INFORME DE PASANTÍA • ACTIVIDADES DIDÁCTICAS ASOCIADAS A LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA, EN LA FACULTAD DE MEDIO AMBIENTE Y RECURSOS NATURALES.

Autores: Cristian Javier Acero Robayo, Naiara Gomez Lugo

Informe presentado como requisito para optar al título de **Licenciado en Física**, en concordancia con lo establecido en el Acuerdo 038 de 2015 del Consejo Académico.

Director Interno:
Jaime Duván Reyes Roncancio, PhD

Profesionales Responsables:
Edier Hernan Bustos Velazco, PhD
William Andres Castro Lopez, PhD
Universidad Distrital Fransisco Jose de Caldas
Facultad de Medio Ambiente y Recursos Naturales.



Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Licenciatura en Física
Bogotá D.C., Colombia
2021

Introducción

La Facultad de Medio Ambiente y Recursos Naturales, tiene sus antecedentes en los años cincuenta en la carrera de Ingeniería forestal. Los cambios nacionales en procura de responder a los nuevos órdenes mundiales en función del medio ambiente, se reflejaron en lo jurídico y la reorganización y constitución de nuevas instituciones de carácter nacional y regional que centran su razón en estos temas, como lo plantea JM. Orozco, en Colomb. for. vol.17 no.2 Bogotá July/Dec. 2014. Donde destaca la Constitución del 91, la "Cumbre de Rio" realizada en 1992 y La aprobación de la Ley 99 de 1993, mediante la cual se crearon el Ministerio del Medio Ambiente, hoy Ministerio de Ambiente y Desarrollo Sostenible, el Sistema Nacional Ambiental -SINA- y los institutos de apoyo técnico y científico, Alexander Von Humboldt, IDEAM, IIAP, SINCHI e INVEMAR. Ya en 1990, la ciudad de Bogotá había creado el Departamento Administrativo del Medio Ambiente, hoy Secretaría Distrital del Ambiente.[6, pág 133]

Son entonces estos antecedentes, factores que incidieron en la universidad para crear una facultad que permita acercar las nuevas ciencias ambientales, a la comprensión de los problemas de fondo que se crean en la relación de la explotación de algunos recursos naturales, además de aportar en los diseños y debates en el ordenamiento territorial.

Lo anterior llevó a que la facultad se diversificara y ampliara su espectro de aplicaciones, para nuevas generaciones en diferentes niveles de formación como especializaciones, profesional, tecnológicas, técnicas y maestría, donde los modelos matemáticos y físicos son fundamentales en la formulación de problemas ambientales.

Además de estos antecedentes y la respuesta oportuna a ellos, la universidad enfrenta nuevos retos en los procesos de formación producto de la pandemia, paros y demás situaciones adversas y externas a la universidad, que obliga a la implementación de nuevas alternativas. Dada entonces la necesidad de mantener la formación y reforzar los conocimientos físico-matemáticos que se aplican en las diferentes problemáticas ambientales, se propone la creación de un módulo educativo en álgebra lineal aplicada al levantamiento de suelos y el desarrollo de guías didácticas sobre la naturaleza de la luz; esto con el propósito de mitigar los problemas producto de los nuevos factores y garantizar el acompañamiento a los estudiantes fuera del aula.

Teniendo en cuenta lo anterior se decidió tomar dos cursos de la facultad, con el fin de poder llevar a cabo el desarrollo de estas actividades. En el curso de vibraciones y ondas, proyecto dirigido por el profesor William Andrés Castro López, se realizaron diferentes guías didácticas donde se muestra la evolución del modelo ondulatorio y cómo este es fundamental para los estudios de la naturaleza de la luz, haciendo un recorrido histórico, donde se puede llegar a comprender un poco la evolución de la ciencias y cómo estas van ligadas al contexto social de la época. Esto también se hace mostrando el modelo matemático y alejándose de la idea falsa de la física como ecuaciones y más, comprendiendo el fenómeno natural que se estudia para plantear un modelo matemático, por lo cual estas guías llevan una contextualización realizada de diferentes textos donde se expone al estudiante ideas generales y ejemplos experimentales para poder comprender mejor el fenómeno.

La socialización de éstas es realizada por el profesor, quien hace una explicación detallada de las matemáticas empleadas en el modelo, además de mostrar los ejemplos resueltos que se presentan en la guía y explicar unos propuestos dejando que el estudiante que resuelva los problemas y preguntas planteadas en ellas, complementando así la formación en cuanto

a la contextualización del estudiante, para llevarlo a preguntarse el ¿por qué?, y ¿para qué?, del planteamiento de ese modelo en la solución del problema contractual. Además de estas guías se realizaron diferentes paso a paso de ejercicios en las áreas de mecánica clásica, vibraciones y ondas y óptica donde se mostraban las diferentes consideraciones realizadas para la solución de problemas en estas áreas, acompañando esto con diferentes problemas propuestos en forma de reto para el estudiante y con los que podía llegar a analizar más que a memorizar la forma de solución de los problemas.

El segundo curso, es el de cálculo multivariado del proyecto de tecnología en topografía dirigido por el docente Edier Hernán Bustos Velazco con el que se planteó realizar un módulo educativo en algebra lineal aplicada en electromagnetismo, ondas y topografía en levantamiento de suelo. Este proceso exige establecer un seguimiento o verificación del nivel de apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes, por lo tanto, se propone hacerlo a través de una evaluación oral, donde se vería reflejado el uso del módulo, además del desempeño del pasante a la hora de explicar los temas planteados por el docente.

Estas actividades realizadas en el módulo, fueron desarrolladas de manera virtual y con ayuda de softwares entre las que se pueden mencionar las pizarras virtuales como Openboard, plataformas para videoconferencias como Meet, calculadoras gráficas como Geogebra y como medio de entrega de las actividades de los estudiantes, el correo electrónico de los pasantes a través del cual se realizaba la retroalimentación con el ánimo de que estos participaran de forma activa explicando los procedimientos de nuevos ejercicios, apoyados en las clases que se gravaban y se compartían a través del drive como material de apoyo en este proceso de formación.

La construcción de este módulo permite mostrar diferentes aplicaciones del algebra lineal en las ciencias, como lo es en el análisis del suelo, modelo armónico y el campo electromagnético; mostrando cómo lo abstracto realmente depende del fenómeno que estudiamos, y eso hace que esté ligado a la naturaleza.

1. Objetivos

1.1. Objetivo General

- Diseño de actividades didácticas asociadas a la enseñanza de la física, en la Facultad de Medio Ambiente y Recursos Naturales.

1.2. Objetivos Específicos

- Diseño de actividades didácticas asociadas a la nanotecnología.
- Diseño de actividades didácticas que vinculen la física mecánica clásica con las energías alternativas.
- Diseño de un módulo educativo donde se muestre la aplicabilidad del algebra lineal en las ondas, electromagnetismo y la topografía en el levantamiento de suelos.
- Diseño de actividades didácticas asociadas a la naturaleza de la luz y el movimiento armónico.

2. Descripción de resultados

Durante la elaboración de la pasantía se presentaron dos planes de trabajo encaminados al desarrollo de actividades didácticas para la facultad de medio ambiente y recursos naturales: Se planteó la aplicación de un módulo para el curso de cálculo multivariado del profesor Edier Bustos y el diseño de guías de laboratorio como actividades prácticas para el curso de vibraciones y ondas del profesor William Castro.

2.1. Contexto histórico

2.1.1. Contexto histórico del álgebra lineal

No se puede negar como las herramientas matemáticas han evolucionado a lo largo de los siglos, para que hoy día tengamos una buena estructura, en cuanto a la comprensión y creación de modelos, que nos ayuden en la vida diaria, o en la comprensión de la naturaleza, por consiguiente nos remontaremos a esas primeras civilizaciones, las cuales comprenden cómo emplear sistemas de ecuaciones con con múltiples incógnitas pudiendo brindar soluciones concretas a los problemas, empleando diferentes habilidades matemáticas como lo son el completar cuadrados, sustituir variables, solucionar ecuaciones cúbicas, o definir sistemas lineales o no lineales.

Ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales

$$x + y + z = 1$$
$$ax - y = h$$
$$rx - qz = 0$$

Sistema de ecuación lineal donde x, y, z son variables que los egipcios representaban con escarabajos y $a, c, d, m, n, p, h, r, s, q$ son coeficientes o números.

$$x \pm my \pm h = a \tag{1}$$

$$x^2 \pm y \pm r = b \tag{2}$$

Sistema de ecuaciones no lineales donde a y b son constantes; x y y son variables, pero a diferencia del primer sistema este no es lineal sino de segundo grado.

Lo interesante de todo esto es que estas civilizaciones ya sabían resolver estos sistemas con los mismos métodos que hoy día se enseñan en las escuelas. esto aplicado a problemas cotidianos como por ejemplo:

Existen dos campos cuyas áreas suman 1800 yardas cuadradas. Uno produce granos en razón de 2/3 de saco por yarda cuadrada, mientras que el otro produce granos a razón de 1/2 saco por yarda cuadrada. si la producción total es de 1100 sacos, ¿cual es el tamaño de cada campo? [1, pág 156]

Problema traído a la actualidad a través de unas tablillas de croquetta, de más de 4000 años de antigüedad.

Sistemas que al ser trabajados por la civilización china, permitieron el desarrollo de las primeras bases del pensamiento lineal, mediante un tratado de nueve capítulos sobre el Arte matemático, escrito por un científico de la dinastía Han en el año 152 a.C. Donde se albergaban todos los conocimientos matemáticos adquiridos hasta entonces, como lo fue la regla "fan-chen" usada para la solución de sistemas de ecuaciones, y que es la precursora a lo que hoy se conoce como el método de eliminación gaussiana descrito por Gauss, ya que este se remontó aquella obra, al momento de crear su modelo sobre el estudio de la orbita del asteroide Pallas, quien al realizar diferentes observaciones entre 1803-1809, encuentra un sistema de ecuciones lineales con seis incógnitas; por su parte los Griegos conocían y entendían los números enteros y mediante el análisis de este conjunto numérico, dieron una solución general a las ecuaciones de segundo grado, sistema de solución que aparece en los Elementos de Euclides y que aún seguimos aplicando en nuestros días. No obstante estos no se preocuparon por modelos matemáticos basados en sistemas de ecuaciones lineales.

Pero para poder entender al surgimiento del álgebra lineal como rama de la matemática debemos tener en cuenta el descubrimiento de un conjunto numérico más grande conocido como los complejos donde mediante la implementación de lo que hoy conocemos como los imaginarios, y la combinación de este con los reales, muestra esa relación entre la geometría y las ecuaciones algebraicas en el plano real y complejo que antes se había mostrado con Descartes en la creación del plano cartesiano, con la particularidad que en este caso no teníamos dos rectas reales si no una real y otra imaginaria mostrando así que los números complejos eran puntos sobre este plano, y de esta manera permitieron extender aún más el teorema fundamental del álgebra que nos establece que cualquier polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja, de esta forma éste polinomio se puede escribir como la multiplicación de factores lineales y cuadráticos, lo que fue más tarde demostrado por Gauss, en su tesis doctoral en 1799. Pero no siendo esta la única demostración propuesta por el genio matemático, y recordando que para esa epoca ya existian demostraciones para este teorema como las de Jean Le Round D'Alembert, Leonar Euler, Frontenex, y joseph Louis Lagrange.

La pregunta seria ¿de donde surgen estos números?, y para poder darle solución debemos remontarnos al medioevo,entre 1501-1576 ya que según el matemático neerlandés Bartel leendert van der Waerden en esa época el doctor en medicina, astrólogo, filósofo y matemático Girolamo Cardano sentó las bases de la formulación a trabajar con expresiones como $a \pm \sqrt{-b}$ con $a, b \in R$, con el fin de darle solución a la ecuación de grado tres:

$$x^3 + px = q \tag{3}$$

Donde p, q eran coeficientes reales, solución que fue planteada por Tartaglia como lo escribió Cardano, en "Ars Magna", mostrando dicha solución y sus "causu irreducibilis de Cardano" quienes son los números imaginarios, números que dieron origen a un nuevo conjunto más extenso conocido como los complejos que en la actualidad han sido importantes para el desarrollo de nuevos modelos científicos. Una forma de explicar este conjunto se encuentra en este libro y es el siguiente problema:

"Dividir 10 en dos partes tales que su producto sea igual a 40." [1, pág 158]

De igual forma presenta una solución que escrita en palabras de el es

"Es claro que este caso es imposible. No obstante, nosotros trabajamos así: dividimos 10 en dos partes iguales, haciendo cada una de 5. Estas las elevamos al cuadrado, para formar 25. Sustraer 40 de los 25 así producidos, tal como se prueba en el capítulo sobre operaciones en el libro sesto, dejando un resto de -15, la raíz cuadrada del cual sumada a ó sustraída de 5 da las partes del producto el cual es 40. Estas serían $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$"[1, pág 158]

Al verificar esta solución obtenemos que se cumplen las consideraciones planteadas por el problema. Debido a estos trabajos y que a la par venía trabajando el matemático Scipione del Ferro, se llegó a plantear una solución de ecuaciones cubicas, donde el secretario y alumno de Cardano llega a la solución para ecuaciones de grado cuatro, de esta forma llamando la atención de matemáticos que querían encontrar soluciones a ecuaciones de grado superior, hasta que los matemático Niels Abel y Galois a mediados del siglo XIX demostraron que no es posible establecer una solución para estos polinomios de grado superior.

Debido a estos aportes se llega al desarrollo de las cuaternas, las que servían para la aritmética de los complejos, por lo que William Rowan Hamilton, deduce que:

Sea z un número complejo de la forma $z = a+ib$ donde $a, b, c, d \in R$ se define el cuaternion como:

$$H = a + bi + cj + dk$$

Donde para los cuaternarios i, j, k, son componentes de la forma compleja y cumplen con la propiedad que al multiplicarse todas estas entre sí el resultado es menos uno (-1).

Posterior al trabajo y descubrimiento del matemático y astrónomo William Hamilton, el matemático Hermann Grassmann, inició investigaciones en los vectores, dando así a un nuevo tratamiento de las leyes de movimiento de Newton, pero fue el físico Gibbs quien halló la importancia del uso del álgebra vectorial dentro de los estudios de la física.

Finalmente todos estas tesis y trabajos en el campo del álgebra dan como respuesta que el matemático inglés James Josph Sylvester, en 1850 use por primera vez el término de matriz como arreglo cuadrilongo de términos, este apoyado por un abogado de nombre Cayley que al igual que él, compartía la fascinación por las matemáticas. En 1853 realiza un escrito donde aparece por primera vez la inversa de una matriz, para que en el 58 establezcan que los arreglos algebraicos antes descritos son casos especiales del álgebra matricial; ya que para ese entonces Caryley ya había definido las operaciones básicas entre escalares y matrices además de determinar la inversa de una matriz invertible. Dando a este la consideración del padre del álgebra matricial.

2.1.2. Contexto histórico de la luz

La primera explicación de la noción de ver se da por primera vez en la recopilación de las historias hecha por Homero 800 a.C., permitiendo que se pudiera dar una explicación filosófica del sentido de la vista y plantear un primer modelo de la luz.

Desde esta primera visión de la luz se define a ésta por parte de efluvios de fuego como un chorro de partículas viajando a velocidad constante, dando paso a la primera visión corpuscular de la luz. Demócrito creía que estas partículas presentan diferentes formas y se agrupaban para formar así los colores, mientras para Platón estas eran tetraedros macizos

de diferentes tamaños, y velocidades de esta forma se formaban los colores mientras, que para Aristóteles en cambio la luz era percibida como un flujo.

Euclides define la visión con un cono de luz formado desde el ojo al objeto visto; esta teoría se explicaba en 7 postulados:

- Los rayos rectilíneos que provienen del ojo divergen indefinidamente.
- Que la figura contenida por el conjunto de rayos visuales es un cono cuyo vértice está en el ojo, y la base en la superficie del objeto visto.
- Se ven aquellas cosas sobre las que caen los rayos visuales, y las cosas sobre las que no caen los rayos visuales.
- Las cosas vistas desde ángulos extraños parecen más grandes, y las que son vistas con ángulos más pequeños se ven más pequeñas y las que son vistas bajo ángulos iguales son se ven iguales.
- Las cosas vistas por ángulos elevados se ven más altas, y las cosas vistas con ángulos depresión parecen más bajas.
- Las cosas vistas por rayos más a la izquierda parecen más a esa ubicación, y las cosas vistas por rayos a la derecha se ven más a la derecha.
- Los objetos que se observan con un mayor Angulo de elevación se ven más claros

A pesar que Euclides no definió la naturaleza de dichos rayos visuales, utilizando los principios de la geometría, discute los efectos de la perspectiva y el redondeo de las cosas vistas a distancia.

Herón de Alejandría, quien creía en la teoría de la extramisión de Euclides, amplia los principios de la óptica geométrica para considerar el estudio de la reflexión de la luz en dos superficies lisas, postula la ley de la reflexión basado en el principio de la distancia mínima, concluyendo que la luz de un punto A a un punto B sigue el camino más corto, de esta forma demuestra que la luz cuando se refleja sobre una superficie lisa el ángulo de incidencia θ_i es igual al ángulo de reflexión θ_r. Así establece que la imagen que se genera se encuentra a la misma distancia del objeto, 1500 años más tarde este principio sería reemplazado por el principio de tiempo mínimo de Fermat, para derivar la ley de la refracción.

En la era griego-egipcia, Claudio Ptolomeo, fue conocido por defender el modelo geocéntrico del movimiento de los planetas, lo que lo convirtió en una de las figuras más influyentes en óptica para la era, dicho modelo permanece por casi 1400 años hasta ser reemplazado por un modelo heliocéntrico; este por medio del trabajo de Nicolás Copérnico.

En los experimentos que Ptolomeo llevó a cabo, concluyó que en la luz que se propaga de un medio a otro, la relación existente entre ángulo de incidencia y de transmisión era constante y depende de las características de los medios. De esta forma es que se deriva la aproximación paraxial.

Durante la edad media la óptica islámica y occidental, tuvo un gran atributo por Al-Kindi, quien siguió las tradiciones de Euclides, que posteriormente fueron llevadas a cabo por Ptolomeo y otros, en las cuales utilizaron construcciones geométricas para explicar fenómenos, como la visión, el reflejo, la refracción y las sombras. Mientras la rectitud de un rayo visual era para Euclides un axioma, Al-Kindi al considerar las sombras generadas por diferentes

objetos opacos, modelo la geometría del cono visual, rechazando la discreción de los rayos de Euclides, y reemplazándolo con un cono de haces continuos de radiación, similar a Ptolomeo. Estos trabajos fueron continuados en el siglo X por Al-Razi y Al-Farbi quienes objetaron la teoría de la extramisión de la luz.

