eta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} g(\eta x + \xi z) &= g(\eta(y + \alpha y_1) + \xi(y_2 + \beta y_1) \\ &= g(\eta y + \eta\alpha y_1 + \xi y_2 + \xi\beta y_1) \\ &= g((\eta y + \xi y_2) + (\eta\alpha + \xi\beta) y_1) \\ &= \tilde{f}(\eta y + \xi y_2) + (\eta\alpha + \xi\beta)c \\ &= (\eta(\tilde{f}(y) + \alpha c)) + (\xi(\tilde{f}(y_2) + \beta c)) \\ &= \eta g(y + \alpha y_1) + \xi g(y_2 + \beta y_1) \\ &= \eta g(x) + \xi g(z) \end{aligned}$$

Además, para $\alpha = 0$ tenemos $g_1(y) = \tilde{f}(y)$. Note que como definimos a Y_1, se cumple que $\mathfrak{D}(\tilde{f}) \subset \mathfrak{D}(g_1)$, entonces se dice que g_1 es extensión propia de $\tilde{f}$ y $\tilde{f}(x) \leq g_1(x)$. En consecuencia, si probamos que $g_1 \in E$ podemos mostrar que

$$g_1(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathfrak{D}(g_1), \tag{B.5}$$

esto contradice el hecho que $\tilde{f}$ es máximo, por lo tanto se prueba que $\mathfrak{D}(\tilde{f}) = \mathbb{V}$.

(c) En consecuencia, debemos finalmente mostrar que g_1 con un c adecuado en (B.4) satisface (B.5).

Consideremos cualquier w y z en $\mathfrak{D}(\tilde{f})$. Por (B.3) y la sublinealidad obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{f}(w) - \tilde{f}(z) = \tilde{f}(w - z) &\leq p(w - z) \\ &= p(w + y_1 - y_1 - z) \\ &\leq p(w + y_1) + p(-y_1 - z) \\ -p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) &\leq p(w + y_1) - \tilde{f}(w) \end{aligned}$$

donde y_1 es fijo. Como w no aparece en la parte izquierda de la ecuación y z no esta en la parte derecha. La desigualdad se mantiene si en izquierda hallamos el supremo de $z \in \mathfrak{D}(\tilde{f})$, llamemos m_0 a este supremo, y a la parte derecha hallemos el ínfimo de todos los $w \in \mathfrak{D}(\tilde{f})$ y a este llamemos m_1. Entonces note que $m_0 \leq m_1$ pues $m_0 \leq p(w + y_1) - \tilde{f}(w)$ y $-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq m_1$ por la desigualdad mostrada anteriormente se concluye que $m_0 \leq m_1$, y para un c con $m_0 \leq c \leq m_1$, tenemos

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq c \quad \forall z \in \mathfrak{D}(\tilde{f}) \tag{B.6}$$

$$c \leq p(w + y_1) - \tilde{f}(y) \quad \forall w \in \mathfrak{D}(\tilde{f}). \tag{B.7}$$

Probemos (B.5) para α negativo en (B.4) y luego con α positivo. Para $\alpha < 0$ usamos (B.6) reemplazando a z por $\alpha^{-1}y$, que es

$$-p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right) \leq c.$$

Multiplicando por $-\alpha > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) + \tilde{f}(y) &\leq -\alpha c \\ -\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) &\geq \tilde{f}(y) + \alpha c. \end{aligned}$$

Por esto y (B.4), usando $y + \alpha y_1 = x$, obtenemos la desigualdad deseada

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq -ap\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) = p(\alpha y_1 + y) = p(x)$$

Para $\alpha = 0$ tenemos que $x \in \mathfrak{D}(f)$ y no hay nada que probar. Para $\alpha > 0$ usamos (B.7) reemplazando w por $\alpha^{-1}y$ esto sigue

$$c \leq p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right).$$

Multiplicando por $\alpha > 0$ tenemos

$$\alpha c \leq \alpha p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y)$$

Por (B.4)

$$g_1(x) = \tilde{f} + \alpha c \leq p(x).$$

Así queda todo totalmente demostrado. ∎

Ejemplo B.3. Consideremos al funcional sublineal $p(\mathbf{x})$ como la norma $\|(x_1, x_2)\|$ en $\mathbb{R}^2$ entonces tomemos el funcional lineal en $f(x) = -\frac{1}{2}x$ note que $\mathfrak{D}(f) = \mathbb{R}$, es claro que

$$f(x) = -\frac{1}{2}x_1 \leq \|(x_1, x_2)\| = p(\mathbf{x})$$

El teorema de Hahn-Banach asegura la existencia de una extensión $\tilde{f}$ de manera que $\tilde{f}(x) = f(x)$ cuando $x \in \mathbb{R}$, esta extensión es

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|x_1, x_2\| = p(\mathbf{x})$$

y en el plano $\tilde{f}(\mathbf{x}) = 0$ tenemos a $f(x)$.

