

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Construcción de Fibrados Vectoriales y Fibrado Inducido

John Alexander Mora Rodriguez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Proyecto Curricular de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2019

Construcción de Fibrados Vectoriales y Fibrado Inducido

John Alexander Mora Rodriguez

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Orientador:
Profesor Carlos Antonio Julio Arrieta

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Proyecto Curricular de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2019

A mis padres, mi hermano, mis abuelos y la familia Velásquez Rodríguez

Agradecimientos

La dedicación, el esfuerzo y la perseverancia son claves esenciales para el éxito; cada una de ellas se logra gracias al acompañamiento personal y profesional que imprimen personas como mis padres que desde el comienzo han estado incondicionalmente en cada paso de mi formación, como mis profesores quienes con disciplina y entrega al enseñar brindan hoy grandes y numerosas herramientas para dar continuidad a cada uno de mis proyectos, como Angie Puentes quien contribuyo y fue un apoyo muy importante en la parte final de este logro. A cada uno de ellos y a las demás personas que contribuyeron de una u otra manera en el proceso de aprendizaje profesional y humano, muchas gracias.

Resumen

Este trabajo consiste en el estudio de los fibrados vectoriales sobre variedades diferenciables, para iniciar ese estudio se construyen dos fibrados vectoriales de gran importancia, ya que a partir de ellos se pueden construir otros, el fibrado inducido o pullback y el fibrado universal, se definen algunas funciones como las funciones homotópicas de clase C^∞, función de Gauss así como la operación suma Whitney y el semigrupo $\mathbb{V}(M)$ que junto con otros conceptos y resultados permiten presentar dos teoremas que en conjunto brindan una caracterización de los fibrados vectoriales, el teorema de equivalencia homotópica y el teorema de clasificación de los fibrados vectoriales.

Palabras clave: Fibrado vectorial, diferenciable, Fibrado pullback, Fibrado universal, funciones homotópicas, suma Whitney, semigrupo $\mathbb{V}(M)$, función Gauss.

Contenido

Agradecimientos vii

Resumen ix

Introducción 2

1 Preliminares 4

1.1 Preliminares en Álgebra y Análisis 4

1.1.1 Espacios Vectoriales 4

1.1.2 Transformaciones lineales 6

1.1.3 Grupos y Semigrupos 7

1.1.4 Lema de Zorn 8

1.1.5 Convexidad 9

1.2 Preliminares en Geometría Diferencial y Topología 9

1.2.1 Variedades Diferenciables 9

1.2.2 Inmersiones, encajes y subvariedades 15

1.2.3 Campos Vectoriales 15

1.2.4 Grupos de Lie 16

1.2.5 Acción de grupos de Lie 16

1.3 Preliminares en Topología Álgebraica 17

1.3.1 Homotopía 17

2 Generalidades de Fibrados y Propiedades Homotópicas de los Fibrados Vectoriales 21

2.1 Introducción a los Fibrados 21

2.1.1 Grupos de estructura 28

2.2 Fibrados Vectoriales 30

2.2.1 Grupos de Lie asociados 30

2.2.2 Fibrado vectorial trivial 32

2.2.3 Secciones del Fibrado Vectorial 32

2.2.4 El fibrado universal 35

2.3 Propiedades Homotópicas 36

3 Construcción de los Fibrados Vectoriales **41**
3.1 Fibrado Vertical 41
3.2 Suma Whitney 45
3.3 El Semigrupo $\mathbb{V}(M)$ 49
3.4 Función de Gauss 55
3.4.1 Homotópia de las funciones de Gauss 61
3.5 Teorema de Clasificación de los Fibrados Vectoriales 64

Conclusiones **69**

Bibliografía **70**

Introducción

En todos las áreas de las matemáticas cuando se presenta una estructura matemática la primera cuestión que surge respecto a ella es si esta se puede caracterizar, este es el problema esencial en el estudio de dicha estructura, ya que poder caracterizarla implica poder definirla plenamente, es por ello que los problemas más importantes en las matemáticas son respecto a la caracterización de estructura, para citar un ejemplo, en la teoría de grupos el objetivo principal radica en encontrar los posibles grupos de un orden especifico. Por supuesto no es una tarea sencilla estudiar una estructura, ya que sobre ella se pueden definir muchos otros elementos, en la geometría diferencial sobre variedades por ejemplo, no solo se encuentra el problema de caracterizar las variedades, sino que aparecen muchos otros elementos que actúan sobre ellas llevados de otras teorías, y en ese sentido se tienen conceptos como campos vectoriales, métricas, conexiones, entre muchos otros, y el estudio de cada uno de ellos otorga un paso en una posible caracterización, al menos para poder clasificar la estructura de acuerdo a sus propiedades.

El estudio hecho en este trabajo se centra en una estructura en particular cuyos estudios anteriores se ubican en dos áreas, la geometría diferencial y la topología, en las cuales tiene gran trascendencia sin embargo es en la topología en donde se tienen resultados para su caracterización, dicha estructura se llama fibrado vectorial, que en el presente trabajo se estudia desde el campo de la geometría diferencial de variedades utilizando herramientas de gran utilidad de la topología y la topología álgebraica.

El objetivo principal es presentar una construcción de los fibrados vectoriales que son solo una parte de una estructura más fuerte que se llama fibrado, se dice que es solo una parte ya que un fibrado vectorial es un fibrado con propiedades especificas, es decir, un fibrado consiste principalmente de tres variedades (que se llaman espacio base, espacio total y fibra estandar), una proyección del espacio total al espacio base, un cubrimiento abierto del espacio base y para cada elemento del cubrimiento, un difeomorfismo del espacio total a la fibra estandar, en un fibrado vectorial se tiene que la fibra estandar es un espacio vectorial y el difeomorfismo es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Para el desarrollo del objetivo se desarrollan tres objetivos específicos, el primero consiste en detallar y reconstruir parcialmente el articulo ***Fibrados Vectoriales y el Semigrupo*** $\mathbb{V}(X)$ escrito por Ana Zela Apaza en el que presenta un estudio de los fibrados vectoriales

sobre un espacio base X Hausdorff y compacto, con el fin de formar el semigrupo $\mathbb{V}(X)$ de una forma topológica, el segundo es examinar la teoría respecto de la clasificación de fibrados vectoriales existentes, en ese contexto se encuentra que Allen Hatcher realiza una clasificación eficiente de estas estructuras en [13] y que posteriormente Rubén Burga en [10] la detalla, el tercer objetivo es realizar una particularización de la teoría encontrada con el fin de encontrar la misma clasificación pero para fibrados vectoriales sobre variedades diferenciables, ya que los autores ya mencionados la hacen para espacios topológicos.

El principal enfoque de este trabajo es entonces construir a partir de la teoría vista en el semillero de Geometría y Topología una serie de fibrados y a partir de ellos hacer la construcción de otros, el caso más importante es el fibrado inducido o pullback sobre el cual se establecen resultados que dan pie a utilizar la definición de Homotópia para establecer el primer resultado, el teorema de equivalencia homotópica que es demostrado a partir de las definiciones sobre variedades y los fibrados previamente construidos, esto en el capítulo 2.

El tercer capítulo se desarrolla de una manera adecuada, es decir, sin saltar conocimientos y resultados necesarios, para llegar al segundo resultado que da por culminado el objetivo general, el teorema de clasificación de los fibrados vectoriales, este permite caracterizar los fibrados vectoriales e identificarlos con el fibrado universal previamente construido en la sección 2.2 del segundo capítulo, el uso del semigrupo $\mathbb{V}(M)$ definido el la sección 3.3 y la operación suma Whitney entre fibrados vectoriales definida en la sección 3.2 son el paso clave en la construcción de los elementos necesarios para demostrar el teorema.

El trabajo de presenta con fines estrictamente académicos y se desarrolla en el ámbito de los semilleros de investigación de la universidad, es por ello que deja algunos buenos apuntes que posibilitan la incursión de otras personas en temas relacionados y que se desprenden de los resultados demostrados.

1 Preliminares

En este capítulo se establecen notaciones, definiciones y resultados elementales con el fin de facilitar la comprención de los capítulos siguientes. Se asume que el lector esta familiarizado con conceptos básicos de Topología General, Álgebra Lineal y Análisis Matemático. En ese contexto se citan a [2: 2-6, pag. 85-298], [18: 1-3, pag. 1-178] y [19: 1-9, pag. 1-258] como principales referencias.

1.1. Preliminares en Álgebra y Análisis

En esta sección se presentan definiciones y resultados en el área del álgebra lineal y el análisis con el fin de facilitar la comprensión de algunos conceptos y resultados presentados en capítulos posteriores.

1.1.1. Espacios Vectoriales

Los espacios vectoriales son una estructura utilizada en casi todos los campos de estudio de las matemáticas y en la geometría representa gran parte de la base de toda la teoria, es por eso que se hace necesario enunciar algunas definiciones y resultados, para ello se cita a [18: 4, pag. 179-268] y [20: 2, pag. 50-55] como referencias.

Definición 1.1.1.1 *Sea $\mathbb{F}$ un campo, y sea $\mathcal{V}$ un conjunto, se dice que $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ si las operaciones suma $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ que esta dada por $+(x, y) = x + y$ y producto por escalar $. : \mathbb{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ dada por $.(\alpha, x) = \alpha x$ cumplen las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$*

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

(2) $x + y = y + x$,

(3) existe un elemento 0 *tal que* $x + 0 = x$,

(4) Para cada $x \in \mathcal{V}$ *existe un elemento* $(-x) \in \mathcal{V}$ *tal que* $x + (-x) = 0$,

(5) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

(6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

(7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

(8) $1x = x$.

Los elementos de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ se llaman vectores.

Definición 1.1.1.2 *Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{F}$, si S es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ usando las mismas operaciones suma y producto por escalar, entonces S se llama subespacio de $\mathcal{V}$. Esto se traduce a que un subconjunto no vacio S de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ sí y sólo si*

$$\alpha x + \beta y \in S,$$

para todo $x, y \in S$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Un subespacio especial de $\mathcal{V}$ es el subespacio impropio $S = \mathcal{V}$, todo otro subespacio de $\mathcal{V} \neq \{0\}$ se llama subespacio propio. Una combinación lineal de una cantidad finita de vectores $v_1, ..., v_n$ de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ es una expresión de la forma

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n,$$

donde los coeficientes $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$.

Definición 1.1.1.3 *Sea M un subconjunto no vacio de $\mathcal{V}$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de M se llama el generado (o span) de M y se nota por $\langle M \rangle$ o por span M*

El conjunto $\langle M \rangle$ es un subespacio de $\mathcal{V}$, y dicho subespacio se llama generado por M, a partir de la noción de combinación lineal se presentan varios conceptos que son de gran importancia en la teoria de los espacios vectoriales.

Definición 1.1.1.4 (Independencia lineal, Dependencia lineal) *Indepencia lineal y dependencia de un de un conjunto dado M de vectores $v_1, ..., v_r$ ($r \geq 1$) en un espacio vectorial $\mathcal{V}$ son definidas por medio de la ecuación*

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r = 0,$$

donde $\alpha_1, ..., \alpha_r$ son escalares. La ecuación anterior se cumple para $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$, si esta es la unica $r-$tupla para la cual la ecuación se satisface, se dice que el conjunto M es linealmente independiente. M es linealmente dependiente si Mno es linealmente independiente, esto es, si la ecuación se satisface para alguna $r-$tupla de escalares no todos cero.

Un subconjunto arbitrario M de $\mathcal{V}$ es linealmente independiente si cada subconjunto finito no vacío de M es linealmente independiente, una motivación para esta terminología resulta del hecho que si $M = \{v_1, ..., v_r\}$ es linealmente dependiente, al menos un vector de M se puede escribir como combinación lineal de los otros, es decir, si la ecuación de la definición 1.1.1.4 se cumple con $\alpha_r \neq 0$ entonces resolviendo la misma se tiene que

$$v_r = \beta_1 v_1 + ... + \beta_{r-1} v_{r-1},$$

donde $\beta_i = -\alpha_i/\alpha_r$.

Definición 1.1.1.5 *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, se dice que $\mathcal{V}$ es de dimensión finita si existe un entero positivo n tal que $\mathcal{V}$ contiene un conjunto linealmente independiente de n vectores, mientras que cualquier conjunto de $n+1$ o mas vectores de $\mathcal{V}$ es linealmente dependiente. se dice que n es la dimensión de $\mathcal{V}$ y se escribe $n =$dim M. Si $\mathcal{V}$ no es de dimensión finita, entonces se dice que $\mathcal{V}$ es de dimensión infinita.*

Por definición, $\mathcal{V} = \{0\}$ es de dimensión finita y dim $\mathcal{V} = 0$. Ahora, si $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial, no necesariamente de dimensión finita, y B es un subconjunto de $\mathcal{V}$ linealmente independiente con span$B = \mathcal{V}$, entonces B se llama base (o base de Hamel) para $\mathcal{V}$. Por lo tanto, si B es una base para $\mathcal{V}$, entonces cada $v \in \mathcal{V}$ diferente de cero tiene una única representación como una combinación lineal de una cantidad finita de elementos de B con escalares diferentes de cero como coeficientes.

Teorema 1.1.1.1 *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión n. Entonces un subespacio propio S de $\mathcal{V}$ tiene dimensión menor que n.*

Definición 1.1.1.6 *Sean S_1, S_2 subespacios de un espacio vectorial $\mathcal{V}$, la suma de S_1 y S_2 como el conjunto de todas las posibles sumas de vectores de S_1 con vectores de S_2, esto es,*

$$S_1 + S_2 = \{x + y;\ \ x \in S_1, y \in S_2\}.$$

La suma se subespacios de un espacio vectorial es un subespacio también, además

$$dim(S_1 + S_2) = dimS_1 + dimS_2 - dim(S_1 \cap S_2).$$

1.1.2. Transformaciones lineales

Para este tema se toma [18: 5, pag. 273-310], [14: 4, pag. 97] y [20: 2, pag. 82-90] como referencias.

Definición 1.1.2.1 *Sean $\mathcal{U}$ y $\sqsubseteq$ espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{F}$, una transformación lineal de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ se define como una función lineal $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. Esto es,*

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y),$$

para todo $x, y \in \mathcal{U}$ y $\alpha \in \mathbb{F}$.

Un operador lineal sobre $\mathcal{U}$ se define como una transformación lineal de $\mathcal{U}$ en si mismo.

Para cada par de espacios vectoriales $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{F}$, el conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ de todas las transformaciones lineales de $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Para cada transformación lineal $T:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ se define el kernel o espacio nulo como el conjunto de todos los vectores de $\mathcal{U}$ tal que son enviados a través de T en el vector 0, dicho espacio se nota por $\ker(T)$, además la imagen del subespacio $\mathcal{U}$ a través de T se nota por $\mathrm{Im}(T)$ que es tambien un espacio vectorial.

Definición 1.1.2.2 (Espacio dual) *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, el espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathbb{R})$ se llama espacio dual de $\mathcal{V}$ y se nota por $\mathcal{V}^*$.*

Si $\bar{e}=\{e_i;\ i=1,...,n\}$ es una base para $\mathcal{V}$, es decir cualquier elemento de $\mathcal{V}$ es combinación lineal de estos elementos, entonces su base dual asociada (de $\mathcal{V}^*$) es $\bar{e}^*=\{e^j;\ j=1,...,n\}$ es tal que

$$e^j(e_i)=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j.\end{cases}$$

Se define también el operador lineal inverso T^{-1} de la misma forma en que se definen las inversas de las funciones en calculo, se tiene que dicho operador inverso existe si el operador T es inyectivo, en ese caso $\ker(T)=\{0\}$.

Teorema 1.1.2.1 (Teorema de la dimensión) *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ espacios vectoriales, sea $T:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ una transformación lineal, entonces,*

$$dim\mathcal{V}=dim(Ker(T))+dim(Im(T)).$$

1.1.3. Grupos y Semigrupos

Se mencionan algunas definiciones básicas de la teoría elemental de grupos, las cuales son retomadas de [21: 1-2, pag. 10-23].

Definición 1.1.3.1 *Una operación binaria $*$ en un conjunto, es una regla que le asigna a cada par ordenado de elementos de un conjunto, algún elemento del conjunto, en esta sección se nota por $a*b$ al elemento asignado al par (a,b).*

La palabra ordenado es muy importante en esta definición, pues da la posibilidad de que el elemento asignado al par (a,b) pueda ser diferente al elemento asignado al par (b,a), también se tiene cuidado en decir que al par ordenado se le asigna otro, ya que podria asignarse alguno de los dos elementos operados.

Definición 1.1.3.2 *Un grupo $(G,*)$ es un conjunto G junto con una operación binaria $*$ en G tal que satisface los siguientes axiomas para todo elemento $a,b,c\in G$:*

(1) $(a*b)*c=a*(b*c)$,

(2) existe un elemento $e\in G$ tal que $e*x=x*e=x$,

(3) para cada $a \in G$ existe un elemento $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$.

Proposición 1.1.3.1 *Si G es un grupo con una operación binaria $*$, entonces las leyes de cancelación izquierda y derecha se cumplen en G, es decir, $a * b = a * c$ implica $b = c$ y $b * a = c * a$ implica $b = c$ para $a, b, c \in G$.*

Definición 1.1.3.3 *Si H es un subconjunto de un grupo G cerrado bajo la operación de grupo de G y si H es él mismo un grupo bajo esta operación inducida, entonces H es un subgrupo de G.*

Proposición 1.1.3.2 *Un subconjunto H de un grupo G es un subgrupo de G sí y sólo si*

(1) H es cerrado bajo la operación binaria de G,

(2) la identidad e de G está en H,

(3) para todos los $a \in H$ es cierto que $a^{-1} \in H$ también.

Todos estos conceptos se utilizán de ahora en adelante con frecuencia, además de las definiciones presentadas, se define semigrupo como un conjunto dotado con una operación binaria la cual culple los axiomas (1) y (2) de la definición 1.1.3.2 pero no el axioma (3) de la misma definición.

1.1.4. Lema de Zorn

El lema de Zorn tiene grandes aplicaciones en las diferentes áreas de las matemáticas, casos particulares son sus aplicaciones en los espacios vectoriales y las variedades diferenciables, que son los dos temas para los cuales es de interés presentar dicho lema, para esto se toma a [20: 4, pag. 210]

Definición 1.1.4.1 *Un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto M en el que se define un orden parcial, esto es, una relación binaria que se escribe como $\leq$ y satisface las siguientes condiciones para todo $a, b, c \in M$*

(1) $a \leq a$,

(2) si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonce $a = b$,

(3) si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

La relación de orden parcial en un conjunto no implica que se puedan comparar todos los elementos de M dos a dos, para ello se define otro concepto. Un conjunto totalmente ordenado o cadena es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada dos elementos de ese conjunto son comparables.

Sea P(X) el conjunto de partes de un conjunto dado X y sea $A \leq B$ dada por $A \subset B$, esto es, A es un subconjunto de B, entonces P(X) es parcialmente ordenado.

Un elemento x de un conjunto parcialmente ordenado X es máximal si para algún $a \in M$, $x \leq a$ implica que $x = a$.

Lema 1.1.4.1 (de Zorn) *Sea $M \neq \emptyset$ un conjunto parcialmente ordenado. Suponga que cada cadena $C \subset M$ tiene una cota superior respecto de la relación $\leq$. Entonces M tiene por lo menos un elemento máximal.*

El lema de Zorn tiene una implicación muy importante en los espacios vectoriales la cual se establece a partir de la siguiente proposición.

Proposición 1.1.4.1 *Todo espacio vectorial $\mathcal{V} \neq \{0\}$ tiene una base de Hamel.*

Para finalizar los preliminares en álgebra y analisís se presenta la definición de convexidad.

1.1.5. Convexidad

prirmero de establece la definición de convexidad sobre $\mathbb{R}^n$ y dicha definición se extiende a otros espacios de la misma manera o con el mismo principio, dicha extensión se hace en capítulos posteriores de ser necesario.

Definición 1.1.5.1 *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si para todo $a, b \in C$ el segmento de recta que une a con b está totalmente contenido en C, es decir, para todo $t \in [0, 1]$,*

$$(1 - t)a + tb \in C.$$

La definición de convexidad se puede extender a los espacios vectoriales y la definición de conjunto convexo allí es análoga a la definición 1.1.5.1, además, un resultado importante y utilizado más adelante es que todo espacio vectorial es convexo.

1.2. Preliminares en Geometría Diferencial y Topología

1.2.1. Variedades Diferenciables

A continuación se enuncian conceptos y resultados básicos de la geometría diferencial de variedades para presentar la costrucción de una estructura matemática basada en las variedades diferenciales y aplicaciones entre ellas, los fibrados, para ello se toman a [1:2-3, pag. 51-175], [3: 1-3, pag. 5-120], [8: 1-3, pag. 2-27] y [11: 0, pag. 1-25] como referencias.

Definición 1.2.1.1 *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M se dice $k-$superficie regular si para cada $p \in M$, existen abiertos $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ $(k \leq n)$ con $p \in V$ y funciones $\varphi : U \to V \cap M$ tal que:*

(i) φ *es diferenciable.*

(ii) φ *es un homeomorfismo.*

(iii) Para todo $q \in U$*, la diferencial* $d\varphi_q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *es uno a uno.*

La función φ se llama parametrización, el homeomorfismo inverso φ^{-1} es un sistema de coordenadas locales en una vecindad de p. La vecindad $V \cap M$ de p en M se llama vecindad coordenada.

Proposición 1.2.1.1 (Cambio de Parámetros) *Sea* p *un punto de una superficie regular* M*, y sean* $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to M$*,* $\phi : V \subset \mathbb{R}^k \to M$ *dos parametrizaciones de* M *tal que* $p \in \varphi(U) \cap \phi(V) = W$*. Entonces el cambio de coordenadas* $h = \varphi^{-1} \circ \phi : \phi^{-1}(W) \to \varphi^{-1}(W)$ *es un difeomorfismo.*

Definición 1.2.1.2 *Sea* S *una* $2-$*superficie regular y* φ *una parametrización de* S *en un abierto* U *de* S *tal que* $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$*, la función* $N : \varphi(U) \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}(p),$$

donde $p \in \varphi(U)$*, se llama aplicación de Gauss.*

Definición 1.2.1.3 *Sea* M *un espacio topólogico. Un sistema de coordenadas locales o carta local de dimensión* n *en* M *es un homeomorfismo* $x : U \subset M \to x(U) \subset \mathbb{R}^n$*.*

Definición 1.2.1.4 *Sea* M *un espacio Topológico. Se dice que* M *es una* ***Varidedad Topológica*** *de dimensión* n*, si* M *es un espacio de Hausdorff con base numerable y localmente euclideo de dimensión* n*, esto es, para cada* $p \in M$*, existe una vecindad* U *de* p *y un sistema de coordenadas locales de dimensión* n*.*

En la definición 1.2.1.3 dado un sistema de coordenadas locales, se le denomina al abierto U vecindad coordenada sobre un punto $p \in M$, para cada $p \in U$, $x(p) = (x^1(p), ..., x^n(p))$ donde $x^i = x^i(p)$ con $i = 1, ..., n$ se llaman coordenadas del punto $p \in M$ en el sistema x. El cambio de coordenadas en una variedad topógica se define de igual manera que para las superficies regulares, es decir, si $p \in U \cap V$ y $x : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ e $y : V \subset M \to \mathbb{R}^n$ son sistemas de coordenadas, se tiene que el cambio de coordenadas esta dado por $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$. Al igual que en las superficies regulares, el cambio de coordenadas $y \circ x^{-1}$ es un difeomorfismo.

Proposición 1.2.1.2 *Sea* M *una variedad topólogica de dimensión* n*. Entonces* M *es localmente compacto, localmente conexo y regular.*

Observación 1.2.1.1 *Todo subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$ *es una variedad topológica de dimensión* n*.*

Dada una función definida sobre un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ en un subconjunto Y de $\mathbb{R}^n$, $f : X \subset \mathbb{R}^m \to Y \subset \mathbb{R}^n$, se dice que f es continuamente diferenciable de orden k con $k \in \mathbb{N}$ o simplemente de clase $C^k(X)$ si todas sus derivadas de orden menor o igual a k existen y son continuas en p, para todo $p \in X$. La función se dice de clase $C^\infty(X)$, o función suave, si existen todas las derivadas de todos los ordenes.

Por comodidad, de ahora en adelante cuando se haga referencia a una función f de clase $C^\infty(X)$ se escribirá simplemente que f es de clase C^∞ y se asumirá que es continuamente diferenciable sobre su dominio.

Definición 1.2.1.5 *Sea M un espacio topológico. Un atlas C^∞ de dimensión $n \in \mathbb{N}$ sobre M es una colección $\mathbf{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ (I un conjunto de índices) de **cartas**, esto es, pares de la forma (U_α, x_α) con $U_\alpha \subset M$ abierto de M y $x_\alpha : U_\alpha \to x_\alpha(U_\alpha)$ homeomorfismos sobre un abierto $x_\alpha(U_\alpha)$ de $\mathbb{R}^n$, tal que:*

(i) $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$.