La ley de refracción de Snell, es una ley que relaciona la propagación de la luz entre dos medios con diferentes índices de refracción donde el índice de refracción de un medio, es inversamente proporcional a la velocidad de la luz en ese medio, estableciendo una relación entre la velocidad de la luz y el medio mismo por donde esta está pasando. Por lo tanto la ley de refracción constituye la base para comprender la curvatura del rayo de luz en varios tipos de lentes. Willebrord Slellius, por medio de métodos trigonométricos derivó la ley de refracción, lo que le dio el mérito de su descubrimiento, sin embargo 600 años antes durante la *edad de oro islámica-Bagdad* y gracias a los grandes avances de un científico conocido como Abu Sad Al Alla Ibn Sahl. Este se destacó en óptica, escribiendo un tratado donde presentaba las ideas sobre espejos y lentes, en el cual se discuten las propiedades de enfoque de espejos parabólicos y elípticos, además presentando un análisis de cómo las lentes de vidrio hiperbólico se doblan y enfocan la luz, esto como un lema al explicar cómo la luz es enfocada mediante una lente hiperbólica plano convexa, mostrando de esta forma un argumento geométrico basado en la ley de refracción del seno.

Alhazen, padre de la óptica moderna.

Abu Ali al-Hasan ibn al- Hasan ibn al-Haytham (965–1040), fue el primer físico en seguir el método científico, la observación sistemática de los fenómenos físicos y su relación con la teoría. Una de sus contribuciones más importantes fue su libro de óptica, siendo este el primer tratamiento integral de la óptica.

Alhazen demostró que la luz no se originaba del ojo haciendo la teoría de Euclides, Ptolomeo y Heron incorrecta, mostrando que los rayos luminosos se originaba en las fuentes de luz lo hizo llevando a cabo un experimento en una habitación oscura, en donde la luz era enviada a través de un agujero por dos linternas sostenidas a diferentes alturas fuera de la habitación; esto le permitió observar dos puntos en la pared, los cuales corresponden a los rayos de luz que se originan en cada linterna que pasaba a través del agujero hacia la pared; concluyendo así que la luz no emana del ojo humano, sino que es emitida por objetos como linternas y viaja desde estos objetos en línea recta. Inspirado en estos experimentos Alhazen inventó la primera cámara estenopeica, la misma que Kepler usó y llamó cámara oscura en el siglo XVII, y explicó por qué la imagen de una cámara estenopeica estaba al revés.

Mostró que el aumento de un lente se debe a su curvatura o refracción de los rayos de luz en el límite entre el vidrio y el aire, lo que le permitió concluir que el aumento toma lugar en la superficie de la lente y no en su interior.

Uno de sus libros de óptica está basado en problemas de reflexión de espejos esféricos y parabólicos, contiene también una discusión sobre lo que hoy se conoce como el problema de Alhazen. El problema inicialmente fue formulado por Ptolomeo en el año 150 d.C. Dibuja líneas desde dos puntos en el plano de un círculo de manera que se encuentren en un punto de la circunferencia, formando ángulos iguales con la normal en ese punto. Este problema es equivalente al problema de la mesa de billar. El interés del físico por este problema, surgió cuando se enviaba la luz desde una fuente hacia un espejo esférico, y encontrar el punto en el espejo donde la luz se refleja en el ojo del observador. El problema fue resuelto por Alhazen de

manera geométrica con la ayuda de una hipérbola que cruzaba con círculo. Durante casi mil años este problema estuvo sin resolver utilizando métodos algebraicos hasta que finalmente fue resuelto en 1997 por el matemático de Oxford Peter M. Neumann.

Revolución científica

La publicación en 1543 sobre las revoluciones de las esferas celestiales de Nicolás Copérnico marca el comienzo de la revolución científica, ya que propone un modelo heliocéntrico del sistema solar; un sistema en el que el sol se mantenía en reposo y todos los planetas giraban a su alrededor, reemplazando de esta manera el modelo geocéntrico de Ptolomeo, el cual se mantuvo durante mucho tiempo y postulaba que la tierra se encontraba en reposo. Sin el beneficio del conocimiento acerca de la ley gravitacional, era casi imposible creer como la tierra podría estar en movimiento alrededor del sol y seguir manteniendo la estabilidad de los objetos, incluidos los humanos en su superficie. Esta teoría fue tan grande, especialmente en la iglesia, que Copérnico no tuvo la posibilidad de publicar su teoría heliocéntrica sino hasta el final de su vida.

El alemán astrónomo, Johannes Kepler fue la figura más importante seguida de Copérnico, cuyas leyes sobre el movimiento planetario resultarían fundamentales para la ley de gravitación de Newton. Su interés en el tema tuvo origen luego de observar un eclipse solar por medio de una cámara oscura. Años atrás Tycho Brahe uno de los más grandes astrónomos para su época, había observado que el diámetro angular de la luna parecía ser mayor durante un eclipse solar cuando se observaba a través de una cámara estenopeica que de manera directa. Kepler entendió que esta anomalía no podía ser explicada sin tener total conocimiento de los instrumentos ópticos, en este caso la cámara oscura. Señala que el diámetro finito del agujero de alfiler debería ser el responsable de dicha anomalía, y descubrió su solución por medio de una técnica experimental, en el que estiró un hilo a través de una abertura desde una fuente luminosa simulada hasta la superficie en que se formó la imagen. Trazo la imagen proyectada por cada punto del cuerpo luminoso, lo que le permitió observar la geometría de la radiación en términos tridimensionales. De esta manera logró formular la teoría de la radiación a través de aberturas basada en la propagación rectilínea de los rayos de luz. Fuera de esto en 1601, Kepler señaló que el ojo posee una apertura la cual debe ser tratada de la misma manera que la apertura en una cámara estenopeica. Kepler publicó su teoría de la visión en 1604.

El deseo de comprender la visión como principal motivación para estudiar la naturaleza de la luz llegó hasta Kepler pues el filósofo y matemático francés René Descarte fue el primero en fijar su atención en la naturaleza intrínseca de la luz y las leyes de la óptica, las contribuciones matemáticas de Descartes incluyeron una conexión entre geometría y álgebra, lo que permitió la resolución de problemas geométricos usando ecuaciones algebraicas, promoviendo también la contabilidad de los fenómenos físicos mediante explicaciones mecánicas. En su libro Dioptrics, publicado en 1637, trata temas relacionados con la naturaleza de la luz y las leyes de la óptica, compara la luz con un plano que le permite a una persona ciega discernir su entorno por medio del tacto.

Descartes por medio de una analogía que realizó con una pelota de tenis, derivo las leyes de la reflexión y refracción de la luz. El mérito del descubrimiento de la ley de refracción se le da a Snellius quien en 1621 la derivó por medio de métodos trigonométricos. Sin embargo fue Descartes quien 16 años tras la muerte de Willebrord Snellius quien por primera vez dio

una referencia de la ley de Refracción en uno de sus ensayos denominado la Dióptrica

Pierret Fermat, al igual que Descartes, fue uno de los matemáticos franceses más grandes de la primera mitad del siglo XVII. Fermat, hizo una serie de contribuciones en lo que se conoce como geometría analítica, probabilidad y teoría de números. Es más conocido por el último teorema de Fermat (no hay tres enteros positivos a, b, c, que puedan satisfacer la relación $an + bn + cn$ para cualquier entero n mayor que 2) que conjeturó en 1621 pero el cual no fue probado sino hasta 1994.

La principal contribución que tuvo Fermat, en óptica, está relacionada con su derivación de la ley de Snell utilizando el principio del mínimo tiempo, así como Herón había derivado la ley de la reflexión sobre la base del principio de distancia mínima, 1400 años atrás. Fermat argumentó que los rayos de luz van desde un punto ubicado en una región, de la cual se propaga con una velocidad particular a un punto en otra región, donde se propaga con una velocidad diferente y seguiría un camino que toma el menor tiempo.

Gracias a las contribuciones de Isaac Newton, se sentaron las bases de la mecánica clásica, su ley de la gravitación, es un ejemplo de la naturaleza de la ley científica, es una ley que aplica a todos los objetos grandes y pequeños. Sus aportes en las matemáticas, especialmente su descubrimiento del cálculo con Leibniz, proporcionaron herramientas que serían vitales para casi todos los grandes descubrimientos venideros de la física y otras ramas de la ciencia, desempeñando un papel importante para la formación de la física de los siglos posteriores.

Sin embargo, Newton, aportó importantes experimentos en el campo de la óptica fue el primero en demostrar que las propiedades del color dependen de la luz, y no del medio como se creía. Por medio de experimentos demostró que la luz proveniente del sol constaba de todos los colores, un ejemplo es cuando la luz solar atraviesa un prisma, y de este se dispersa generando un arcoíris. Para Newton, el color rojo se curva menos en comparación al violeta; otro de sus grandes aportes a la óptica, fue su diseño de telescopio reflector. En su diseño a diferencia de los demás la luz entrante era reflejada por un espejo cóncavo sobre uno plano que refleja la luz al observador. Newton, hacía parte de los científicos que defendía la teoría corpuscular de la luz, para él, la luz está formada por corpúsculos extremadamente pequeños, mientras que la materia ordinaria está formada por corpúsculos más gruesos.

Cuando Newton, estaba exponiendo la naturaleza corpuscular de la luz, su contemporáneo Huygens, sugirió una representación ondulatoria de la luz; publicó sus resultados en 1690. El resultado obtenido por Olaus Romer, de que la velocidad de la luz es finita, fue esencial para su teoría ondulatoria, considero que las ondas de luz se propagan por medio del éter de la misma manera que las ondas de sonido se propagan a través del aire. Según Huygens, las ondas de luz, eran ondas longitudinales y no transversales como lo mostraron estudios posteriores realizados por Fresnel y Maxwell. Formuló un principio que hoy se conoce con su nombre "principio de Huygens" el cual describe la propagación de ondas como la interferencia de ondas secundarias que surgen de fuentes puntuales en el frente de onda existente. En la propagación, cada partícula de éter choca con todas las partículas periféricas, lo que genera que alrededor de cada una se forme una onda de la cual esa partícula es el núcleo.

A inicios del siglo XIX Newton seguía siendo uno de los más grandes científicos, motivo por el cual poco se atrevieron a desafiar su teoría corpuscular de la luz, pero en 1802 Thomas Young, demostró por medio de su experimento de la doble rendija que la luz es de naturaleza ondulatoria y lo explico con estas palabras en el curso de conferencias sobre filosofía natural y artes mecánicas (1807):

"... Cuando un rayo de luz homogénea incide sobre una pantalla en la que hay dos orificios o rendijas muy pequeñas, que pueden considerarse como centros de divergencia, de donde la luz se difracta en todas direcciones. En este caso, cuando los dos haces recién formados se reciben en una superficie colocada de modo que los intercepte, su luz se divide por franjas oscuras en porciones casi iguales, pero haciéndose más anchas a medida que la superficie está más alejada de las aberturas, de modo que subtienden ángulos casi iguales desde las aberturas en todas las distancias, y más anchos también en la misma proporción en que las aberturas están más cerca entre sí. La mitad de las dos porciones es siempre clara, y las franjas brillantes de cada lado están a tal distancia, que la luz que les llega desde una de las aberturas debe haber pasado por un espacio más largo que el que procede de la otra, por un intervalo que es igual a la amplitud de una, dos, tres o más de las supuestas ondulaciones, mientras que los espacios oscuros intermedios corresponden a una diferencia de media ondulación supuesta, de una y media, de dos y media, o más."[4]

Young logró relacionar el color con la longitud de onda y pudo calcular de manera aproximada las longitudes de onda de los siete colores reconocidos por Newton que componían la luz blanca. Su experimento de la doble rendija continúo desempeñando un papel importante para la comprensión de la naturaleza de la luz y la materia.

Su contemporáneo Agustín Jean Fresnel, defendió la naturaleza ondulatoria de la luz apoyándose en su trabajo sobre difracción, Fresnel inicio desarrollando experimentos con difracción. Noto que cuando la luz pasaba a través de un difractor, se podía observar una serie de bandas oscuras y brillantes detrás del difractor. Sin embargo, cuando bloqueó uno de los bordes del difractor, las bandas brillantes permanecieron solo en el lado que no había sido bloqueado. Esto le permitió concluir que las bandas brillantes en la sombra fueron producidas por la luz proveniente de ambos bordes y las bandas brillantes cuando uno de los dos bordes estaba bloqueado, eran del reflejo de la luz de un borde del difractor. Fresnel, logro desarrollar una teoría matemática para sus observaciones; dicha teoría fue basada en una teoría ondulatoria de la luz, y pudo predecir la posición de las líneas brillantes y oscuras, en función de donde las vibraciones estaban en fase y fuera de fase.

A pesar del éxito que alcanzó la teoría ondulatoria de la luz, las propiedades de la luz polarizada seguían argumentando a favor de la teoría corpuscular, pues nunca se había hecho una explicación a partir de la teoría ondulatoria. En 1817, Fresnel fue el primero en obtener lo que se conoce como luz polarizada circulante, sus resultados experimentales podrían ser explicados únicamente con la hipótesis de que la luz es una onda transversal y para 1821, publicó un artículo en el que afirmaba que la luz es una onda transversal.

Gracias al trabajo realizado por Michael Faraday se sabía que una tasa de cambio en el tiempo del campo magnético produce fuerza eléctrica. La idea entonces de Maxwell fue que si el cambio del campo eléctrico con respecto al tiempo generaba un campo magnético, lo que llevó a concluir que ambos campos estaban relacionados con el mismo fenómeno físico. A partir de esto agregó un término en la ley de Ampere, el cual corresponde a una tasa de cambio en el tiempo del campo eléctrico. Dicha adición, generó una ecuación de onda para una onda electromagnética que se propaga a la velocidad de la luz, $3 * 10^8 m/s$. La imagen surgida por la luz, fue por ende, la de las ondulaciones tanto de los campos eléctricos como de los campos magnéticos. En 1865 fueron publicados sus resultados, y se demostró que las ondas de la luz eran transversales, dicha descripción de la luz como onda electromagnética fue demostrada de manera experimental por el científico Heinrich Hertz en 1888.

Luz en el siglo xx

En 1900 Lord Kelvin para un discurso realizado a la Asociación Británica para el avance de la ciencia afirmó "No hay nada nuevo por descubrir en la física ahora. Todo lo que queda es una medición cada vez más precisa". Para la época, las teorías de la mecánica clásica, la termodinámica, electromagnética y la luz estaban en su lugar lo que llevaba a creer que las leyes de la naturaleza estaban entendidas en su totalidad. Sin embargo, durante el siglo XX había dos fenómenos en la física, los cuales involucran la luz. El primero de ellos, era acerca de la catástrofe ultravioleta de Rayleigh-Jeans y la radiación de cuerpo negro; el segundo fenómeno era conocer el resultado nulo del experimento realizado por Michelson-Morley, el cual los llevo a la relatividad especial. Ambas teorías, la relatividad especial y la mecánica cuántica fueron desviaciones esenciales de la teoría clásica introducida por Newton.

En consecuencia a los experimentos y trabajos teóricos realizados por los científicos de la época, se lograron grandes avances dentro del estudio de la astronomía, la materia, la absorsortividad y emisividad de las superficies dando paso a entender desde primeros principios la verdadera naturaleza de la luz.

2.2. Modulo educativo

Para la fomentación del módulo educativo (**Anexo 1.**) se plantea la aplicación de diferentes actividades (véase **Anexo 2.**) en torno al cálculo multivariado, su relación con la física y planimetría.

Clases y trabajos

Se presentan las diferentes clases realizadas con los temas de interés a trabajar, esto se hace por medio de la plataforma de vídeo conferencias Meet y con ayuda de software como el tablero virtual Openboard y de la calculadora gráfica Geogebra. Los diferentes vídeos de las reuniones serán anexadas, con su correspondiente trabajo en el tablero virtual.

Propiedades de las matrices

Se lleva a cabo una exposición de las diferentes propiedades de una matriz, y sus principales características donde se muestran los axiomas matemáticos para este tipo de álgebra. Se presentan diferentes ejercicios trabajados en la conferencia.

Traspuesta e inversa de una matriz

Se presenta una explicación de la inversa de una matriz y su traspuesta, haciendo uso de los métodos de sistemas de ecuaciones, cofactores y eliminación de Gauss-Jordan, para lo cual se enlaza estas actividades a ejercicios prácticos como hallar el determinante de una matriz para la solución de sistemas acoplados de un movimiento armónico.

Vectores

Se lleva a cabo una presentación de álgebra vectorial vista desde las matrices, mostrando a su vez como estos están ligados entre sí por medio de matrices fila o columna, y explicando sus

propiedades y las características de los vectores unitarios, y trabajando diferentes ejercicios prácticos, donde se hallaran la dirección magnitud y sentido desde el álgebra matricial.

Funciones de dos variables

Se estipula que son las funciones de dos variables partiendo de las trabajadas por una sola variable, explicando sus diferentes características y maneras de representación. Se parte del entendimiento de que es una función de una sola variable, se presentan estas relaciones matemáticas y se muestra como es el tratamiento de estas bajo sus diferentes representaciones como tablas gráficas y fórmulas matemáticas.

Curvas de nivel

Se explica que son las curvas de nivel sus diferentes características, como estas se ven representadas en el plano **x**, **y**. Lo que nos representan matemáticamente, ayudando a entender la velocidad de crecimiento de una función de dos variables y su comportamiento en la gráfica. Se muestra como se grafican y su importancia en las diferentes ramas de la ciencia, mediante un vídeo donde se presenta una aplicación para mirar la temperatura de la superficie de una sopa.

Curvas de nivel aplicado a la topografía en levantamiento de suelos

Se presentan diferentes superficies reales donde se analizan sus trazas o perfiles mediante el uso de la calculadora grafica GeoGebra para el grafico de estas, y como estos conceptos nos sirven para poder graficar la superficie y como las curvas de nivel nos dan una idea de la inclinación de la superficie a estudiar en un terreno.

Cónicas

Se lleva a cabo una explicación general de una cónica, cuáles son las cónicas degeneradas, y su ecuación general, además de las cónicas principales a estudiar cómo son sus ecuaciones y su dependencia de esta ecuación general.

Superficies cuádricas

Se exponen que son las superficies cuádricas, sus diferentes representaciones desde el plano, la ecuación que las describe, esto con ayuda del software Geogebra. Se presentan sus diferentes trazas, además de las curvas de nivel que las describe, mostrando que estas con necesarias para un análisis más profundo de las superficies a estudiar, por su clara dependencia a las ecuaciones de las cónicas.