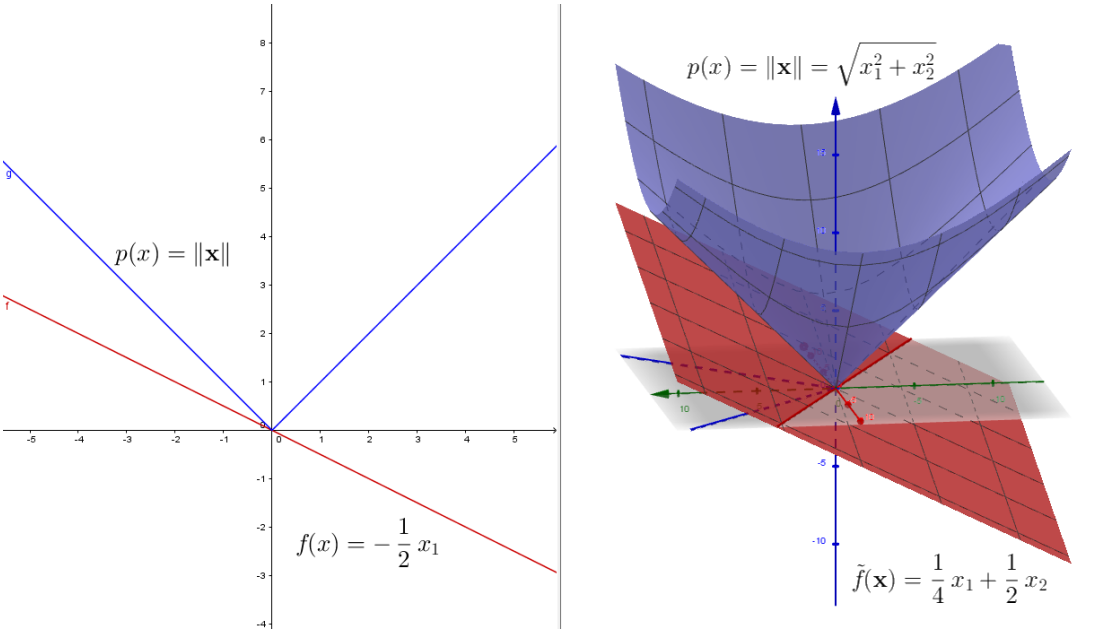


Figura B.1: Gráfica del ejemplo B.3

Teorema B.2 (Teorema de Hahn Banach (Generalizado)). *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real o complejo y p un funcional sublineal sobre $\mathbb{V}$. Además, sea f un funcional lineal el cúal esta definido sobre un subespacio $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ y satisface*

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in \mathbb{V}. \tag{B.8}$$

Entonces f tiene una extensión $\tilde{f}$ para $\mathbb{W}$ en $\mathbb{V}$ que satisface

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in \mathbb{V}. \tag{B.9}$$

Demostración. **(a)** Espacio vectorial real. Si $\mathbb{X}$ es real, la situación es simple. Pues (B.8) implica que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in Z$. Así por el Teorema De Hahn-Banach (Teorema B.1) $\tilde{f}$ es una extensión lineal para $\mathbb{W}$ a $\mathbb{V}$ que cumple

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathbb{V},$$

además que

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x)$$

que es, $\tilde{f}(x) \geq -p(x)$. Así $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ y se prueba (B.9).

(b) Espacio vectorial complejo. Sea $\mathbb{V}$ complejo. Entonces $\mathbb{W}$ es un espacio vectorial complejo, también. Así f es de valor complejo, y podemos escribir

$$f(z) = f_1(z) + i f_2(z) \quad \forall z \in \mathbb{W}$$

donde f_1 y f_2 son de valor real. Por un momento consideremos a $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ como espacios vectoriales reales y denotemos esto por $\mathbb{V}_r$ y $\mathbb{W}_r$, respectivamente; esto simplemente significa que restringimos la multiplicación por escalar a los números reales (en lugar de los números complejos). Como f es lineal sobre $\mathbb{W}$ y f_1,f_2 son de valor real, f_1 y f_2 son funcionales sobre $\mathbb{W}_r$. También $f_1 \leq |f(x)|$ porque la parte real de un número complejo no puede exceder su valor absoluto. Así por (B.8),

$$f_1 \leq p(x) \quad \forall x \in \mathbb{W}.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach (B.1) existe una extensión lineal $\tilde{f}_1$ de f_1 de $\mathbb{W}_r$ a $\mathbb{V}_r$ tal que

$$\tilde{f}_1(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathbb{V}$$

Esto se encarga de f_1, ahora el turno es para f_2. Regresemos a $\mathbb{W}$ y usando $f = f_1 + if_2$, tenemos que para cada $x \in \mathbb{W}$

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = -f_2 + if_1 = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix).$$

Como es una igualdad de complejos, las partes reales deben ser iguales de esta manera

$$f_2 = -f_1(ix). \tag{B.10}$$

Así que para todo $x \in \mathbb{V}$ tenemos el conjunto

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix) \tag{B.11}$$

Vemos por (B.10) que $\tilde{f}(x) = f(x)$ sobre $\mathbb{W}$. Esto muestra que $\tilde{f}$ es una extensión de f desde $\mathbb{W}$ hacia $\mathbb{V}$. Nuestra tareas restantes es probar que

(i) $\tilde{f}$ es un funcional lineal en espacio vectorial complejo $\mathbb{V}$,
(ii) $\tilde{f}$ satisface (B.9) sobre $\mathbb{V}$.