(ii) Las cartas son $C^\infty-$compatibles, esto es, el cambio de coordenadas $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ ($\alpha, \beta \in I$) es diferenciable de clase C^∞.

Un atlas $\mathbf{A}$ es **máximal** si toda carta (U_α, x_α) de M que es $C^\infty-$compatible con cualquier carta de $\mathbf{A}$ está en $\mathbf{A}$, es decir, es máximal con la relación de orden dada por las contenencias, así, el lema de Zorn garantiza su existencia.

Proposición 1.2.1.3 *Sea M un espacio topólogico y $\mathbf{A}$ un atlas C^∞ de dimensión $n \in \mathbb{N}$ para M. Entonces existe un único atlas máximal $\mathbf{A}'$ para M que contiene a $\mathbf{A}$.*

Definición 1.2.1.6 (Variedad Diferenciable) *Una variedad diferenciable $n-$dimensional $(M, \mathbf{A})$ es un par formado por un espacio topólogico Hausdorff con base numerable M y $\mathbf{A}$ un atlas maximal C^∞ de dimensión n sobre M. Se nota con M^n o simplemente con M (si la dimensión no es relevante o es evidente) a la variedad diferenciable $(M, \mathbf{A})$ de dimensión n.*

Es decir, una variedad diferenciable $n-$dimensional es una variedad topólogica dotada de un atlas máximal C^∞ (que en ocasiones sera llamado estructura diferenciable C^∞ o simplemente estructura diferenciable), por lo tanto, por la Proposición 1.2.1.2 se tiene que M^n es localmente compacto y localmente conexo (por lo tanto, paracompacto).

Observación 1.2.1.2 Una estructura diferenciable en un conjunto M induce una topología natural en M. Basta con definir $A \subset M$ como un conjunto abierto en M si y solo si $x_\alpha(A \cap x_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ para todo α, observe que esto se tiene gracias a la maximalidad de la estructura diferenciable.

Observación 1.2.1.3 Se puede construir ahora el producto de dos variedades diferenciables y verificar que es una variedad diferenciable, este resultado es de gran importancia más adelante y aún mas importante es tener presente la construcción de esta variedad, es por eso que se presenta a continuación. Sean M^n y N^m variedades diferenciables y sean $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}, \{(V_\beta, y_\beta)\}$ estructuras diferenciables en M y N respectivamente. Considerando el producto cartesiano $M \times N$ y la función

$$z_{\alpha,\beta}(p, q) = (x_\alpha(p), y_\beta(q)),$$

donde $p \in U_\alpha$ y $q \in V_\beta$. Se probará que $\{(U_\alpha \times V_\beta, z_{\alpha,\beta})\}$ es una estructura diferenciable en $M \times N$.

Ya que $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ y $\bigcup_\beta V_\beta = N$, entonces

$$\bigcup_{\alpha,\beta} U_\alpha \times V_\beta = M \times N,$$

con lo que se verifica la condición (i) de la Definición 1.2.1.5.

Sea $(p, q) \in M \times N$ tal que

$$(p, q) \in (U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_\gamma \times V_\delta),$$

luego,

$$(z_{\alpha,\beta} \circ z^{-1}_{\gamma,\delta})(r, s) = z_{\alpha,\beta}(x^{-1}_\gamma(r), y^{-1}_\delta(s)) = ((x_\alpha \circ x^{-1}_\gamma)(r), (y_\beta \circ y^{-1}_\delta)(s)),$$

con $r = x_\alpha(p) = x_\gamma(p)$ y $s = y_\beta(q) = y_\delta(q)$. Como $x_\alpha \circ x^{-1}_\gamma$ e $y_\beta \circ y^{-1}_\delta$ es diferenciable, se tiene que $z_{\alpha,\beta} \circ z^{-1}_{\gamma,\delta}$ también lo es, con lo cual se verifica la condició (ii) de la Definición 1.2.1.5 y esto finaliza la construcción.

Ya que M y N tienen estructura de variedad diferenciable y $M \times N$ esta dotado con una estructura diferenciable, entonces $M \times N$ tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $n + m$ debido a que $z_{\alpha,\beta} : U_\alpha \times V_\beta \subset M \times N \to \mathbb{R}^{n+m}$

Definición 1.2.1.7 *Sean M^n_1 y M^m_2 variedades diferenciables. Una función $f : M_1 \to M_2$ es diferenciable en $p \in M_1$ si dada una carta*

$$x_2 : V \subset M_2 \to \mathbb{R}^m,$$

existe una carta

$$x_1 : U \subset M_1 \to \mathbb{R}^n,$$

en p, tal que $f(U) \in V$ y la función

$$x_2 \circ f \circ x^{-1}_1 : x_1(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

es diferenciable en $x_1(p)$. f es diferenciable en un conjunto abierto de M_1 si es diferenciable en todos los puntos del conjunto.

Sea $p \in U_\alpha \subset M$ y $x_\alpha(p) = (x^1, ..., x^n)$, entonces $f \circ x_\alpha^{-1}(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}$ se llama **Expresión en Coordenadas** para f con respecto a la carta (U_α, x_α) y se nota $F(x^1, ..., x^n)$.

La siguiente consideración motiva la definición 1.1.1.7. Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable en $\mathbb{R}^n$, con $\alpha(0) = p$. Se escribe

$$\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)),$$

con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ y $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\alpha^{'}(0) = (x_1^{'}(0), ..., x_n^{'}(0)) = v \in \mathbb{R}^n$. Ahora sea f una función diferenciable definida en una vecindad de p. Se escribe la restricción de f a la curva α y se expresa la derivada direccional con respecto al vector $v \in \mathbb{R}^n$ como

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}_{(t=0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}_{(t=0)} \frac{dx_i}{dt}_{(t=0)} = \left(\sum_i x_i^{'}(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

Además, la derivada direccional con respecto a v es un operador en funciones diferenciables que depende únicamente de v. Esta es la propiedad característica que se usa para definir vectores tangentes sobre una variedad diferenciable.

Definición 1.2.1.8 *Sea M^n una variedad diferenciable. Una función diferenciable*

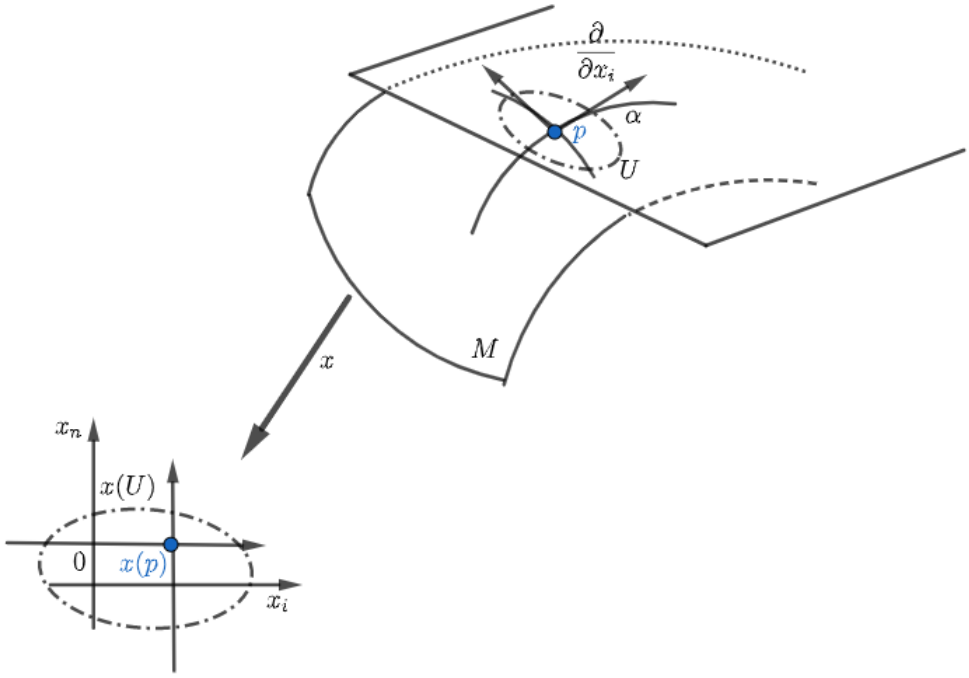
$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M,$$

se llama curva diferenciable en M. Suponga que $\alpha(0) = p \in M$, y sea D el conjunto de funciones en M que son diferenciables en p. El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es una función $\alpha^{'}(0) : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha^{'}(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}_{(t=0)}; \qquad f \in D.$$

Un vector tangente en p es el vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$.

El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p es un espacio vectorial de dimensión n que se llama espacio tangente de M en p y se nota T_pM. La elección de un sistema de coordenadas x determina una base asociada $\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\}$ en T_pM, donde $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ es el vector tangente en p de la curva coordenada $x_i \to x^{-1}(0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0)$.



Proposición 1.2.1.4 *Sean M_1^n y M_2^m variedades diferenciables y sea $f : M_1 \to M_2$ una función diferenciable. Para cada $p \in M_1$ y cada $v \in T_pM_1$, se elige una curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M_1$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Tomando $\beta = f \circ \alpha$. La aplicación $df_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ dada por $df_p(v) = \beta'(0)$ es una aplicación lineal que no depende de la elección de α.*

Definición 1.2.1.9 *La aplicación lineal df_p definida en la* proposición 2.1.4 *se llama* ***la diferencial*** *de f en p.*

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real de dimensión k finita, sea $n \in \{1, ..., k\}$ y sea $\mathbb{G}_n(\mathcal{V})$ el conjunto de todos los subespacios de $\mathcal{V}$ de dimensión n. Se dota a $\mathbb{G}_n(\mathcal{V})$ de una estructura natural de variedad diferenciable (Ver [8: 1, pag. 9]), la variedad diferenciable resultante se llama variedad Grassmaniana. Se muestra en el siguiente capítulo otra forma de ver las variedades grassmanianas.

Otra variedad diferenciable es importante es el fibrado tangente que se define como la unión de todos los espacios tangentes en la variedad, es decir, si M^n es una variedad diferenciable,

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM,$$

TM es una variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Definición 1.2.1.10 *Una partición de la unidad en M subordinada a un recubrimiento de M es una colección $\{\varphi_i;\ i \in I\}$ de funciones de clase C^∞ en M, donde $\varphi_i : M \to [0, 1]$, tal que*

(a) para toda función $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ de la colección, existe un abierto U del recubrimiento de M que contiene al soporte de φ_i, donde el soporte de φ_i esta definido como la clausura del conjunto $A = \varphi_i^{-1}(\mathbb{R} - 0)$.

(b) $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1$ para todo $p \in M$.

Teorema 1.2.1.1 (Existencia de partición de la unidad) *Sean M una variedad diferenciable y $\{U_i;\ i \in I\}$ un cubrimiento abierto de M. Entonces existe una partición numerable de la unidad $\{\varphi_j;\ j = 1, 2, 3, ...\}$ subordinada al recubrimiento $\{U_i\}$ con soporte compacto para cada φ_j.*

1.2.2. Inmersiones, encajes y subvariedades

Teniendo presente la definición de diferencial $d\varphi$ de una función diferenciale φ, se pueden introducir algunas definiciones que clasifican funciones importantes entre variedades de acuerdo a las características de la diferencial, estas funciones se utilizan más adelante para probar resultados relevantes.

Definición 1.2.2.1 *Sean M^m y N^n variedades diferenciables. Una función diferenciable*

$$\varphi : M \to N,$$

es una inmersión si $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ es inyectiva para todo $p \in M$, en tal caso, $m \leq n$. Si adicionalmente, φ es un homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, donde $\varphi(M)$ tiene la topología de subespacio inducida de N, se dice que φ es un encaje y por lo tanto $m = n$. Si $M \subset N$ y la inclusión $i : M \to N$ es un encaje, se dice que M es una subvariedad encajada (o simplemente una subvariedad) de N.

Proposición 1.2.2.1 *Sea $\varphi : M_1^m \to M_2^n$, $m \leq n$, una inmersión de la variedad diferenciable M_1 en la variedad diferenciable M_2. Para cada punto $p \in M_1$ existe una vecindad $V \subset M_1$ de p tal que la restricción $\varphi : V \to M_2$ es un encaje.*

Definición 1.2.2.2 *Sean M^m y N^n variedades diferenciables. Una función diferenciable*

$$\varphi : M \to N,$$

es una submersión si $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ es sobreyectiva para todo $p \in M$, en tal caso, $n \leq m$.

1.2.3. Campos Vectoriales

Definición 1.2.3.1 *Un **Campo Vectorial** X sobre una variedad diferenciable M^n es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un vector $X(p) \in T_pM$. En términos de funciones, X es una función de M en el fibrado tangente TM, tal que $X(p) \in T_pM$. El campo es diferenciable si la función X es diferenciable.*

Considerando un sistema de coordenadas locales $x : U \subset M \to \mathbb{R}^n$, se escribe

$$X_p = X(p) = \sum_{i=1}^{n} x_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Esta claro que X es diferenciable si y solo si las funciones x^i son diferenciables para cualquier carta. Además,

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^{n} x_p^i \frac{\partial F}{\partial x^i},$$

donde $f : M_1 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable de la variedad diferenciable M_1^n a $\mathbb{R}$ y F es la expresión en coordenadas para f en el sistema de coordenadas locales x. De hecho, esta idea de vector como derivada direccional fue precisamente lo que se usó para definir la noción de vector tangente.

1.2.4. Grupos de Lie

Para esta sección se toma como referencia a [3: 3, pag. 82], se evidencia la importancia de la noción de grupos de Lie para el presente trabajo, en el desarrollo de los capítulos posteriores, donde la acción del grupo $Gl(n, \mathbb{R})$ es fundamental.

Definición 1.2.4.1 *Un **Grupo de Lie** G es una variedad diferenciable que también está dotada de una estructura de grupo, tal que la aplicación $\theta : G \times G \to G$ dada por $\theta(a, b) = ab^{-1}$ es diferenciable de clase C^∞ para todo par de elementos $a, b \in G$.*

En principio los grupos de Lie representan los movimientos rígidos del plano, el grupo de Lie $Gl(n, \mathbb{R})$ de todas las transformaciones lineales, evidencia esto y en este trabajo representa movimientos rígidos de espacios vectoriales de dimensión finita sobre una variedad diferenciable que intuitivamente es la unión de dichos espacios al igual que en el fibrado tangente.

1.2.5. Acción de grupos de Lie

Definición 1.2.5.1 *Se dice que un grupo de Lie G **actúa (por la izquierda)**, sobre una variedad diferenciable M si existe una aplicación diferenciable*

$$\theta : G \times M \to M,$$

que satisface las siguientes condiciones:

(i) Para el elemento neutro $e \in G$ y cualquier $p \in M$

$$\theta(e, p) = p$$

(ii) Para cualquier par de elementos $a, b \in G$ y $p \in M$

$$\theta(a, \theta(b, p)) = \theta(ab, p).$$

A una variedad en la que actúa por izquierda el grupo de Lie G se le llama G-variedad.

Así como en las variedades diferenciables definidas en la sección 2.1 se define cuando una aplicación es diferenciable, a continuación se define una aplicación deferenciable entre variedades en las cuales actúa un grupo de Lie.

Definición 1.2.5.2 *Se dice que la aplicación $\phi : M \to N$ entre G-variedades es G-diferenciable, si es diferenciable y el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} (g,p) \in G \times M & \xrightarrow{\theta_1} & \theta_1(g,p) = gp \in M \\ \downarrow{\scriptstyle (Id,\phi)} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ (g,\phi(p)) \in G \times N & \xrightarrow{\theta_2} & \phi(gp) = g\phi(p) \in N \end{array}$$

es decir, $\phi \circ \theta_1 = \theta_2 \circ (Id, \phi)$ y se dice que es un G-difeomorfismo si además es difeomorfismo.

Para cada $g \in G$ se consideran los difeomorfismos

$$\theta_g : p \in M \to gp \in M,$$

donde M es una variedad diferenciable. El conjunto de todos los difeomorfismos sobre M tiene estructura de grupo, dicho grupo se neta de ahora en adelante por $Diff(M)$

Definición 1.2.5.3 *Se dice que una acción es **fiel** ó **efectiva** si es inyectiva la aplicación*

$$g \in G \to \theta_g \in Diff(M).$$

En cuyo caso se tiene que, para todo $p \in M$, $gp = p$ si y solo si $g = e$. Se puede considerar que G es un subgrupo de $Diff(M)$.

1.3. Preliminares en Topología Álgebraica

1.3.1. Homotopía

A continuación se presentan algunos conceptos y resultados básicos de homotpía de aplicaciones continuas sobre espacios topológicos, se toman como principales referencias a [2: 9, pag. 365-375], [5: 13, pag. 117-122] y [22: 1, pag. 10-22], en está sección se da por hecho que el lector está familiarizado con conceptos de la topología general como arco-conexidad y grupo fundamental, entre otros, de no ser así, se sugiere seguir la recomendación que se da

al inicio del capítulo y tomar [2] como referencia.

Se introduce el tema de homotopía con el fin de aplicar las siguientes definiciones y resultados a algunas aplicaciones continuas sobre variedades diferenciables, esto se hace en el capítulo 2 y posteriormente esta teoría se utiliza como parte fundamental para el desarrollo del objetivo del trabajo que se lleva a cabo en el capítulo 3.

Definición 1.3.1.1 *Se dice que dos aplicaciones continuas $f_0, f_1 : X \to Y$ son homotópicas si existe una aplicación continua $F : X \times I \to Y$, con $I = [0,1]$, tal que $F(x,0) = f_0(x)$ y $F(x,1) = f_1(x)$.*

La aplicación F se llama una homotopía entre f_0 y f_1. Se escribe $f_0 \simeq f_1$ o $F : f_0 \simeq f_1$. Para cada $t \in [o,1]$, se denota a $F(x,t)$ por $f_t(x) : X \to Y$ es una aplicación continua. Se define ahora un concepto mas general de homotopía, el de homotopía relatica a un subconjunto A, en la que se requiere que la homotopía no mueva nungún punto de A.

Definición 1.3.1.2 *Sea A un subconjunto de X y sean f_0 y f_1 dos aplicaciones continuas de X en Y. Se dice que f_0 y f_1 son homotópicas relativamente a A si existe una homotopía $F : X \times I \to Y$ entre f_0 y f_1 tal que para todo $a \in A$, $F(a,t)$ no dependa de t; en otras palabras, $F(a,t) = f_0(a)$ para todo $a \in A$ y todo $t \in I$.*

La homotopía F se llama entonces una homotopía relativa a A y se escribe $f_0 \simeq_{relA} f_1$. Notese que si $A = \emptyset$, una homotopía relativa a A simplemente es una homotopía, la relación "homótopa relativa a A.$^{\text{es}}$ una relación de equivalencia, eso es lo que se enuncia en la siguiente proposición, su prueba se puede ver en alguno de los textos citados para la presente sección.

Proposición 1.3.1.1 *Las relaciones $\simeq$ y $\simeq_{relA}$ definidas en el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y son relaciones de equivalencia.*

Definición 1.3.1.3 *Si f y g son dos caminos que aplican el intervalo $[0,1]$ en X, se dice que son homotópicas por caminos si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1 y si existe una aplicación continua*

$$F : [0,1] \times [0,1] \to X,$$

tal que:

- $F(s,0) = f(s)$ *y* $F(s,1) = g(s)$,
- $F(0,t) = x_0$ *y* $F(1,t) = x_1$,

para cada $s \in [0,1]$ y cada $t \in [0,1]$. La aplicación F recibe el nombre de homotopía de caminos entre f y g. Si f es homotópica por caminos a g, se escribe $f \simeq_p g$.

La relación $\simeq_p$ es también una relación de equivalencia. Ahora se utiliza el concepto de aplicaciones homotópicas para establecer una relación de equivalencia entre espacios topológicos, que es una relación mucho más fuerte y útil.

Definición 1.3.1.4 *Se dice que dos espacios X e Y son del mismo tipo de homotopía si existen aplicaciones continuas $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ tales que*

$$gf \simeq Id_X$$

$$fg \simeq Id_Y$$

Las aplicaciones f y g se dice que son equivalencias homotópicas, además X e Y son homotópicamente equivalentes. Dos espacios homeomorfos son del mismo tipo de homotopía, claramente, si X e Y son homeomorfos, existe $f : X \to Y$ un homeomorfismo, es decir, f es una aplicación continua y f^{-1} que es también continua, donde es evidente que $ff^{-1} \simeq Id_X$ y además $f^{-1}f \simeq IdY$.

Definición 1.3.1.5 *Se dice que un espacio X es contráctil si es homotópicamente equivalente a un punto.*

La definición anterior se debe tener presente, pues gracias a ella se desarrollan una serie de ejemplos en el capítulo 3, una implicación que da esta definición es que todo espacio X convexo es contráctil, basta con tomar la aplicación

$$H : X \times [0, 1] \to X,$$

dada por $H(x, t) = (1 - t)x + tp$, la cual es una homotopía entre Id_X y la aplicación constante c_p, que lleva todo punto de X al punto p. Por lo tanto, todo espacio vectorial es homotópicamente equivalente a un punto. Retomando la definición 1.3.1.3 se establece una operación entre caminos.

Definición 1.3.1.6 *Si f es un camino en X de x_0 a x_1 y g es un camino en X de x_1 a x_2, se define el producto $f * g$ de f y g como el camino h dado por la aplicación*

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & si\ s \in [0, 1/2] \\ g(2s - 1) & si\ s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

La operación $*$ induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos dada por $[f] * [g] = [f * g]$.

Proposición 1.3.1.2 *La operación $*$ satisface las siguientes propiedades:*

(1) Es asociativa: Si $[f] * ([g] * [h])$ está bien definida, también lo está $([f] * [g]) * [h]$ y son iguales.

(2) Neutro a izquierda y a derecha: Dado $x \in X$ se denota por e_x al camino constante $e_x : [0,1] \to X$ que lleva todo punto del intervalo $[0,1]$ al punto x. Si f es un camino en X desde x_0 hasta x_1, entonces se cumple que

$$[f] * [e_x] = [f]$$

y

$$[e_x] * [f] = [f].$$

(3) Inverso: Dado el camino f en X desde x_0 hasta x_1. sea $\bar{f}$ el camino definido por $\bar{f}(s) = f(1-s)$, el cual se conoce como inverso de f. Entonces se cumple que

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}]$$

y

$$[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

La proposición anterior implica que la operación $*$ cunple las propiedades de la definición 1.1.3.2 y por lo tanto se puede pensar en una estructura de grupo sobre las clases de homotopía por caminos, ese resultado es enunciado en la siguiente definición.

Definición 1.3.1.7 *Sea X un espacio topológico y sea x_0 un punto de X. Un camino en X que comienza en x_0 y acaba en x_0 se denomina lazo basado en x_0. El conjunto de las clase de homotopía de caminos asociados a lazos basados en x_0 con la operación $*$, se denomina grupo fundamental de X relativo al punto base x_0 y se denota por $\pi_1(X, x_0)$.*

Sobre este tema hay una gran cantidad de teoría sin embargo el estudio de los grupos fundamentales es un estudio que se hace independiente para cada espacio topológico, ya que no es sencillo de calcular, algunos ejemplos que se tienen y de los cuales se hace uso en el capítulo 3 son el grupo fundamental de $\mathbb{R}^n$ el cual corresponde con un grupo trivial, es decir, $\pi_1(\mathbb{R}, x_0) = 0$ para todo punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y el grupo fundamental del espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ es un grupo de orden 2 para $n \geq 2$, por lo tanto es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ y el grupo fundamental de $\mathbb{R}P^1$ es el grupo trivial.

2 Generalidades de Fibrados y Propiedades Homotópicas de los Fibrados Vectoriales

En este capítulo se establecen notaciones, definiciones y resultados elementales con el fin de facilitar la comprención del capítulo cuarto, respecto a los fibrados vectoriales y una clasificación para los mismos (la cual en esencia es una construcción que permite el estudio de teorías más complejas como por ejemplo, la K-teoría, la Cohomología y otros estudios en el campo del análisis aplicado, entre otras), a partir del teorema de equivalencia homotópica que es uno de los resultados importantes del presente trabajo.

2.1. Introducción a los Fibrados

Los fibrados son estructuras muy usadas dentro del estudio avanzado de la geometría diferencial y otros campos como la Topología diferencial, el interés primordial dentro de este trabajo es la estructura de fibrados vectoriales sobre variedades diferenciables, para los cuales se hace una construcción a partir de funciones homotópicas de clase C^∞, este término no debe ser inquietante, ya que únicamente hace referencia a las aplicaciones homotópicas dadas en la definición 1.3.1 sumando la hipótesis de que estas sean de clase C^∞.

En principio se presentan definiciones y resultados sobre Fibrados, Fibrados Vectoriales y grupos de Lie asociados a los mismo, para ello se hace una recopilación sobre esta teorá presentada en [7; 1, pag. 1-12] y se detalla en las secciónes 2.1 y 2.2

Definición 2.1.1 *Un fibrado consiste de:*

- *Tres variedades:*
  - *E, conocida como el espacio total del fibrado*
  - *M, conocida como el espacio base del fibrado*
  - *F, conocida como la fibra estandar del fibrado.*
- *Una función sobreyectiva* C^∞

$$\pi : E \to M,$$

conocida como proyección.