Derivadas parciales en el análisis de las curvas de nivel

Se explica la definición matemática de una derivada y se trabaja bajo las derivadas parciales mostrando la dependencia de la misma a la variable explicita a estudiar, además de su importancia a la hora de hacer un análisis dentro de una función de dos variables, ya que permite estudiar de manera individual el comportamiento de una variable en una función

de múltiples variables. Esto con ayuda de la explicación de la formulación de la ecuación de onda, por medio de osciladores acoplados.

Aplicaciones en topografía de levantamiento de suelos

Se presentan diferentes aplicaciones del álgebra matricial y de las curvas de nivel en el análisis de terrenos por medio de imágenes de superficies relés (véase **Anexo 2.** mediante la planimetría.

Aplicación en ondas y electromagnetismo

Se muestra como es el uso de las matrices en el estudio de los modos normales de oscilación de un sistema acoplado de dos masas por cuerdas y por resortes dejando como actividad a desarrollar el sistema acoplado 3x3. Se expone la utilidad del análisis de las curvas de nivel en los estudios del campo en electromagnetismo.

2.3. Guías didácticas enfocadas en la enseñanza de las vibraciones y ondas

Para la elaboración de las guías de trabajo (véase **Anexo 3.**) se tenía en cuenta el tema que los estudiantes iban a trabajar durante la clase, con el fin de que los alumnos tuviesen una noción de los conceptos que el profesor iba a desarrollar. Para constatar de que tenían claridad sobre esto, las guías venían acompañadas de ejercicios tanto prácticos como conceptuales, dichas guías se basan en libros como Sears Zemansky y Por amor a la física. Dichas guías explicaban el tema de manera más que matemática, conceptual, con el fin de facilitar a los estudiantes la comprensión de los temas que el profesor iba a desarrollar como:

Movimiento ondulatorio

Se realizó un resumen del concepto general de onda, principales características como longitud de onda, periodo, frecuencia, tipos de onda y se culminó con preguntas conceptuales.

Ecuación de onda

Se introduce el concepto de lo que son las ondas unidimensionales y se explica el concepto de función de onda, se realizó una contextualización de manera histórica de la ecuación diferencial de onda, donde se mencionan las principales ecuaciones matemáticas de una onda unidireccional basado en un ejemplo.

Movimiento amortiguado

Esta guía de trabajo inicia con una explicación de manera general de lo que es el movimiento armónico simple, amortiguado y forzado. Luego de resumir cada uno de los tres conceptos anteriormente mencionados, se centra en lo que es el movimiento amortiguado y su principal característica es decir las fuerzas disipativas, fuera de esto se muestran los cambios que tiene dicho oscilador con respecto al armónico simple, y a partir de la ecuación de Newton se muestra la ecuación diferencial del movimiento armónico amortiguado.

Finalmente se mencionan los tres movimientos amortiguados (sub-amortiguado, sobre-amortiguado y críticamente amortiguados) y se concluye con ejercicios propuestos.

Movimiento oscilatorio amortiguado

Para esta guía de trabajo se hace un breve resumen de la guía anterior con ejemplos más específicos y de esta manera facilitarle al estudiante la realización de los ejercicios aquí propuestos

Ondas estacionarias

La guía inicia con el concepto de lo que es una onda estacionaria, se establecen características como nodos y antinodos explicando sus definiciones, fuera de esto se muestra la función de onda de manera matemática y por último se señalan dos aplicaciones: la primera de estas es la física de los vientos en donde se realiza de manera general la descripción de las ondas estacionarias tanto en tubos cerrados como abiertos y la segunda en el modelo mecano cuántico del átomo mostrando la relación existente entre ondas estacionarias y electrones. Finalmente se establecen ejercicios conceptuales y matemáticos.

Ondas estacionarias en cuerdas (presentación ejercicio de movimiento armónico en una cuerda)

Esta guía está compuesta por un ejercicio de movimiento armónico en una cuerda ya resuelto, este como modo de ejemplo de los ejercicios que se propusieron de ondas estacionarias.

Naturaleza de la luz

Se inicia mencionando la naturaleza dual de la luz, es decir que esta se comporta tanto de manera corpuscular como ondulatoria, a partir de esto se hace referencia a conceptos como la difracción, la reflexión, la refracción, la interferencia y el principio de Huygens. También se muestran aplicaciones del espectro electromagnético en la espectroscopia astronómica. Otras de las aplicaciones mencionadas en la guía es la de establecer la velocidad de la luz de manera experimentar a partir de propiedades como la reflexión, la polarización y el ángulo de fase.

Ejercicios de dinámica, ejercicios de cinemática, ejercicios de conversión de medidas

Estas tres últimas guías tienen como objetivo evidenciar la claridad que los estudiantes tienen frente a la mecánica, para ello se muestra en cada una ejercicios resueltos paso a paso (véase **Anexo 4.**) con el fin de guiar y ayudar al alumno a recordar cada uno de los temas y finalmente se concluyen con ejercicios propuestos para que los alumnos desarrollen.

3. Análisis de resultados

1. Teniendo en cuenta las circunstancias que se presentaron durante el desarrollo de la pasantía (paros-pandemia), nos vimos en la obligación de replantear y modificar los objetivos específicos de acuerdo a las necesidades tanto del estudiante como del docente, ya que se priorizaron las actividades virtuales y por tanto se requirió de más material de apoyo para los estudiantes. En el caso del diseño de actividades didácticas que vinculan la física mecánica clásica con las energías alternativas, se decidió realizar el cambio en guías de trabajo enfocadas al curso de vibraciones y ondas; las cuales tenían como finalidad facilitar la comprensión de los temas que se iban a desarrollar durante la clase. Para las guías enfocadas a la nanotecnología, se cambió al diseño de un módulo educativo enfocado en el álgebra lineal y la aplicación de este en la física y planimetría.

2. Para la realización de las guías, se tuvo en cuenta las referencias de los libros que el profesor estaba manejando y de este modo encaminar al estudiante.

3. Durante el desarrollo de algunas guías se tuvo que realizar pequeños ajustes, ya que estas tenían lenguaje muy técnico y no les facilitaba a los y las estudiantes una comprensión en su totalidad, motivo por el cual se decidió enfocar las guías de manera conceptual y no matemática, sin embargo en varias de estas al momento de incluir su parte matemática se realizó una explicación de la misma. Por otro lado se realizó una ayuda de manera virtual a los estudiantes que se comunicaban directamente con nosotros por vía WhatsApp.

4. Por otro lado se desarrolló un módulo educativo donde se buscaba mostrar aplicaciones del algebra lineal en la planimetría, movimiento armónico simple y electromagnetismo, y de esta manera facilitar la formulación matemática del álgebra lineal desde sus aplicaciones.

5. Durante el desarrollo del módulo se presentaron situaciones asociadas a los conocimientos previos del estudiante ya que en situaciones específicas no se tenía claro el formulamiento matemático necesario para entender el tema, por lo que se debía hacer una previa contextualización, de igual forma se presentaron problemas de conexión en algunas clases.

6. Por medio de las aplicaciones se pudo llegar a dar una mejor explicación de las curvas de nivel, teniendo en cuenta el manejo de ellas en diferentes softwares que podían generar curvas reales de una superficie y desde ahí poder explicar tanto este concepto, como el concepto de traza.

7. Dichas guías de trabajo facilitó tanto al estudiante como al profesor llevar a cabo la dinámica de la clase durante el semestre, pues los estudiantes debían leer de manera previa a las clases y esto les permitía llegar a ella con una noción de lo que se llevaría a cabo durante la misma. Fuera de esto las guías estaban acompañadas de ejemplos y aplicaciones que le ayudarán al estudiante a entender los diferentes conceptos.

8. El módulo educativo permite el repaso y aclaración de conceptos como **matriz**, **determinante**, **Axioma**, **traspuesta**,**inversa**, teniendo en cuenta que los estudiantes

del tecnólogia en topografia, aún no manejan de forma clara estos conceptos, lo cual por medio de ejercicios, videos de las clases y además de los trabajos de investigación que debían entregar, se podía llegar a profundizar sobre los temas vistos en las clases virtuales, y dejar de forma más clara dichos conceptos.

4. Evaluación y cumplimiento de los objetivos de la pasantía

Debido al contexto actual a nivel nacional y mundial, es importante recalcar que las tecnologías de la información son útiles, para el desarrollo de un buen ejercicio académico.

Es por eso que a pesar que los objetivos específicos debieron sufrir una transición, nunca se perdió el objetivo general, puesto que al realizar actividades didácticas como lo fueron el modulo y las guías para las clases, se proporciona una ayuda al componente asincrónico de los cursos. Cabe destacar que en el desarrollo de las actividades propuestas por los pasantes, se mostraron diferentes experiencias que fortalecen la retroalimentación en el aula, y es por esta razón que se da cumplimiento a los objetivos establecidos en el trabajo. Ya que como se enmarco en los resultados esperados de esta forma se mitiga la falta de monitores para las diversas clases en la Facultad de Medio Ambiente y Recursos Naturales de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas

5. Conclusiones y recomendaciones

El desarrollo de guías le permite a los estudiantes llegar a clase con los conocimientos previos de los temas a tratar durante ésta, además facilita la labor del docente.

Al momento de una virtualidad total, actividades como las desarrolladas en el módulo o en las guías facilitan un entendimiento mejor de los temas a trabajar en las clases.

Teniendo en cuenta las condiciones en que se desarrolla la pasantía, se hace evidente la importancia del manejo de plataformas virtuales y de la capacitación tanto de estudiantes como docentes en estos temas.

Tener actividades previstas es importante ya que ayuden a los docentes de la facultad de medio ambiente y recursos naturales, en la explicación de los temas relacionados a sus clases.

La participación de pasantes de facultades diferentes a la ambiental, en monitorias para los cursos, establece una gran ayuda para los docentes de Medio Ambiente y Recursos Naturales, no solo, en la realización de material didáctico para cada una de las clases, sino, en el desarrollo del trabajo interdisciplinario, donde los aportes teóricos de otras ciencias ayudan a entender y resolver problemas propios de dicha facultad.

Referencias

[1] Luzardo, D., y Pena, A. J. (2006). Historia delAlgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. Divulgaciones Matematicas, 14(2), 153-170.

[2] Puig, L. (1998). Componentes de una historia del algebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. Investigaciones en matematica educativa II. Universitat de Valencia. Detartament de Didactica de la matematica, 109-131.

[3] Grossman, S. I. (2008). Algebra lineal. McGraw Hill Educacion.

[4] Zubairy M.S. (2016) A Very Brief History of Light. In: Al-Amri M., El-Gomati M., Zubairy M. (eds) Optics in Our Time. Springer, Cham. $https://doi.org/10{,}1007/978-3-319-31903-2_1$

[5] García Gómez, R. Creación e implementación de una unidad didáctica sobre la enseñanza del movimiento armónico simple a estudiantes de grado decimo/Creation and implementation of a didactic unit on the teaching of simple harmonic motion tenth grade students. Facultad de Ciencias.

[6] Orozco Muñoz, J. M. (2014). Faculty of Environment and Natural Resources 1994-2014. Background and historical context of its creation. Colombia forestal, 17(2), 133–134. https://doi.org/10.14483/2256201X.8035

6. Anexos

Para el presente informe se anexan las guías de trabajo, el modulo educativo, los trabajos realizados por los alumnos del curso de cálculo multivariado como también las diferentes actividades que se presentó a lo largo de la pasantía incluidas en una carpeta en Google Drive para facilidad de los estudiantes.

Anexo 1. Modulo educativo

Mapa de contenido

Contenido	
Introducción	
Objetivos	
conocimientos previos	
Material practico	**Clases y trabajos**
Resumen de contenido	Propiedades de las matrices
	Transpuesta e inversa de una matriz
	Vectores
	Funciones de dos variables
	Curvas de nivel
	Curvas de nivel aplicadas a la topografía de levantamiento de suelos
	Cónicas
	Superficies cuádricas
	Derivadas parciales en el análisis de curvas de nivel
	Aplicaciones en topografía en levantamiento de suelos
	Aplicación en ondas y electromagnetismo
Evaluación	

Introducción

Esta historia se inicia en el antiguo Egipto y Babilonia, donde se resolvían ecuaciones de la forma ax=b y $x^2 + y^2 = z^2$, las cuales contenían múltiples incógnitas y eran resueltas con los mismos métodos o procedimientos que hoy día nos enseñan en la escuela.

Matemáticos como Herón y Diofante siguieron con las tradiciones del antiguo Egipto y Babilonia, sin embargo, el libro **Las aritméticas de Diofante** tiene un contenido un poco más complejo, en donde introduce múltiples soluciones a ecuaciones indeterminadas. Este conocimiento basado en la solución de ecuaciones tuvo una aceptación importante en el mundo Islámico, y allí fue denominada **la ciencia de reducción y equilibrio** esto, debido a que al-bar significa reducción, y es la raíz de la palabra álgebra. Durante el siglo *IX*, Jwarizmi en su libro de álgebra, mostró la teoría fundamental de ecuaciones, en donde incluyo tanto ejemplos como demostraciones. Finalizando este siglo, Abu Kamil demostró las leyes e identidades del álgebra.

En la antigüedad, las expresiones algebraicas eran escritas de manera abreviada, pero para la edad media matemáticos árabes escribían infinidad de potencias de la incógnita x, desarrollando de esta manera el álgebra de los polinomios, en donde se incluía el producto, división polinómica y la radicación. Por otro lado, el matemático y astrónomo Omar Khayyam demostró cómo se podían expresar las raíces de ecuaciones cúbicas por medio de la intersección de secciones cónicas, nacidas del análisis de ciertos planos de un hiperboloide elíptico.

A inicios del siglo *XVI*, los matemáticos Scipione del Ferro y Gerolamo Cardano, llegaron a la solución de ecuaciones cúbicas, posterior a esto uno de sus alumnos logró encontrar la solución a ecuaciones de cuarto orden y debido a esto varios matemáticos quisieron hallar la solución a ecuaciones de grados superiores, pero fue hasta principios del siglo XIX, que Niels Abel y Galois, demostraron que no existía dicha solución. Durante el S. *XVI* se llevó a cabo la introducción de símbolos para representar las incógnitas, operaciones y potencializaciones algebraicas, lo que le permitió a Descartes descubrir lo que conocemos como geometría analítica, la cual consiste en la reducción de problemas de forma geométrica a problemas de forma algebraica. Fuera de esto introdujo la regla de los signos para obtener el número de las raíces tanto positivas como negativas de una ecuación. Dos siglos después de dichas aportaciones a las matemáticas, Friedrich Gauss demostró la existencia de al menos una raíz negativa dentro de las ecuaciones polinómicas, esto quiere decir que tenían una raíz que pertenecía al conjunto de los números complejos. En este periodo, el estudio del álgebra estaba entrando en una etapa moderna, y su propósito empezó a ser tanto las ecuaciones polinómicas como la estructura de sistemas matemáticos abstractos, en donde los axiomas se encontraban cimentados en el comportamiento de objetos matemáticos.

Los grupos y las cuaternas son claros ejemplos de los sistemas mencionados anteriormente, los cuales comparten propiedades de los sistemas numéricos. El primero de estos dos ejemplos inició como un sistema de perturbaciones y combinaciones de los radicales de polinomios, las cuales se fueron transformando y de este modo convirtiéndose en uno de los conceptos más relevantes de las matemáticas para el siglo *XIX*. En contraste William Rowan Hamilton al hallar las cuaternas fue pionero en el desarrollo de la aritmética de los complejos con ayuda de esta herramienta matemática ya antes mencionada.

$$z = a + ib \rightarrow Complejos$$

$$H = a + bi + cj + dk \rightarrow Cuaternas$$

Donde para los cuaternarios, i,j,k son componentes de forma compleja y cumplen con la propiedad que al multiplicarse todas estas entre si el resultado es menos uno (-1).

Posterior al trabajo y descubrimiento del matemático y astrónomo William Hamilton, el matemático Hermann Grassmann inició investigaciones en los vectores, dando así a un nuevo tratamiento de las leyes de movimiento de newton, pero fue el físico Gibbs quien halló la importancia del uso del álgebra vectorial dentro de los estudios de la física.

Con el fin de dar uso de las diferentes herramientas del álgebra lineal, para el estudio de la planimetría, al aplicar matrices y derivadas parciales en las curvas de nivel en el estudio de imágenes satélitales.

En la topografía de levantamiento de suelos, se ha construido un módulo para educación superior donde se definen conceptos claves y un mapa con los temas que se llevarán a cabo, con el propósito de establecer nuevas estrategias para la siituación que se presenta a nivel mundial por la pandemia del covid-19.

Objetivos

Objetivo General

- Usar y aplicar el álgebra lineal en la planimetria con énfasis en topografía de levantamiento de suelos, en el movimiento armónico, y en el electromagnetismo.

Objetivos específicos

- Usar el álgebra lineal en el procesamiento de imágenes satélitales y en el movimiento armónico acoplado.
- Aplicar las derivadas parciales en el análisis de las curvas de nivel en topografía en el levantamiento de suelos y en el análisis del campo eléctrico.

Conocimientos previos

- Álgebra
- Calculo diferencial
- Calculo integral

Material practico

Se proponen diferentes ejercicios de consulta donde se lleve a cabo un estudio de:

- Matrices: en este se trabajan las propiedades y una aplicación de las mismas en el campo de estudio de la planimetria.
- Inversa de una matriz: se presenta como se haya y para que funciona la inversa de una matriz.
- Eliminación de gauss jordan: se muestra el método con ejemplos y las diferentes utilidades del mismo desde la solución de sistemas de ecuaciones hasta en la determinación de la inversa de una matriz.
- Cónicas se presenta que es las cónicas de donde surgen y sus diferentes representaciones desde el plano hasta su forma canónica.

Esto por medio de una consulta llevada por el estudiante donde muestre una aplicación de las mismas en la planimetria y se anexa al trabajo de evaluación presentado.

Resumen del contenido

Clases y trabajos

En este se presentan las diferentes clases realizadas por los temas de interés a trabajar, esto se hace por medio de la plataforma de vídeo conferencias Meet y con ayuda de software como el tablero virtual Openboard y de la calculadora gráfica Geogebra. Los diferentes vídeos de las reuniones serán anexadas, con su correspondiente trabajo en el tablero virtual.