Para (i) puede ser visto siguiendo el cálculo el cual se usa (B.11) y la linealidad de $\tilde{f}_1$ sobre el espacio vectorial real $\mathbb{V}_r$; aquí $a + ib$ con a y b real es cualquier escalar complejo:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}((a+ib)x) &= \tilde{f}_1(ax + ibx) - i\tilde{f}_1(iax - bx) \\
&= a\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix) - i[a\tilde{f}_1(ix) - b\tilde{f}_1(x)] \\
&= (a+ib)[\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)] \\
&= (a+ib)\tilde{f}(x).
\end{aligned}$$

Probemos (ii). Para cualquier x tal que $\tilde{f}(x) = 0$ esto es desde $p(x) \leq 0$ por la sublinealidad. Sea x tal que $\tilde{f} \neq 0$. Entonces podemos escribir , usando la forma polar de cantidades complejas,

$$\tilde{f}(x) = |\tilde{f}|e^{i\theta}, \quad \text{así} \quad |\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(x)e^{-i\theta} = \tilde{f}(e^{-i\theta}x).$$

Como $|\tilde{f}(x)|$ es real, la última expresión es real y así la igualdad es esta parte real. Así por la sublinealidad

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

Así queda completada la demostración

Definición B.3 (Conjuntos absorbentes). *Decimos que $A \subset \mathbb{V}$ subconjunto de un espacio vectorial es absorbente si para todo $x \in \mathbb{V}$ existe un $t > 0$ de manera que $tx \in A$. Note que todo conjunto absorbente contiene el 0.*

Ejemplo B.4. Tomemos a $S^1 \cup \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, entonces para cada punto $x \in \mathbb{R}^2$, existe un $t = \dfrac{1}{\|x\|}$ de manera que $tx \in S^1$.

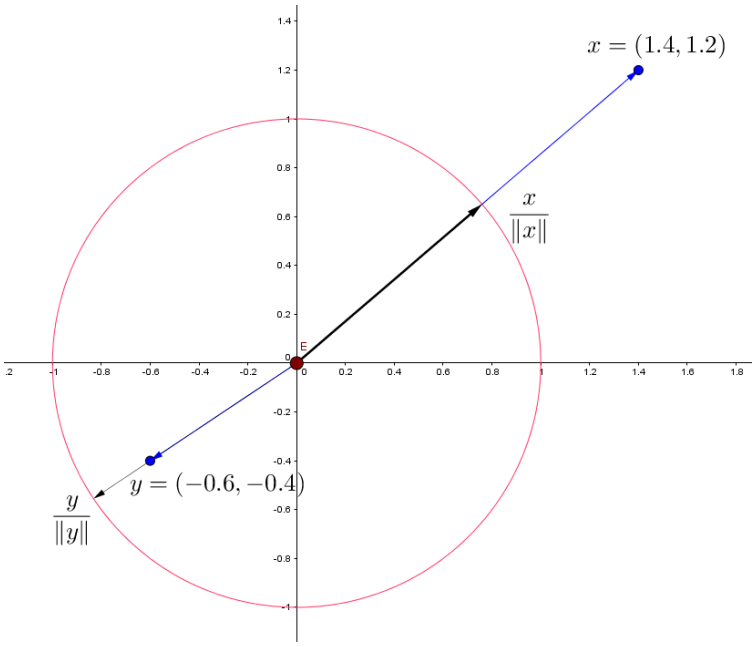


Figura B.2: Grafica del Ejemplo B.4

Definición B.4 (Funcional de Minkowski). *Consideremos un conjunto convexo $A \subset \mathbb{V}$ el cual es absorbente. El funcional de Minkowsky μ_A se define como*

$$\mu_A(x) = \text{ínf}\left\{ t > 0 \mid \frac{x}{t} \in A \right\} \quad \forall x \in X$$

Note que $\mu_A(x) < \infty$ y es fácil probar que es un funcional sublineal.

Ejemplo B.5. En la imagen B.3 podemos ver al conjunto convexo A, y todo el conjunto de puntos en linea punteada donde pertenece x, tendrá un funcional de Minkowski $\mu_A(x) = 2$, esta será una curva de nivel.