- *Un cubrimiento abierto μ de M y para todo $U \subset \mu$ una función C^∞*

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to F$$

tal que la función

$$(\pi, \varphi) : \pi^{-1}(U) \to U \times F$$

es un difeomorfismo.

La función (π, φ) se llama una carta del fibrado en E sobre U y φ se llama la parte principal de la carta del fibrado, al fibrado de denota en ocasiones como la terna (E, π, M).

Definición 2.1.2 *Para todo $p \in M$, el subconjunto $E_p := \pi^{-1}(p)$ del espacio total E de un fibrado sobre M es llamada la fibra de π sobre p; la proyección π se llama comúnmente una fibración de E.*

Un Fibrado es localmente una variedad producto; una carta del fibrado en E sobre $U \subseteq M$, exhibe esta propiedad al inducir una estructura de producto local en E sobre un subconjunto abierto en M, a dicha propiedad se denomina propiedad de trivialidad local, la cual se entiende mejor gracias a la definición 2.2.3.1 dada en la sección 2.2.

Ejemplo 2.1.1 (Fibrado de líneas universales sobre un espacio proyectivo) Sean $\mathbb{F}$ que denota uno de los campos $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y $n \in \mathbb{N}$ fijo. El espacio proyectivo $\mathbb{F}P^n$ de dimensión n sobre $\mathbb{F}$ es el conjunto $\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}$ módulo la relación de equivalencia $\sim$ tal que $u \sim v$ sí y sólo si existe $c \in \mathbb{F} - \{0\}$ tal que $u = cv$, $\mathbb{F}P^n$ tiene estructura de variedad diferenciable. Se denota la proyección de $\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}$ a $\mathbb{F}P^n$ por por π

$$\pi(u_0, ..., u_n) := [u_0, ..., u_n] = \{(v_0, ..., v_n) \in \mathbb{F}^{n+1} - \{0\};\ \ (u_0, ..., u_n) = c(v_0, ..., v_n)\}.$$

Para $j = 0, ..., n$, se define una carta $z_j : \mathbb{F}P^n \to \mathbb{F}^n$ en el conjunto abierto

$$U_j = \{\pi(u_0, ..., u_n) \in \mathbb{F}P^n;\ \ u_j \neq 0\},$$

por

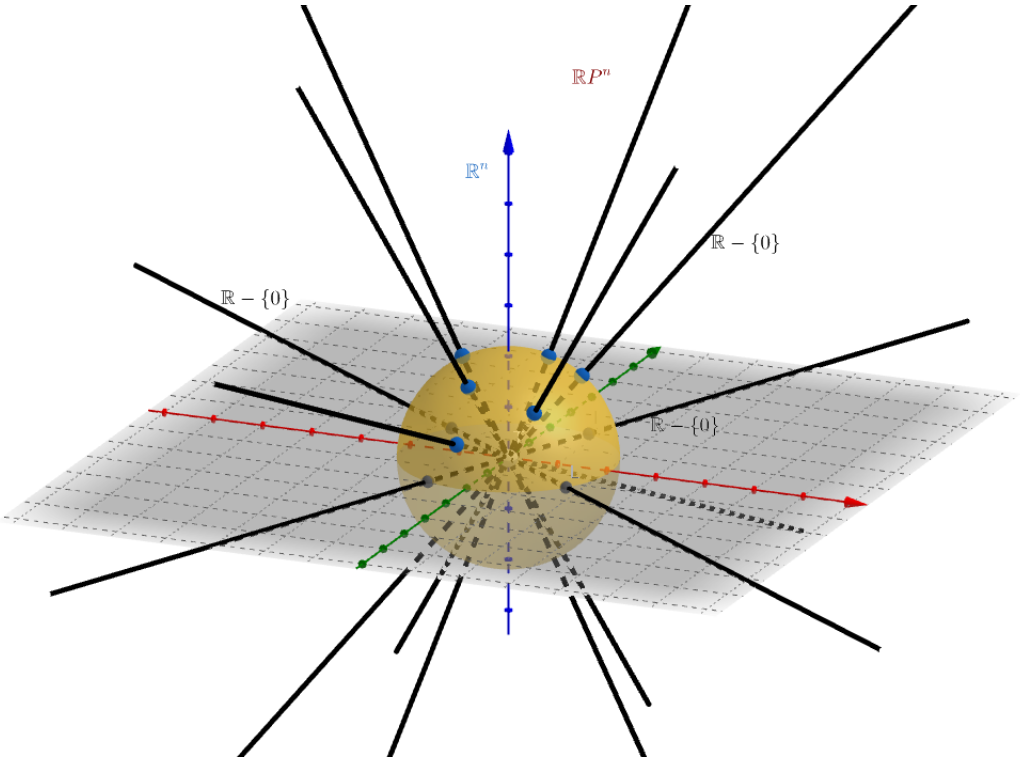
$$z_j \circ \pi(u_0, ..., u_n) = \left(\frac{u_0}{u_j}, ..., \widehat{\frac{u_j}{u_j}}, ..., \frac{u_n}{u_j}\right)$$

donde $\widehat{\ }$ indica una entrada que se elimina. Las cartas (z_j, U_j) genera una estructura de clase C^∞ en $\mathbb{F}P^n$, la diferenciabilidad de la función de transición de la carta z_k a la carta z_j esta dada por: si $w \in z_k(U_J \cap U_k) \subset \mathbb{F}^n$,

$$z_j \circ z_k^{-1}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w_{j+1}}(w_1, ..., \widehat{w_{j+1}}, ..., w_k, 1, w_{k+1}, ..., w_n) & \text{si } j < k \\ \frac{1}{w_j}(w_1, ..., w_k, 1, w_{k+1}, ..., \widehat{w_j}, ..., w_n) & \text{si } j > k, \end{cases}$$

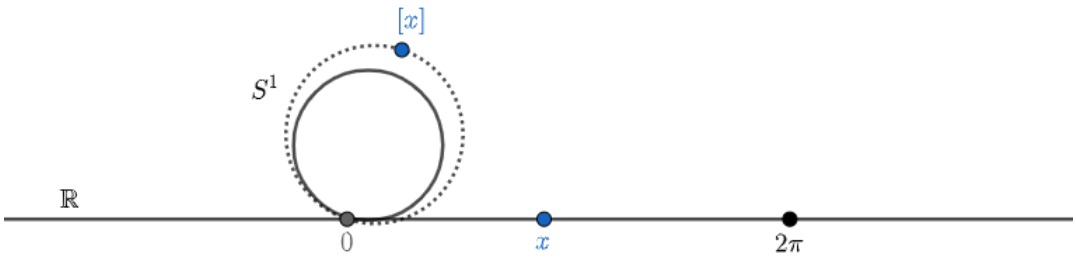
los denominadores no son cero ya que $w \in z_k(U_j)$, además la función es continuamente diferenciable.

Tomando el fibrado dado por $\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}$ como espacio total sobre $\mathbb{F}P^n$ con fibra estandar $\mathbb{F} - \{0\}$. Se define $\psi_j : \pi^{-1}(U_j) \to \mathbb{F} - \{0\}$ por $\psi_j(v_0, ..., v_n) := v_j$; las funciones (π, ψ_j) serán cartas del fibrado, lo cual se verifica en el ejemplo 2.1.1.1 al mirar la diferenciabilidad de las funciones de transición descritas en la definición 2.1.3. Dicho fibrado se llama fibrado de lineas universales sobre un espacio proyectivo y se nota de ahora en adelante por γ_n^1 a este fibrado cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.



Ejemplo 2.1.2 (La banda de Möbius) El circulo S^1 se puede construir tomando $\mathbb{R}$ modulo la relación de equivalencia $\sim$ tal que para $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y$ sí y sólo si para cada $n \in \mathbb{Z}$, $y = x + 2\pi n$ entonces se define $[x] \in \mathbb{R}/\sim$ por

$$[x] = \{y \in \mathbb{R};\ \ y = x + 2\pi n\},$$



La relación $\sim$ define una relación de equivalencia $\simeq$ en $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ por

$$(x, t) \simeq (x + 2\pi n, (-1)^n t),$$

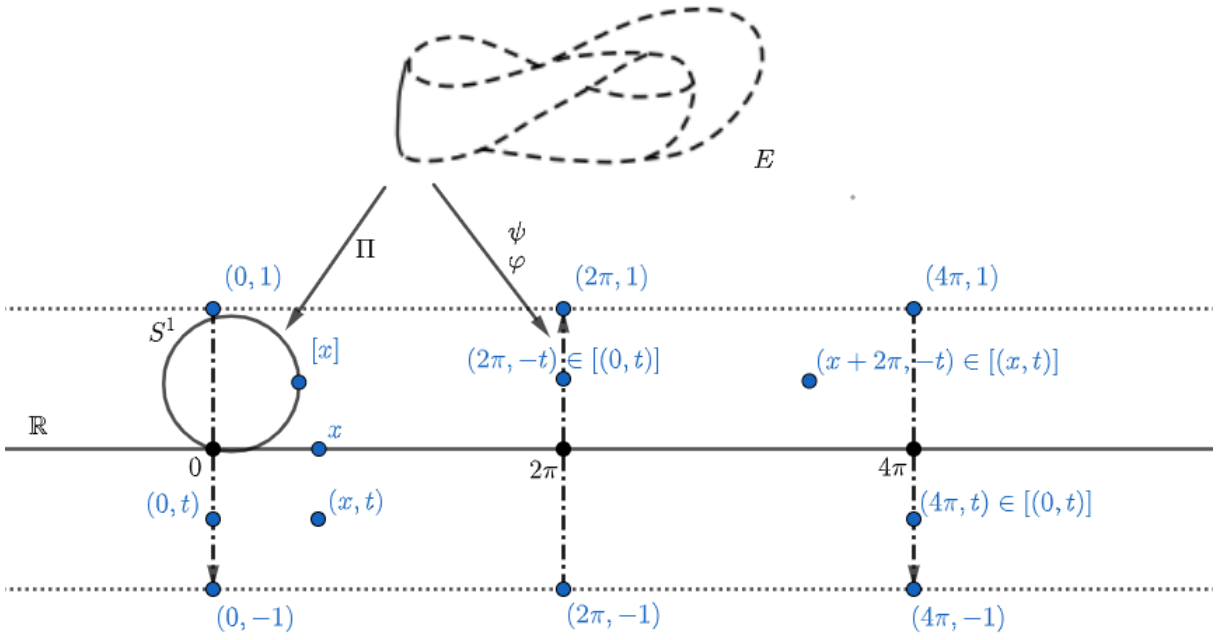
para todo $n \in \mathbb{Z}$, luego $\mathbb{R} \times (-1, 1)/\simeq$ es la banda de Möbius.

Se define $\Pi : E \to S^1$ por $\Pi[x, t]_\simeq := [x]_\sim$, donde las llaves denotan las clases de equivalencia. Las cartas del fibrado (Π, ψ) y (Π, φ) están definidas en E por $\psi : E \to (-1, 1)$ dada por

$$\psi[x, t]_\simeq := t, \quad |x| < \pi,$$

y $\varphi : E \to (-1, 1)$ dada por

$$\varphi[x, t]_\simeq := -t, \quad 0 < x < 2\pi.$$



Ejemplo 2.1.3 (Fibrado tangente) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$, el cual se define en el primer capítulo como la unión de todos los espacios tangente a la variedad en cada punto de la misma. se le proporciona

al conjunto TM una estructura diferenciable (de dimensión $2n$); con tal estructura TM se llama fibrado tangente de M.

Sea $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ una estructura diferenciable en M, $(x_\alpha^1, ..., x_\alpha^n)$ denota las coordenadas de $x_\alpha(U_\alpha)$ en el sistema x_α y $\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}\}$ la base asociada al espacio tangente de U_α. Para cada α se define

$$y_\alpha : TM \to x_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n,$$

por

$$y_\alpha(p, v) = (x_\alpha(p), u_1, ..., u_n) = (x_\alpha^1(p), ..., x_\alpha^n(p), u_1, ..., u_n),$$

donde $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ con u_i $(1 \leq i \leq n)$ el i-esimo coeficiente de la combinación lineal en la base para T_pM, es decir, $v = \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}$.

Ahora se prueba que $\{(V_\alpha, y_\alpha)\}$ es una estructura diferenciable en TM, donde

$$V_\alpha = y_\alpha^{-1}(x_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n)),$$

es un abierto de TM debido a que y_α es un homeomorfismo. Ya que $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ y $(dx_\alpha^{-1})_q(\mathbb{R}^n) = T_{x_\alpha^{-1}(q)}M$, $q \in x_\alpha(U_\alpha)$, se tiene

$$\bigcup_\alpha V_\alpha = TM,$$

con lo que se verifica la condición (i) de la Definición 1.2.1.5.

Sea $(p, v) \in TM$, tal que

$$(p, v) \in V_\alpha \cap V_\beta.$$

Entonces,

$$(p, v) = (x_\alpha^{-1}(q_\alpha), dx_\alpha^{-1}(v_\alpha)) = (x_\beta^{-1}(q_\beta), dx_\beta^{-1}(v_\beta)),$$

donde $q_\alpha \in x_\alpha(U_\alpha)$, $q_\beta \in x_\beta(U_\beta)$, $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto,

$$y_\alpha \circ y_\beta^{-1}(q_\beta, v_\beta) = y_\alpha(x_\beta^{-1}(q_\beta), dx_\beta^{-1}(v_\beta)) = ((x_\alpha \circ x_\beta^{-1})(q_\beta), d(x_\alpha \circ x_\beta^{-1})(v_\beta)).$$

Ya que $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ es diferenciable, $d(x_\alpha \circ x_\beta^{-1})$ también lo es. Se sigue que $y_\alpha \circ y_\beta^{-1}$ es diferenciable, con lo cual se verifica la condición (ii) de la Definición 1.2.1.5 y por lo tanto el fibrado tangente TM es una variedad diferenciable.

El nombre de fibrado tangente a TM se le otorga ya que este tiene estructura de fibrado sobre la variedad diferenciable M donde la proyección $\pi : TM \to M$ esta dada por $\pi(p, v) = p$ para todo $(p, v) \in TM$. Las cartas del fibrado TM están dadas entonces de la siguiente

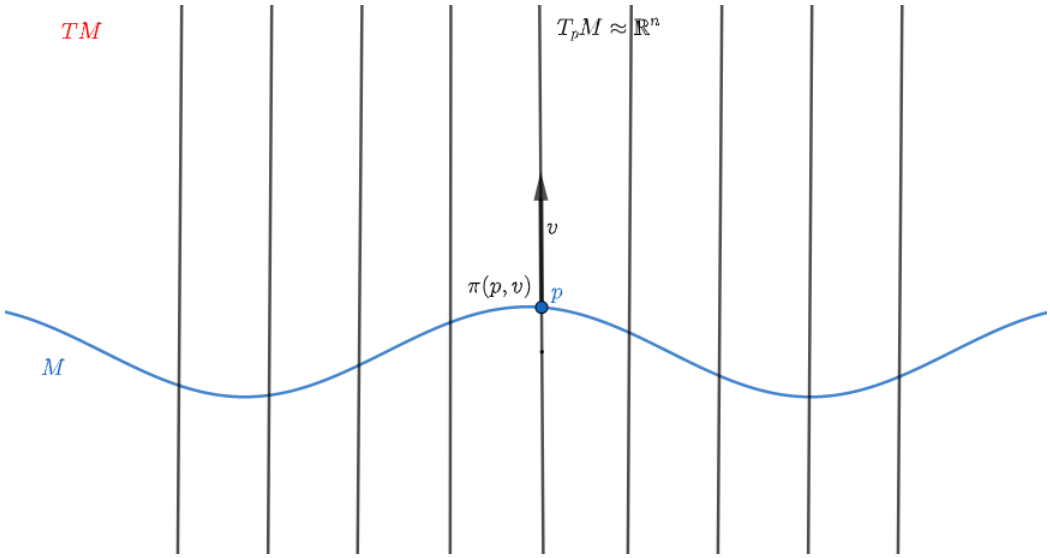
manera, dada una carta $x_\alpha = (x_\alpha^1, ..., x_\alpha^n) : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ en M, se le asocia una carta del fibrado tangente en $\pi^{-1}(U_\alpha)$ que está inducida por la función tangente de x_α:

$$x_{\alpha *} = (x_\alpha \circ \pi, dx_\alpha) : T(U_\alpha) \to x(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n},$$

dada por $x_{\alpha *}(p, v) = (x_\alpha \circ \pi(p, v), dx_\alpha^1(p, v), ..., dx_\alpha^n(p, v))$, donde $(p, v) \in T(U_\alpha)$, así $x_{\alpha *}$ es justamente la función y_α ya definida en la estructura de TM y reemplazándola por

$$(\pi, dx) : T(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n,$$

se obtiene una carta para el fibrado tangente.



Otro fibrado que es de gran importancia en el desarrollo de este trabajo es el fibrado pullback o fibrado inducido que se presenta como ejemplo a continuación.

Ejemplo 2.1.4 (Fibrado pullback) Sea (E, π, M) un fibrado con fibra estandar F y sea $f : N \to M$ una función de clase C^∞, los fibrados sobre N están inducidos por los fibrados sobre M. Se define el fibrado pullback ó inducido como:

$$f^*E = \{(p, e) \in N \times E;\ \ f(p) = \pi(e)\}$$

con proyección $Pr_1|_{f^*E} : f^*E \to N$ tal que $Pr_1(p, e) = p$, que nota simplemente por Pr_1. Similarmente se denota la restricción de Pr_2 a f^*E por Pr_2 la fibra de f^*E en $p \in N$ es:

$$(f^*E)_p = \{p\} \times \pi^{-1}(f(p)) = \{p\} \times E_{f(p)},$$

la cual es difeomorfa a $E_{f(p)}$ bajo Pr_2, en efecto, tanto la proyección Pr_2 como su inversa, que en este caso es la inclusión que toma a un punto $v \in E_{f(p)}$ y le hace corresponder el

punto $(p, v) \in (f^*E)_p$, son diferenciables ya que $E_{f(p)}$ es difeomorfa a la fibra estandar F, así la fibra estandar de f^*E es F.

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{Pr_2} & E \\ {\scriptstyle Pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Sea (π, ψ) una carta una carta del fibrado en E sobre un conjunto abierto $U \subseteq M$; una carta del fibrado en f^*E sobre $f^{-1}(U)$ es la función $(Pr_1, \psi \circ Pr_2)$. El fibrado f^*E se llama el pullback de E por la función f.

Proposición 2.1.1 *La proyección $\pi : E \to M$ de un fibrado es una submersión, esto es, para todo punto $\xi \in E$ la función tangente inducida*

$$\pi_*|_\xi : E_\xi \to M_{\pi(\xi)}$$

es sobreyectiva.

Además para todo $p \in M$ la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ en E sobre p es una subvariedad encajada difeomorfa a la fibra estandar F del fibrado.

Demostración. Sea (π, φ) una carta del fibrado en E sobre un abierto U en M para todo $(p, v) \in U \times F$, $Pr_{1*}|(p, v)$ envía $(U \times F)_{(p,v)}$ sobre $M_p = U_p$, así que Pr_{1*} es una submersión de $U \times F$ sobre U. Ya que $(\pi, \varphi)_*$ envía $T(\pi^{-1}(U))$ difeomorficamente sobre $T(U \times F)$, $\pi_* = Pr_{1*} \circ (\pi, \varphi)_*$ es sobreyectiva en cada $\xi \in \pi^{-1}(U)$; Luego π es una submersión.

Por el teorema de la función implícita, toda fibra de π es naturalmente una subvariedad encajada de E. Para todo $p \in U$, (π, φ) envía E_p difeomorficamente en la subvariedad encajada $p \times F$ de $U \times F$ y Pr_2 es un difeomorfismo de esta en F. ■

Sea $Diff(F)$ que denota el grupo de difeomorfismos de F con la composición. Si se tiene que (π, φ) y (π, ϕ) son cartas del fibrado de E sobre los abiertos U y V en M respectivamente. Las restricciones de (π, φ) y (π, ϕ) a $\pi^{-1}(U \cap V)$ son cartas del fibrado en E. Para todo $p \in U \cap V$, φ y ϕ envían la fibra E_p difeomorficamente a F; luego, $\varphi \circ (\phi|_{E_p})^{-1}$ es un difeomorfismo de F; el resultado es una función

$$f_{\varphi,\phi} : U \cap V \to Diff(F)$$

$$p \to \varphi \circ (\phi|_{E_p})^{-1}$$

$f_{\varphi,\phi}$ satisface las relaciones:

$$\varphi = (f_{\varphi,\phi} \circ \pi).\phi,$$

$$f^{-1}_{\varphi,\phi}(p) = f_{\phi,\varphi}(p),$$

donde . denota la acción de $Diff(F)$ en F. Además, si (π, η) es una carta del fibrado en E sobre W en M con $U \cap V \cap W$ no vacía, entonces,

$$f_{\varphi,\phi}(p) = f_{\varphi,\eta}(p).f_{\eta,\phi}(p)$$

Definición 2.1.3 *Dadas las cartas del fibrado (π, φ) y (π, ϕ) sobre los conjuntos abiertos U y V en M con $U \cap V \neq \emptyset$, la función $f_{\varphi,\phi} : U \cap V \to Diff(F)$ se llama función de transición de ϕ a φ.*

2.1.1. Grupos de estructura

Definición 2.1.1.1 *Un grupo de Lie G se dice que es un grupo de transformación de Lie en la variedad F si se da una acción a izquierda de G en F, es decir, una función $\alpha : G \times F \to F$ de clase C^∞ tal que*

$$\alpha(gh, \xi) = \alpha(g, \alpha(h, \xi))$$

y

$$\alpha(e, \xi) = \xi; \xi \in F,$$

para todo $g, h \in G$, tal acción α puede ser interpretada como un homomorfismo de G a $Diff(F)$: Para todo $g \in G$, α_g es el elemento de $Diff(F)$ tal que $\alpha_g \xi := \alpha(g, \xi)$ para todo $\xi \in F$.

Definición 2.1.1.2 *Sea G un grupo de Lie actuando en F a la izquierda. Las cartas del fibrado (π, φ) y (π, ψ) en E sobre U y V en M respectivamente, se dice que son G-compatibles si $U \cap V = \emptyset$, o si $U \cap V \neq \emptyset$ y existe la función h de $U \cap V$ a G tal que $f_{\varphi,\psi}(p) = \alpha_{h(p)} \in Diff(F)$, para todo $p \in U \cap V$.*

En este caso se identifica $f_{\varphi,\psi}$ con h y se considera $f_{\varphi,\psi}$ como una función de $U \cap V$ a G; esto rinde la identidad $f_{\varphi,\psi}(p).\xi = \alpha(f_{\varphi,\psi}(p), \xi)$, donde α es la acción de G en F.

Definición 2.1.1.3 *Sea G un grupo de Lie. Se dice que un fibrado (E, π, M) es un fibrado con estructura de grupo G si G es un grupo de transformación de Lie en F, y si se dá un atlas del fibrado $\mathcal{A}$ en E tal que cualquier par de cartas del fibrado en $\mathcal{A}$ son G-compatibles. Una carta del fibrado es admisible como una carta del fibrado en el fibrado E con estructura de grupo G si y solo si, esta es G-compatible con cada elemento del atlas del G-fibrado dado.*

Aunque se hace referencia a G como el grupo de estructura del fibrado, se debe enfatizar que G no es la única opción posible de grupo de estructura. Es claro que tomando H como un grupo de Lie que actúa trivialmente sobre F, el grupo de Lie $G \times H$ es entonces un grupo de estructura para E, además, en ocasiones un subgrupo de G puede actuar como grupo de estructura de E, de la misma manera en la que G se presenta como un homomorfismo a un subgrupo de los difeomorfismos de F.