Propiedades de las matrices

Se lleva acabo una exposición de las diferentes propiedades de una matriz y sus principales características donde se muestran los axiomas matemáticos para este tipo de álgebra, se presentan diferentes ejercicios trabajados en la conferencia.

Traspuesta e inversa de una matriz

Se presenta una explicación de la inversa de una matriz y su traspuesta, haciendo uso de los métodos de sistemas de ecuaciones, cofactores y eliminación de gauss-Jordan, para lo cual se enlaza estas actividades a ejercicios prácticos como hallar el determinante de una matriz para la solución de sistemas acoplados de un movimiento armónico.

Vectores

Se lleva a cabo una presentación de álgebra vectorial vista desde las matrices, mostrando a su vez como estos están ligados entre si por medio de matrices fila o columna, y explicando sus propiedades y las características de los vectores unitarios, y trabajando diferentes ejercicios prácticos, donde se hallaran la dirección magnitud y sentido desde el álgebra matricial.

Funciones de dos variables

Se estipulan que son las funciones de dos variables partiendo de las trabajadas por una sola variables, explicando sus diferentes características y maneras de representación. Se parte del entendimiento de que es una función de una sola variable, se presentan estas relaciones matemáticas y se muestra como es el tratamiento de estas bajo sus diferentes representaciones como tablas gráficas y formulas matemáticas.

Curvas de nivel

Se explica que son las curvas de nivel sus diferentes características, como estas se ven representadas en el plano **x** y **y** lo que nos representan matemáticamente, ayudando a entender la velocidad de crecimiento de una función de dos variables y su comportamiento en la gráfica. Se muestra como se grafican y su importancia en las diferentes ramas de la ciencia. se muestra un vídeo donde se presenta una aplicación para mirar la temperatura de la superficie de una sopa.

Curvas de nivel aplicadas a la topografía en levantamiento de suelos

Se presentan diferentes superficies reales donde se analizan sus trazas o perfiles y como estas nos sirven para poder graficar la superficie y como las curvas de nivel nos dan una idea de la inclinación de la superficie a estudiar en un terreno.

Cónicas

Se lleva a cabo una explicación general de una cónica, cuales son las cónicas degeneradas, y su ecuación general, ademas de las cónicas principales a estudiar como son sus ecuaciones y su dependencia de esta ecuación general.

Superficies cuadricas

Se exponen que son las superficies cuadricas, sus diferentes representaciones desde el plano, la ecuación que las describen, esto con ayuda del software Geogebra. Se presentan sus diferentes trazas, ademas de las curvas de nivel que las describen mostrando que estas con necesarias para un análisis mas profundo de las superficies a estudiar, por su clara dependencia a las ecuaciones de las cónicas.

Derivadas parciales en el análisis de las curvas de nivel

Se explica la definición matemática de una derivada y se trabaja bajo las derivadas parciales mostrando la dependencia de la misma a la variable explicita a estudiar, ademas de su importancia a la hora de hacer un análisis dentro de una función de dos variables, ya que permite estudiar de manera individual el comportamiento de una variable en una función de múltiples variables. Esto con ayuda de la explicación de la formulación de la ecuación de onda, por medio de n osciladores acoplados.

Aplicaciones en topografía de levantamiento de suelos

Se presentaran diferentes aplicaciones del álgebra matricial y de las curvas de nivel en el análisis de la topografía en levantamiento de suelos.

Aplicación en ondas y electromagnetismo

Se presenta como es el uso de las matrices en el estudio de los modos normales de oscilación de un sistema acoplado de dos masas por cuerdas y por resortes dejando como actividad a desarrollar el sistema acoplado 3x3. Se muestra la utilidad del análisis de las curvas de nivel en los estudios del campo en electromagnetismo.

Evaluación

Se realiza una evaluación oral a los estudiantes de lo visto en el módulo, donde cada uno exprese lo aprendido. Para ello se harán preguntas de carácter crítico sobre las diferentes aplicaciones del algebra lineal vistas en el aula, con el fin de que los estudiantes presenten argumentos que correspondan con los axiomas matemáticos del algebra lineal en las diferentes aplicaciones antes vistas.

Referencias

1 Luzardo, D., y Pena, A. J. (2006). Historia delAlgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. Divulgaciones Matemáticas, 14(2), 153-170.

2 Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. Investigaciones en matemática educativa II. Universitat de Valencia. Detartament de Didáctica de la matemática, 109-131.

3 Grossman, S. I. (2008). Álgebra lineal. McGraw Hill Educación.

En este link se encuentran los videos de las clases del módulo como también los diferentes trabajos de los estudiantes de modalidad especial del curso de cálculo multivariado. https://drive.google.com/drive/folders/1TuazsF30pi1DaEh29keZ32ooOwqwa30d?usp=sharing

Anexo 2. Guías ejemplo usadas en las clases de cálculo multivariado, e imágenes de las clases.

Sistemas acoplados con cuerdas

Se sujeta por sus extremos a dos soportes fijos una cuerda de longitud L y de masa despreciable. La tensión de la cuerda es T

1. Se sujeta una partícula de masa m a una distancia l del extremo de la cuerda, como está indicado en la **Figura 1.** Escribir la ecuación para las oscilaciones transversales pequeñas de m y hallar el periodo.

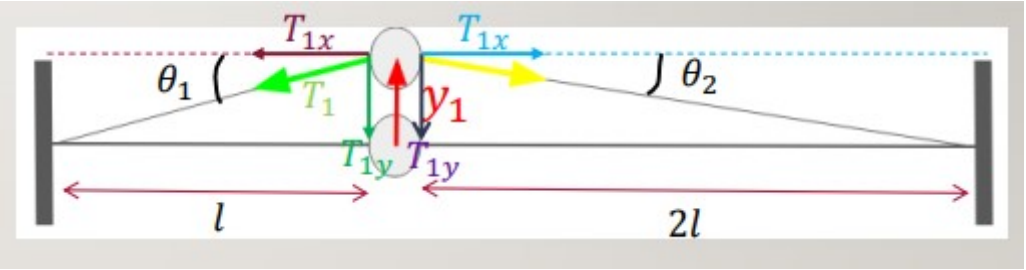


Figura 1. Masa sujeta a dos cuerdas de masa despreciable, una a una distancia de l y la otra a una de $2l$.

Se plantea el diagrama de cuerpo libre para el sistema.

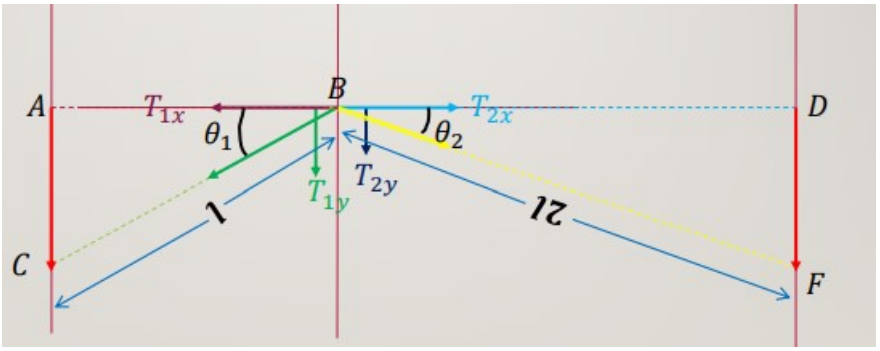


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre para la masa m, se representan los triángulos ABC y BDF para próximas aproximaciones, además se define $T_{1x} = T_1 cos\theta_1$, $T_{2x} = T_2 cos\theta_2$, $T_{1y} = T_1 sen\theta_1$ y $T_{2y} = T_2 sen\theta_2$.

Se hacen las respectivas sumatorias de fuerza en x, y.

Sumatoria de fuerzas en x

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}_1$$

Pero como $\ddot{x}_1 = 0$ entonces

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-T_{1x} + T_{2x} = 0$$

$$T_{2x} = T_{1x}$$

$$T_2 cos\theta_2 = T_1 cos\theta_1 \tag{1}$$

Sumatoria de fuerzas en y

$$\Sigma F_y = -m\ddot{y}_1$$

$$T_{1y} + T_{2y} = -m\ddot{y}_1$$

$$T_1 sen\theta_1 + T_2 sen\theta_2 = -m\ddot{y}_1 \tag{2}$$

Se hace aproximación paraxial. Esta se aplica para ángulos muy pequeños ósea $\theta << 1rad$ por lo tanto

$$sen\theta_1 \approx \theta_1; sen\theta_2 \approx \theta_2$$

$$cos\theta_1 = 1; cos\theta_2 = 1$$

Por lo tanto para los ángulos θ_1 y θ_2 tenemos las siguientes expresiones

$$\theta_1 = \frac{y_1}{l}; \theta_2 = \frac{y_1}{2l}$$

Aplicando las aproximación paraxial en (1)

$$T_2(1) = T_1(1)$$

$$T_2 = T_1 = T \tag{3}$$

Aplicando las aproximación paraxial en (2)

$$T_1\theta_1 + T_2\theta_2 = -m\ddot{y}_1$$

$$\frac{T}{l}y_1 + \frac{T}{2l}y_1 = -m\ddot{y}_1 \tag{4}$$

Si se organiza la expresión (4) para llegar a la ecuación de movimiento armonico

$$\frac{T}{l}y_1 + \frac{T}{2l}y_1 = -m\ddot{y}_1$$

Dividimos por m Sumamos las tenciones e igualamos (4) a cero y obtenemos

$$\frac{2T}{2lm}y_1 + \frac{T}{2lm}y_1 = -\ddot{y}_1$$

$$\ddot{y}_1 + \frac{3T}{2lm}y_1 = 0 \tag{5}$$

Donde $\omega_0^2 = 3T/2lm$ y esto se sabe al observar la relación de esta ecuación con la formula general para un movimiento armónic

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0$$

Para hallar el periodo se tiene que

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Por lo tanto, el periodo es

$$\tau = \frac{\frac{2\pi}{1}}{\frac{3T}{2lm}} = \frac{4l\pi}{3T}$$

$$\tau = \frac{4l\pi}{3T} \tag{6}$$

2. Se une una partícula de masa m a la cuerda como se ve en la **Figura 3.** Dividiéndola en tres segmentos iguales cada uno de ellos con tención T. Dibujar el aspecto de la cuerda y la posición de las masas de los dos modos normales separados de las oscilaciones transversales.

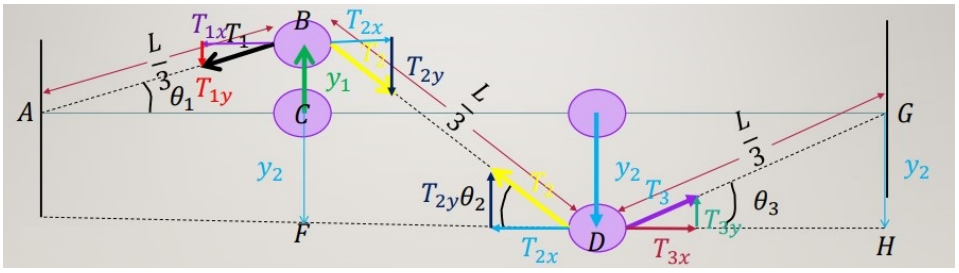


Figura 3. Sistema de dos masas acopladas por cuerdas, podemos observar los triángulos ABC,BDF y DHG para próximas aproximaciones, se define $T_{1x} = T_1 cos\theta_1$, $T_{1y} = T_1 sen_1$, $T_{2x} = T_2 cos\theta_2$, $T_{2y} = T_2 sen\theta_2$ y $T_{3x} = T_3 cos\theta_3$, $T_3 y = T_3 sen\theta_3$.

Se hacen las respectivas sumatorias de fuerza en x, y.

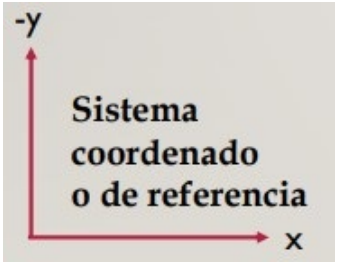


Figura 4. Sistema de referencia usado para el problema.

Sumatoria de fuerzas en x para la masa que se desplaza y_2

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}_2$$

Pero como $\ddot{x}_2 = 0$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$T_{3x} - T_{2x} = 0$$

$$T_{3x} = T_{2x}$$
$$T_3 cos\theta_3 = T_2 cos\theta_2 \tag{1}$$

Sumatoria de fuerzas en y para la masa que se desplaza y_2

$$\Sigma F_y = m\ddot{y}_2$$
$$-T_{2y} - T_{3y} = m\ddot{y}_2$$
$$-T_2 sen\theta_2 - T_3 sen\theta_3 = m\ddot{y}_2 \tag{2}$$

Sumatoria de fuerzas en x para la masa que se desplaza y_1

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}_1$$

Pero como $\ddot{x}_1 = 0$

$$\Sigma F_x = 0$$
$$T_{2x} - T_{1x} = 0$$
$$T_{2x} = T_{1x}$$
$$T_2 cos\theta_2 = T_1 cos\theta_1 \tag{3}$$

Sumatoria de fuerzas en y para la masa que se desplaza y_1

$$\Sigma F_y = -m\ddot{y}_1$$
$$T_{1y} + T_{2y} = -m\ddot{y}_1$$
$$T_1 sen\theta_1 + T_2 sen\theta_2 = -m\ddot{y}_1 \tag{4}$$

Se procede a realizar la aproximación paraxial

$$sen\theta_1 \approx \theta_1; sen\theta_2 \approx \theta_2; sen\theta_3 \approx \theta_3$$

$$cos\theta_1 \approx 1; cos\theta_2 \approx 1; cos\theta_3 \approx 1$$

Entonces para los ángulos θ_1, θ_2 y θ_3 tenemos las siguientes expresiones

$$\theta_1 = \frac{y_1}{\frac{L}{3}}; \theta_2 = \frac{y_2 + y_1}{\frac{L}{3}}; \theta_3 = \frac{y_2}{\frac{L}{3}}$$

$$\theta_1 = \frac{3}{L} y_1; \theta_2 = \frac{3}{L}(y_1 + y_2); \theta_3 = \frac{3}{L} y_2$$

Aplicando la aproximación paraxial a las expresiones (1), (2), (3), y (4) se obtiene

$$T_2 = T_1; T_3 = T_2$$

Por lo tanto

$$T_1 = T_2 = T_3 = T$$

$$\frac{3T}{L}y_1 + \frac{3T}{L}(y_2 + y_1) = -m\ddot{y}_1 \tag{5}$$

$$-\frac{3T}{L}(y_2 + y_1) - \frac{3T}{L}y_2 = m\ddot{y}_2 \tag{6}$$

Se plantea una solución armónica

$$y_1 = A_1 e^{i\omega t}; y_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{y}_1 = -A_1\omega^2 e^{i\omega t}; \ddot{y}_2 = -A_2\omega^2 e^{i\omega t}$$

Aplicando estas soluciones a (5)

$$\frac{3T}{L}A_1 e^{i\omega t} + \frac{3T}{L}(A_2 + A_1)e^{i\omega t} = mA_1\omega^2 e^{i\omega t}$$

Dividiendo la expresión por $me^{i\omega t}$ e igualando a cero

$$\frac{3T}{mL}A_1 + \frac{3T}{mL}(A_2 + A_1) - \omega^2 = 0$$

Realizando términos semejantes

$$\frac{3T}{mL}A_1 + \frac{3T}{mL}A_2 + \frac{3T}{mL}A_1 - \omega^2 A_1 = 0$$

$$(\frac{6T}{mL} - \omega^2)A_1 + \frac{3T}{mL}A_2 = 0 \tag{7}$$

Aplicando estas soluciones a (6)

$$-\frac{3T}{L}(A_2 + A_1)e^{i\omega t} - \frac{3T}{L}A_2 e^{i\omega t} = -mA_2\omega^2 e^{i\omega t}$$

Dividiendo la expresión por $-me^{i\omega t}$ e igualando a cero

$$\frac{3T}{mL}(A_2 + A_1) + \frac{3T}{mL}A_1 - A_2\omega^2$$

Realizando términos semejantes

$$\frac{3T}{mL}A_2 + \frac{3T}{mL}A_1 + \frac{3T}{mL}A_1 - \omega^2 A_2 = 0$$

$$\frac{3T}{L}A_1 + (\frac{6T}{mL} - \omega^2)A_2 = 0 \tag{8}$$

Retomando las ecuaciones (7) y (8)

$$(\frac{6T}{mL} - \omega^2)A_1 + \frac{3T}{mL}A_2 = 0$$

$$\frac{3T}{mL}A_1 + (\frac{6T}{mL} - \omega^2)A_2 = 0$$

Organizamos estos valores en la matriz, luego procedemos hallar el determinante

$$det\begin{bmatrix} (\frac{6T}{mL} - \omega^2) & \frac{3T}{mL} \\ \frac{3T}{mL} & (\frac{6T}{mL} - \omega^2) \end{bmatrix} = 0$$

El determinante de la matriz es

$$(\frac{6T}{mL} - \omega^2)^2 - (\frac{3T}{mL})^2 = 0$$

$$36(\frac{T}{mL})^2 - 12\frac{T}{mL}\omega^2 + \omega^4 - 9(\frac{T}{mL})^2 = 0$$

$$\omega^4 - 12\frac{T}{mL}\omega^2 + 27(\frac{T}{mL})^2 = 0$$

Ahora se deben calcular los valores propios, para ello haremos uso de la formula cuadrática

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 1$, $b = -12T/mL$ y $c = 27(T/mL)^2$; por lo tanto

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-(-12\frac{T}{mL}) \pm \sqrt{(-12\frac{T}{mL})^2 - 4(1)(27(\frac{T}{mL})^2)}}{2(1)}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{12\frac{T}{mL}}{2} \pm \sqrt{\frac{144}{4}(\frac{T}{mL})^2 - \frac{108}{4}(\frac{T}{mL})^2}$$

$$\omega_{1,2}^2 = 6\frac{T}{mL} \pm \sqrt{36(\frac{T}{mL})^2 - 27(\frac{T}{mL})^2}$$

$$\omega_{1,2}^2 = 6\frac{T}{mL} \pm \sqrt{9(\frac{T}{mL})^2}$$

$$\omega_{1,2}^2 = 6\frac{T}{mL} \pm 3\frac{T}{mL}$$

$$\omega_1^2 = 6\frac{T}{mL} + 3\frac{T}{mL} = 9\frac{T}{mL}$$

$$\omega_2^2 = 6\frac{T}{mL} - 3\frac{T}{mL} = 3\frac{T}{mL}$$

Por lo tanto, los valores propios de la ecuación son

$$\omega_1^2 = 9\frac{T}{mL}; \omega_2^2 = 3\frac{T}{mL} \tag{9}$$

Para poder hallar los modos normales se retomará la ecuación (7)

$$(\frac{6T}{mL} - \omega^2)A_1 + \frac{3T}{mL}A_2 = 0$$

Para $\omega_1^2 = 9T/mL$

$$(\frac{6T}{mL} - \frac{9T}{mL})A_1 + \frac{3T}{mL}A_2 = 0$$
$$(-3\frac{T}{mL})A_1 + 3\frac{T}{mL}A_2 = 0$$
$$(-3\frac{T}{mL})A_1 = -3\frac{T}{mL}A_2$$

Como se observa el primer modo normal que tenemos es

$$A_1 = A_2 \tag{10}$$

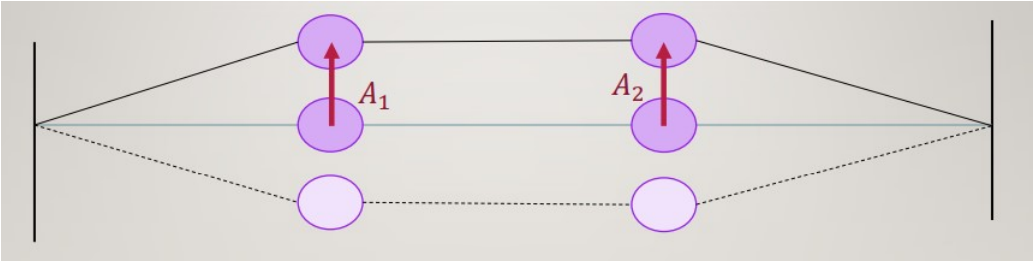


Figura 5. Representación pictórica del primer modo normal $A_1 = A_2$.