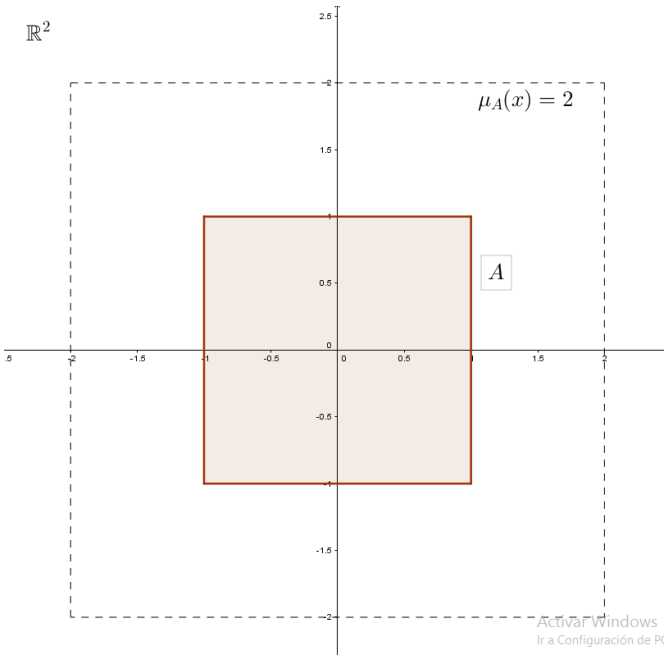


Figura B.3: Gráfica del ejemplo B.5

En general el funcional de Minkowski para el conjunto A, viene dado por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq |y| \\ |y| & \text{si } |x| < |y| \end{cases}$$

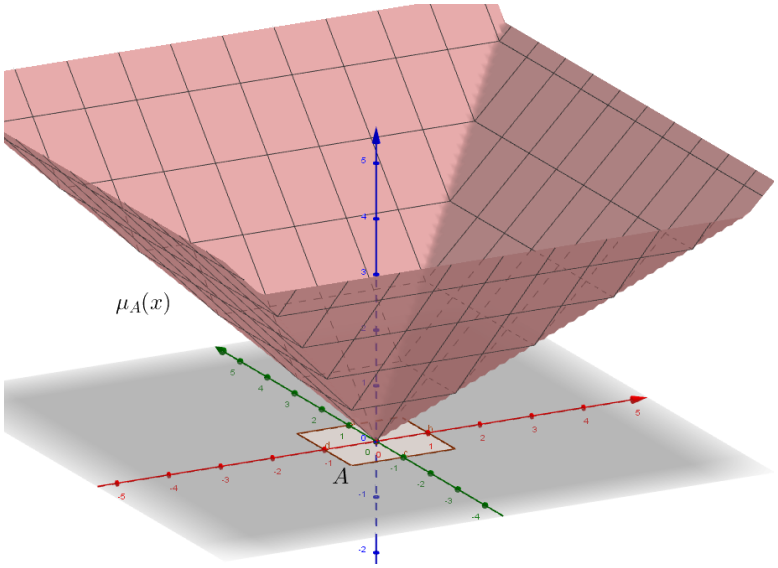


Figura B.4: Funcional de Minkowski de A

Definición B.5 (Conjunto Balanceado). *Sea X un espacio vectorial, $\mathbb{K}$ su campo subyacente. Se dice que un conjunto en X es balanceado si*

$$\lambda S \subset S \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

tal que

$$|\lambda| \leq 1$$

donde

$$\lambda S = \{\lambda x | x \in S\}$$

Ejemplo B.6. En $\mathbb{R}^n$ cualquier recta que pase por el 0, es un conjunto balanceado. En general en $\mathbb{R}^n$ el balanceado más pequeño sera el punto centrado en 0.

Ejemplo B.7. Existe una manera de que un conjunto no balanceado lo sea, en la figura B.4 tomemos al conjunto A como una recta lejos del 0 en $\mathbb{R}^2$, claramente no es balanceado, pero si a cada punto, lo conectamos con su simétrico pasando por el 0, obtendremos la parte sombreada que la llamaremos A_b, y A_b es un conjunto balanceado.

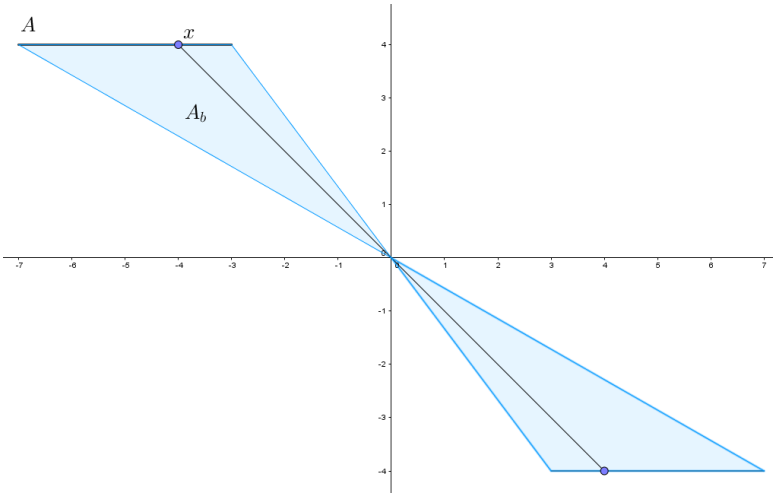


Figura B.5: Conjunto Balanceado no convexo

Definición B.6 (Absolutamente convexo). *Un subconjunto S es un espacio vectorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{K}$ es* ***absolutamente convexo*** *si este es convexo y balanceado.*

Definición B.7 (Convexidad local). *Un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice que es* ***localmente convexo*** *si existe una base de vecindades en $\mathbb{V}$ que consiste de conjunto convexos.*

Lema B.2. Un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es normable entonces es localmente convexo.