Ejemplo 2.1.1.1 (Fibrado de líneas universales sobre un espacio proyectivo) En el ejemplo 2.1.1, sea $p \in U_j \cap U_k$, $j \neq k$, y $v \in \pi^{-1}(p)$; por la definición de U_k, $v_k \neq 0$. Ahora, para todo $c \in \mathbb{F} - \{0\}$, $\psi_k|^{-1}_{\pi^{-1}(p)}(c) = \left(\frac{c}{v_k}\right) v$ ya que

$$\psi_k \circ \psi_k|^{-1}_{\pi^{-1}(p)}(c) = \psi_k\left(\left(\frac{c}{v_k}\right) v\right) = \psi_k\left(\frac{cv_0}{v_k}, ..., \frac{cv_{k-1}}{v_k}, c, \frac{cv_{k+1}}{v_k}, ..., \frac{cv_n}{v_k}\right) = c,$$

por lo tanto, las funciones de transición están dadas por:

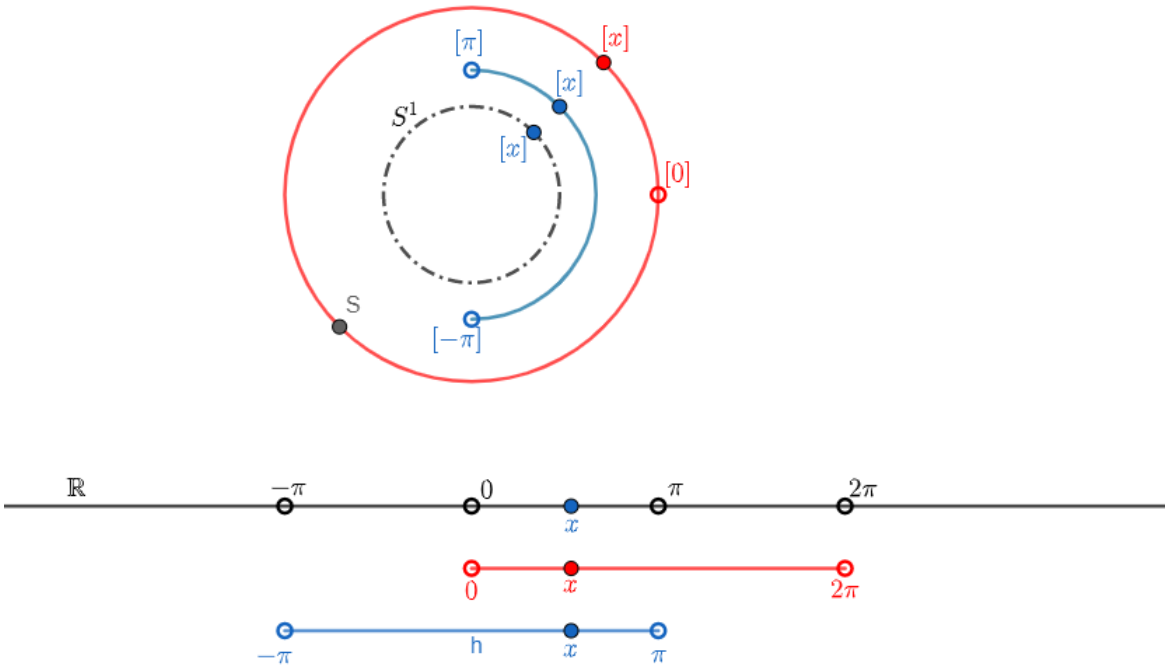
$$\begin{aligned} f_{\psi_j,\psi_k}(p).c &= \psi_j \circ \psi_k|^{-1}_{\pi^{-1}(p)}(c) \\ &= \psi_j\left(\left(\frac{c}{v_k}\right) v\right) \\ &= \frac{cv_j}{v_k} \in GL(1,\mathbb{F}), \end{aligned}$$

por lo tanto, $f_{\psi_j,\psi_k}(p)$ es un difeomorfismo de $\mathbb{F} - \{0\}$; además, la función de cambio de coordenadas $(\pi, \psi_j) \circ (\pi, \psi_k)^{-1}$ que actúa en $(p, c) \in (U_j \cap U_k) \times (\mathbb{F} - \{0\})$ de la siguiente manera,

$$(\pi, \psi_j) \circ (\pi, \psi_k)^{-1}(p, c) = (p, f_{\psi_j,\psi_k}(p).c),$$

es un difeomorfismo de $(U_j \cap U_k) \times (\mathbb{F} - \{0\})$. Así la función (π, ψ_j) determina una estructura diferenciable sobre $\mathbb{F} - \{0\}$. Ya que cada función de transición $f_{\psi_j,\psi_k}(p)$ envía $U_j \cap U_k$ diferenciablemente a $GL(1,\mathbb{F})$, la estructura de grupo del fibrado es $GL(1,\mathbb{F})$.

Ejemplo 2.1.1.2 (La banda de Möbius) Sean (Π, ψ) y (Π, φ) las cartas del fibrado expuestas en el ejemplo 2.1.2, y sea $[x] \in S^1$, con $0 < x < \pi$,



para todo $t \in (-1,1)$,

$$f_{\psi,\varphi}([x]).t = \psi \circ \varphi^{-1}|_{\Pi^{-1}[x]}(t) = \psi[x,t] = -t$$

y

$$f_{\varphi,\psi}([x]).t = \varphi \circ \psi^{-1}|_{\Pi^{-1}[x]}(t) = \varphi[x,-t] = t = Id_{(-1,1)}$$

Por lo tanto el grupo de estructura del fibrado es $\mathbb{Z}_2$ que es el único grupo de orden dos.

2.2. Fibrados Vectoriales

En el ejemplo 2.1.3 se organiza la estructura del fibrado tangente, se puede ver como este simplemente asocia a cada punto p de la variedad M un espacio vectorial, que en este caso es el espacio tangente a la variedad sobre p y se define el fibrado como la unión de todos ellos, donde cada fibra es un espacio tangente, es decir, cada fibra es isomorfa a un espacio vectorial, generalizando el concepto de fibrado tangente tomando en cada punto de la variedad un espacio vectorial no necesariamente el espacio tangente, se obtiene el concepto de fibrado vectorial que se presenta a continuación.

Definición 2.2.1 *Sea $\mathbb{F}$ uno de los campos $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial m-dimensional sobre $\mathbb{F}$. Un fibrado E sobre M con fibra estandar $\mathcal{V}$ se llama fibrado $\mathbb{F}$-vectorial si toda fibra de E está dotada con una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, y si se da un atlas fibrado $\mathcal{A}$, (atlas fibrado vectorial), tal que toda carta del fibrado en $\mathcal{A}$ es lineal en cada fibra: si $(\pi,\varphi) : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathcal{V}$ pertenece a $\mathcal{A}$, entonces la función $\varphi|_{E_p} : E_p \to \mathcal{V}$ debe ser un isomorfismo de espacios vectoriales, para todo $p \in U$.*

La siguiente definición es muy relevante en este estudio, ya que a partir de ella se procede a caracterizar (construir) los fibrados vectoriales respecto a clases de isomorfismos entre fibrados.

Definición 2.2.2 *Si $g : M_1 \to M_2$ es C^∞ y si (E_j, π_j, M_j) es un fibrado vectorial sobre $\mathbb{F}$, $j = 1,2$. Entonces una aplicación C^∞ $f : E_1 \to E_2$ es un homomorfismo de fibrados vectoriales a lo largo de g si $\pi_2 \circ f = g \circ \pi_1$ y si para cada $p \in M_1$, f envía $E_1|_p$ linealmente a $E_2|_{g(p)}$. Si f envía $E_1|_p$ isomorficamente a $E_2|_{g(p)}$, para todo $p \in M_1$, f es un isomorfismo a lo largo de g.*

2.2.1. Grupos de Lie asociados

La primera aproximación a una caracterización para los fibrados vectoriales surge de la característica de su grupo de Lie asociado, así, la siguiente proposición enuncia y describe cuando un fibrado es vectorial, sin embargo esta no proporciona una manera eficiente de encontrarlos o definir propiedades sobre ellos.

Proposición 2.2.1.1 *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Un fibrado E sobre M con fibra estandar $\mathcal{V}$ es un fibrado $\mathbb{F}$-vectorial si y solo si E admite a $Gl(\mathcal{V})$ como grupo de estructura, donde $Gl(\mathcal{V})$ es el grupo de todas las transformaciones lineales invertibles del espacio vectorial.*

Demostración. Sean (π, φ) y (π, ψ) cartas del fibrado admisibles sobre los conjuntos abiertos U y V en M. fijando $p \in U \cap V$. Para todo $\xi, \delta \in \mathcal{V}$ y $c \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned} f_{\varphi,\psi}.(c\xi + \delta) &= \varphi \circ \psi|_{E_p}^{-1}.(c\xi + \delta) \\ &= \varphi(c\psi|_{E_p}^{-1}\xi + \psi|_{E_p}^{-1}\delta) \\ &= c(\varphi \circ \psi|_{E_p}^{-1})(\xi) + (\varphi \circ \psi|_{E_p}^{-1})(\delta) \\ &= cf_{\varphi,\psi}(p).\xi + f_{\varphi,\psi}(p).\delta. \end{aligned}$$

Así que $f_{\varphi,\psi}$ actúa linealmente en $\mathcal{V}$; como f es invertible, está en $Gl(\mathcal{V})$.

Una base $\{e_j\}$ para $\mathcal{V}$ fija un isomorfismo de un grupo de Lie (que es un difeomorfismo por definición. Ver [3: pag 89]) de $Gl(\mathcal{V})$ a $Gl(m, \mathbb{F})$; si $\{w^i\}$ es la base dual para $\mathcal{V}^*$, entonces con está identificación,

$$f_{\varphi,\psi}(p) = [w^i \circ \varphi \circ (\pi, \psi)^{-1}(p, e_j)] \in Gl(m, \mathbb{F}),$$

donde $(\pi, \psi)^{-1} : U \times \mathcal{V} \to \pi^{-1}(U)$, tal que si $p \in U \subset M$, entonces $(\pi, \psi)^{-1}(p, e_j) = \psi|_{E_p}^{-1}(e_j)$. Así, $f_{\varphi,\psi}$ es una matriz de funciones en $U \cap V$ y es por lo tanto una función C^∞ de $U \cap V$ a $Gl(m, \mathbb{F})$.

Ahora, para $p \in U$ se define una estructura de espacio vectorial en E_p por

$$c\mathrm{u} + \mathrm{v} := (\pi, \psi)^{-1}(c\psi(\mathrm{u}) + \psi(\mathrm{v})); \;\; c \in \mathbb{F}, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in E_p.$$

Por definición, ψ envía E_p isomorficamente a $\mathcal{V}$. Si $p \in U \cap V$, entonces φ es además un isomorfismo de E_p a $\mathcal{V}$ ya que $f_{\varphi,\psi}(p) \in Gl(\mathcal{V})$; así la estructura de espacio vectorial de E_p está bien definida. ■

Ejemplo 2.2.1 (Fibrado Tangente) Retomando el ejemplo 2.1.3, dadas las cartas x_α y x_β sobre $p \in M$ el valor en p de la función de transición de $x_{\alpha *}$ a $x_{\beta *}$ es

$$f_{x_\alpha, x_\beta} = dx_\alpha \circ (dx_\beta|_{M_p})^{-1} = \left[\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right]_{0 \le i,j \le n} (p),$$

que es la matriz Jacobiana usual de x_α y x_β en p, por lo tanto f_{x_α, x_β} es una función diferenciable de una vecindad de p a $GL(n, \mathbb{R})$, entonces, como grupo de estructura de TM se puede elegir $GL(n, \mathbb{R})$ y en consecuencia el fibrado tangente es un fibrado vectorial.

El fibrado de lineas universales sobre un espacio proyectivo es entonces un fibrado vectorial ya que tiene como grupo de estructura a $GL(1,\mathbb{F})$ como se muestra en el ejemplo 2.1.1.1, además también el fibrado inducido f^*E sobre un fibrado vectorial (E,π,M) para una función $f : N \to M$ es un fibrado vectorial, esto se prueba en la proposición 2.3.1 y es un resultado esencial para todo el trabajo a partir de esta.

2.2.2. Fibrado vectorial trivial

Definición 2.2.2.1 (Fibrado trivial) *El producto $M \times N$ de variedades M y N es naturalmente el espacio total del fibrado $(M \times N, Pr_1, M)$ con fibra estandar N. El grupo trivial $G = \{Id_N\}$ se puede elegir como grupo de estructura, entonces el fibrado se llama trivial. Una carta del fibrado sobre un fibrado arbitrario, trivializa el fibrado localmente; en general, no hay trivialización local natural.*

Definición 2.2.2.2 (Fibrado vectorial trivial) *El fibrado vectorial $E = M \times \mathcal{V}$ sobre el espacio base M con la proyección Pr_1, dada por:*

$$Pr_1 : E \to M; Pr_1(p,v) = p,$$

para todo $p \in M$, donde las fibras

$$E_p = Pr_1^{-1}(p) = \{p\} \times \mathcal{V}.$$

E se llama Fibrado Vectorial Trivial, se omite en la notación escribir el espacio base y la proyección ya que son evidentes, los fibrados vectoriales se notan por ϵ_n donde n representa la dimensión del espacio vectorial $\mathcal{V}$.

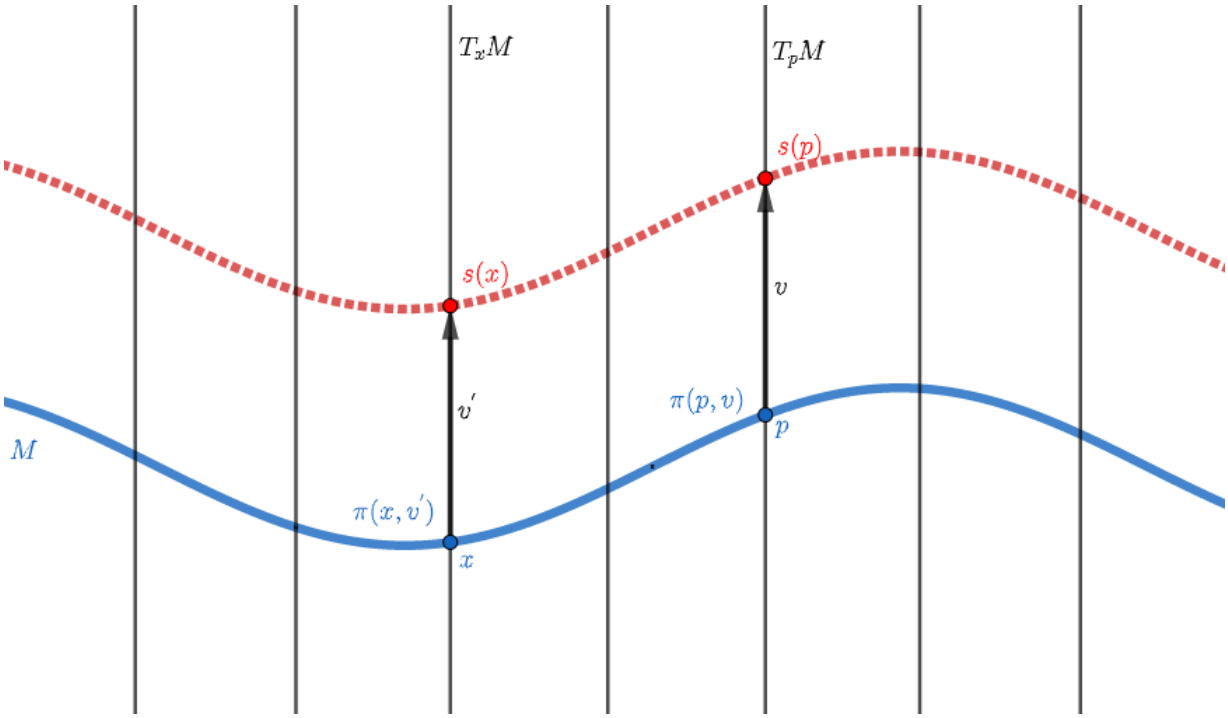
La condición de trivialidad local está dada por $h_p : Pr^{-1}(U_p) \to U_p \times \mathcal{V}$.

2.2.3. Secciones del Fibrado Vectorial

La definición de sección sobre fibrados vectoriales se presenta a continuación ya que es de gran interés en el estudio y aún más, en la aplicaciones que se hacen sobre los fibrados vectoriales, en Física por ejemplo el estudio sobre los campos vectoriales es constante y a travéz de las secciones se generaliza el concepto de campo vectorial, extendiéndolo sobre variedades diferenciables, los conceptos y propiedades enunciados aquí sobre secciones de fibrados vectoriales se retoman de [7: pag. 31], [9: pag. 101] y [17: pag. 207].

Definición 2.2.3.1 *Una sección de un fibrado vectorial (E,π,M), es una función de clase C^∞ $s : M \to E$ que satisface $\pi \circ s = Id$; dicho de otra manera $s(p) \in \pi^{-1}(p)$, la fibra sobre p, para $p \in M$.*

En particular, las secciónes del fibrado tangente sobre una variedad M, no son más que los campos vectoriales sobre la variedad, esto ya que toda función continua $s : M \to TM$ es un campo vectorial ya que $s(p) \in \pi^{-1}(p) = T_pM$ y si se tiene un campo vectorial X, X es continuo y además asocia a cada punto $p \in M$ el vector $X(p) \in T_pM$, por lo tanto X es una sección. Ya que los fibrados vectoriales son una generalización del fibrado tangente, las secciones de los fibrados vectoriales son una generalización de los campos vectoriales.



Definición 2.2.3.2 *Una sección local de un fibrado vectorial (E, π, M), es una función de clase C^∞ $h : U \to E$ tal que $\pi \circ h(p) = p$, para todo $p \in U$, es decir una elección continua de un vector en cualquier fibra.*

Un subconjunto importante del espacio total E es el subespacio $\hat{\mathbf{E}}$, que se denomina el espacio nulo de E, que consta de todos los elementos $e \in E$ nulos en sus respectivas fibras.

Definición 2.2.3.3 *Una sección se denomina nula si s es una función de clase C^∞ de E al espacio nulo $\hat{\mathbf{E}}$, ésto es, una sección nula, es la unión de los vectores nulos en todas las fibras.*

Proposición 2.2.3.1 *Toda sección s de un fibrado vectorial trivial ϵ_n tiene la forma*

$$s(p) = (p, w(p)),$$

donde $w : M \to \mathcal{V}$ es una función únivocamente definida para s.

Demostración. Sea $s : M \to M \times \mathcal{V}$ una sección del fibrado vectorial trivial ϵ_n, sea $p \in M$, entonces $s(p) \in Pr_1^{-1}(p)$,

$$Pr_1^{-1} : M \to M \times \mathcal{V},$$

así, $Pr_1^{-1} := (Id_M, W)$ donde $W : M \to \mathcal{V}$.

Por lo tanto, $Pr_1^{-1}(p) = (p, W(p))$, ya que $s(p) \in Pr_1^{-1}(p)$, $s(p) = (p, w(p))$ donde $w : M \to \mathcal{V}$ y además $w(p) \in W(p)$, por lo tanto, w es una función únivocamente definida para s. Ahora, si $s(p) = (s, w(p))$ donde $w : M \to \mathcal{V}$ es una función continua, entonces $s : M \to M \times \mathcal{V}$ es una función continua y además, para todo $p \in M$

$$(Pr_1 \circ s)(p) = Pr_1(s(p)) = Pr_1(p, w(p)) = p,$$

por lo tanto,

$$Pr_1 \circ s = Id_M.$$

Así, s es una sección del fibrado vectorial trivial ϵ_n. ■

NOTA: Al conjunto formado por todas las secciones de un fibrado vectorial (E, π, M), se denota por $\Gamma(E)$.

Ejemplo 2.2.3.1 (Sección inducida por una carta del fibrado vectorial) Sean (E, π, M) un fibrado vectorial con fibra estandar $\mathcal{V}$ y (π, φ) una carta del fibrado en E sobre el abierto $U \subseteq M$, la carta determina un isomorfismo

$$\varphi|_{E_p}^{-1} : \mathcal{V} \to E_p,$$

para cada $p \in U$. Sea $\{e_j\}$ una base fija para el espacio vectorial $\mathcal{V}$, entonces $\{\varphi|_{E_p}^{-1}(e_j)\}$ es una base para E_p, se define

$$\Psi_j|_p := \varphi|_{E_p}^{-1},$$

ya que la carta de un fibrado es un difeomorfismo, cada $\Psi_j|_p$ es una función de clase C^∞, además,

$$\begin{aligned} \pi \circ \Psi_j|_p(p) &= \pi \circ \varphi|_{E_p}^{-1}(p) \\ &= \pi(u) \\ &= p, \end{aligned}$$

con $u \in E_p$. Así $\pi \circ \Psi_j|_p = Id_M$, por lo tanto $\Psi_j|_p$ es una sección de E sobre U, es decir una sección local de E.

2.2.4. El fibrado universal

Para definir el fibrado universal, primero se introduce la noción de Grassmaniano infinito $\mathbb{G}_n$ que es la unión de las variedades Grassmanianas $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ formado por todos los planos n-dimensionales en $\mathbb{R}^k$ que pasan por el origen. Es decir, $\mathbb{R}P^m$ es un caso particular de $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ cuando $n = 1$ y $k = m + 1$, para esta sección se cita a [8: 1 pag. 9],[9: pag. 102] y [10: pag. 31-33] como referencias.

Se define el espacio vectorial

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...); x_i \neq 0, \text{ para un número finito de índices}\}$$

donde el punto $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ es visto como $(x_1, ..., x_n, 0, ...) \in \mathbb{R}^\infty$, así $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\infty$. El grassmaniano infinito se define como sigue:

$$\mathbb{G}_n = \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^\infty) = \{B;\ B \text{ es un subespacio n-dimensional de } \mathbb{R}^\infty\}$$

Luego, se define

$$\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k) = \{(B, v) \in \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k; v \in B\}$$

se mira que las inclusiones $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{k+1} \subset ...$ inducen las inclusiones $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{k+1}) \subset ...$ y estas a su vez inducen las inclusiones $\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{E}_n(\mathbb{R}^{k+1}) \subset ...$ Así, se puede definir $\mathbb{G}_n = \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_k \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ y $\mathbb{E}_n = \mathbb{E}_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_k \mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)$, que se llama fibrado universal.

NOTA: Con la ayuda de las contenencias, se puede definir una topología sobre $\mathbb{G}_n$ tomando la inclusión $i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\infty$ que induce una aplicación $I : \mathbb{G}(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{G}_n$, así un conjunto $A \in \mathbb{G}_n$ es abierto si y sólo sí $A \cap \mathbb{G}(\mathbb{R}^k)$ es abierto en $\mathbb{G}(\mathbb{R}^k)$, para todo k; análogamente de define una topología para $\mathbb{E}_n$.

Observación 2.2.4.1 Existe otra manera de definir el grassmaniano infinito utilizando una relación de equivalencia que identifica las $n-$tuplas de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^\infty$ para ello se define el espacio:

$$(\mathbb{R}^\infty)^n = \{(u_1, ..., u_n);\ \ u_i \in \mathbb{R}^\infty \text{ son linealmente independientes}\}.$$

Sobre éste conjunto se define una relación de equivalencia como sigue, $(u_1, ..., u_n) \sim (v_1, ..., v_n)$ si y sólo sí existe una matriz no singular $(a_{ij})_{n\times n}$ tal que,

$$(u_1, ..., u_n) = (a_{ij})_{n\times n}(v_1, ..., v_n),$$

al ocurrir esto, $(u_1, ..., u_n)$ es combinación lineal de los vectores $(v_1, ..., v_n)$, generando el mismo espacio, así los planos generados son los mismos. Si se toma el cociente $\mathbb{R}^\infty)^n/\sim$ se identifica a un plano como una clase de equivalencia en el espacio cociente, por lo tanto,

$$\mathbb{G}_n = (\mathbb{R}^\infty)^n/\sim .$$

De esta manera, se evidencia que las variedades Grassmanianas son una generalización de el espacio proyectivo real y por lo tanto la prueba de que es variedad diferenciable es similar a la de $\mathbb{R}P^n$ desarrollada en el ejemplo 2.1.1, así pues, el Grassmaniano infinito es una generalización de $\mathbb{R}P^\infty$, el cual es la union de todos los espacios proyectivos reales de dimensión finita.

Proposición 2.2.1 *$\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)$ es un fibrado vectorial sobre $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ con proyección $\pi(B, v) = B$ para cada $k \leq \infty$.*

Demostración. Se tiene que $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ es una variedad diferenciable, además, $\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)$ es variedad diferenciable ya que el espacio esta dado localmente como el producto

$$\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k,$$

donde $\mathbb{R}^k$ también es una variedad diferenciable.

La aplicación $\pi : \mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ es sobreyectiva ya que $\pi(B, v) = Pr_1(B, v)$ la proyección canónica. Adicionalmente, cada fibra es un espacio vectorial real de dimensión finita, es decir, identificable con $\mathbb{R}^k$, en el caso para el cual $k = \infty$, $\mathbb{R}^\infty$ es un espacio vectorial por como se construye, en consecuencia, $Pr_2 : \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ hace que la aplicación (π, Pr_2) sea naturalmente un difeomorfismo, con lo cual $(\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k), \pi, \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k))$ es un fibrado vectorial. ■

El fibrado $(\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k), \pi, \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k))$ nota por γ_k^n y el fibrado universal $(\mathbb{E}_n, \pi, \mathbb{G}_n)$ por γ^n.

2.3. Propiedades Homotópicas

En esta sección se pretende hacer un estudio de la aplicación de las funciones homotópicas en los fibrados vectoriales, más específicamente se pretende aplicar el pullback de funciones homotópicas entre espacios base de fibrados vectoriales con el fin de obtener resultados que permitan la demostración del teorema de equivalencia homotópica que se presenta al final de este capítulo, el cual permite identificar fibrados vectoriales sobre una variedad N a partir de los fibrados vectoriales de una variedad M y funciones homotópicas de clase C^∞ de N en M, para esto, se toma a [7: pag. 14-15], [10: pag. 38-41],[12: pag. 75-80] y [13: pag. 18-19] como referencias. Para comenzar, es necesario presentar un resultado que indica que el pullback de un fibrado vectorial E sobre M de una función $h : N \to M$ de clase C^∞ es un fibrado vectorial isomorfo a E sobre N a lo largo de h.