Para $\omega_2^2 = 3T/mL$

$$(\frac{6T}{mL} - \frac{3T}{mL})A_1 + \frac{3T}{mL}A_2 = 0$$
$$(\frac{3T}{mL})A_1 + \frac{3T}{mL}A_2 = 0$$
$$\frac{3T}{mL}A_1 = -\frac{3T}{mL}A_2$$
$$A_1 = -A_2 \tag{11}$$

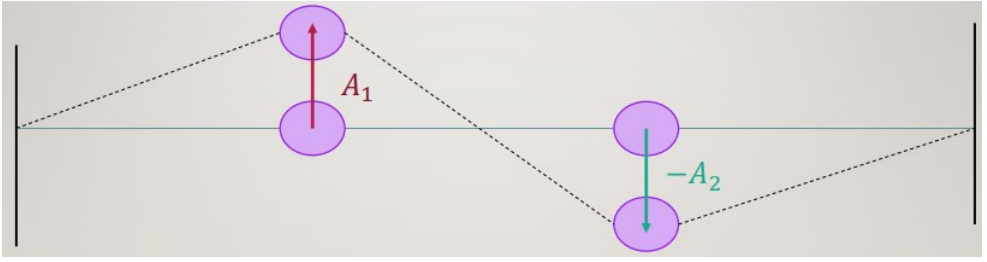


Figura 6. Representación pictórica del segundo modo normal $A_1 = -A_2$.

3. Calcular ω para el modo normal que tiene mayor frecuencia

   Recordando que omega está relacionado con la frecuencia

$$\omega = 2\pi f \tag{12}$$

   Por lo tanto, a mayor frecuencia ω tendremos un aumento en la frecuencia f por lo tanto el modo normal con mayor frecuencia es el de ω_1.

Ondas a partir de sistemas acoplados

Para la solución del siguiente sistema (**Figura 1.**) se debe tener en cuenta las ecuaciones de valores propios, cuya formulación consiste en:

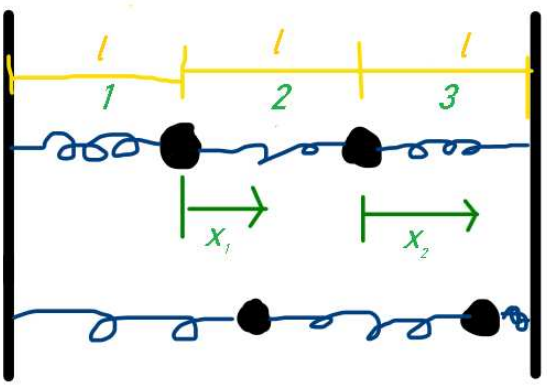


Figura 1. Representación pictórica de un sistema masa resorte acoplado de dos masas.

$$M\overrightarrow{A} = \omega^2 I\overrightarrow{A} \tag{1}$$

Donde ω^2 es el valor propio, $\overrightarrow{A}$ es el vector propio M es la matriz de las fuerzas del sistema r I es la matriz identidad.
Se tiene un sistema masa resorte acoplado como se muestra en el dibujo por dos masas iguales, donde las ecuaciones de movimiento o las fuerzas que actúan sobre el sistema vienen dadas por las siguientes ecuaciones.

Para la masa que se desplaza x_1

$$\Sigma F_y = 0 \tag{2}$$

$$\Sigma F_x = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = m\ddot{x_1} \tag{3}$$

Para la masa que se desplaza x_2

$$\Sigma F_y = 0 \tag{4}$$

$$\Sigma F_x = -k(x_2 - x_1) + kx_2 + = m\ddot{x_2} \tag{5}$$

Dividiendo por la masa las ecuaciones 3 y 5

$$-\frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) = \ddot{x_1} \tag{6}$$

$$-\frac{k}{m}(x_2 - x_1) + \frac{k}{m}x_2 + = \ddot{x_2} \tag{7}$$

Desarrollando la propiedad distributiva y organizando las ecuaciones 6 y 7 tenemos

$$-\frac{2k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2 = \ddot{x_1} \tag{8}$$

$$\frac{k}{m}x_1 - \frac{2k}{m}x_2 = \ddot{x_2} \tag{9}$$

Organizando esto en la matriz M tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} \end{pmatrix}$$

Ahora aplicando la definición dada por la ecuación (1) se tiene que para poder dar solución a esta ecuación de valores propios:

$$det(M - \omega^2 I) = 0$$

$$det(\begin{pmatrix} \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 0$$

Aplicando las propiedades de las matrices tenemos que:

$$det(\begin{pmatrix} \frac{-2k}{m} - \omega^2 & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante para esta matriz cuadrada 2x2 se tiene:

$$(\frac{-2k}{m} - \omega^2)^2 - (\frac{k}{m})^2 = 0$$

$$\frac{4k^2}{m^2} - \frac{4k}{m}\omega^2 + \omega^4 - \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\frac{3k^2}{m^2} - \frac{4k}{m}\omega^2 + \omega^4 = 0$$

Ahora buscamos 2 número que al multiplicarlos nos dé $\frac{3k^2}{m^2}$ y sumados o restados nos den $\frac{4k}{m}\omega^2$

$$(\omega^2 - \frac{3k}{m})(\omega^2 - \frac{k}{m}) = 0$$

Por lo tanto los valores propios para esta formulación son $\omega_1^2 = \frac{3k}{m}$ y $\omega_2^2 = \frac{k}{m}$ por lo tanto los modos normales de oscilación para el sistema vienen damos por:

$$x_1 = A_1 cos(\omega t)$$

$$x_2 = A_2 cos(\omega t)$$

Derivando dos veces las posiciones tenemos:

$$\ddot{x_1} = -A_1\omega^2 cos(\omega t)$$

$$\ddot{x_2} = -A_2\omega^2 coscos(\omega t)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones 8 y 9, igualando a cero y factorizando los cosenos se obtiene

$$(-A_1\omega^2 + \frac{2k}{m}A_1 - A_2\frac{k}{m})cos(\omega t) = 0$$

enviando el $cos(\omega t)$ a dividir por el cero y despejando A_2

$$-A_1\omega^2 + \frac{2k}{m}A_1 = A_2\frac{k}{m}$$

para $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ se tiene el siguiente modo normal

$$A_1 = A_2 \tag{10}$$

y para $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$ tenemos el siguiente modo normal:

$$-A_1 = A_2 \tag{11}$$

N osciladores acoplados y la ecuación de onda

Para este sistema tenemos n osciladores acoplados por resortes de la siguiente forma

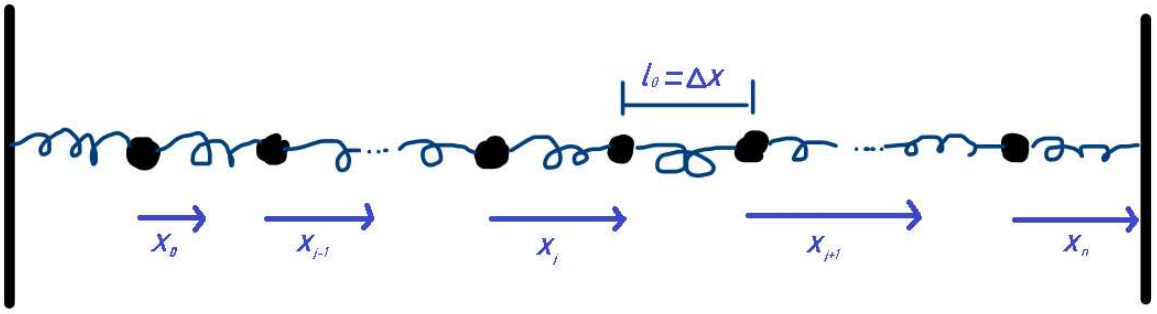


Figura 2. Representación pictórica de un sistema de n masas acopladas por resortes. Las ecuaciones de movimiento para este sistema son

$$m\ddot{x_1} = -k(x_1 - x_0) + k(x_2 - x_1) \tag{12}$$

$$m\ddot{x_j} = -k(x_j - x_{j-1}) + k(x_{j+1} - x_j) \tag{13}$$

$$m\ddot{x_n} = -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n) \tag{14}$$

Por condiciones de frontera como la condición de Dirichlet o $kx_0 = 0$ que se conoce como la condición de extremos fijos, y consiste que el oscilador acoplado se encuentra ligado a una pared lo que se conoce como extremo fijo.
Supongamos que:

$$N \to \text{ínf}$$

O

$$l_0 \to 0$$

$$Nl_0 = finito$$

$$x_j \to x$$

$$\varphi_j(t) \to \varphi(x,t)$$

Pasando de esta forma del régimen discreto al continuo.

$$\ddot{x_j} = -\omega_a^2(x_j - x_{j-1}) + \omega_a^2(x_{j+1} - x_j)$$

Si aplicamos el limite cuando $\Delta t \to o$ de $\frac{d^2}{dt^2}$ a la función $\varphi_j(t)$

$$= \frac{\varphi(x + \Delta x, t) - \varphi(x,t) - \varphi(x,t) - \varphi(x - \Delta x, t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{v^2 \partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} \tag{15}$$

Conocida como la ecuación de Onda

Imágenes de las clases de cálculo multivariado

Durante el desarrollo del módulo educativo, se impartieron clases virtuales con ayuda de softwares como Meet para las reuniones, y OpenBoard para el desarrollo de estas, donde se mostraron diferentes aplicaciones del algebra lineal; para abordar los temas más relevantes del curso. Aquí encontraremos algunas imágenes de estas con el propósito de mostrar parte del trabajo practico realizado por los pasantes en la pasantía.

Propiedades de las matrices

En esta ocacion se mostro una primera aplicacion en la solucion de sistemas armonicos como los dos pendulos acoplados que se pueden ver en la **Figura 1.**

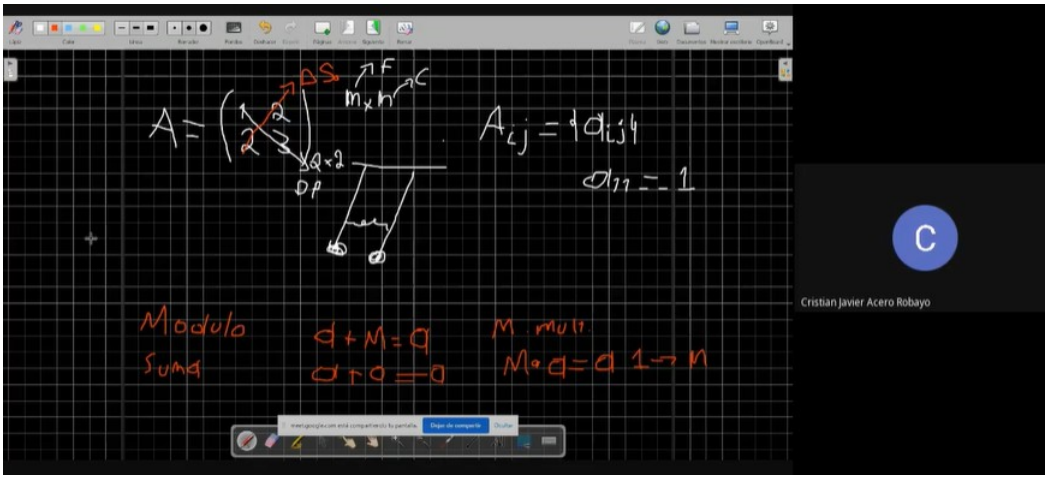


Figura 1. Imagen de la explicación del módulo de la suma desde un péndulo acoplado.

Para la explicación surge una duda de Julian Leguizamon, estudiante del curso y quien encontraba un desacuerdo con el pasante en el resultado del elemento a_{33} de la matriz C que podemos observar en la **Figura 2.**

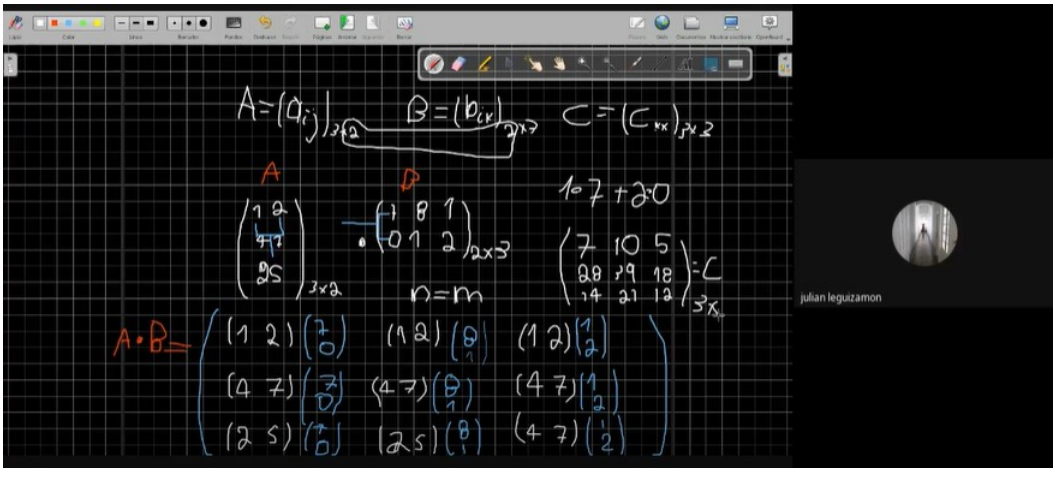


Figura 2. Imagen de la explicación del producto de dos matrices.

Vectores

Se realizo la explicación de un vector en R_3 (**Figura 3.**) mientras se mostraban sus principales características como lo son la magnitud dirección y sentido a través de las coordenadas cartesianas y los vectores unitarios.

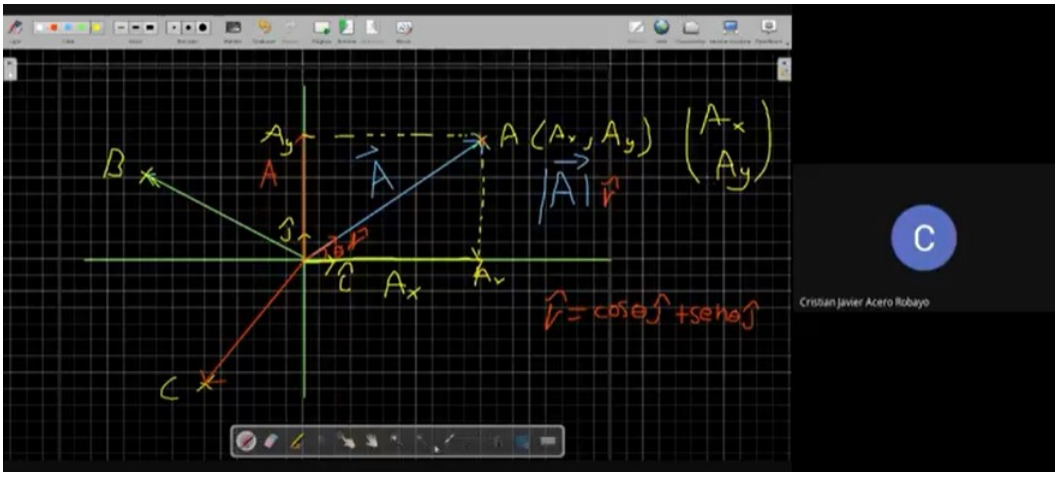


Figura 3. Imagen de la explicación de vector en R_3.

El estudiante Jimmy Efraín Figueroa, presenta su duda "¿Por qué en k unitario, el valor es de cero?"(**Figura 4.**) Donde se dio solución a la misma mostrando que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores en el espacio R_2.

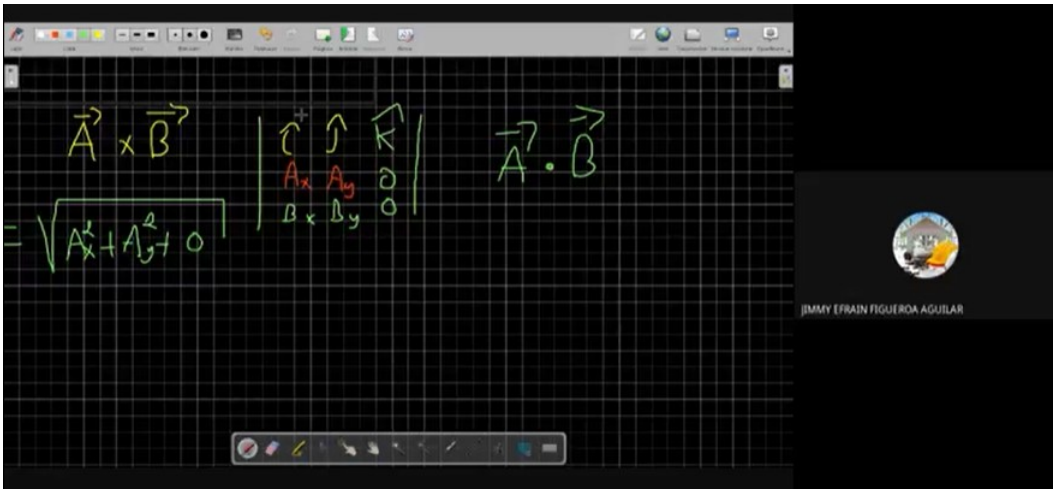


Figura 4. Imagen de la explicación del producto cruz y producto punto.