Demostración. Si $\mathbb{V}$ es normable, y si $\|\cdot\|$ es una norma compatible con la topología de $\mathbb{V}$, entonces la bola abierta $\{x : \|x\| < 1\}$ es convexa y además acotada por Teorema 1.4. ∎

Teorema B.3 (Existencia de una familia de funcionales sublineales). *Supongamos que $\mathfrak{B}$ es una base local convexa balanceada de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Asociemos a cada $V \in \mathfrak{B}$ el funcional de Minkowski μ_V. Entonces $\{\mu_V : V \in \mathfrak{B}\}$ es una familia separable se funcionales sublineales sobre $\mathbb{V}$.*

Demostración. Para cada vecindad V se tiene que es convexa, balanceada y absorbente, tomemos el funcional de Minkowski μ_V. Si $x \in \mathbb{V}$ y $x \neq 0$, asumamos que $x \notin V$ para cada $V \subset \mathfrak{B}$. Para cada V tenemos $\mu_V(x) \neq 1$. Así $\{\mu_V\}$ es una familia separable. Si $x \in V$, entonces $tx \in V$ para algún $t > 1$, pues V es abierto. Así $\mu_V < 1$ en V. Para $r > 0$, por la sublinealidad del funcional de Minkowski se tiene que

$$\|\mu_V(x) - \mu_V(y)\| \leq \mu_V(x - y) < r$$

si $x - y \in rV$. Esto prueba la continuidad de cada μ_V. ∎

A continuación daremos una seria de teoremas y corolarios previos para demostrar nuestro teorema de mayor importancia, estos teoremas son implicaciones directas del Teorema de Hahn-Banach Generalizado (B.2).

Teorema B.4 (Existencia del Funcional lineal continuo no trivial). *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real o complejo, sea x_0 un punto de $\mathbb{V}$ y $p(x)$ un funcional sublineal sobre $\mathbb{V}$. Entonces existe un funcional lineal continuo F sobre $\mathbb{V}$ tal que*

$$F_0(x_0) = p(x_0) \quad y \quad |F_0(x)| \leq p(x)$$

para todo $x \in \mathbb{V}$.

Demostración. Sea M el conjunto de todos los elementos ax_0, ahora definamos a f por $f(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$. Entonces f es lineal, en efecto para $\alpha x_0, \beta x_0 \in M$ y para $\gamma \in (\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$ se cumple

$$\begin{aligned} f(\gamma(\alpha x_0) + \beta x_0) &= f((\gamma\alpha + \beta)x_0) \\ &= (\gamma\alpha + \beta)p(x_0) \\ &= [\gamma\alpha p(x_0) + \beta p(x_0)] \\ &= \gamma f(\alpha x_0) + f(\beta x_0). \end{aligned}$$

Además

$$|f(\alpha x_0)| = |\alpha p(x_0)| = p(\alpha x_0).$$

Asi por el Teorema De Hahn-Banach Generalizado (B.2), existe un extensión F_0 de f tal que $|F_0(x)| \leq p(x)$ sobre $\mathbb{V}$. Si hacemos $x = 0$ tenemos que F_0 es continua en ese punto y por el teorema (1.9) parte b, $F(x)$ es continua en todo $\mathbb{V}$. ∎

Ejemplo B.8. Tomemos a $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, y tomemos a $p(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$, para un punto $x_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que existe un funcional lineal continuo

$$F_0(\xi_1, \xi_2) = \frac{x_{0_1}\xi_1 + x_{0_1}\xi_2}{\sqrt{x_{0_1}^2 + x_{0_2}^2}}.$$

Es sencillo ver que

$$F_0(x_0) = F(x_{0_1}, x_{0_1}) = \sqrt{x_{0_1}^2 + x_{0_1}^2} = p(x_0),$$

y

$$F_0(x) = F(\xi_1, \xi_2) = \frac{x_{0_1}\xi_1 + x_{0_1}\xi_2}{\sqrt{x_{1_0}^2 + x_{2_0}^2}} \leq \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = p(x)$$