Proposición 2.3.1 *Sean M y N variedades diferenciables y sea $h : N \to M$ una función de clase C^∞. Si E es un fibrado vectorial sobre M, entonces h^*E es un fibrado vectorial sobre N el cual es isomorfo a E a lo largo de h. Además, h^*E es único salvo isomorfismos, es decir, un fibrado vectorial E_1 sobre N es isomorfo a h^*E si y sólo sí este es isomorfo a E a lo largo de h.*

Demostración Sea $p \in N$; la fibra en h^*E en p es $\{p\} \times E_{h(p)}$, esto es canónicamente un espacio vectorial isomorfo a $E_{h(p)}$ por Pr_2.

Si (π, ϕ) es una carta del fibrado vectorial en E sobre $U \subset M$ entonces $(Pr_1, \phi \circ Pr_2)$ es una carta del fibrado vectorial en h^*E sobre $h^{-1}(U)$. La proyección Pr_2 es un isomorfismo a lo largo de h ya que, si $\xi = (h(p), v) \in E_{h(p)}$, con $v \in \mathcal{V}$, $(p, \xi) \in h^*E_P$, entonces,

$$(\pi \circ Pr_2)(p, \xi) = \pi(\xi) = h(p),$$

además,

$$(h \circ Pr_1)(p, \xi) = h(p),$$

así,

$$\pi \circ Pr_2 = h \circ Pr_1$$

y como ya se dijo, Pr_2 es un isomorfismo en cada fibra, por lo tanto, h^*E es un fibrado vectorial sobre N el cual es isomorfo a E a lo largo de h. Se prueba ahora la unicidad.

Sea E_1 un fibrado vectorial sobre N tal que $f : E \to h^*E$ es un isomorfismo, sea (π_1, ψ) una carta del fibrado vectorial en E_1 sobre $U_1 \subset N$, luego $\pi_1 = Pr_1 \circ f$ y además para todo $x \in N$, f envía E_{1x} isomorficamente a $\{x\} \times E_{h(x)}$ y

$$\pi \circ Pr_2 = h \circ Pr_1,$$

entonces,

$$h \circ \pi_1 = h \circ Pr_1 \circ f = (h \circ Pr_1) \circ f = \pi \circ Pr_2 \circ f,$$

es decir,

$$h \circ \pi_1 = \pi \circ Pr_2 \circ f.$$

Además como Pr_2 envía a $\{x\} \times E_{h(x)}$ isomorficamente en $E_{h(x)}$, entonces $Pr_2 \circ f$ envía E_{1x} en $E_{h(x)}$ isomorficamente, por lo tanto $Pr_2 \circ f$ es un isomorfismo a lo largo de h.

A la inversa, si E_1 es isomorfo a E a lo largo de h, $\pi \circ g = h \circ \pi_1$ donde $g : E_1 \to E$ es un isomorfismo, y como h^*E es isomorfo a E a lo largo de h, así

$$\pi \circ Pr_2 = h \circ Pr_1,$$

luego,

$$\pi = h \circ Pr_1 \circ Pr_2^{-1},$$

reemplazando,

$$h \circ Pr_1 \circ Pr_2^{-1} \circ g = h \circ \pi_1,$$

en consecuencia,

$$Pr_1 \circ Pr_2^{-1} \circ g = \pi_1.$$

Adicionalmente, es claro que $Pr_2^{-1} \circ g$ envía E_{1x} isomorficamente en $\{x\} \times E_{h(x)}$, para todo $x \in N$, ya que tanto g como Pr_2 son isomorfismos. Entonces, $Pr_2^{-1} \circ g$ es un isomorfismo de E_1 a h^*E, con lo cual se concluye la demostración. ■

Corolario 2.3.1 *Sean M, N, Z variedades diferenciables, y sean $f : M \to N$, $h : N \to Z$ funciones de clase C^∞. Si E es un fibrado vectorial sobre Z entonces $(h \circ f)^*E$ y $f^*(h^*E)$ son fibrados vectoriales isomorfos sobre M.*

Demostración. $(h \circ f)^*E$ y $f^*(h^*E)$ son isomorfos a E por la definición de pullback, solo se debe probar que $f^*(h^*E)$ es isomorfo a lo largo de $h \circ f$, lo cual se deduce también de la definición de pullback, por lo tanto, aplicando la proposición 2.3.1 se deduce que $(h \circ f)^*E \cong f^*(h^*E)$. ■

Ahora se hace un estudio del pullback a lo largo de funciones homotópicas, es decir, si se tiene una homotopía $F : N \times [0, 1] \to M$ y E un fibrado vectorial sobre M se pueden deducir algunas propiedades importantes respecto a los cambios continuamente diferenciables de funciones homotópicas, es necesario hacer enfasis en que no basta la continuidad, para poder conservar propiedades topológicas, algebraicas y la estructura diferenciable, es necesario que los cambios continuos sean también diferenciables, y este hecho se tiene como hipótesis en la teoría que sigue.

Proposición 2.3.2 *Sea E un fibrado vectorial sobre una variedad diferenciable M y $F : N \times [0, 1] \to M$ de clase C^∞, Entonces $F^*E|_{N\times\{t\}} \cong F_t^*E \times \{t\}$*

Demostración. Sea E un fibrado vectorial sobre M y sea N una variedad diferenciable, sea $t \in \mathbb{R}$ fijo, luego $N \times \{t\}$, es también una variedad diferenciable ya que es difeomorfa a N, ahora se toma la restricción de F a $N \times \{t\}$, así

$$F|_{N\times\{t\}} : N \times \{t\} \to M,$$

tal que para todo $(p, t) \in N \times \{t\}$, $F|_{N\times\{t\}}(p, t) = F(p, t) = F_t(p)$ donde $F_t : N \to M$.

Luego por la proposición 2.3.1, $F|^*_{N\times\{t\}}E = F^*E|_{N\times\{t\}} \cong E$ a lo largo de $F|_{N\times\{t\}}$. Además $F_t^*E \cong E$ a lo largo de F_t, ya que F_t^*E es un fibrado vectorial sobre N, se tiene que $F_t^*E \times \{t\}$ es un fibrado vectorial sobre $N \times \{t\}$ isomorfo a F_t^*E a lo largo de Pr_1, la fibra $\{p\} \times E|_{F_t(p)} \times \{t\}$ en el punto $(p, t) \in N \times \{t\}$ es canónicamente un espacio vectorial isomorfo a la fibra $\{p\} \times E|_{F_t(p)}$ sobre el punto $p \in N$ por la proyección $Proy_1$ definida como sigue:

$$Proy_1 : F_t^*E \times \{t\} \to F_t^*E,$$

tal que $Proy_1(\{p\} \times E|_{F_t(p)} \times \{t\}) = \{p\} \times E|_{F_t(p)}$ y $Pr_1 \circ \pi_1 = Pr_1 \circ Proy_1$.

$$\begin{array}{ccccc} F_t^*E \times \{t\} & \xrightarrow{Proy_1} & F_t^*E & \xrightarrow{Pr_2} & E \\ \downarrow{\scriptstyle Pr_1} & & \downarrow{\scriptstyle Pr_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ N \times \{t\} & \xrightarrow{\pi_1} & N & \xrightarrow{F_t} & M \end{array}$$

Puesto que $F(p,t) = F_t(p)$, sobre $N \times \{t\}$, F se puede ver como $F_t \circ \pi_1$ y por lo tanto, $F_t^*E \times \{t\}$ es isomorfo a E a lo largo de $F|_{N\times\{t\}}$, en efecto, el isomorfismo en cada fibra se tiene puesto que $Proy_1$ y Pr_2 son isomorfismos de espacio vectorial en cada fibra, además,

$$F|_{N\times\{t\}} \circ Pr_1 = F_t \circ \pi_1 \circ Pr_1 = F_t \circ Pr_1 \circ Proy_1,$$

asociando y aplicando que $F_t^*E \cong E$ a lo largo de F_t,

$$F|_{N\times\{t\}} \circ Pr_1 = (F_t \circ Pr_1) \circ Proy_1 = (\pi \circ Pr_2) \circ Proy_1,$$

por lo tanto,

$$F|_{N\times\{t\}} \circ Pr_1 = \pi \circ (Pr_2 \circ Proy_1).$$

En conclusión, como $F_t^*E \times \{t\}$ y $F^*E|_{N\times\{t\}}$ son isomorfos a E a lo largo de $F|_{N\times\{t\}}$, por la proposición 2.3.1, $F^*E|_{N\times\{t\}} \cong F_t^*E \times \{t\}$. ■

Ya con el resultado establecido en la proposición que se acaba de demostrar, se procede a presentar un teorema de gran importancia el cual da paso a una caracterización para los fibrados vectoriales que se desarrolla en el siguiente capítulo. El teorema es conocido con el nombre de **Teorema de equivalencia homotópica**, en este caso, particularizado para fibrados vectoriales sobre variedades diferenciables.

El teorema establece que si se tiene un fibrado E sobre una variedad diferenciable M, y además dos funciones de una variedad N en M de clase C^∞ homotópicas, los fibrados vectoriales sobre N dados por el pullback a lo largo de cada una de las funciones son isomorfos.

Teorema 2.3.1 (Equivalencia Homotópica) *Sea N una variedad diferenciable y (E, π, M) un fibrado vectorial. Si $f, g : N \to M$ son funciones de clase C^∞ y homotópicas entonces, $f^*E \cong g^*E$.*

Demostración. Sea $F : N \times [0,1] \to M$ de clase C^∞ tal que $F(p,0) = F_o(p) = f(p)$ y $F(p,1) = F_1(p) = g(p)$, para todo $p \in N$. Sea E un fibrado vectorial sobre M, luego, como f, g son de clase C^∞, por la proposición 2.3.1 f^*E y g^*E son fibrados vectoriales sobre N isomorfos a E a lo largo de f y de g respectivamente.

Ya que $f = F_0$, $f^*E = F_0^*E$ y por lo hecho en la demostración de la proposición 2.3.2, se tiene que $F_0^*E \cong F_0^*E \times \{0\}$ de igual manera, para $g = F_1$, $g^*E = F_1^*E \cong F_1^*E \times \{1\}$.

Luego, nuevamente de la proposición 2.3.2, se llega a que,

$$F_0^*E \times \{0\} \cong F^*E|_{N\times\{0\}},$$

y

$$F_1^*E \times \{1\} \cong F^*E|_{N\times\{1\}},$$

por lo tanto, se define la función $h : F^*E|_{N\times\{0\}} \to F^*E|_{N\times\{1\}}$ como $h = Pr_1^{-1} \circ i \circ \pi_1 \circ Pr_1$.

$$\begin{array}{ccccc} F^*E|_{N\times\{0\}} & & \xrightarrow{\quad h \quad} & & F^*E|_{N\times\{1\}} \\ \downarrow{\scriptstyle Pr_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle Pr_1} \\ N\times\{0\} & \xrightarrow{\pi_1} & N & \xrightarrow{i} & N\times\{1\} \end{array}$$

Sea $\{(p,0)\} \times E_{F(p,0)}$ una fibra en $F^*E|_{N\times\{0\}}$ sobre $N \times \{0\}$, luego,

$$\begin{aligned} h(\{(p,0)\} \times E_{F(p,0)}) &= Pr_1^{-1} \circ i \circ \pi_1 \circ Pr_1(\{(p,0)\} \times E_{F(p,0)}) \\ &= Pr_1^{-1} \circ i \circ \pi_1(p,0) \\ &= Pr_1^{-1} \circ i(p) \\ &= Pr_1^{-1}(p,1) \\ &= \{(p,1)\} \times E_{F(p,1)}, \end{aligned}$$

es decir, h envía isomorficamente una fibra en $F^*E|_{N\times\{0\}}$ en una fibra en $F^*E|_{N\times\{1\}}$ ya que por la proposición 2.3.1 $F^*E|_{N\times\{0\}}$ y $F^*E|_{N\times\{1\}}$ son isomorfos a E a lo largo de $F|_{N\times\{0\}}$ y $F|_{N\times\{1\}}$ respectivamente, además,

$$h = Pr_1^{-1} \circ i \circ \pi_1 \circ Pr_1,$$

por lo tanto,

$$Pr_1 \circ h = i \circ \pi_1 \circ Pr_1,$$

esto implica que, $F^*E|_{N\times\{0\}} \cong F^*E|_{N\times\{1\}}$, entonces, $F_0^*E \cong F_1^*E$, y por la caracterización de F como una homotopía entre f, g se concluye que $f^*E \cong g^*E$. ■

El teorema de equivalencia homotópica permite dar una caracterización para los fibrados vectoriales sobre variedades homotópicamente equivalentes lo cual se muestra en el siguiente capítulo, además, permite deducir que la transición en los fibrados vectoriales sobre una variedad a lo largo de funciones homotópas es una transición isomorfa, es decir, dados el fibrado vectorial (E, π, M), la variedad diferenciable N y las funciones $f, g : N \to M$ de clase C^∞ sobre N homotópicas, así como el fibrado inducido f^*E es isomorfo al fibrado inducido g^*E también $F_{t_1}^*E \cong F_{t_2}^*E$ para todo $t_1, t_2 \in [0,1]$ y la homotopía F entre f y g.

3 Construcción de los Fibrados Vectoriales

En este capítulo se hace la construcción de los fibrados verticales para introducir una operación entre fibrados vectoriales (Suma Whitney), posterior a esto se describe el conjunto de clases de isomorfismos de fibrados vectoriales sobre una variedad diferenciable M notado por $V(M)$ todo ello con el fin de realizar la demostración de una serie de proposiciones y teoremas que dan como resultado la particularización de la clasificación de los fibrados vectoriales propuesta por Allen Hactcher en [13: 1, pag. 18-30] y descrita por Rubén Burga en [10: 3-4, pag. 49-62] a una clasificación de los fibrados vectoriales sobre variedades diferenciables, dicha clasificación induce una construcción de fibrados vectoriales de cualquier dimensión sobre una variedad diferenciable a partir de las clases de funciones homotópicas de clase C^∞ de la variedad M en el el espacio base del fibrado universal.

Aunque para esta construcción por el momento no se encuentran grandes aplicaciones practicas ya que en ocasiones es complejo describir las clases de homotopía para así describir todos los fibrados vectoriales posibles, las aplicaciones teóricas son extremadamente importantes, se mencionan algunas al final de este capítulo y en las conclusiones.

3.1. Fibrado Vertical

Las definiciones y proposiciones en las secciónes 3.1 y 3.2 fueron reconstruidas o basadas en las dadas en la sección de El Fibrado Vertical en [7: 1, pag. 17-20] y son utilizadas con el propósito de completar una buena construcción de los fibrados vectoriales, ya que la construcción de fibrados verticales no es más que la construcción de un fibrado vectorial sobre un fibrado (E, π, M) cualquiera, además, la suma Whitney de dos fibrados vectoriales es nuevamente un fibrado vectorial, por lo tanto define nuevos fibrados vectoriales sobre un mismo espacio base.

Sea (E, π, M) un fibrado, si $p \in M$, entonces E_p es la fibra $\pi^{-1}(p) \subset E$, mientras que si $\xi \in E$, entonces E_ξ es el espacio tangente en ξ, es decir,

$$E_\xi = T_\xi E$$

Proposición 3.1.1 *Sea (E, π, M) un fibrado con fibra estandar F; fijando $p \in M$. El conjunto $N := E_p$, y sea $i : N \to E$ la inclusión. Para todo $\xi \in N$,*

$$i_*(N_\xi) = Ker[\pi_*|_{i(\xi)} : E_{i(\xi)} \to M_p] = \pi_*^{-1}|_{i(\xi)}(0_p) \subset E_{i(\xi)},$$

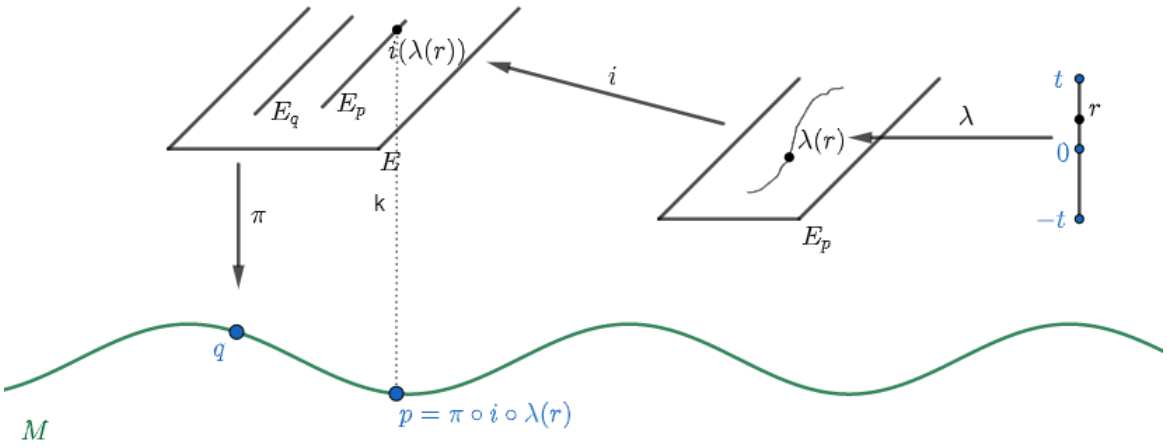
donde $0_p \in M_p$ es el vector cero sobre p en M_p.

Si $\varphi : N \to F$ es un difeomorfismo y si x es una carta en un abierto U en F, entonces para todo $\xi \in \varphi^{-1}(U)$, $dx \circ \varphi_*|_\xi$ envía N_ξ isomorficamente a $\mathbb{R}^m$, $m := dimF$.

Demostración. Para toda curva $\lambda : [-t, t] \to E_p$ de clase C^∞ en N, para todo $r \in [-t, t]$, existe $e_r = (p, v_r) \in E_p$ tal que

$$\pi \circ i \circ \lambda(r) = \pi \circ i(e) = \pi(e) = p,$$

entonces $\pi \circ i \circ \lambda$ es constante.



Así que tomando la función tangente de la composición anterior,

$$\pi_* i_* \dot{\lambda}(0) = 0_p,$$

por lo tanto,

$$i_*(N_\xi) \subset \pi_*|^{-1}_{i(\xi)}(0_p),$$

pero, por el teorema de la dimensión,

$$dim(\pi_*|^{-1}_{i(\xi)}(0_p)) = dimE - dimM = dimF = dimN_\xi,$$

así que $i_*(N_\xi) = \pi_*|^{-1}_{i(\xi)}(0_p)$, ya que $i_*|_\xi$ es no singular.

Ahora si x es una carta sobre un abierto U en F, $x = (x^1, ..., x^m) : U \to \mathbb{R}^m$, se construye entonces el fibrado tangente TU sobre U donde la carta está inducida por la función tangente de x, es decir, x_* definida de la siguiente manera,

$$x_* = (x \circ \pi, dx) : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m} = T\mathbb{R}^m,$$

donde π es la proyección de TU sobre $U \subset F$ y $x_*(u) = (x \circ \pi(u), dx^1(u), ..., dx^m(u))$ para todo $u \in TU$, entonces de la definición de x_* se tiene que $dx = Pr_2 \circ x_*$ que es la parte principal de la carta del fibrado tangente, es decir, envía cada fibra T_uU isomorficamente a $\mathbb{R}^m$.

Sea $\xi \in \varphi^{-1}(U)$, se define también

$$\varphi_*|_\xi : T_\xi N \to T_{\varphi(\xi)}U,$$

como $\varphi_*|_\xi(v) = (\varphi \circ Pr_1(v), d\varphi(v))$, para todo $v \in T_\xi N$, como φ es un difeomorfismo en cada fibra, se tiene que $\varphi_*|_\xi$ envía $T_\xi N = N_\xi$ isomorficamente en $T_{\varphi(\xi)}U$ y por lo tanto $dx \circ \varphi_*|_\xi : N_\xi \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo. ■

De ahora en adelante se va a suprimir la inclusión i y simplemente se va a escribir

$$(E_p)_\xi = \pi_*|_\xi^{-1}(0_p) \subseteq E_\xi.$$

A partir de la proposición anterior se da la definición de fibrado vertical, el cual es una clase de fibrado vectorial de importancia por sus propiedades y relación con la suma Whitney.

Definición 3.1.1 *Sea (E, π, M) un fibrado con $dimF = m$. El fibrado vertical en E es el fibrado vectorial real con espacio total*

$$\mathrm{V}E := \pi_*^{-1}(0) = \bigcup_{\xi \in E} Ker[\pi_*|_\xi : E_\xi \to M_{\pi(\xi)}] \subset TE$$

Observación 3.1.1

$$Ker[\pi_*|_\xi : E_\xi \to M_{\pi(\xi)=p}] \subset E_\xi \subset T_\xi E_p,$$

luego,

$$\bigcup_{\xi \in E} Ker[\pi_*|_\xi] \subset TE.$$

Se denota la proyección por

$$\pi_{\mathrm{V}} : \mathrm{V}E \to E.$$

El atlas del fibrado en $\mathrm{V}E$ consiste de las cartas del fibrado vectorial de la forma

$$(\pi_{\mathrm{V}}, dx \circ \varphi_*) : \pi_{\mathrm{V}}^{-1}(\pi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(W)) \to (\pi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(W)) \times \mathbb{R}^m,$$

donde (π, φ) es una carta del fibrado en E sobre U en M y x es una carta sobre W en F.

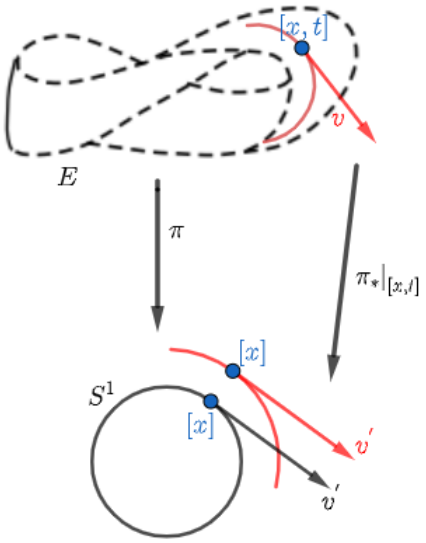
Ejemplo 3.1.1 (Fibrado vertical de la banda de Möbius) En el ejemplo 2.1.2 se realiza la construcción de un fibrado formado por la $1-$esfera como espacio base y la banda de Möbius como espacio total, dicho fibrado no es vectorial ya que su grupo de estructura no coincide con un grupo de Lie, sin embargo al construir el fibrado vertical sobre la banda de Möbius este si resulta siendo vectorial, en efecto, la proyección

$$\pi : E \to S^1,$$

está dada por $\pi[x,t] = [x]$, la función tangente

$$\pi_*|_{[x,t]} : E_{[x,t]} \to S^1_{[x]},$$

donde $\pi_*|_{[x,t]}([x,t],v) = ([x],v')$ para algún vector v sobre el punto $[x,t]$, tangente a la curva dada por la relación de equivalencia para la circunferencia en cada t fijo, donde v' es la proyección del vector v sobre el punto $[x]$



Luego, $Ker\{\pi_*|_{[x,t]}\} = \pi_*|^{-1}(0_{[}x,t] = ([x,t],\mathbf{0})$, donde $\mathbf{0}$ es el vector cero sobre $[x,t]$, así

$$VE = \bigcup_{[x,t]\in E} Ker\{\pi_*|_{[x,t]}\} = E \times \{\mathbf{0}\},$$

que es un fibrado vectorial trivial sobre E ya que $\{0\}$ es subespacio vectorial en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 3.1.2 *Si f^*E es el pullback de un fibrado E sobre M a lo largo de una función C^∞ $f : N \to M$, entonces el fibrado vectorial $\mathrm{V}f^*E$ y $Pr_2^*\mathrm{V}E$ son isomorfos.*

Demostración. Basta con probar que $\mathrm{V}f^*E$ es isomorfo a $\mathrm{V}E$ a lo largo de la aplicación $Pr_2 : f^*E \to E$,

$$Tf^*E = \{(u, v) \in TN \times TE;\ f_*(u) = \pi_*(v)\},$$

ya que, $f^*E = \{(p, \xi) \in N \times E;\ f(p) = \pi(\xi)\}$.