Vectores desde el algebra lineal

Se presenta un vector en R_3 de manera pictorica mientras se da una explicación de la representación matemática de los vectores unitarios (**Figura 5.**), y coordenadas desde el algebra lineal, argumentando la facilidad ganada debido a la notación.

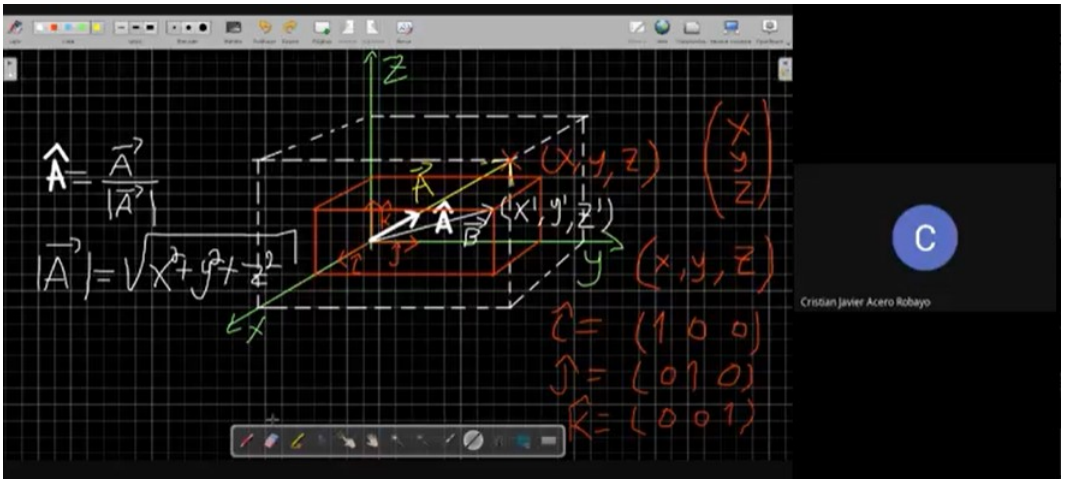


Figura 5. Imagen de la explicación de un vector en R_3, desde el algebra lineal.

Se explica el uso de la notación matemática para un vector en el algebra lineal, para ello se muestra la importancia de los términos ordenados $a_{i,j}$ en los vectores unitarios, y se lleva acabo un ejemplo donde se representa un vector de esta forma como se puede ver en la **Figura 6.**

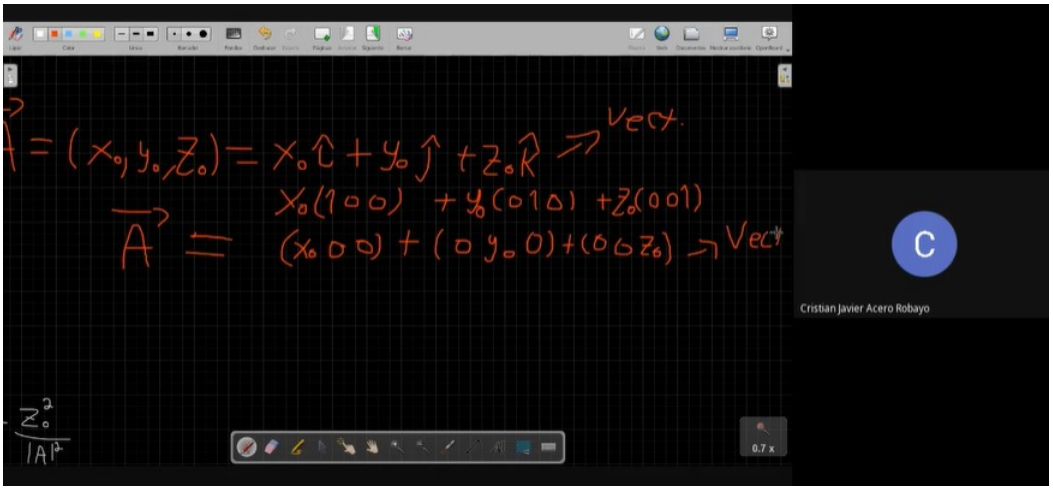


Figura 6. Imagen donde se muestra la notación matemática usada en el algebra lineal para describir un vector.

Eliminación por Gauss-Jordan

Para esta sesión se llevó a cabo una explicación de como hallar la inversa de una matriz por medio de sistemas de ecuaciones, usando la definición de matriz inversa como se puede observar en la **Figura 7.**

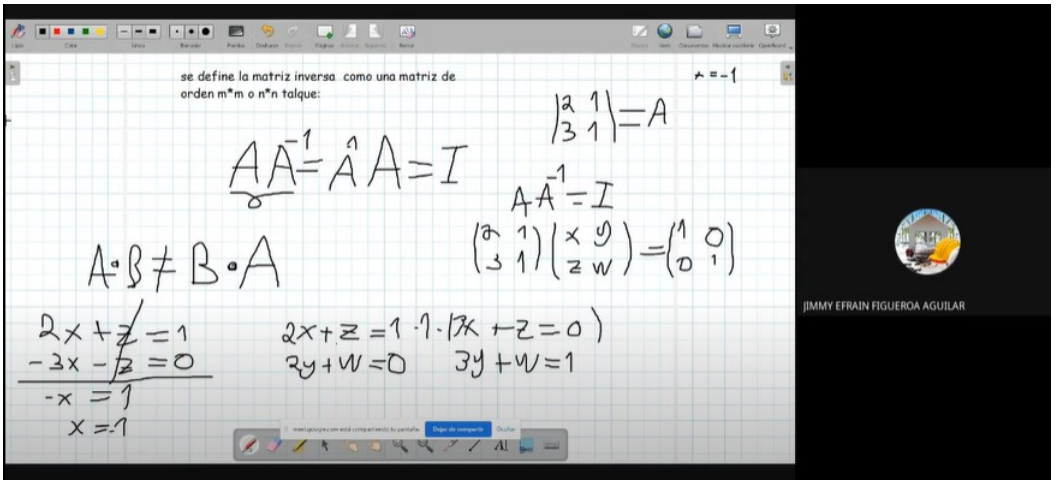


Figura 7. Imagen de la explicación de la inversa de una matriz por sistemas de ecuaciones.

Para esta sesión el estudiante Julián Leguizamón no había entendido porque primero se debía hallar la transpuesta de la matriz, y luego proceder a realizar la adjunta. Lo que se explica desde la misma definición (**Figura 8.**) ya que la matriz traspuesta es el argumento de la adjunta lo que nos establece un orden en la composición de las funciones.

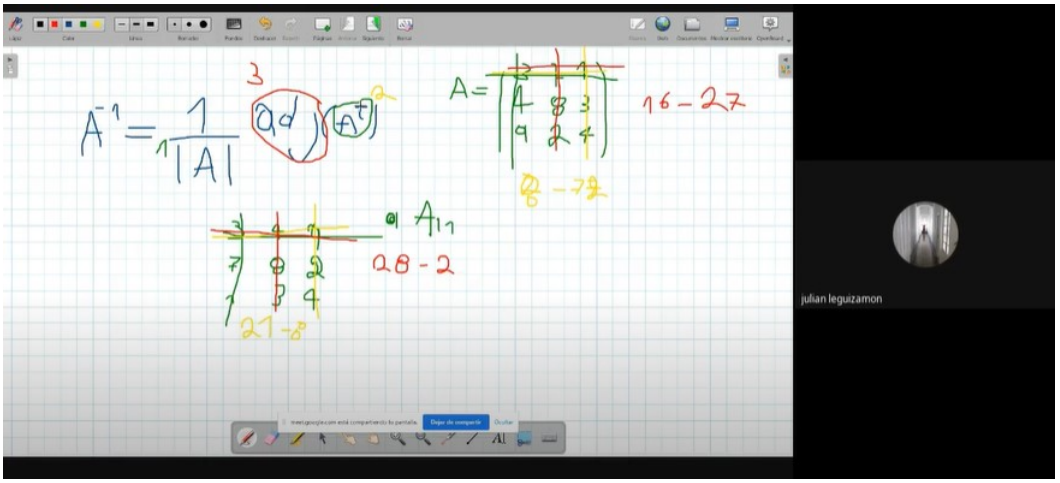


Figura 8. Imagen de la explicación de la inversa de una matriz haciendo uso del método de cofactores.

Funciones de dos variables

Se explica en que consiste una función de dos variables, haciendo una descripción de esta en el plano cartesiano. Para ello se pregunta ¿Cuál es el dominio de la función? Haciendo un análisis del argumento, y mostrando como es el dominio en el plano x, y como se observa en la **Figura 9.**

Figura 9.

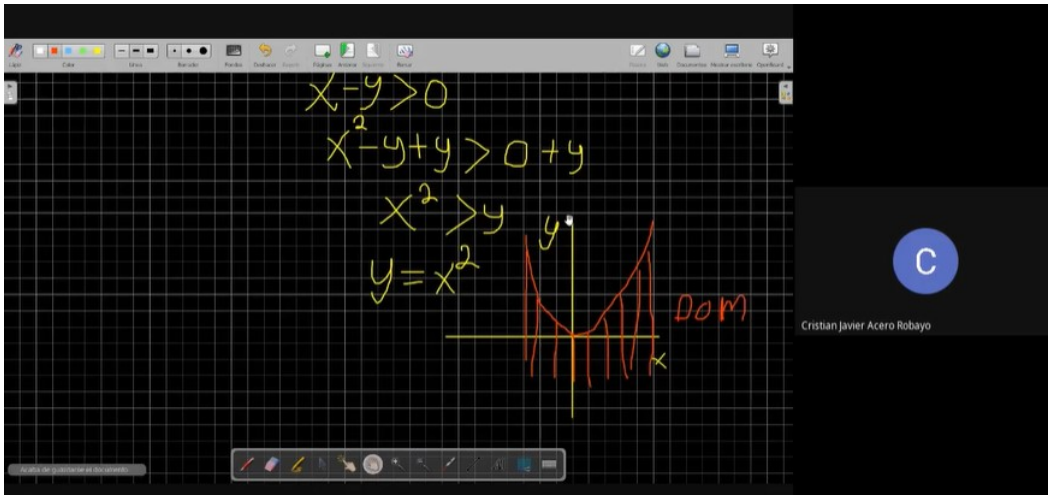


Figura 9. Imagen del dominio de la funcion $f(x, y) = yln|x^2 - y|$.

Se procede a explicar el concepto de Traza, para poder graficar funciones de dos variables y se introduce el termino de curva de nivel, donde los estudiantes mostraron su entendimiento en la aplicabilidad directa de estas con la topografía por lo que se mostró como la cercanía entre estas curvas nos muestra que tan empinada esta una superficie en planimetría.

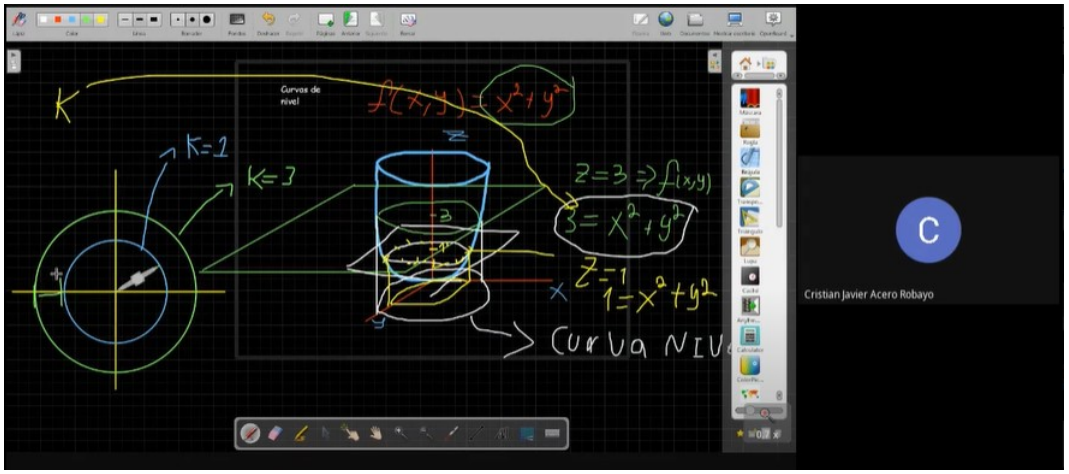


Figura 10. Imagen donde se observan las curvas de nivel para una función de dos variables $f(x) = x^2 + y^2$.

Curvas de nivel y la planimetria

Se presenta una aplicación de las curvas de nivel en la planimetría, mostrando como se puede llegar a estudiar una superficie real a partir de datos tomados en los terrenos, y así poder crear una imagen 3D virtual de los mismos. Esta imagen se analiza desde los conceptos básicos del algebra lineal y se plantea una explicación cualitativa de la curva y como poder hallar la función a partir de las cónicas.

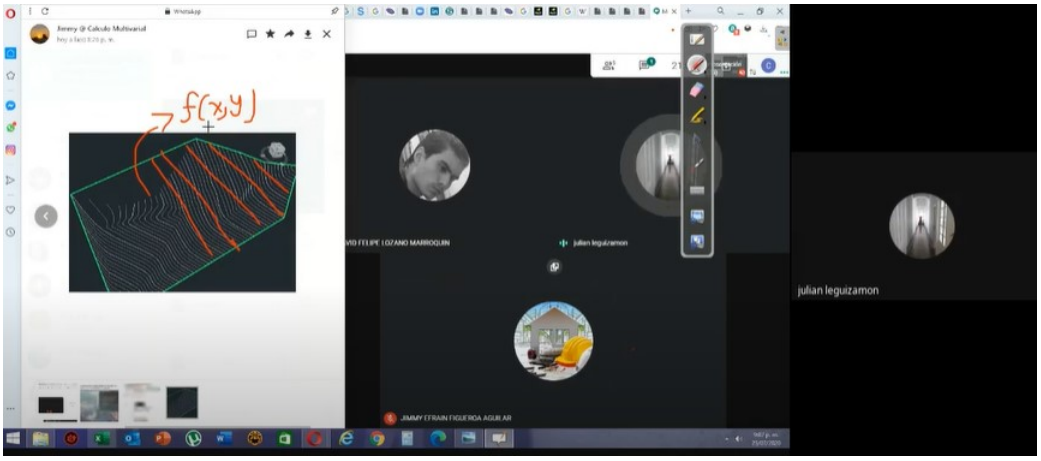


Figura 11. Imagen de la explicación de curvas de nivel a partir de un terreno, la imagen y los datos fueron proporcionados por el estudiante Jimmy Figueroa.

Se llevo acabo una explicacion detallada de las conicas y como estas son el analisis de las trazas de un cono eliptico, deduciendo una a una las ecuaciones apartir de la formula general como se puede ver en la **Figura 12.**

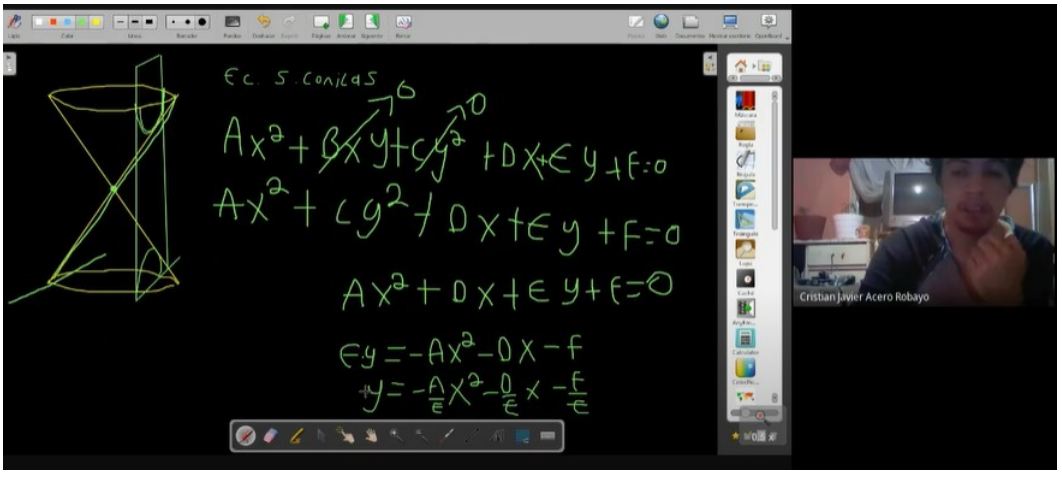


Figura 12. Imagen de la explicación de las superficies cónicas.

Derivadas parciales

Para poder llevar una mejor explicación se procedió al uso del software (GeoGebra.) Como se puede evidenciar en la **Figura 13.** Permitiendo un dinamismo en las gráficas y una mejor claridad sin dejar de lado los pasos algebraicos para el análisis de esta

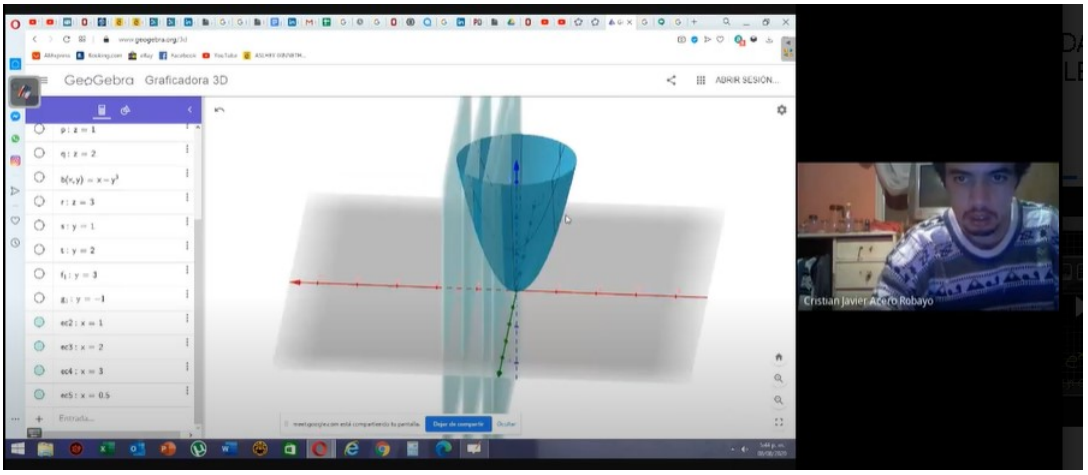


Figura 13. Imagen de las trazas de un paraboloide vertical por medio del Software GeoGebra.