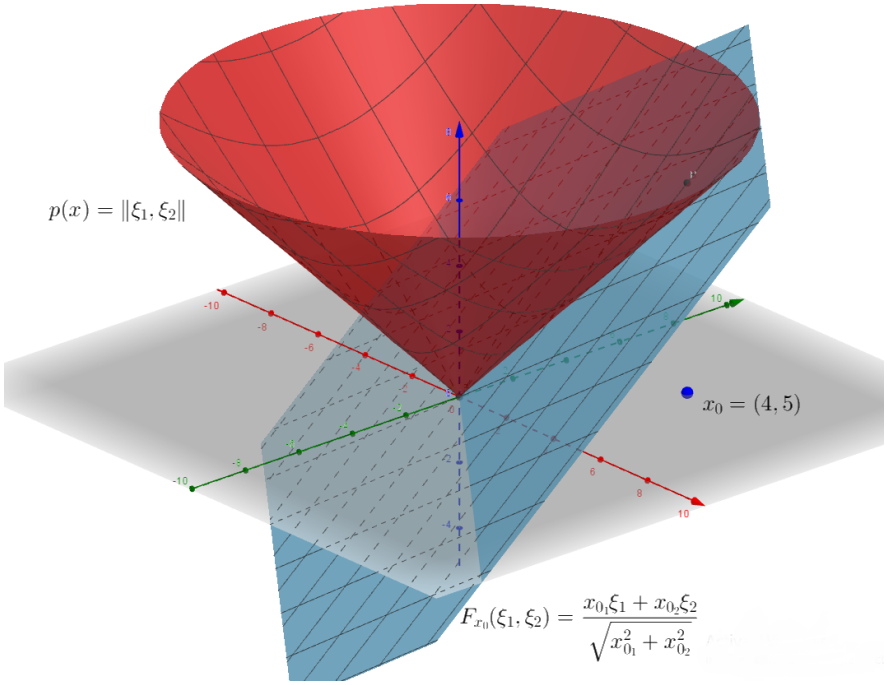


Figura B.6:

Corolario B.1. Sea $\mathbb{V}$ un espacio localmente convexo y $x_0 \neq 0$ un elemento de $\mathbb{V}$. Entonces existe un funcional sublineal continuo p sobre $\mathbb{V}$ tal que $p(x_0) \neq 0$. Además por el teorema (B.4), existe un funcional lineal continuo f_0 sobre $\mathbb{V}$ tal que

$$f_0(x_0) = p(x_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad |f_0(x)| \leq p(x)$$

sobre $\mathbb{V}$.

Demostración. Como $x \neq 0$ entonces por el Teorema (B.3) existe una familia $p(x)$ de funcionales sublineales continuos, de esta manera alguno de estos debe ser distinto de 0. y por el Teorema (B.4), existe un f_0 que cumple con las hipótesis del Teorema. ∎

Para cerrar este apéndice demostraremos el teorema clave para la demostración del Teorema de Lax-Milgram, una variación del Teorema de Hahn-Banach demostrada por Mazur, en donde se separa conjuntos balanceados y convexos por medio de un funcional.

Teorema B.5 (Teorema de Mazur). *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real o complejo, localmente convexo, y sea $\mathbb{M}$ un subconjunto cerrado, convexo y balanceado. Entonces, para cada $x_0 \notin \mathbb{M}$, existe un funcional lineal continuo f_0 sobre $\mathbb{V}$ tal que*

$$f_0(x_0) > 1 \quad y \quad |f_0(x)| \leq 1$$

sobre $\mathbb{M}$.

Demostración. Como $\mathbb{M}$ es cerrado, entonces existe una V vecindad del 0, la cual es convexa y balanceada tal que $\mathbb{M} \cap (x_0 + V) \neq \emptyset$. Como V es balanceado y convexo, tenemos $\left(\mathbb{M} + \frac{V}{2}\right) \cap \left(x_0 + \frac{V}{2}\right) \neq \emptyset$. El conjunto $\left(x_0 + \frac{V}{2}\right)$ siendo una vecindad de x_0, el cerrado U de $\left(\mathbb{M} + \frac{V}{2}\right)$ no contiene a x_0. Como $0 \in \mathbb{M}$, entonces U es una vecindad del 0 cerrada, convexa y balanceada, porque U contiene $\frac{V}{2}$ como un subconjunto. Sea μ_U el funcional de Minkowski sobre U. Como U es cerrado, tenemos, para cualquier $x_0 \notin U$, $\mu_U(x_0) > 0$ y $\mu_U(x) \leq 1$, para todo $x \in U$.
Así, existe , por Corolario B.1, un funcional lineal continuo f_{x_0} sobre $\mathbb{V}$ tal que $f_{x_0}(x_0) = \mu_U(x_0) > 1$ y $|f_{x_0}(x)| \leq \mu_U(x)$ sobre $\mathbb{V}$. En particular, $|f_{x_0}(x)| \leq 1$ sobre M. ∎

Ejemplo B.9. Tomemos a $\mathbb{V} = \mathbb{R}$ y para $\mathbb{M} = [-2, 2]$ este es convexo y balanceado, escojamos un punto $x_0 = 5$, como el Teorema de Mazur es constructivo, entonces tomemos a escojamos V=(-1,1), de manera que $[-2, 2] \cap (4, 6) = \emptyset$.

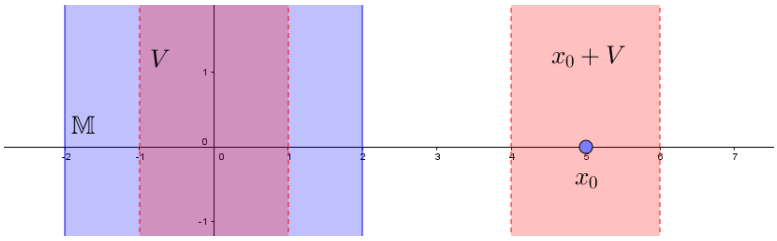


Figura B.7: Construcción del Teorema B.5 parte 1.