Por lo tanto si $(u, v) \in Tf^*E$, $Pr_{1*}(u, v) = u$ es cero si y solo si $v \in \mathrm{V}E$. La aplicación $(u, v) \to v$ es un isomorfismo de $\mathrm{V}f^*E$ a $\mathrm{V}E$ a lo largo de Pr_2. ■

Respecto del fibrado vertical hay toda una teoría y se pueden presentar resultados interesantes, sin embargo no es el objetivo que se precisa ahora, puede resultar de interés para realizar un trabajo respecto a las propiedades del mismo para ello se pueden apreciar algunas de sus propiedades en [7: 1, pag. 18],

3.2. Suma Whitney

La suma Whitney es una operación cerrada entre fibrados vectoriales sobre el mismo espacio base, es decir la suma de dos fibrados vectoriales es nuevamente un fibrado vectorial, para poder definirla se utiliza la función de encaje diagonal

$$\Delta : M \to M \times M,$$

dada por $\Delta(p) = (p, p)$, para todo $p \in M$.

Definición 3.2.1 *Sean E_1 y E_2 fibrados vectoriales sobre M. La suma Whitney es el fibrado pullback o fibrado inducido $E_1 \oplus E_2 := \Delta^*(E_1 \times E_2) \to M$ que está definido por*

$$\Delta^*(E_1 \times E_2) := \{(p, e_1, e_2) \in M \times (E_1 \times E_2);\ \ \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}$$

del fibrado producto $(E_1 \times E_2, \pi_1 \times \pi_2, M \times M$

Así, la suma Whitney se puede ver como el fibrado vectorial definido por:

$$E_1 \oplus E_2 := \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2;\ \ \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\},$$

donde π_1 y π_2 son las proyecciones de los fibrados E_1 y E_2 respectivamente, con proyección

$$\pi_W : E_1 \oplus E_2 \to M,$$

dada por $\pi_W(e_1, e_2) = \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)$, además, la fibra sobre $p \in M$ esta dada por la suma directa entre espacios vectoriales, es decir,

$$\begin{aligned}(E_1 \oplus E_2)_p &= \pi_1^{-1}(p) \times \pi_2^{-1}(p) \\ &= \{(e_1, e_2); \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2) = p\} \\ &= E_{1p} \oplus E_{2p}.\end{aligned}$$

El cual se nota por $(E_1 \oplus E_2, \pi_W, M)$, al decir que la suma Whitney también se puede ver como este fibrado, es sencillamente porque evidentemente son isomorfos, basta tomar la proyección $Pr_2 : (E_1 \oplus E_2, \pi_W, M) \to \Delta^*(E_1 \times E_2)$ la cual es un isomorfismo. Sin embargo este apunte únicamente ofrece otra visión u otra forma de construir la suma Whitney ya que en algunas ocasiones es necesario conservar la estructura de pullback de la cual se extraen muy buenas propiedades.

Ejemplo 3.2.1 (Suma de Fibrados Triviales) Una de las consecuencias de la suma Whitney es, si ϵ_n y ϵ_m son fibrados vectoriales triviales, entonces $\epsilon_n \oplus \epsilon_m$ es un fibrado vectorial trivial, puesto que existe el isomorfismo:

$$\phi : \epsilon_n \oplus \epsilon_m \to \epsilon_k,$$

dado por $\phi((x, v), (x, w)) = (x, v + w)$, donde $v + w \in \mathcal{V}^k$ con $k = n + m$.

Proposición 3.2.1 *Si (E, π, M) es un fibrado vectorial, el fibrado vectorial compuesto π^*E sobre M es un fibrado vectorial isomorfo a la suma Whitney $E \oplus E$*

Demostración. Por la definición de fibrado, la proyección π es de clase C^∞ sobre E, luego se define el pullback a lo largo de π sobre E como

$$\pi^*E = \{(\zeta, \xi) \in E \times E;\ \ \pi(\zeta) = \pi(\xi)\},$$

además,

$$E \oplus E = \Delta^*(E \times E) = \{(p, \zeta, \xi) \in M \times (E \times E);\ \ \pi(\zeta) = \pi(\xi)\}.$$

Tomando la función proyección

$$\Pi : E \oplus E \to \pi^*,$$

dada por $\Pi(p, \zeta, \xi) = (\zeta, \xi)$, luego, para $p \in M$ cualquiera, si $\pi(\zeta) = \pi(\xi) = p$,

$$(p, \zeta, \xi) \in \{p\} \times E_p \times E_p = \{p\} \times (E \times E)_{\Delta(p)=(p,p)} = \{p\} \times \pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p),$$

lo envía en

$$(\zeta, \xi) \in \{\zeta\} \times E_{\pi(\zeta)=p=\pi(\xi)}$$

y como Π es una función biyectiva, Π envía isomorficamente cada fibra sobre $E \oplus E$ en una fibra sobre π^*E, también,

$$Id_M \circ Pr_1(p, \zeta, \xi) = p$$

y

$$\pi \circ Pr_1 \circ \Pi(p, \zeta, \xi) = \pi\ Pr_1(\zeta, \xi) = \pi(\zeta) = p$$

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E & \xrightarrow{\Pi} & \pi^* E \\ \downarrow{\scriptstyle Pr_1} & & \downarrow{\scriptstyle Pr_1} \\ & & E \\ \downarrow{\scriptstyle Pr_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow{Id_M} & M \end{array}$$

Con lo cual $E \oplus E$ y $\pi^* E$ visto como fibrado vectorial sobre M son isomorfos. ■

Ejemplo 3.2.2 (Suma de fibrado normal y tangente) Para presentar este ejemplo primero se define el fibrado normal sobre una variedad diferenciable M encajada en $\mathbb{R}^n$. se define el conjunto

$$E = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n;\ \text{tal que v es perpendicular a } T_x M\},$$

por otro lado se define la aplicación $\pi : E \to M$ por, $\pi(x, v) = x$, de esta definición se sigue que

$$\pi^{-1}(x) = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n;\ \text{donde v es perpendicular a } T_x M\}.$$

Hay que notar que se esta asumiendo que cada fibra sobre $x \in M$ esta naturalmente incrustada en $\mathbb{R}^n$. Sean $e_1 = (x, v_1), e_2 = (x, v_2) \in E$, se define una operación en π^{-1} de la siguiente manera,

$$te_1 + e_2 := (x, tv_1 + v_2),$$

de esta manera el espacio $E_x = \pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial, la condición de trivialidad local esta dada por $h_x : \pi^{-1}(U_x) \to U_x \times \mathbb{R}$ se puede obtener por la proyección ortogonal de las fibras $\pi^{-1}(y)$ sobre $\pi^{-1}(x)$ para $y \in U_x$.

Ahora sea $f : M \to \mathbb{R}^n$ un encaje y sea E el fibrado normal sobre M del encaje f, así

$$TM \oplus E = \{(p, \zeta, \xi) \in M \times (TM \times E);\ \pi_T(\zeta) = \pi_E(\xi) = p\},$$

es decir, $\zeta = (p, u) \in M \times T_p M$ y $\xi = (p, v) \in M \times \mathbb{R}^n$, donde v es perpendicular a $T_p M$, por lo tanto

$$TM \oplus E = \{(p, u, v) \in M \times T_p M \times E_p\},$$

ya que $T_p M$ y E_p son espacios vectoriales de dimensión n los dos, $TM \oplus E \cong M \times \mathbb{R}^{2n} \cong f^* T(\mathbb{R}^n)$, como $T(\mathbb{R}^n)$ es canónicamente isomorfo a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ gracias a la definición del fibrado tangente, así $T(\mathbb{R}^n)$ es trivial, y el pullback de un fibrado trivial es trivial (ver ejemplo 3.2.3), entonces $TM \oplus E$ es un fibrado trivial sobre M.

Proposición 3.2.2 *Sean E_1 y E_2 fibrados vectoriales sobre N y*

$$f : M \to N,$$

una aplicación de clase C^∞, entonces $f^*(E_1 \oplus E_2) \cong f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$

Demostración. Se define la suma Whitney de pullbacks por:

$$f^*E_1 \oplus f^*E_2 = \{((p, e_1), (p, e_2)) \in f^*E_1 \times f^*E_2)\}$$

para todo $p \in M$, se prueba ahora que $f^*E_1 \oplus f^*E_2$ y $E_1 \oplus E_2$ son isomorfos. Tomando una fibra en $f^*E_1 \oplus f^*E_2$ sobre $p \in M$, esta está dada por

$$\{p\} \times E_{1f(p)} \oplus \{p\} \times E_{2f(p)} = \{p\} \times \pi_1^{-1}(f(p)) \times \{p\} \times \pi_2^{-1}(f(p))$$

el cual es un espacio vectorial isomorfo a $E_{1f(p)} \oplus E_{2f(p)}$, isomorfismo dado por la función $Pr_2 \times Pr_2$, además,

$$\begin{aligned}(\pi_W) \circ (Pr_2 \times Pr_2)((p, e_1), (p, e_2)) &= (\pi_W)(e_1, e_2) = f(p) \\ &= f \circ Pr_{1W}((p, e_1), (p, e_2)).\end{aligned}$$

Así se muestra que $f^*E_1 \oplus f^*E_2$ es isomorfo a $E_1 \oplus E_2$ a lo largo de f y por la proposición 3.3.1 se tiene que $f^*(E_1 \oplus E_2) \cong f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$ ■

Ejemplo 3.2.3 Retomando el ejemplo 3.2.1, sean ϵ_n y ϵ_m fibrados vectoriales triviales sobre la variedad diferenciable M y sea $f : N \to M$ una función de clase C^∞,

$$f^*\epsilon_n = \{(p, e) \in N \times \epsilon_n;\ \ f(p) = \pi(e)\},$$

así, $e = (f(p), v)$ con $v \in \mathcal{V}^n$, cada fibra en $f^*\epsilon_n$ está dada por $\{p\} \times \epsilon_{n_{f(p)}}$, como ϵ_n es trivial,

$$\{p\} \times \epsilon_{n_{f(p)}} = \{p\} \times (\{f(p)\} \times \mathcal{V}^n) \cong \{p\} \times \mathcal{V}^n,$$

por lo tanto, $f^*\epsilon_n$ es un fibrado vectorial trivial sobre N de dimensión n, notado por ϵ_n^*, análogamente, $f^*\epsilon_m$ describe un fibrado vectorial trivial de dimensión m sobre N notado por ϵ_m^*. La notación para los fibrados vectoriales triviales sobre N se hace de esa manera para hacer énfasis en que provienen del pullback de una función

Por el ejemplo 3.2.1, $\epsilon_n^* \oplus \epsilon_m^*$ es un fibrado vectorial trivial de dimensión $k = n + m$ y $\epsilon_n \oplus \epsilon_m = \epsilon_k$, por lo hecho para $f^*\epsilon_n$, se tiene que $f^*\epsilon_k$ es un fibrado vectorial trivial de dimensión k por lo tanto,

$$f^*(\epsilon_n \oplus \epsilon_m) \cong f^*(\epsilon_n) \oplus f^*(\epsilon_m).$$

3.3. El Semigrupo $\mathbb{V}(M)$

En la sección 2.2 del capítulo 2 se introduce el concepto de fibrado vectorial y de isomorfismo entre fibrados vectoriales, ahora, utilizando estas definiciones, se presenta la definición de una estructura sobre los fibrados vectoriales, la cual agrupa a todos los fibrados vectoriales E sobre una variedad diferenciable M en clases de equivalencia definidas por la relación $\cong$ (ser isomorfo a) como sigue

$$[E] := \{F \text{ fibrado vectorial sobre M};\ \ F \cong E\},$$

la ralación $\cong$ es una relación de equivalencia debido a la proposición 2.3.1, la clase de los fibrados vectoriales triviales $\epsilon_n = M \times \mathcal{V}$ se denota por $[\epsilon_n]$ donde n es la dimensión del espacio vectorial $\mathcal{V}$.

Definición 3.3.1 *Sea M una variedad diferenciable y sea E un fibrado vectorial sobre M cualquiera, se define el conjunto de todas las clases de isomorfismos $[E]$ de fibrados vectoriales sobre M, como:*

$$\mathbb{V}(M) := \{[E];\ E \textit{ fibrado vectorial sobre } M\}.$$

Generalmente el conjunto $\mathbb{V}(M)$ es muy complicado de calcular, aún cuando el espacio base sea de una dimensión pequeña, por lo que se hace necesaria la ayuda de otros resultados como el teorema de equivalencia homotópica presentado al final del capítulo anterior, es más, para dicho teorema es hasta en esta sección donde se presentan ejemplos en los cuales es usado. Ahora se muestra un ejemplo donde se calcula el conjunto $\mathbb{V}(M)$.

Ejemplo 3.3.1 Sea $\{p\}$ un conjunto determinado solo por un punto, $\{p\}$ no es necesariamente una variedad diferenciable, sin embargo en este trabajo $\{p\}$ es la única excepciń que se hace respecto al espacio base posible para un fibrado, es decir, se construyen fibrados vectoriales sobre $\{p\}$ a pesar de que los fibrados aquí desarrollados tienen como particularidad que el espacio base es una variedad diferenciable.

por la condición de trivialidad que debe tener un fibrado, se tiene que sobre $\{p\}$ los únicos fibrados vectoriales posibles son los triviales, así, $\{p\} \times \mathcal{V}$ es un fibrado sobre $\{p\}$ con proyección

$$\pi : \{p\} \times \mathcal{V} \to \{p\},$$

dada por $\pi(p, v) = p$, para todo $v \in \mathcal{V}$, la carta del fibrado en : $\{p\} \times \mathcal{V}$ se completa con la proyección

$$Pr_2 : \{p\} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V},$$

dada por $Pr_2(p, v) = v$, para todo $v \in \mathcal{V}$. Ahora,

$$\mathbb{V}(\{p\}) = \{[E]; E \text{ fibrado vectorial sobre } M\} = \{\{p\} \times \mathcal{V}^n;\ \ n \in \mathbb{N}\},$$

por lo tanto, $\mathbb{V}(\{p\})$ es un conjunto que coincide con los naturales.

Proposición 3.3.1 *Sean M una variedad diferenciable y $\mathbb{V}(M)$ el el conjunto de las clases de isomorfismos de fibrados vectoriales sobre M. Entonces, dotando a $\mathbb{V}(M)$ de la operación suma Whitney este conjunto se convierte en un semigrupo con identidad la clase 0-dimensional $[\epsilon_0]$.*

Demostración. Sean $[E], [F] \in \mathbb{V}(M)$, entonces se define la operación suma por:

$$[E] + [F] = [E \oplus F]$$

La suma de clases de equivalencia está bien definida, en efecto, sean $E^{'}$ y $F^{'}$ fibrados vectoriales sobre M tales que $E^{'} \cong E$ y $F^{'} \cong F$ entonces

$$E^{'} \oplus F^{'} \cong E \oplus F,$$

ya que $E^{'} \oplus F^{'} \subseteq E^{'} \times F^{'}$ al igual que $E \oplus F \subseteq E \times F$.

Se verifica ahora que $\mathbb{V}(M)$ es un semigrupo, para ello se prueba:

(1) Asociatividad: Sean E, F y J fibrados vectoriales sobre el mismo espacio base M tomando la función

$$\psi : (E \oplus F) \oplus J \to E \oplus (F \oplus J),$$

dada por $\psi(p, (e, f), j) = (p, e, (f, j))$ para todo $e \in E$, $f \in F$, $j \in J$ y $p \in M$, evidentemente es un isomorfismo, además las fibras son isomorfas ya que son isomorfas a espacios vectoriales de la misma dimensión, por lo tanto $(E \oplus F) \oplus J \cong E \oplus (F \oplus J)$ y en consecuencia $([E] + [F]) + [J] = [E] + ([F] + [J])$

(2) Neutro: Sea (E, π, M) un fibrado vectorial, sea (ϵ_0, Pr_1, M), luego

$$[E] + [\epsilon_0] = [E \oplus \epsilon_0],$$

ya que $\epsilon_0 = M \times \{0\}$,

$$E \oplus \epsilon_0 = \{(e = (p, u), (p, 0)) \in E \times \epsilon_0;\ \ \pi(e) = Pr_1\} = E \times \epsilon_0,$$

así, tomando la proyección canónica se tiene que cada fibra en $E \oplus \epsilon_0$ es isomorfa a su fibra correspondiente en E por la proyección, por lo tanto, $E \oplus \epsilon_0 \cong E$, entonces $[E] + [\epsilon_0] = [E]$.

■

Ejemplo 3.3.2 En el ejemplo 3.3.1, el conjunto $\mathbb{V}(\{p\})$ coincide con los naturales, es decir, es equipotente con ellos, basta con definir la biyección

$$f : \mathbb{V}(\{p\}) \to \mathbb{N},$$

dada por $f([\{p\} \times \mathcal{V}^n]) = n$, en consecuencia, $\mathbb{V}(\{p\}) \cong \mathbb{N}$ y por lo tanto es un semigrupo.

Se define a partir de la definición del semigrupo $\mathbb{V}(M)$ un conjunto sobre el cual se realiza todo el trabajo ya que es muy complicado caracterizar los fibrados vectoriales de todas las dimensiones, es decir, encontrar todos los elementos de $\mathbb{V}(M)$, entonces se debe hacer un estudio para cada dimensión posible y para ello se trabaja con $\mathbb{V}^n(M)$ que esta formado por todas las clases de isomorfismos de fibrados vectoriales $n-$dimensionales, por lo tanto $\mathbb{V}^n(M) \subset \mathbb{V}(M)$ y aún más,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}^n(M) = \mathbb{V}(M).$$

Ya con la definición de $\mathbb{V}^n(M)$ se puede enunciar un resultado puede tomarse como una implicación del teorema de equivalencia homotópica presentado en el capítulo anterior.

Corolario 3.3.1 (Equivalencia Homotópica) *Sean N y M variedades diferenciables. Si N es homotópicamente equivalente a M, respecto a una equivalencia homotópica de clase C^∞, entonces existe una biyección entre los conjuntos $\mathbb{V}^n(N)$ y $\mathbb{V}^n(M)$.*

Demostración. Para una equivalencia homotópica

$$f : M \to N,$$

se define la función

$$f^* : \mathbb{V}^n(N) \to \mathbb{V}^n(M),$$

para todo fibrado vectotial F sobre M, dada por $f^*([E]) = [f^*E]$, se prueba la que f^* está bien definida tomando $E^{'}$ otro representante de $[E]$, ya que $f^*E \cong E$ a lo largo de f, $f^*E^{'} \cong E^{'}$ a lo largo de f y $E^{'} \cong E$, por la Proposición 3.3.1, $f^*E^{'} \cong f^*E$, por lo tanto, $f^*E^{'} \in [f^*E]$, así, la definición de f^* no depende del representante de $[E]$, así mismo si $f^*([E]) = f^*([E^{'}])$ entonces,

$$[f^*E] = [f^*E^{'}],$$

por lo tanto,

$$f^*E \cong f^*E^{'},$$

lo que implica que $E \cong E^{'}$ gracias a la definición del pullback, ya que la fibra en f^*E en $p \in N$ está dada por $\{p\} \times E_{f(p)}$ y la fibra en $f^*E^{'}$ es $\{p\} \times E^{'}_{f(p)}$, es decir, $E_{f(p)}$ y $E^{'}_{f(p)}$ son isomorfos, entonces, $[E] = [E^{'}]$, de lo que se concluye la inyectividad de f^*.

Ahora, como f es una equivalencia homotópica, existe una inversa homotópica

$$h : N \to M,$$

de clase C^∞, la cual permite definir la función

$$h^* : \mathbb{V}^n(M) \to \mathbb{V}^n(N),$$

dada por $h^*([F]) = [h^*F]$ para todo fibrado vectotial F sobre M, al igual que f^*, h^* está bien definida y es inyectiva (la prueba es la misma).

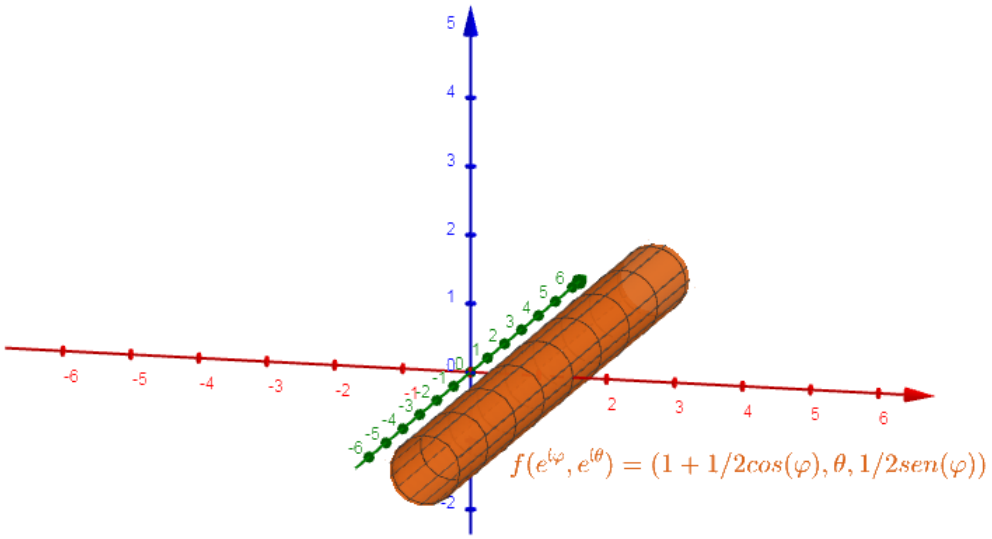
$$\begin{aligned} f^* \circ h^*([E]) &= [f^* h^* E] \\ &= [(h \circ f)^* E]. \end{aligned}$$

Como $f \circ h \simeq Id_M$ entonces, por el teorema de equivalencia homotópica, $(h \circ f)^* E \cong Id_M^* E = E$ así, $[(h \circ f)^* E] = [E]$, del mismo modo, $h^* \circ f^*([F]) = [F]$ ya que $h \circ f \simeq Id_N$, por lo tanto f^* y h^* son inversas una de la otra, es decir f^* es la biyección buscada. ■

Ejemplo 3.3.3 Si dos variedades son difeomorfas, entonces el conjunto de todos los fibrados vectoriales están en relación uno a uno ya que el difeomorfismo induce una equivalencia homotópica entre las dos variedades, sea $f : N \to M$ un difeomorfismo, es decir f es diferenciable y $f^{-1} : M \to N$ es diferenciable también, entonces $f \circ f^{-1} = Id_M$ y $f^{-1} \circ f = Id_N$ así, f^{-1} y f hacen que N y M sean homotópicamente equivalentes, por ejemplo, dadas la variedades diferenciables $S^1 \times S^1$ y T^2 y el difeomorfismo entre ellas

$$f : S^1 \times S^1 \to T^2,$$

dado por $f(e^{i\varphi}, e^{i\theta}) = (1 + \frac{1}{2}cos(\varphi), \theta, \frac{1}{2}sen(\varphi))$.



Se tiene que para un fibrado vectorial cualquiera E sobre T^2 se define el fibrado vectorial sobre $S^1 \times S^1$ por el pullback f^*E que está dado por:

$$f^*E = \{(p, \xi) \in (S^1 \times S^1) \times E;\ \ f(p) = \pi(\xi)\},$$

donde $p = (e^{i\varphi}, e^{i\theta})$ además, $f(e^{i\varphi}, e^{i\theta}) = (1 + \frac{1}{2}cos(\varphi), \theta, \frac{1}{2}sen(\varphi)) = \pi(\xi)$, luego sobre cada punto p en $S^1 \times S^1$ se fija un espacio vectorial dado por el espacio vectorial sobre la imagen de p a través de f y ya que f es un difeomorfismo, todo fibrado sobre $S^1 \times S^1$ va a estar dado por el pullback de un fibrado sobre T^2.

Otros ejemplos importantes se presentan a continuación y revelan la utilidad del teorema de equivalencia homotópica expresada por el corolario 3.3.1, los ejemplos son lo más sencillo posible para que sea de fácil comprensión.