Se presenta una explicación de la derivada, haciendo una comparación entre la derivada total y parcial, mostrando sus similitudes y diferencias. En esta sesión se vio una gran dificultad en los conceptos, debido a los conocimientos previos de los estudiantes, por lo que se hizo un recuento y explicación de las reglas de la derivada.

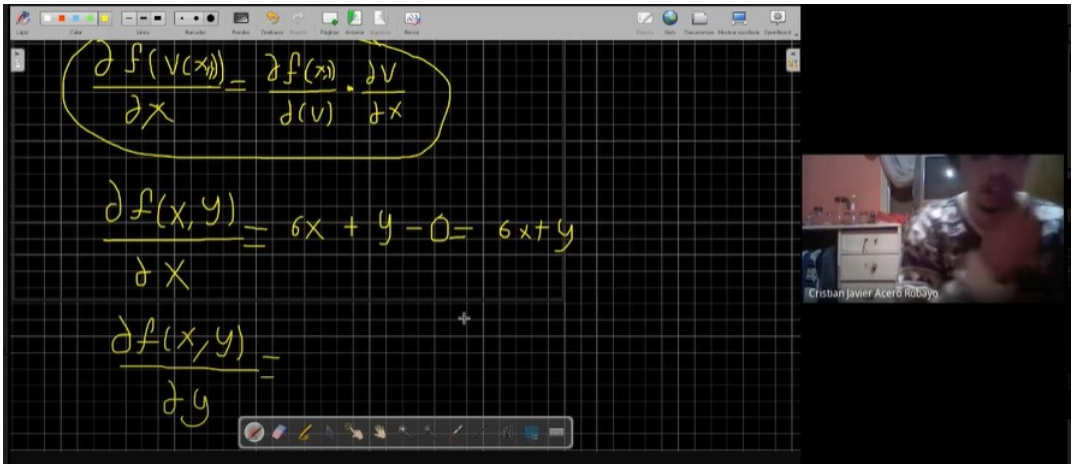


Figura 14. Imagen de la explicación de la derivada parcial de una función de dos variables.

Anexo 3. Guías didácticas enfocadas en la enseñanza de las vibraciones y ondas

Movimiento ondulatorio

¿Qué es una onda?

"Los rizos en un estanque, los sonidos musicales, los temblores sísmicos producidos por un terremoto: todos estos son fenómenos ondulatorios. Las ondas surgen siempre que un sistema es perturbado de su posición de equilibrio y la perturbación puede viajar o propagarse de una region del sistema a otra. Al propagar- se una onda, transporta energia. La energia de las ondas de la luz solar calienta la superficie terrestre; en tanto que la energia de las ondas sismicas puede resquebrajar la corteza terrestre.

Este capitulo y el siguiente tratan las ondas mecanicas, ondas que viajan por algun material llamado medio. Iniciaremos deduciendo las ecuaciones basicas que describen a las ondas, incluido el importante caso especial de las ondas senoidales donde el patrón de la onda es una funcion seno o coseno que se repite. Para entender mejor las ondas en general, examinaremos el caso sencillo de las ondas que viajan por una cuerda estirada.

Las ondas en las cuerdas desempeñan un papel importante en la música. Cuando un músico toca una guitarra o un violín, produce ondas que viajan en direcciones opuestas por las cuerdas del instrumento. Al traslaparse estas ondas de dirección opuesta, se genera interferencia. Descubriremos que, en una cuerda de guitarra o de violín, solo pueden darse ondas sinusoidales de ciertas frecuencias especiales, llamadas frecuencias de modo normal, determinadas por las propiedades de la cuerda. Las frecuencias de modo normal de los instrumentos de cuerda determinan el tono de los sonidos musicales que se producen. (En el próximo capítulo veremos que la interferencia también ayuda a explicar los tonos de los instrumentos de viento, como las flautas y los órganos.)

No todas las ondas son mecánicas. Las ondas electromagnéticas —que incluyen la luz, las ondas de radio, las radiaciones infrarrojas y ultravioleta, y los rayos X— se pueden propagar incluso en el espacio vacío, donde no hay un medio. Exploramos estas y otras ondas no mecánicas en capítulos posteriores." (Sears-Zemansky, p.487)

Tipos de ondas mecánicas

Las ondas mecánicas son perturbaciones que viajan por un material o una sustancia que es el medio de la onda. Al viajar la onda por el medio, las partículas que componen el medio sufren desplazamientos de varios tipos, esto depende de su naturaleza. La **Figura 1.** muestra formas de producir una onda mecánica.

En la **Figura 1. (a)**, el medio es una cuerda tensada. Si imprimimos al extremo izquierdo una ligera sacudida hacia arriba, la sacudida viaja a lo largo de la cuerda. Secciones sucesivas de la cuerda repiten el movimiento que dimos al extremo, pero en instantes posteriores sucesivos. Puesto que los desplazamientos del medio son perpendiculares o transversales a la dirección en que la onda viaja por el medio, decimos que se trata de una **onda transversal**.

En la **Figura 1. (b)**, el medio es un líquido o un gas en un tubo con una pared rígida en el extremo derecho y un pistón móvil en el izquierdo. Si imprimimos al pistón un solo movimiento hacia adelante y hacia atrás, el desplazamiento y las fluctuaciones de presión

viajarán a lo largo del medio. En esta ocasión, los movimientos de las partículas del medio son hacia adelante y hacia atrás en la misma línea en que viaja la onda, y decimos que se trata de una **onda longitudinal**.

En la **Figura 1. (c)**, el medio es líquido en un canal, como agua en una zanja de irrigación. Si movemos la tabla plana de la izquierda hacia adelante y hacia atrás una vez, una perturbación de onda viajará a lo largo del canal. En este caso, los desplazamientos del agua tienen componentes tanto longitudinales como transversales.

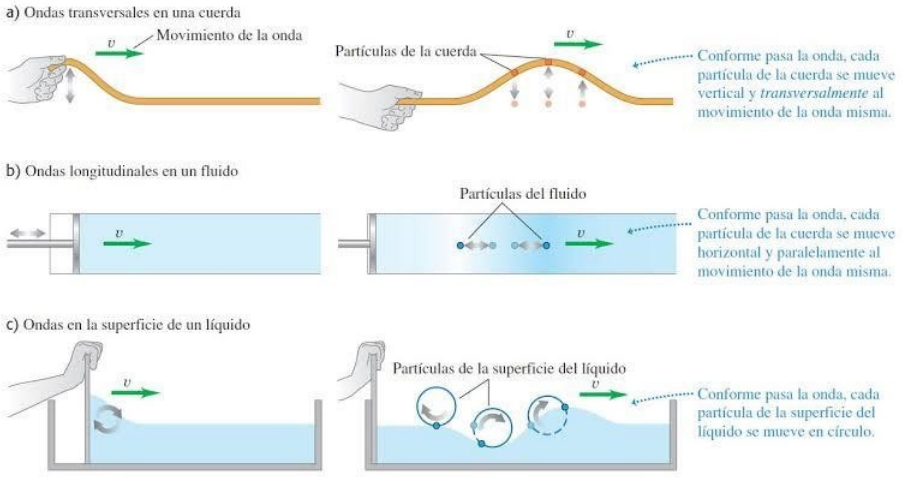


Figura 1. Tres formas de producir una onda que se mueve hacia la derecha. (a) La mano mueve la cuerda hacia arriba y regresa, produciendo una onda transversal. (b) El pistón se mueve a la derecha, comprimiendo el líquido o gas, y regresa, produciendo una onda longitudinal. (c) La tabla se mueve a la derecha y regresa, produciendo una combinación de ondas longitudinales y transversales. (imagen tomada de Sears-Zemansky, p.488)

Cada uno de los sistemas tiene un estado de equilibrio, en el caso de la cuerda estirada, su estado está en reposo, para el segundo caso (b), es un estado en el cual el fluido está en reposo con presión uniforme y finalmente el caso de la zanja es una superficie lisa y plana. En cada uno de los casos descritos anteriormente, el movimiento ondulatorio es una perturbación del estado de equilibrio que viaja de una región del medio a otra, en donde existen fuerzas que tienden a volver el Sistema a su estado de equilibrio.

Ondas periódicas

Recordemos nuestra **Figura 1. (a)** en donde la mano sacude la cuerda verticalmente una vez, produciendo una fuerza transversal sobre ella. El resultado es un solo pulso, pero ahora ¿qué pasaría si realizamos un movimiento repetitivo?, bien en este caso cada particular de la cuerda tendrá un movimiento periódico al propagarse la onda, esto generará una onda periódica.

Ondas transversales periódicas

Supongamos que movemos verticalmente la cuerda con un MAS con amplitud A, frecuencia f, frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ y periodo $T = 1/f = 2\pi/\omega$. La onda producida es

una sucesión simétrica de crestas y valles, las ondas periódicas con $MÁS$ son relativamente sencillas de analizar; las llamamos ondas senoidales. Resulta También que cualquier onda periódica puede representarse como una combinación de ondas sinusoidales.

En el caso de una periódica, la forma de la cuerda en cualquier instante es un patrón repetitivo, la longitud de un patrón de onda completo es la distancia entre una cresta y la siguiente, dicha distancia es denominada longitud de onda la cual la denotamos con λ. El patrón de onda viaja con una rapidez cte. y avanza con una longitud de onda λ en un periodo T. por lo anterior la rapidez de onda está dada por $v = \lambda/T$, dado que $f = 1/T$ por lo tanto

$$v = \lambda * f \tag{1}$$

La rapidez es entonces igual al producto de la longitud de onda y la frecuencia (la frecuencia es una propiedad de toda la onda periódica, esto debido a que todos los puntos de la cuerda oscila con la misma frecuencia.

Ondas periódicas longitudinales

Consideremos ahora un tubo largo lleno con un fluido, con un pistón en el extremo izquierdo como la **Figura 1. (b)** Si el pistón se empuja el fluido se va a comprimir aumentando la presión en esta región y a su vez esta región genera un empuje en la región siguiente, de modo que un pulso de onda viaja por el tubo.

Si suponemos ahora que el pistón se mueve con MAS a lo largo de una línea paralela del eje del tubo, formará regiones en el fluido donde la presión y la densidad son mayores o menores que lo valores de equilibrio.

Nota: Compresiónes la región donde se ha aumentado la densidad y la expansión es la Región donde se ha reducido la densidad.

Ejercicios

1. ¿Qué tipo de onda es la ola y por qué?

2. ¿Si se aumenta al doble la longitud de onda de una cuerda? ¿Qué sucede con la rapidez y la frecuencia de la onda?

Referencias

[1] Física Universitaria – Sears – Zemansky – 12ava Edicion – Vol1 – Cap. 15

Naturaleza de la luz

Como ya se había mencionado antes, la naturaleza de la luz dentro de la física moderna, es considerada de naturaleza dual la cual se comporta ya sea como onda o partícula.

Esta guía pretende hablar y esclarecer un poco acerca de la fenomenología de la luz, dentro de esta encontramos la refracción, reflexión y difracción. Tanto la reflexión como la refracción son fenómenos generados en dos o tres dimensiones que están acompañados de unos cambios en su dirección de propagación. Al estudiar dicha propagación podemos encontrar los fenómenos anteriormente mencionados, los cuales pueden ser explicados por medio del paso de un frente de onda al otro. Para la explicación de dicho paso, Huygens realizó una construcción geométrica donde se describe que cualquier punto en el espacio puede ser transformado en una fuente de onda. Es decir la superposición de ondas.

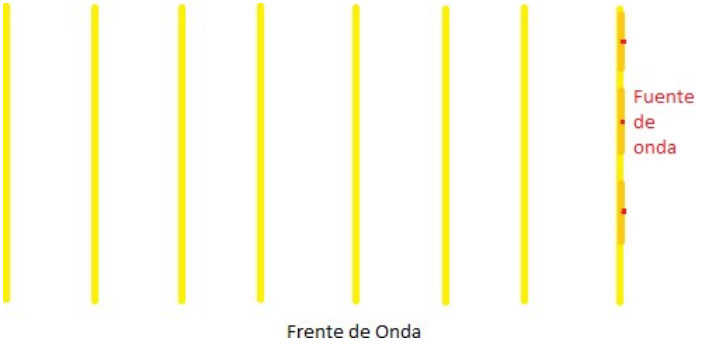


Figura 1. Representación pictórica del frente de onda según el principio de Huygens.

Reflexión

Es la propiedad que tiene la luz de cambiar su dirección de propagación donde el ángulo incidente del rayo es igual al ángulo reflejado, esto siempre y cuando la superficie sea lo suficientemente lisa.

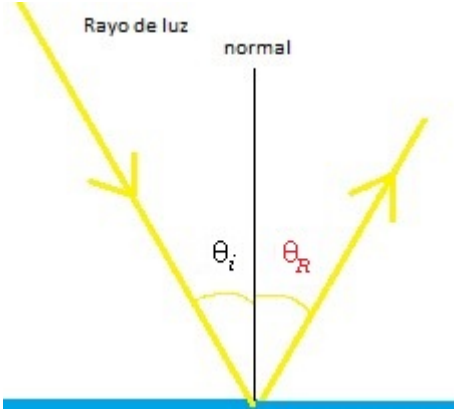


Figura 2. Representación pictórica de la reflexión especular.

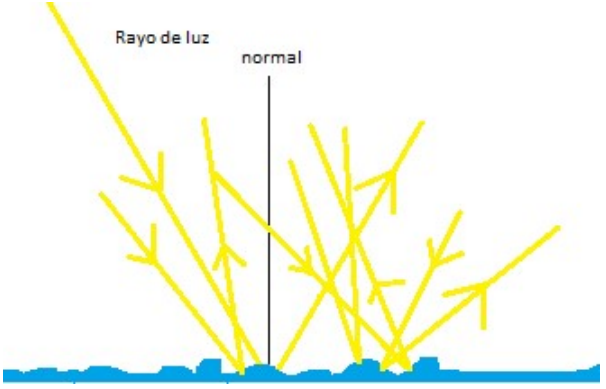


Figura 3. Representación pictórica de la reflexión difusa.

Refracción

Es la propiedad de la luz donde cambia tanto la velocidad como la dirección, al pasar de un medio material a otro, dichos cambios se explican por medio de la ley de Snell, la cual

establece que cuando la luz cambia de un medio material cuyo índice de refracción es menor a el nuevo medio, el rayo se acerca a la normal.

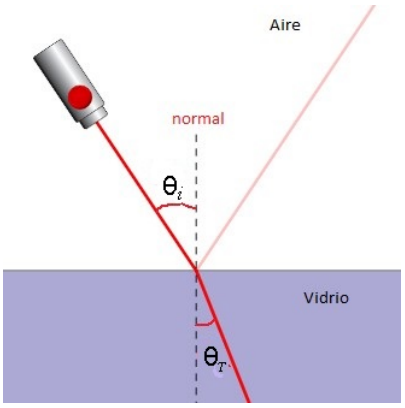


Figura 4. Rayo de luz que viaja de un medio con menor índice de refracción a uno con mayor índice de refracción.

Al momento de pasar de un medio material con índice de refracción 1 elevado mayor al nuevo medio, el rayo se aleja de la normal.

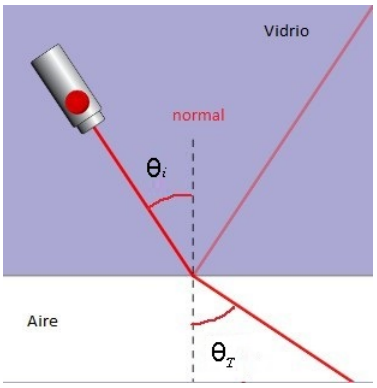


Figura 5. Rayo de luz que viaja de un medio con mayor índice de refracción a uno con menor índice de refracción.

Interferencia

Young a principios del siglo XIX con experimento bastante conocido (experimento de la doble rendija) demostró que la luz al igual que con las ondas sufren el fenómeno de interferencia el cual consiste en el que la señal al pasar por dos caminos, generan un patrón conocido como patrón de interferencia donde se ve claramente líneas de luz bastantes claras dadas por la superposición de la señal y otras donde no se ve luz ya que se cancelan en el camino. Cuando dos partes de la misma luz alcanzan el ojo por dos caminos diferentes la interferencia es máxima si la diferencia de los caminos recorridos es múltiplo de una cierta longitud y mínima para estadios intermedios.

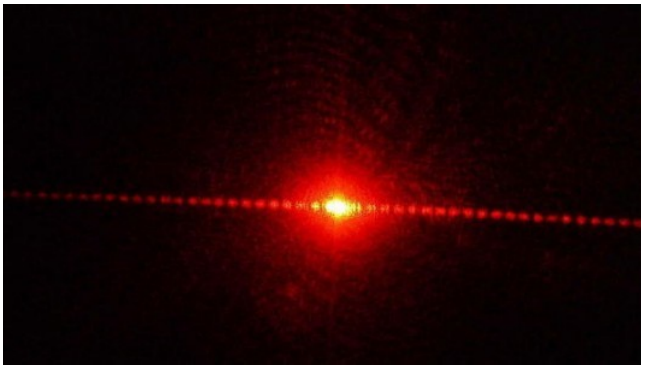


Figura 6. Patrón de interferencia de un rayo rojo de 650+-10nm.

Difracción

Es la propiedad que tiene la luz para rodear los objetos donde la difracción es mayor si la longitud del obstáculo es muy cercana a la longitud de onda del rayo, por otro lado si la longitud del obstáculo es mucho mayor a la longitud de onda del rayo se genera lo que se conoce como sombra dos elevado.

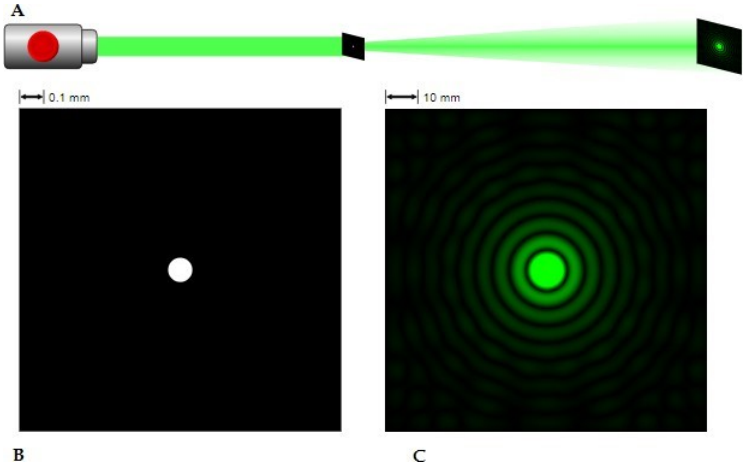


Figura 7. A. con ayuda del simulador Phet tenemos un rayo de luz de 511nm y B. un orificio de 0.1mm se proyecta en la pantalla C. un patrón donde se observa líneas de luz muy claras (interferencia constructiva) y otras líneas oscuras (interferencia destructiva).