Luego haremos los conjuntos tales que $[-2.5, 2.5] \cup (4.5, 5.5) \neq \emptyset$ y llamemos al $U = [-2.5, 2.5]$, aplicando el funcional de Minkowski a U, así que $\mu_U(x) = \frac{1}{2.5}|x|$.

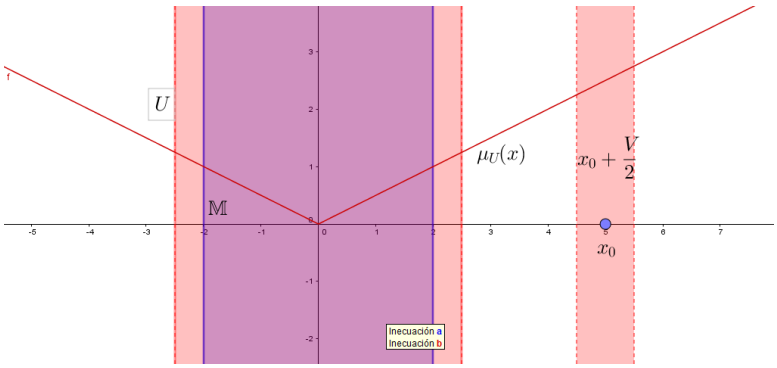


Figura B.8: Construcción del Teorema B.5 parte 2.

Por último se asegura un funcional lineal continuo $f_0(x_0)$ tal que $f_0(x_0) > 1$ y $|f_0(x)| \leq \mu_U(x)$. así que un funcional que serviría seria

$$f_1(x) = \frac{1}{2.5}x,$$

Notemos que este funcional cambia de acuerdo al V que escojamos que a su vez

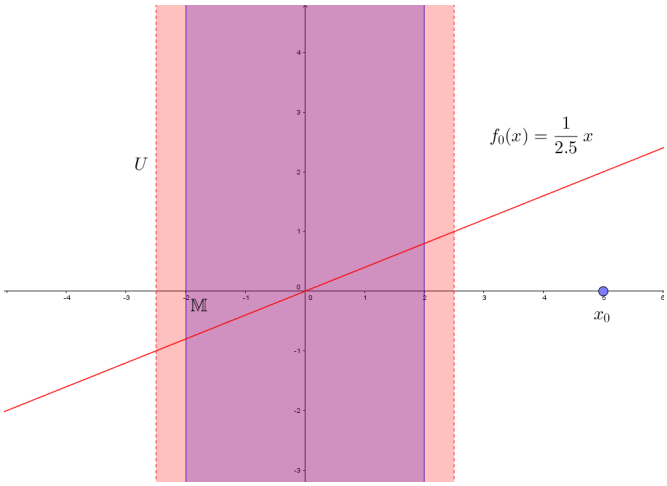


Figura B.9: Imagen de funcional de Teorema B.5.

depende del x_0, entonces no sirve la misma escogencia de la vecindad V cuando el punto $x_0 = 2.5$, tomando a $V = (-0.25, 0.25)$ el funcional será

$$f_2(x) = \frac{1}{1.125}$$

Así que se puede ver que a medida que $x_0 \to \mathbb{M}$, la vecindad $V \to (0, 0)$, y de los

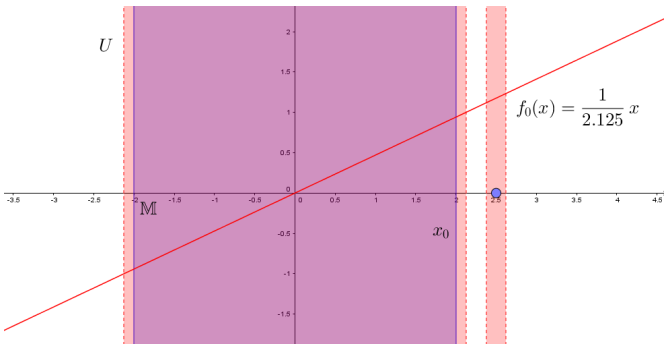


Figura B.10: Imagen de funcional de Teorema B.5.

funcionales f_n convergen uniformemente a

$$f_0 = \frac{1}{2}x.$$

Y este es el funcional que asegura el Teorema de Mazur, sin embargo hay que aclarar que no único pues $f_0 = \frac{-1}{2}x$ cumple también con el teorema.