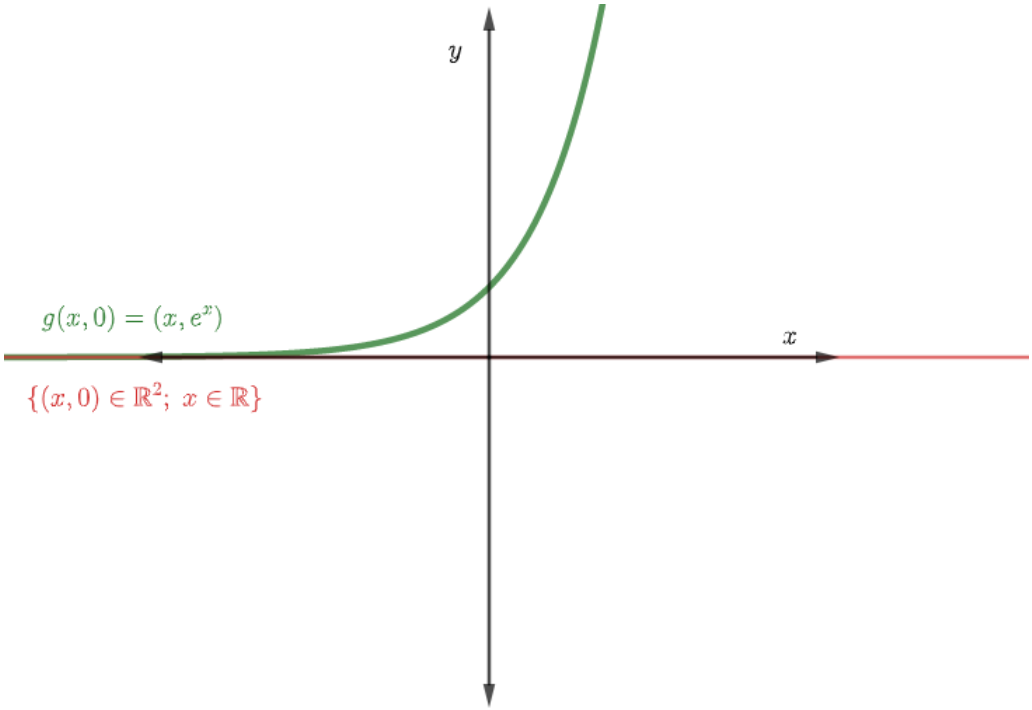
Ejemplo 3.3.4 En $\mathbb{R}^2$ considere los subespacios $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}$, el eje x y el mapa $B = \{(x, e^x);\ x \in \mathbb{R}\}$ de la función $f(x) = e^x$. La biyección

$$g : A \to B,$$

dada por $g(x, 0) = (x, e^x)$ es una biyección, en efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $g(x, 0) = g(y, 0)$, con lo que

$$(x, e^x) = (y, e^y),$$

así, $x = y$ y $e^x = e^y$ de donde se deduce que $x = y$ y por lo tanto $(x, 0) = (y, 0)$ es decir, g es inyectiva. Para probar la sobreyectividad basta con ver que para (x, e^x), existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^x$, esto se tiene por la sobreyectividad de la función exponencial, y como existe x, existe $(x, 0) \in A$, $g(x, 0) = (x, e^x)$.



también la función g define un difeomorfismo gracias a la diferenciabilidad de la función exponencial. luego, los fibrados vectoriales sobre A están en relación uno a uno con los

fibrados vectoriales sobre B, A es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ ya que para $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(x,0) + \beta(y,0) = (\alpha x, 0) + (\beta y, 0) = (\alpha x + \beta y, 0) \in A,$$

por lo tanto A es homotópicamente equivalente a un punto, y por el ejemplo 4.3.1 y el corolario 4.3.1, si E es un fibrado vectorial sobre A, entonces E es trivial y del mismo modo, todo fibrado vectorial sobre B es trivial, y además,

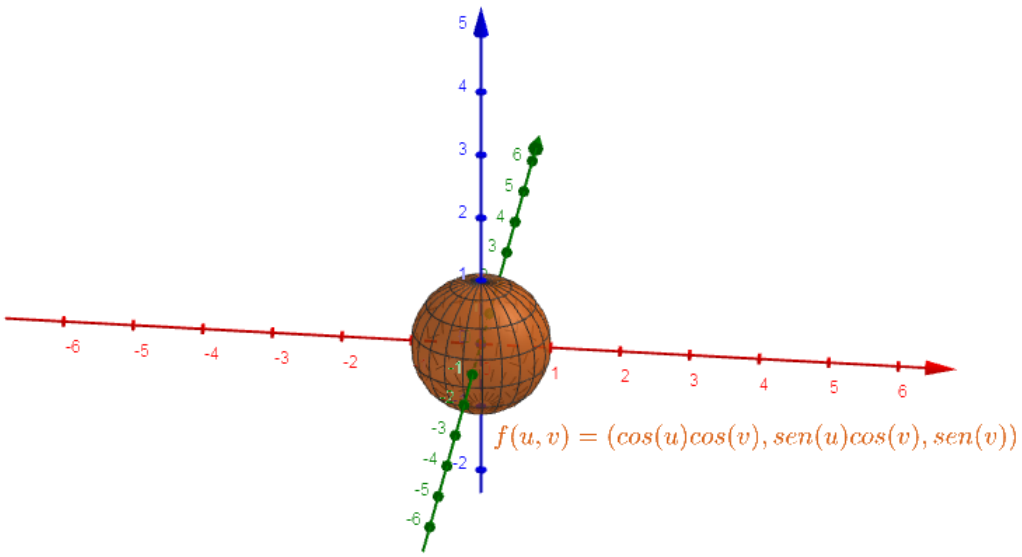
$$\mathbb{V}(A) \cong \mathbb{V}(B) \cong \mathbb{N}.$$

Ejemplo 3.3.5 Sean M una variedad diferenciable y un fibrado no trivial E sobre M, para una función de clase C^∞, $f : N \to M$, donde N es una variedad diferenciable, ¿es posible que f^*E sea trivial?

La respuesta es si. Sea $N = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $M = S^2$, sea

$$f : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to S^2,$$

dada por $f(u,v) = (rcos(u)cos(v), rsen(u)cos(v), rsen(v))$.



Sea $E = TS^2$ el fibrado tangente sobre S^2, el fibrado tangente sobre S^2 no es trivial, pero el pullback $f^*(TS^2)$ es un fibrado vectorial sobre N, como N es un abierto de R^2 convexo, por lo tanto, es contráctil y en consecuencia es homotópicamente equivalente a un punto, entonces $f^*(TS^2)$ es trivial.

El teorema de equivalencia homotópica exhibe la forma para encontrar fibrados vectoriales salvo isomorfismos sobre una variedad diferenciable, conociendo los fibrados sobre otra variedad que sea homotópicamente equivalente a N, sin embargo no es sencillo encontrar siempre esa relación entre dos variedades, es por ello que se realiza la costrucción de una teoría que permite definir una variedad para la cual siempre se obtienen funciones homotópicas, aunque ese resultado no se obtiene de manera inmediata y para eso se establece la sección 4.4, solamente como requisito para poder obtener el resultado principal de este trabajo, el teorema de clasificación de los fibrados principales.

3.4. Función de Gauss

En las secciones 3.4 y 3.5 se lleva a cabo el objetivo general de este trabajo, haciendo la particularización de la teória para la clasificación de fibrados vectoriales, la cual está propuesta para fibrados vectoriales sobre espacios topológicos, lo que se hace es tomar los fibrados sobre variedades diferenciables, para hacer posible esto hay que reconstruir las demostraciones de las proposiciones y los teoremas así como adicionar algunas hipótesis, las definiciones y construcciones para las mismas también son modificadas, cabe resaltar que las recostrucciones de los resultados no son extremadamente significativas, sin embargo, enriquecen bastante el conocimiento que se puede tener acerca de los fibrados vectoriales y la teoría que se puede desarrollar sobre ellos, es decir, este trabajo está pensado para ser una plataforma en la incursión a estudios posteriores y para que pueda servir como base para otros trabajos relacionados con el tema.

Se reitera que se toman como referencias a [10] y [13], aunque parezca repetitivo, estos dos textos tienen la elaboración de este estudio, se da comienzo a la parte final del trabajo con la introducción del concepto de función de Gauss, en parte generalizado de la definición de aplicación de Gauss para 2-superficies regulares, además se hace uso de algunas propiedades topológicas de las variedades diferenciables y resultados fuertes de la topología con el fin de extender la definición de función de Gauss, para ello se cita a [2: 4, pag. 217-257],[13: 1, pag. 29] y [15: 5, pag. 299-303].

Sean (E, π, M) un fibrado vectorial $n-$dimensional y una función $g_k : E \to \mathbb{R}^k$ de clase C^∞ un monomorfismo lineal en cada fibra, g_k envía entonces cada fibra en un subespacio vectorial $n-$dimensional de $\mathbb{R}^k$ y en consecuencia, g_k permite definir una aplicación

$$f_k : M \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k),$$

donde $f_k(p) = g_k(\pi^{-1}(p))$ para todo $p \in M$, esto es, la imagen en $\mathbb{R}^k$ de la fibra sobre p. También se puede inducir un morfismo de fibrados vectoriales de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F_k} & \gamma_k^n \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Pr_1} \\ M & \xrightarrow{f_k} & \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k) \end{array}$$

La función $F_k : E \to \gamma_k^n$ está dada por

$$\begin{aligned} F_k(e) &= ((f_k \circ \pi)(e), g_k(e)) \\ &= (f_k(p), g_k(e)) \\ &= (g_k(\pi^{-1}(p)), g_k(e)) \\ &= (X, v), \end{aligned}$$

para todo $e = (p, u) \in \pi^{-1}(p) \subset E$, donde X es un subespacio $n-$ dimensional en $\mathbb{R}^k$ y por supuesto, $v \in X$ por lo tanto $(X, v) \in \gamma_k^n$, así F_k está bien definida, además F_k es un isomorfismo en cada fibra a lo largo de f_k, en efecto, sean $(p, v), (p, v_1) \in \pi^{-1}(p)$, tal que $F_k(p, u) = F_k(p, u_1)$, luego,

$$((f_k \circ \pi)(p, u), g_k(p, u)) = ((f_k \circ \pi)(p, u_1), g_k(p, u_1)),$$

$$(f_k(p), g_k(p, u)) = (f_k(p), g_k(p, u_1)),$$

así $g_k(p, u) = g_k(p, u_1)$ y como g_k es un monomorfismo, es decir, un homomorfismo inyectivo, $(p, u) = (p, u_1)$, por lo tanto F_k es inyectiva. La sobreyectividad se deduce del hecho que cada fibra en un fibrado vectorial es un espacio vectorial, y ya que F_k se construye a partir de la función g_k, se tiene cada espacio vectorial $n-$dimensional X en $\mathbb{R}^k$ se puede ver como la imagen de la fibra en E sobre p para algún $p \in M$.

Además $f_k \circ \pi(p, u) = f_k(p)$ y

$$\begin{aligned} Pr_1 \circ F_k(p, u) &= Pr_1(f_k \circ \pi(p, u), g_k(p, v)) \\ &= Pr_1(f_k(p), g_k(p, u)) \\ &= f_k(p). \end{aligned}$$

Entonces, $Pr_1 \circ F_k = f_k \circ \pi$, así $E \cong \gamma_k^n$ a lo largo de f_k y ya que $f_k^* \gamma_k^n \cong \gamma_k^n$ a lo largo de f_k, por la proposición 3.3.1 $f_k^* \gamma_k^n \cong E$, por lo tanto la función f_k y en particular la función g_k caracterizan totalmente al fibrado E sobre M.

Definición 3.4.1 *Una función de Gauss de un fibrado vectorial (E, π, M) $n-$dimensional es una función de clase C^∞*

$$g_k : E \to \mathbb{R}^k$$

donde $0 \leq k \leq \infty$, la cual es un monomirfismo de espacios vectoriales en cada fibra.

Ejemplo 3.4.1 Sea S^1 la 1-esfera parametrizada por

$$\psi : (0, 2\pi) \subset \mathbb{R} \to S^1,$$

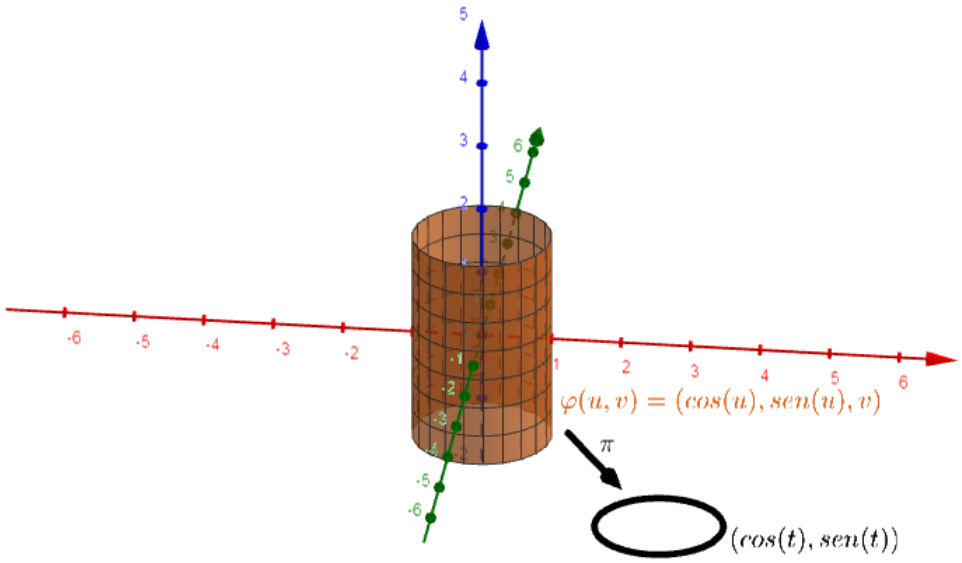
dada por $\psi(t) = (cos(t), sen(t))$, y el cilindro C formado por la parametrización

$$\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \to C,$$

dada por $\varphi(u, v) = (cos(u), sen(u), v)$, C es un fibrado sobre S^1 con proyección $\pi : C \to S^1$ donde $\pi(x, y, z) = (x, y)$, la carta del fibrado en C se completa con la función $\theta : C \to \mathbb{R}$, tal que $\theta(x, y, z) = z$, así, cada fibra sobre el punto $(x, y) \in S^1$ esta dada por

$$\pi^{-1}(x, y) = \{(x, y, z);\ \ z \in \mathbb{R}\},$$

que es una recta paralela al eje z y por tanto es isomorfa a $\mathbb{R}$, por lo tanto C es un fibrado vectorial.



Se define ahora la función $g : \varphi^{-1}(U \subset C) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}(u, v)$$

donde,

$$\varphi_u = (-sen(u), cos(u), 0)$$

y

$$\varphi_v = (0, 0, 1),$$

así,

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-sen(u), cos(u), 0) \wedge (0, 0, 1) = (cos(u), -sen(u), 0)$$

y

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = |(cos(u), -sen(u), 0)| = \sqrt{cos^2(u) + sen^2(u)} = 1$$

entonces una función de Gauss $g : C \to \mathbb{R}^3$ está dada por

$$g(x, y, z) = N \circ \varphi^{-1}(x, y, z) = (cos(u), -sen(u), 0),$$

donde $(x, y, z) = (cos(u), sen(u), v)$.

El ejemplo anterior muestra como la función de Gauss presentada se puede entender como una generalización para la aplicación de Gauss que se estudia en el curso de geometría de superficies, la cual calcula el vector normal a una 2-superficie regular en un punto sobre ella, si no se tiene conocimiento sobre este tema, se cita a [1: 3, pag. 135-151] y [14: 6, pag. 153-165] como principales referencias.

Proposición 3.4.1 *Sea (F_k, f_k) un homomorfismo de clase C^∞ entre (E, π, M) y γ_k^n, tal que F_k es un isomorfismo en cada fibra. Entonces, $\pi_2 \circ F_k : E \to \mathbb{R}^k$ es una función de Gauss con $\pi_2 : \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. De igual modo, si $g_k : E \to \mathbb{R}^k$ es una función de Gauss, entonces existe un homomorfismo (F_k, f_k) del fibrado (E, π, M) al fibrado γ_k^n sobre $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$, tal que F_k es un isomorfismo en cada fibra.*

Demostración. Ya que F_k es un isomorfismo en cada fibra y π_2 es una proyección, es decir, es también canónicamente un isomorfismo en cada fibra, F_k y π_2 son monomorfismos de espacios vectoriales en cada fibra, además, F_k y π_2 son de clase C^∞, por lo tanto, $\pi_2 \circ F_k$ es un monomorfismo lineal en cada fibra de clase C^∞, es decir, una aplicación de Gauss.

Para demostrar la otra parte de la proposición basta con definir $g_k : E \to \mathbb{R}^k$ una función de Gauss, $f_k = g_k(\pi^{-1}(p))$ y $F_k(e) = ((f_k \circ \pi)(e), g_k(e))$ para $p \in M$ y $e \in \pi^{-1}(p) \subset E$, de igual manera como se presenta en la introducción de esta sección, así, (F_k, f_k) es un homomorfismo del fibrado (E, π, M) al fibrado γ_k^n sobre $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ donde F_k es un isomorfismo en cada fibra. ■

De esta proposición y de lo expuesto en la introducción de la sección se deduce de forma inmediata el corolario que se enuncia a continuación en el cual se muestra la necesidad de contar con una función de Gauss para caracterizar un fibrado vectorial E sobre una variedad diferenciable M, y consecuentemente, tener un fibrado vectorial E sobre M equivale a tener una función de Gauss sobre E.

Corolario 3.4.1 *Sea (E, π, M) un fibrado vectorial. Entonces E es isomorfo a $f_k^* \gamma_k^n$ para alguna función $f_k : M \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ de clase C^∞ si y sólo sí existe una función de Gauss*

$$g_k : E \to \mathbb{R}^k.$$

Demostración. Si E es isomorfo a $f^*\gamma_k^n$, entonces por la proposición 2.3.1 E es isomorfo a γ_k^n a lo largo de f_k y por tanto, existe una biyección $F_k : E \to \gamma_k^n$, por la proposición 4.4.1, $\pi_2 \circ F_k$ es una función de Gauss.

A la inversa, si existe una función de Gauss g_k, esta induce una función

$$f_k = g_k \circ \pi^{-1} : M \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$$

y a su vez f_k induce el isomorfismo (F_k, f_k) entre E y γ_k^n. ■

Por la trivialidad local de los fibrados, se tiene que para un fibrado vectorial (E, π, M) y un cubrimiento $(U_i)_{i\in I}$ de la variedad M dado por la estructura diferenciable de la variedad, donde el conjunto de índices I es enumérable (ya que M es Haussdorff con base enumérable), $E|_{U_i}$ es trivial.

Ya que toda variedad diferenciable es paracompacto y Haussdorff, M admite una partición de la unidad localmente finita subordinada al recubrimiento $(U_i)_{i\in I}$ (Ver [15: 5, pag.300-302]), es decir, sea $(V_i)_{i\in I}$ un refinamiento abierto localmente finito, luego existe un cubrimiento cerrado de M, $(W_i)_{i\in I}$ tal que $W_i \subset V_i$, para cada $i \in I$, ya que M es paracompacto y Haussdorff, M es normal y por el lema de Urysohn, existen funciones continuas $\lambda_i : M \to [0, 1]$ tales que

$$\lambda_i(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in W_i \\ 0 & \text{si } p \in U_i - V_i. \end{cases}$$

Como $(V_i)_{i\in I}$ es localmente finito, la suma

$$\lambda(p) = \sum_{i\in I} \lambda_i(p),$$

define en M una función continua, que no se anula nunca, y se sigue que $\varphi_i = \lambda_i/\lambda$ es una partición de la unidad localmente finita subordinada a $(U_i)_{i\in I}$. Dicha partición permite extender la construcción local de las funciones Gauss que a su vez caracterizan los fibrados sobre M dada por la proposición 3.4.1 y el corolario 3.4.1

Se define ahora una familia de funciones

$$h_i(e) = \begin{cases} \lambda_i(\pi(e)).g_{k_i}(e) & \text{si } \pi(e) \in U_i \\ 0 & \text{si } \pi(e) \in M - U_i, \end{cases}$$

donde $g_{k_i} : E|_{U_i} \to \mathbb{R}^{k_i}$ son funciones Gauss. Las funciones h_i extienden la teoría para construir fibrados vectoriales sobre una variedad M y a partir de ellas se muestra que cualquier fibrado se puede ver como el pullback del fibrado universal a lo largo de funciones $f_\infty : M \to \mathbb{G}_n$.

Proposición 3.4.2 *Si (E, π, M) es un fibrado vectorial, existe una función de Gauss*

$$g_\infty : E \to \mathbb{R}^\infty$$

.

Demostración. Se define una función $g_\infty : E \to \mathbb{R}^\infty$ como

$$g_\infty(e) = (h_1(e), h_2(e), ..., h_n(e), ...),$$

para todo $e = (p, u) \in E$, donde las funciones h_i son las definidas anteriormente. Se muestra que g_∞ es una función de Gauss, en efecto, si $p \in U_i$ para algún $i \in I$, suponiendo que $p \in U_j$ para algún $j \in I$ por el razonamiento que se hace para definir λ_i, $p \in W_i$ ó $p \in W_j$ donde $(W_i)_{i\in I}$ es la familia definida a partir del refinamiento $(V_i)_{i\in I}$, sin perdida de generalidad se supone que $p \in W_i$, luego,

$$\begin{aligned} g_\infty(e) &= (h_1(e), h_2(e), ..., h_i(e), ...) \\ &= (\lambda_1(\pi(e)).g_{k_1}(e), \lambda_2(\pi(e)).g_{k_2}(e), ..., \lambda_i(\pi(e)).g_{k_i}(e), ...) \\ &= (\lambda_1(p).g_{k_1}(e), \lambda_2(p).g_{k_2}(e), ..., \lambda_i(p).g_{k_i}(e), ...) \\ &= (0, 0, ..., 0, g_{k_i}(e), 0, ...) \in \mathbb{R}^\infty, \end{aligned}$$

ya que $g_{k_i} : E|_{U_i} \to \mathbb{R}^{k_i}$ es una función de Gauss para todo $i \in I$, por el mismo argumento g_∞ es un homomorfismo de clase C^∞ de espacios vectoriales. Por último se mira que g_∞ es inyectiva, sean $e = (p, u), e_1 = (p, u_1) \in E_p \subset E$ tal que $g_\infty(e) = g_\infty(e_1)$ así,

$$(h_1(e), h_2(e), ..., h_i(e), ...) = (h_1(e_1), h_2(e_1), ..., h_i(e_1), ...),$$

$$(0, 0, ..., 0, g_{k_i}(e), 0, ...) = (0, 0, ..., 0, g_{k_i}(e_1), 0, ...),$$

por lo tanto, $g_{k_i}(e) = g_{k_i}(e_1)$, entonces $e = e_1$ ya que g_{k_i} es inyectiva. En consecuencia, g_∞ es una función de Gauss. ■

Al igual que para las funciones Gauss $g_k : E \to \mathbb{R}^k$, $g_\infty : E \to \mathbb{R}^\infty$ induce un morfismo (F_∞, f_∞) de E a γ^n (el fibrado universal) el cual restringido a cada fibra es un isomorfismo, a continuación se enuncia este resultado.

Proposición 3.4.3 *Todo fibrado vectorial sobre una variedad diferenciable M es isomorfo al pullback $f_\infty^*\gamma^n$ para alguna función de clase C^∞, $f_\infty : M \to \mathbb{G}_n$.*

Demostración. Sea E un fibrado vectorial sobre M cualquiera, entonces por la proposición 3.4.2 existe una función de Gauss $g_\infty : E \to \mathbb{R}^\infty$, a su vez, g_∞ define una función

$$f_\infty : M \to \mathbb{G}_n$$

dada por,

$$\begin{aligned}
f_\infty(p) &= g_\infty(\pi^{-1}(p)) \\
&= (h_1(\pi^{-1}(p)), h_2(\pi^{-1}(p)), ..., h_i(\pi^{-1}(p)), ...) \\
&= (\lambda_1(\pi(\pi^{-1}(p))).g_{k_1}(\pi^{-1}(p)), \lambda_2(\pi(\pi^{-1}(p))).g_{k_2}(\pi^{-1}(p)), ..., \lambda_i(\pi(\pi^{-1}(p))).g_{k_i}(\pi^{-1}(p)), ...) \\
&= (\lambda_1(p).g_{k_1}(\pi^{-1}(p)), \lambda_2(p).g_{k_2}(\pi^{-1}(p)), ..., \lambda_i(p).g_{k_i}(\pi^{-1}(p)), ...) \\
&= (0, 0, ..., 0, g_{k_i}(\pi^{-1}(p)), 0, ...) \\
&= (0, 0, ..., 0, f_{k_i}(p), 0, ...),
\end{aligned}$$

donde $f_{ki} : M \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{k_i})$ es la función definida por la función de Gauss g_{k_i}, ya que f_{k_i} es de clase C^∞, f_∞ es de clase C^∞.

Además, f_∞ induce la función $F_\infty : E \to \gamma^n$ dada por $F_\infty(e) = (f_\infty \circ \pi(e), g_\infty(e)) \in \mathbb{G}_n \times \mathbb{R}^\infty$, para todo $e \in E_p$, la prueba de que $E \cong \gamma^n$ a lo largo de f_∞ se deduce de inmediato de la construcción hecha en la introducción de esta sección ya que $E|_{U_i} \cong \gamma^n_{k_i}$ a lo largo de cada f_{k_i}. Así, por la proposición 2.3.1 $f^*_\infty E \cong \gamma^n$. ■

3.4.1. Homotópia de las funciones de Gauss

Ahora se estudia la homotópia de las funciones de Gauss, con el fin de presentar la prueba del segundo teorema que motiva la elaboración de este trabajo, el cual consiste en una caracterización para la construcción de fibrados vectoriales.