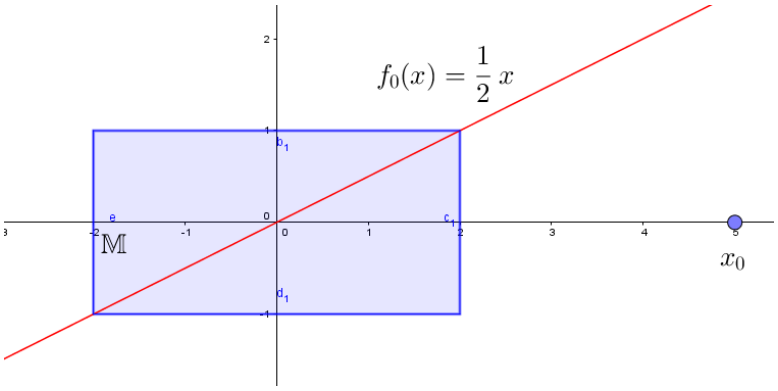


Figura B.11: Imagen de funcional de Teorema B.5.

Corolario B.2. Sea $\mathbb{M}$ un subespacio lineal cerrado de un espacio vectorial localmente convexo $\mathbb{V}$. Entonces, para cualquier $x_0 \in \mathbb{V} - \mathbb{M}$, existe un funcional lineal continuo f_0 sobre $\mathbb{V}$ tal que

$$f_0(x_0) > 1 \quad \text{y} \quad f_0(x) = 0$$

con $x \in \mathbb{V}$.

Demostración. Como $\mathbb{M}$ es subespacio vectorial, entonces este es un conjunto balanceado y hereda de $\mathbb{V}$ el hecho de ser localmente convexo, así que $\mathbb{M}$ es un subconjunto cerrado, balanceado y convexo. Entonces por el Teorema B.5 existe un funcional f_0 sobre $\mathbb{V}$ tal que

$$f_0(x_0) > 1 \quad y \quad |f_0(x)| \leq 1,$$

para $x \in \mathbb{M}$. En particular $|f_0(x)| = 0$, por lo tanto $f_0(x) = 0$. ∎

Observación B.2. Lo necesario para demostrar el Teorema de Lax-Milgram es una versión más débil del Corolario B.2, pues lo haremos sobre un espacio de Banach $\mathcal{B}$, por el Lema B.2 sabemos que $\mathcal{B}$ es localmente convexo.

Conclusiones

- Se pudo constatar que el Teorema de Lax-Milgram no solo se compone de una riqueza matemática, también lo tiene en las aplicaciones, pues apesar de ser un teorema proveniente de la consecuencia del Análisis funcional, su aplicación a las ecuaciones diferenciales facilitan encontrar una única solución a estas, sin embargo también generaliza el Teorema de Representación de Riesz a cualquier forma sesquilineal, más ún es equivalente si se tiene que la formas es bilineal y simétrica.

- En cuanto a las condiciones del Teorema de Lax-Milgram, se puede decir que la más importante es que la forma sea coerciva, es notoria la exigencia de esta ya que es sencillo encontrar formas que no lo son, también que se garantice la existencia de una solución única no implica que la forma tenga que ser coerciva, y solo se cumple la doble implicación cuando se debilita el Teorema con la forma bilineal simétrica.

- Aunque se presentan 3 demostraciones distintas del Teorema de Lax-Milgram, es claro que en ninguno de los casos se puede excluir por completo el Teorema de Representación de Riesz, lo que muestra es el pilar fundamental a la hora de demostrar el Teorema de Lax Milgram, además a medida que se depende menos de este teorema, se necesita el apoyo de otros teoremas de igual o mayor importancia (Teorema de Hanh-Banach y el Teorema del punto fijo de Banach).

- Se concluye que aunque el Teorema de Lax-Milgram resuelve un número importante de problemas teóricos y aplicativos, en las ecuaciones de Poisson y en el problema de Sturm-Lioville presenta limitantes como que la función $f \in L^2$, para que las soluciones estén en un espacio de Hilbert, si estuviera en otro espacio, de seguro el Teorema de Lax-Milgram no serviría, también en las condiciones de Frontera del problema, si este no fuera de Dirichlet o Neumann, se vería

obligado a resolver el problema por otros métodos como los son la Alternativa de Fredholm.

Finalmente en nuestras aplicaciones se puede ver que las soluciones a las ecuaciones diferenciales planteadas son soluciones en el sentido débil, encontrar una solución a estos problemas en el sentido clásico ya conlleva a otro problema de la ecuaciones diferenciales que se llama la regularización del espacio.

Bibliografía

[1] David Álvarez Meliz. El teorema de lax-milgram, generalizaciones y aplicaciones., 2011.

[2] Robert G Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 2014.

[3] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[4] José Francisco Caicedo. *Cálculo avanzado*. Univ. Nacional de Colombia, 2005.

[5] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Volume 2 Funtional and Variotional Methods*. Springer Science & Business Media, 2012.

[6] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. wiley New York, 1978.

[7] Peter D. Lax. *Functional analysis*. Wiley-Interscience, 1976.

[8] Rosa Pardo San Gil López Gómez, Julian. *Análisis no Lineal*. 2008.

[9] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-Hill New York, 1964.

[10] Walter Rudin. *Functional analysis. International series in pure and applied mathematics*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[11] Walter A Strauss. *Partial differential equations*, volume 92. Wiley New York, 1992.

[12] Kosaku Yosida. *Functional analysis*. Delhi., Narosa Publishing House, 1965.