Proposición 3.4.1.1 *Las funciones Gauss y los isomorfismos de fibrado sobre una variedad diferenciable al fibrado universal, están en relación uno a uno.*

Demostración. Sea E un fibrado vectorial sobre la variedad diferenciable M. La demostración es análoga a la demostración de la proposición 4.4.1 ya que $g_\infty : E \to \mathbb{R}^\infty$ está definida a partir de funciones de Gauss $g_{k_i} : U_i \to \mathbb{R}^{k_i}$ las cuales inducen un isomorfismo entre $(E|_{U_i}, \pi, U_i)$ y $\gamma^n_{k_i}$ de manera unica dado por (F_{k_i}, f_{k_i}) donde $f_{k_i} = g_{ki}(\pi^{-1}(p))$ y $F_{k_i} = ((f_{k_i} \circ \pi)(e), g_{ki}(e))$ para $p \in M$ y $e \in \pi^{-1}(p) \subset E$, luego g_∞ induce el isomorfismo (F_∞, f_∞) dado por la proposición 4.4.3.

$$\begin{array}{ccc}
E|_{U_i} & \xrightarrow{F_{k_i}} & \gamma^n_{k_i} \subset \gamma^n \\
\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle Pr_1} \\
U_i \subset M & \xrightarrow{f_{k_i}} & \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{k_i}) \subset \mathbb{G}_n
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F_\infty} & \gamma^n \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Pr_1} \\ M & \xrightarrow{f_\infty} & \mathbb{G}_n \end{array}$$

Ahora, $\pi_2 \circ F_\infty : E \to \mathbb{R}^\infty$ (ya que $F_\infty : E \to \gamma^n = \mathbb{G}_n \times \mathbb{R}^\infty$) define una función de Gauss $g_\infty^{'}$, entonces, si g_∞ es la función de Gauss que define el isomorfismo (F_∞, f_∞) entonces $g_\infty^{'} = g_\infty$, en efecto, sea $e \in E$ cualquiera, luego,

$$\begin{aligned} g_\infty^{'}(e) &= \pi_2 \circ F_\infty(e) \\ &= \pi_2(f_\infty \circ \pi(e), g_\infty(e)) \\ &= \pi_2(f_\infty(p), g(e)) \\ &= g_\infty(e), \end{aligned}$$

Así, la función de Gauss obtenida del isomorfismo de fibrados es la misma que le dio origen, por lo tanto, las funciones Gauss y los isomorfismos de fibrados sobre una variedad diferenciable al fibrado universal están en ralación uno a uno. ■

Se enuncia y se demuestra ahora la proposición que da inicio al resultado principal de este trabajo, la cual le da sentido al la elección de las funciones Gauss para armar los isomorfismos de fibrados vectoriales al fibrado universal.

Proposición 3.4.1.2 *Dos aplicaciones Gauss g_∞ y l_∞ definidas en un fibrado vectorial E, son homotópicas.*

Demostración. Sean $g_\infty : E \to \mathbb{R}^\infty$ y $l_\infty : E \to \mathbb{R}^\infty$ funciones de Gauss, entonces,

$$g_\infty(e) = (h_1(e), h_2(e), ..., h_i(e), ...),$$

y

$$l_\infty(e) = (h_1^{'}(e), h_2^{'}(e), ..., h_i^{'}(e), ...),$$

para todo $e \in E$, donde

$$h_i^{'}(e) = \begin{cases} \lambda_i(\pi(e)).l_{k_i}(e) & \text{si } \pi(e) \in U_i \\ 0 & \text{si } \pi(e) \in M - U_i, \end{cases}$$

siendo $l_{k_i} : E|_{U_i} \to \mathbb{R}^{k_i}$ una función de Gauss definida similarmente como g_{k_i}.

Sean $g'_\infty : E \to \mathbb{R}^\infty$ y $l'_\infty : E \to \mathbb{R}^\infty$ también funciones de Gauss dadas por:

$$g'_\infty(e) = (h_1(e), 0, h_2(e), 0, ..., 0, h_i(e), 0, ...),$$

y

$$l'_\infty(e) = (0, h'_1(e), 0, h'_2(e), 0, ..., 0, h'_i(e), 0, ...),$$

g_∞ y g'_∞ son homotópicas al igual que l_∞ y l'_∞, basta tomar las aplicaciones $G, L : E \times [0,1] \to \mathbb{R}^\infty$ dadas por:

$$G(e,t) = (1-t).g_\infty(e) + t.g'_\infty(e),$$

y

$$L(e,t) = (1-t).l_\infty(e) + t.l'_\infty(e),$$

$G, L \in C^\infty$ ya que $g_\infty \in C^\infty$ y $l_\infty \in C^\infty$ además,

$$G(e,0) = (1-0).g_\infty(e) + 0.g'_\infty(e) = g_\infty(e),$$

y

$$G(e,1) = (1-1).g_\infty(e) + 1.g'_\infty(e) = g'_\infty(e),$$

de igual manera, $L(e,0) = l_\infty(e)$ y $L(e,1) = l'_\infty(e)$.

Seguido de esto se prueba que g'_∞ y l'_∞ son homotópicas, la aplicación $Q : E \times [0,1] \to \mathbb{R}^\infty$ dada por

$$Q(e,t) = (1-t).g'_\infty(e) + t.l'_\infty(e),$$

define la homotopía buscada, $Q \in C^\infty$, además $Q(e,0) = g'_\infty(e)$ y $Q(e,1) = l'_\infty(e)$. Luego,

$$g_\infty \simeq g'_\infty,$$

$$l_\infty \simeq l'_\infty,$$

y

$$g'_\infty \simeq l'_\infty.$$

Entonces, como la relación de homotopía es una relación de equivalencia, se tiene que $g_\infty \simeq l_\infty$. ■

Ahora se procede a realizar la demostración del teorema de clasificación de los fibrados vectoriales, el cual se sustenta en la existencia de una función de Gauss y la relación uno a uno de estas con los isomorfismos del fibrado vectorial (sobre el cual se define la función) al fibrado universal.

3.5. Teorema de Clasificación de los Fibrados Vectoriales

Proposición 3.5.1 *Sean $f_{0\infty}, f_{1\infty} : M \to \mathbb{G}_n$ funciones de clase C^∞ tales que*

$$f_{0\infty}^*\gamma^n \cong f_{1\infty}^*\gamma^n.$$

Entonces $f_{0\infty}$ y $f_{1\infty}$ son homotópicas.

Demostración. Por la definición de $f_{0\infty}^*\gamma^n$ y $f_{1\infty}^*\gamma^n$ se tienen los siguientes isomorfismos,

$$\begin{array}{ccc} f_{0\infty}^* & \xrightarrow{Pr_2} & \gamma^n \\ {\scriptstyle Pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Pr_1} \\ M & \xrightarrow{f_{0\infty}} & \mathbb{G}_n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f_{1\infty}^* & \xrightarrow{Pr_2} & \gamma^n \\ {\scriptstyle Pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Pr_1} \\ M & \xrightarrow{f_{1\infty}} & \mathbb{G}_n \end{array}$$

Sea E un fibrado vectorial sobre M, tal que $f_{0\infty}^* \cong E$ (esto se puede asumir gracias a la proposición 3.4.3) luego también $f_{1\infty}^* \cong E$, por la proposición 2.3.1 E es isomorfo a γ^n a lo largo de $f_{0\infty}$ y también a lo largo de $f_{1\infty}$, es decir, se tienen dos isomorfismos $(F_0, f_{0\infty})$ y $(F_1, f_{1\infty})$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F_0} & \gamma^n \\ {\scriptstyle Pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Pr_1} \\ M & \xrightarrow{f_{0\infty}} & \mathbb{G}_n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F_1} & \gamma^n \\ {\scriptstyle Pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Pr_1} \\ M & \xrightarrow{f_{1\infty}} & \mathbb{G}_n \end{array},$$

los cuales, por la proposición 3.4.1.1 inducen dos funciones de Gauss

$$g_{0\infty}, g_{1\infty} : E \to \mathbb{R}^\infty$$

que son homotópas (proposición 3.4.1.2), por lo tanto existe una función de clase C^∞

$$G : E \times [0,1] \to \mathbb{R}^\infty,$$

tal que $G|_{E\times\{0\}} = g_{0\infty}$ y $G|_{E\times\{1\}} = g_{1\infty}$, la función G define funciones de Gauss $G|_{E\times\{t\}} = g_{t\infty}$ para cada $t \in [0,1]$ fijo, y a su vez, induce dos funciones,

$$f : M \times [0,1] \to \mathbb{G}_n$$

dada por,

$$\begin{aligned} f(p,t) = f|_{M\times\{t\}} &= f_t(p) \\ &= G(\pi^{-1}(p), t) \\ &= G|_{E\times\{t\}}(\pi^{-1}(p)) \\ &= g_{t\infty}(\pi^{-1}(p)), \end{aligned}$$

para todo $p \in M$ y la función

$$F : E \times [0,1] \to \gamma^n$$

dada por,

$$\begin{aligned} F(e,t) = F|_{E\times\{t\}} &= F_t(e) \\ &= (f_t \circ \pi(e), G(e,t)) \\ &= (g_{t\infty}(\pi^{-1}(p)), g_{t\infty}(e)). \end{aligned}$$

Entonces, G restringida a los espacios $E \times \{0\}$ y $E \times \{1\}$ induce isomorfismos de fibrados vectoriales $(F|_{E\times\{0\}}, f|_{E\times\{0\}})$ y $(F|_{E\times\{1\}}, f|_{E\times\{1\}})$, además, de la proposición 3.4.1.1, la función de Gauss obtenida del isomorfismo de fibrados es la misma que le dio origen, y cada función de Gauss $g_{t\infty}$ da origen a una sola función $f_{t\infty} : M \to \mathbb{G}_n$, ya que $g_{0\infty}$ genera a f_0 entonces, $f|_{E\times\{0\}} = f_0 = f_{0\infty}$ de la misma manera, $f|_{E\times\{1\}} = f_1 = f_{1\infty}$, por lo tanto, f es una homotopía entre $f_{0\infty}$ y $f_{1\infty}$. ■

La proposición aterior muestra que el contrarreciproco del Teorema de equivalencia homotópica se tiene siempre que las funciones estén definidas de una variedad diferenciable a la variedad Grassmaniana y sean definidas por una función de Gauss. Este hecho da paso al **Teorema de Clasificación de los Fibrados Vectoriales** que se presenta a continuación y en el cual se puede ver que las funciones $f_\infty : M \to \mathbb{G}_n$ y los fibrados vectoriales sobre M están relacionados uno a uno salvo invarianza homotópica o isomorfismos de fibrados.

Tomando el conjunto de clases de homotopía de las funciones f_∞ dado por,

$$[M, \mathbb{G}_n] = \{[f_\infty];\ [f_\infty] = \{f'_\infty : M \to \mathbb{G}_n;\ \text{son homotópicas a } f_\infty\}\},$$

y $\mathbb{V}(M)$ definido en la sección 3.3, se obtiene el principal resultado de este trabajo ya que a pesar de tener el nombre de clasificación, el teorema permite dar una construcción de fibrados vectoriales ya que las funciones homotópicas y en general las clases de homotopía

dan información sobre sus características y en consecuencia se puede saber no solo cuantos fibrados vectoriales sobre una variedad diferenciable se pueden tener sino también como son esos fibrados.

Teorema 3.5.1 (Clasificación de los Fibrados Vectoriales) *Sea M una variedad diferenciable. Existe una biyección entre los conjuntos $\mathbb{V}^{\kappa}(M)$ y $[M, \mathbb{G}_n]$.*

Demostración. Para demostrar este teorema es necesario definir dos funciones inyectivas una de $\mathbb{V}^n(M)$ a $[M, \mathbb{G}_n]$ y la otra de $[M, \mathbb{G}_n]$ a $\mathbb{V}^n(M)$ y posteriormente probar que las funciónes son una inversa de la otra.

Primero se define la función

$$\Phi : \mathbb{V}^n(M) \to [M, \mathbb{G}_n].$$

Sea $[E]$ un elemento de $\mathbb{V}^n(M)$, y sea E un representante de la clase $[E]$, luego, por la proposición 3.4.3, existe una función $f_\infty : M \to \mathbb{G}_n$ tal que $f_\infty^* \gamma^n \cong E$, así Φ esta definida como sigue:

$$\Phi([E]) = [f_\infty].$$

La definición de Φ no depende del representante de la clase $[E]$, en efecto, sea $E^{'} \in [E]$, nuevamente por la proposición 3.4.3, existe $f_\infty^{'} : M \to \mathbb{G}_n$ tal que $f_\infty^{'*} \gamma^n \cong E^{'}$, ya que E y $E^{'}$ pertenecen a la misma clase de equivalencia, $E^{'} \cong E$ y por lo tanto

$$f_\infty^* \gamma^n \cong f_\infty^{'*} \gamma^n.$$

De la proposición 3.5.1 se deduce que $f_\infty \simeq f_\infty^{'}$, por lo tanto, $f_\infty^{'} \in [f_\infty]$, esto muestra que Φ está bien definida.

Ahora, Sean $[E], [E_1] \in \mathbb{V}^n(M)$ tales que $\Phi([E]) = \Phi([E_1])$, entonces,

$$[f_\infty] = [f_{1\infty}],$$

de esta manera, $f_\infty \simeq f_{1\infty}$, por el teorema de equivalencia homotópica, $f_\infty^* \gamma^n \cong f_{1\infty}^* \gamma^n$, por construcción de Φ, $f_\infty^* \gamma^n \cong E$ y $f_{1\infty}^* \gamma^n \cong E_1$, por lo tanto $E \cong E_1$, es decir, $E \in [E_1]$ y $E_1 \in [E]$, así,

$$[E] = [E_1],$$

lo que prueba que, Φ es inyectiva.

Ahora se define la función

$$\Omega : [M, \mathbb{G}_n] \to \mathbb{V}^n(M).$$

Sean $[f_\infty]$ una clase de homotópia y f_∞ un representante de la clase, Ω está dada por

$$\Omega([f_\infty]) = [f_\infty^* \gamma^n].$$

Al igual que para la función Φ, se prueba que la definición de Ω no depende del representante de la clase $[f_\infty]$. Sea $f'_\infty \in [f_\infty]$, así $f'_\infty \simeq f_\infty$, por el teorema de equivalencia homotópica se tiene que ${f'}^*_\infty \gamma^n \cong f^*_\infty \gamma^n$, entonces, ${f'}^*_\infty \gamma^n \in [f^*_\infty \gamma^n]$ y por lo tanto Ω está bien definida. La prueba de la inyectividad es similar a la prueba de la buena definición de Φ.

Por último es necesario demostrar que una función es la inversa de la otra. Sea $[E]$ una clase en $\mathbb{V}^n(M)$ con $\Phi([E]) = [f_\infty]$ entonces, por la construcción de Φ, $f^*_\infty \gamma^n \cong E$. Por otro lado, $\Omega([f_\infty]) = [f^*_\infty \gamma^n]$, así,

$$\begin{aligned} \Omega \circ \Phi([E]) &= \Omega([f_\infty]) \\ &= [f^*_\infty \gamma^n] \\ &= [E] \\ &= Id_{\mathbb{V}^n(M)}. \end{aligned}$$

Si $[f_\infty]$ es una clase en $[M, \mathbb{G}_n]$ tal que $\Omega([f_\infty]) = [f^*_\infty \gamma^n]$, luego se supone que

$$\Phi([f^*_\infty \gamma^n]) = [f'_\infty]$$

para alguna función $f'_\infty : M \to \mathbb{G}_n$ donde ${f'}^*_\infty \gamma^n \cong f^*_\infty \gamma^n$, por la proposición 3.5.1 $f'_\infty \cong f_\infty$ por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Omega([f_\infty]) &= \Phi([f^*_\infty \gamma^n]) \\ &= [f'_\infty] \\ &= [f_\infty] \\ &= Id_{[M,\mathbb{G}_n]}. \end{aligned}$$

Con esto se prueba el teorema. ■

Una de las implicaciones de toda la teoría propuesta es que todo fibrado vectorial es isomorfo al fibrado universal a lo largo de una función homotópica de clase C^∞, es decir, el fibrado universal caracteriza a todos los fibrados vectoriales, y gracias a la definión y la construcción del fibrado universal, se puede identificar cada fibrado vectorial con el fibrado $\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)$ para algún par de elementos $n, k \in \mathbb{N}$ definido el la sección 2.2.4.

Ejemplo 3.5.1 Se quiere mostrar que para todo fibrado vectorial existe otro fibrado vectorial tal que la suma de los dos es un fibrado vectorial trivial, para ello se presenta la definición de complemento ortogonal del fibrado de lineas universales sobre el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$. El espacio

$$E^\perp = \{(l, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1};\ v \perp l\},$$

la proyección $\pi : E^\perp \to \mathbb{R}P^n$, definida por $\pi(l, v) = l$, $(E^\perp, \pi, \mathbb{R}P^n)$ es un fibrado vectorial con fibras los subespacios ortogonales $l^\perp$. Este fibrado se puede extender a las variedades

Grassmanianas.

Para el fibrado vectorial $\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)$ existe el fibrado vectorial

$$\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)^\perp = \{(B, v) \in \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k;\ \ v \perp B\},$$

la constricción es análoga a la que se hace en el ejemplo 3.2.2, y de la misma manera, $\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k) \oplus \mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)^\perp \cong \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k$ gracias al isomorfismo

$$g : \mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k) \oplus \mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)^\perp \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k$$

dado por $g(B, v, w) = (B, v + w)$. Así, para el fibrado vectorial inducido por el pullback de γ_k^n sobre M, existe un fibrado inducido por $\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)^\perp$ sobre M tal que por la proposición 3.2.2 su suma es trivial.

Ejemplo 3.5.2 (fibrados de linea sobre S^1) Se puede ver el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^1$ como el espacio cociente obtenido de S^1 identificando cada punto $x \in S^1$ con su punto antípoda $-x$, es decir,

$$\mathbb{R}P^1 = S^1/\simeq,$$

donde $\simeq$ esta definida en S^1 por $x \simeq y$ sí y sólo si $y = -x$. Luego basado en la caracterización de S^1 dada en el ejemplo 2.1.2 se puede definir un difeomorfismo

$$f : S^1 \to \mathbb{R}P^1,$$

por $f([x]_\sim) = [x]_\simeq$ y a su vez esta define un difeomorfismo ya que para un representante y de la clase $[x]_\sim$, $y = x + 2\pi k$ y $f(y) = -y = -x - 2k\pi k$, luego, por el corolario de equivalencia homotópica, $\mathbb{V}_1(S^1)$ y $\mathbb{V}_1(\mathbb{R}P^1)$ están en relación uno a uno, además, existe una biyección entre $\mathbb{V}_1(\mathbb{R}P^1)$ y $[\mathbb{R}P^1, \mathbb{G}_1]$, $\mathbb{G}_1$ es el conjunto de todos los espacios unidimensionales sobre $\mathbb{R}^\infty$ y tomando la proyección de $\mathbb{R}^\infty$ a $\mathbb{R}^2$, se tiene que $\mathbb{G}_1$ coincide con $\mathbb{R}P^1$, por lo tanto la descripción de $[\mathbb{R}P^1, \mathbb{G}_1]$ se reduce a encontrar el grupo fundamental sobre $\mathbb{R}P^1$, pero $\pi_1(\mathbb{R}P^1, x_0)$ es el grupo trivial para todo $x_0 \in \mathbb{R}P^1$, por lo tanto el único fibrado vectorial unidimensional sobre S^1 es el trivial.

Haciendo un razonamiento análogo para S^2, se obtiene que existen dos fibrados vectoriales unidimensionales sobre S^2 ya que $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}P^2$.

Conclusiones

Una de las conclusiones más importante si no la más importante es que se puede dar una caracterización para los fibrados vectoriales y esta a su vez induce una implicación de gran relevancia en las aplicaciones que pueda tener este hecho, los fibrados vectoriales están identificados por el fibrado universal, es decir, todo fibrado vectorial (E, π, M) es isomorfo al pullback del fibrado universal γ^n a lo largo de una función f_∞ inducida por la función de Gauss, definida del espacio base M al espacio base del fibrado universal $\mathbb{G}_n$, lo cual permite estudiar alguna propiedades importantes de los fibrados vectoriales como por ejemplo la expuesta en el ejemplo 3.5.1.

Anterior a la conclusión principal de este trabajo expuesta anteriormente, se pueden mencionar otras que se deducen del desarrollo de los objetivos específicos dados, una de ellas es que los fibrados vectoriales son una generalización del fibrado tangente que se estudia en los cursos de geometría de superficies y geometría diferencial.

A la teoria expuesta por Allen Hatcher para la clsificación de los fibrados vectoriales y al teorema de equivalencia homotópica se les debe dotar de hipotesís más fuertes con el fin de poderlos particularizar sobre los fibrados vectoriales construidos sobre variedades diferenciables, una de ellas y tal vez la mas importante es que las funciones de homotopía entre los espacios base deben ser de clase C^∞ con el fin de que se preserve la estructura y no vaya en contra de las hipotesís para poder aplicar el pullback.

Por ultimo se hace imprescindible mencionar que aunque el teorema de clasificación de los fibrados vectoriales no es muy practico ya que en ocasiones calcular el conjunto de clases de homotopía $[M, \mathbb{G}_n]$ es muy complicado e incluso se puede volver un trabajo demasiado arduo por no decir imposible, es decir, una caracterización que facilite el proceso para encontrar y describir los fibrados vectoriales sobre una variedad diferenciable y aún más, sobre un espacio topológico, es aún un problema abierto, por el momento se destaca que los resultados presentados a través de los dos teoremas centrales de este trabajo, presenta un punto de apoyo muy bueno para trabajar en aplicaciones teóricas de la caracterización, de las cuales hay muchas, para mencionar alguna, los fibrados vectoriales son espacios con producto interno, dicho resultado no se probo debido a que el estudio se hacia muy extenso y se salia de los propósitos del trabajo, sin embargo no se podía dejar de mencionar ya que ese hecho proporciona otro camino para definir una métrica sobre los fibrados vectoriales.

Bibliografía

[1] DO CARMO, Manfredo. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza; Edición, 1995. ISBN-10: 8420681350.

[2] MUNKRES, James. *Topology*. 2 ed. Prentice Hall, Inc, 2000. ISBN: 0-13-181629-2.

[3] WARNER, Frank. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. 1 ed. Londres: Scott, Foresman and Company, 1971. ISSN 0072-5285.

[4] KOSNIOWSKI, Czes. *Topología Algebraica*. Editorial Reverté, S.A., 1986. ISBN: 84-291-5098-6.

[5] BRENDON, Glen E. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., 2010. ISBN: 978-1-4419-3103-0.

[6] BOOTHBY, William M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1975. ISBN: 0-12-116050-5.

[7] POOR, Walter. *Differential Geometric Structures*. Dover Publications; Dover Ed edition, 2007. ISBN: 978-0486458441.

[8] SUÁREZ A, Mariano. *Variedades*. Buenos Aires. Universidad de Buenos Aires, 2015. Recuperado de: http://mate.dm.uba.ar/ aldoc9/Clases/2012/Diferencial/variedades.pdf.

[9] APAZA, Ana. *Fibrados Vectoriales y el Semigrupo V(X)*. Vol 70 No. 2. Lima. Anales científicos UNALM, 2009. ISSN: 0255-0407.

[10] BURGA, Rubén. *Clasificación de los Fibrados Vectoriales*. Serie D No. 22. Lima. Departamento de ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú , 2009.

[11] DO CARMO, Manfredo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Boston, 1992. ISBN: 0-8176-3490-8.

[12] OSBORN, Howard. *Vector Bundles*. Vol. 1. Foundations and Stiefel-Whitney Classes. New York. Academic Press, INC , 1982. ISBN: 0-12-529301-1.

[13] HATCHER, Allen. *Vector Bundles and K-Theory*. version 2.1., 2009.

[14] ARRIETA, Carlos A. *Geometría de Superficies*. Bogotá D.C. Proyecto de Matemática UDFJDC, 2018.

[15] ENGELKING. Ryszard. *General Topoloy*. Warszawua, 1977.

[16] ARRIETA, Carlos A. *Fundamentos de Geometría Diferencial*. Bogotá D.C. Proyecto de Matemática UDFJDC, 2015.

[17] ISHAM, Chris J. *Modern Differential Geometry for Physicists*. Vol. 61, 2 ed. World Scientific Publishing Co. Pte.Ltd, 1999. ISBN: 13 978-981-02-3555-0.

[18] GROSSMAN, Stanley I. *Algebra Lineal*. 2 ed. México, D.F. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1988. ISBN: 968-7270-39-X.

[19] RUDIN, Walter. *Principios de Análisis Matemático*. 3 ed. Naucalpan de Juárez. Libros McGraw-Hill de México, S.A. de C.V., 1980. ISBN: 968-6046-82-8.

[20] KREYSZIG, Erwin. *Introductory Functional Analysis With Applications*. New York. John Wiley Sons. Inc, 1978. ISBN: 0-471-50731-8.

[21] FRALEIGH, John B. *Principios de Análisis Matemático*. Pimer curso. Wilmington, Delaware. Adisson-Wesley Iberoaméricana, S.A., 1987. ISBN: 0-201-64052-X.

[22] RODRÍGUEZ, José D. *Una Introducción al Grupo Fundamental y Algunas Aplicaciones*. Murcia. Trabajo de Grado, Facultad de Matemáticas, Universidad de Murcia, 2014-2015.