Espectro electromagnético

Otra característica de la fenomenología de la luz es el espectro electromagnético, el cual es la clasificación de las ondas electromagnéticas según su longitud de onda y frecuencia. El espectro electromagnético va desde los rayos gamma, los cuales tienen las longitudes de onda más cortas y la frecuencia más alta hasta las ondas radioeléctricas que tienen las longitudes de onda más largas, entre los rayos gamma y las ondas radioeléctricas encontramos los rayos x, rayos ultravioleta, espectro visible y la radiación infrarroja.

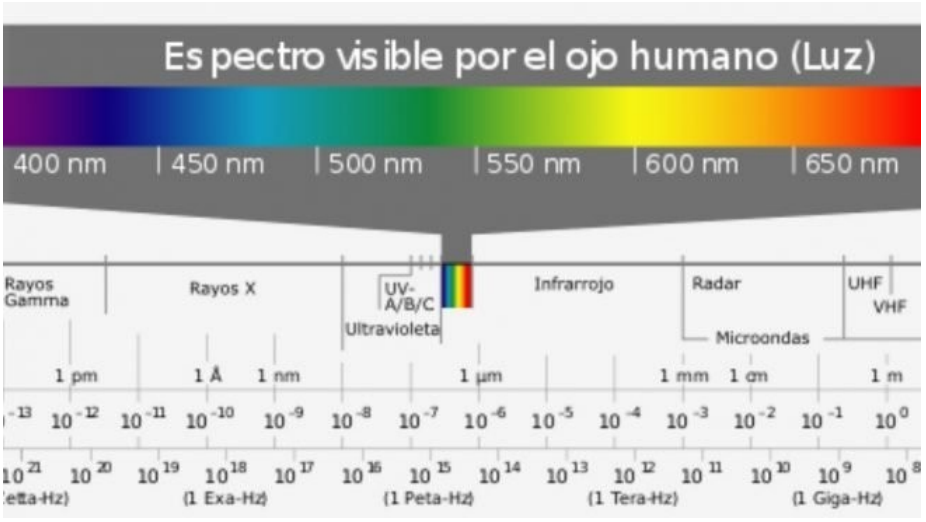


Figura 8. Imagen del espectro donde se observa varios tipos de radiación, desde los rayos gamma con altos niveles de energía pero longitudes de onda cortas a rayos microondas con bajos niveles de energía pero longitudes de onda largas.

Aplicaciones

Espectroscopia astronómica

La espectroscopia consiste en el estudio de la interacción que existe entre la radiación electromagnética y la materia, esta técnica aplicada a la Astronomía estudia la radiación electromagnética que emana de las estrellas y de otros objetos celestes. De esta forma se puede entender los diferentes compuestos de un cuerpo celeste para ello se lleva a cabo el estudio del espectro de emisión o de absorción de este y se compara con los de otros elementos, un ejemplo es que el astrónomo William Huggins comparar los espectros del aceite de oliva vaporizado y del etileno con los espectros de dos cometas que observó en 1868. Dedujo correctamente que en los cometas hay sustancias que contienen carbono.

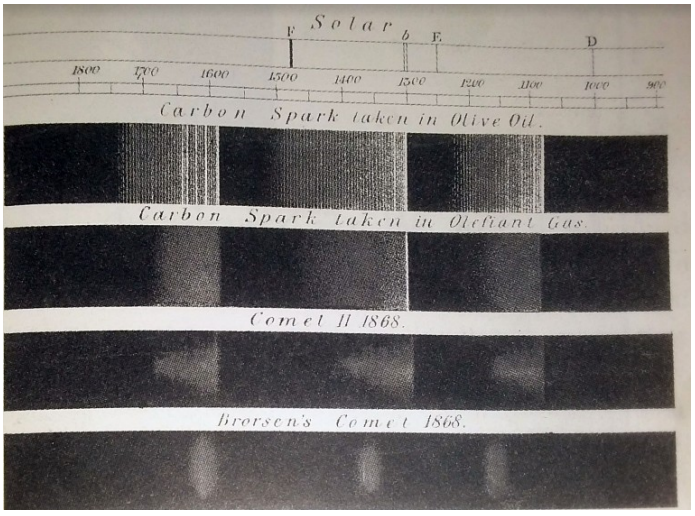


Figura 9. Espectro electromagnetico del aceite de oliva vaporizado y del etileno (Imagen tomada del libro La diversidad de la ciencia, una visión personal de la búsqueda de Dios del autor Carl Sagan página 95.)

Velocidad de la luz

Gracias a propiedades como la reflexión se puede llegar a calcular experimentalmente la velocidad de la luz haciendo uso de las figuras le Lissajous, y de un osciloscopio para poder ver el desfase dentro de dos señales de luz linealmente polarizadas. Este método permite hallar la velocidad de la luz con un error del menos 8 % ideal para prácticas didácticas de ciencia e ingeniería. El método consiste en analizar la superposición de dos señales las cuales son señales lineales mentes perpendiculares en su campo eléctrico. Se estudia el desfase de las señales para poder hacer un estudio de la relación entre el desfase y la distancia del espejo al diodo.

La permitividad relativa e índice de refracción son dependientes de la frecuencia, debido a la vibración natural de átomos y moléculas. La relación de fase entre el transmisor y el receptor de la señal es representada por una figura de Lissajous en el osciloscopio. Si la figura es una línea recta, la diferencia de fase es 0 en el caso de una pendiente positiva y en el caso de una pendiente negativa. De tal manera que veamos en el osciloscopio lo siguiente:

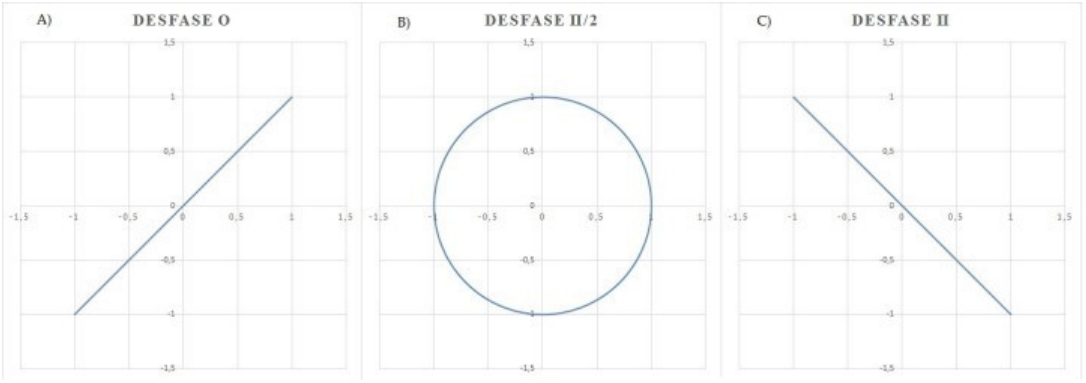


Figura 10. Figuras de Lissajous, para dos señales que interfieren entre si.

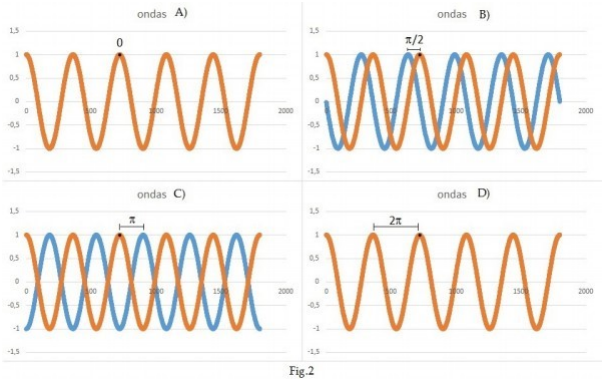


Figura 11. Como podemos ver en la imagen tenemos cuatro imágenes de dos ondas la cual nos muestra cómo se deberán de ver en el osciloscopio para cuando la fase es 0 (A), $\pi/2$ (B), π (C), y 2π para la (D).

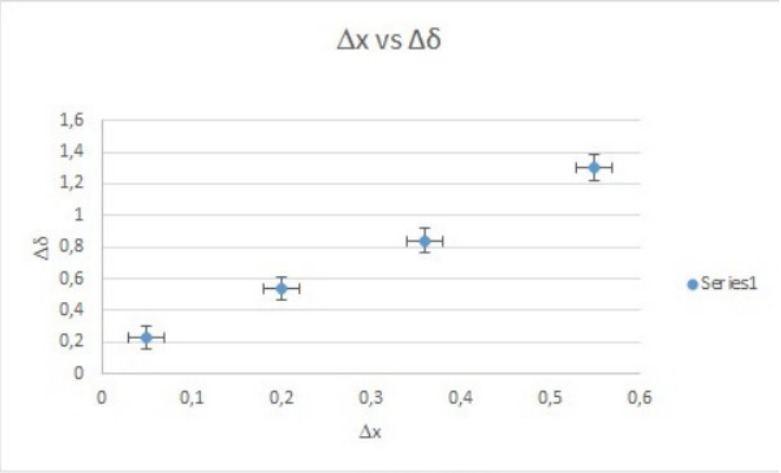


Figura 12. Gráfico de dispersión entre el desfase de las señales y la distancia de separación del láser con el detector.

De esta forma se llega realizar una gráfica que relacione la distancia de separación del espejo con el desfase entre las señales donde se puede observar una relación lineal donde la pendiente de la gráfica viene dada por:

$$m = \frac{4\pi f}{c} \tag{1}$$

Donde f es la frecuencia de la señal y c es la velocidad de la luz.

Ondas estacionarias

Del capítulo 15 hemos hablado acerca de la definición de onda y los tipos de ondas mecánicas, en esta oportunidad hablaremos un poco acerca de lo que son las ondas estacionarias en cuerdas, pero antes vamos a recordar la definición de onda, "Las ondas surgen siempre que un sistema es perturbado de su posición de equilibrio y la perturbación puede viajar o propagarse de una región del sistema a otra. Al propagarse una onda, transporta energía. La energía de las ondas de la luz solar calienta la superficie terrestre; en tanto que la energía de las ondas sísmicas puede resquebrajar la corteza terrestre".

Ahora pasaremos a definir nuestro tema de interés, las ondas estacionarias en cuerdas son entonces el resultado de la interferencia entre una onda incidente y otra reflejada, es decir, ondas que se propagan en sentidos opuestos y comparten las mismas características como amplitud, longitud de onda o frecuencia y rapidez de propagación. La onda resultante de dicha interferencia tiene una amplitud que varía de punto a punto y que oscila con MAS. Estas ondas se pueden observar cuando tenemos una cuerda sujeta por ambos extremos en la que se produce una vibración, un ejemplo de esto lo podemos encontrar en cosas que hacen parte de nuestro diario vivir, la música, instrumentos como la guitarra, el violín, el piano, entre otros, son ejemplos de ondas estacionarias en cuerda.

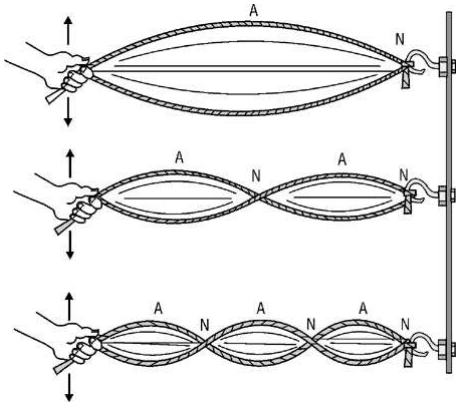


Figura 1. Representación pictórica de una onda estacionaria en una cuerda.

Una de las principales características que tienen las ondas estacionarias es que existen puntos donde no se genera vibración, permanecen estacionarios, estos puntos son conocidos como nodos (N), y puntos que por el contrario lo hacen llegando a una amplitud máxima, la cual es el doble de las ondas que interfieren, estos son los antinodos (A).

En instantes, como $t = 1/4T$, las ondas coinciden es decir están en fase entre sí, de manera que se suman formando una onda senoidal con el doble de amplitud de las ondas individuales, en otros instantes como $t = 1/2T$, las ondas se encuentran en total desfasamiento y la onda en este instante es cero. En los nodos, como lo mencionamos anteriormente, los desplazamientos tanto de las ondas azules como de las verdes son iguales y opuestos, y se cancelan, esto es conocido como interferencia destructiva, los puntos de máxima amplitud es decir los antinodos, los desplazamientos de las ondas siempre son idénticos esto se conoce como interferencia constructiva. Como se observa en la figura, la distancia entre nodos y antinodos es media longitud de onda $\lambda/2$.

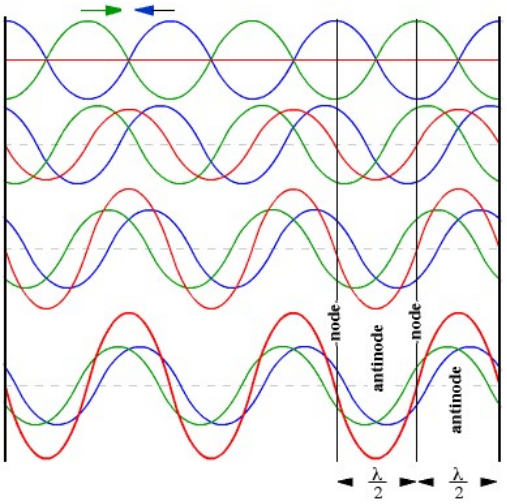


Figura 2. Una onda que viaja a la izquierda (curvas azules) se combina con una que viaja a la derecha (curvas verdes) para formar una onda estacionaria (curva roja.)

Se puede deducir entonces que una función de onda para una onda estacionaria, sumando las funciones de onda $y_1(x,t)$ y $y_2(x,t)$ para dos ondas con amplitud, periodo y longitud de onda iguales que viajan en direcciones opuestas. Aquí, $y_1(x,t)$ (las curvas azules) representa una onda incidente que viaja a la izquierda por el eje $+x$, llegando al punto $x = 0$ y reflejandose; $y_2(x,t)$ (las curvas verdes) representa la onda reflejada que viaja a la derecha desde $x = 0$, la onda reflejada del extremo fijo de una cuerda se invierte, así que anteponemos un signo negativo a una de las ondas: ¨

$$y_1(x,t) = -Acos(kx + t)$$

Onda incidente que viaja a la izquierda

$$y_2(x,t) = Acos(kx - t)$$

Onda reflejada que viaja a la derecha. Este cambio de signos corresponde a un desfasamiento de 180 ó π radianes. En el instante $x = 0$, el movimiento de la onda reflejada es $Acos(\omega t)$ y el de la onda incidente es $-Acos(\omega t)$, también se puede representar como $Acos(\omega t + 2\pi n)$. La función para una onda estacionaria está dada por la suma de las funciones de ondas individuales.

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A[-cos(kx + \omega t) + cos(kx - \omega t)]$$

Teniendo en cuenta las identidades del coseno de suma y diferencia de dos ángulos se puede replantear la ecuación y obtenerla en función de onda estacionaria:

$$y(x,t) = y_1(x,t) = (2sen(kx))sen(\omega t)$$

Si $2A = A_{sw}$ entonces

$$y(x,t) = (A_{sw}sen(kx))sen(\omega t) \tag{1}$$

La ecuación (1) como podemos observar está compuesta por dos factores, uno en función de x y otro en función de t. El factor $A_{sw}sen(kx)$ indica que, en cada instante, la forma de

la cuerda es una curva senoidal. Pero, a diferencia de una onda que viaja por una cuerda, la forma de la onda permanece en la misma posición, oscilando de manera vertical según el factor $sen(\omega t)$. Dicho comportamiento es el que observamos en la curva roja de la figura anteriormente descrita. Todos los puntos de la cuerda están en MAS, sin embargo, todos los que están entre cualquier par sucesivo de nodos oscilan en fase.

Las ondas estacionarias a diferencia de las viajeras NO transfieren energía de un extremo a otro. Las dos ondas que la forman transportarán de manera individual cantidades iguales de potencia en direcciones opuestas. Existe un flujo local de energía de cada nodo a los antinodos adyacentes, y de regreso; pero la transferencia de energía es cero en todos los puntos.

Física de los vientos

Otro tipo de onda estacionaria es el producido por los instrumentos de viento, dicho fenómeno es especial ya que no existe cuerda alguna que haga vibrar, ni una caja de resonancia que las potencie. Son ondas con las que se han trabajado durante miles de años, existen datos de una antigua flauta de hueso de buitre de hace más de 35 mil años, y el no tener una cuerda que produzca su sonido hace que sea más enigmática de estudiar; este tipo de ondas estacionarias, se producen cuando se sopla y al entrar aire en el instrumento, es como si puntease "la cuerda", al transmitir esta energía a la columna de aire, se produce un espectro de frecuencias, y la columna de aire se acopla a la frecuencia de resonancia o frecuencia natural dependiendo solo de la longitud de la columna de aire, esto es lo que se conoce como armónicos.

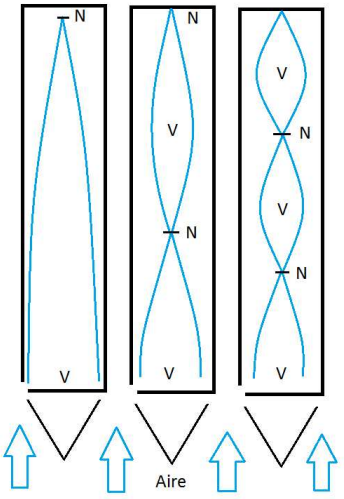


Figura 3. Extremo abierto: en este tipo de tubos se tiene que la longitud de este puede ser$L = \lambda/l, 2\lambda/l, 3\lambda/l, ..., n\lambda/l$ para $n = 1, 2, 3, ...$

Las frecuencias propias del tubo $f = v/\lambda$ seran $f = v/2l, 2v/2l, 3v/2l, ..., nv/2l$ para $n = 1, 2, 3, ...$ En este las frecuencias posibles son todos múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

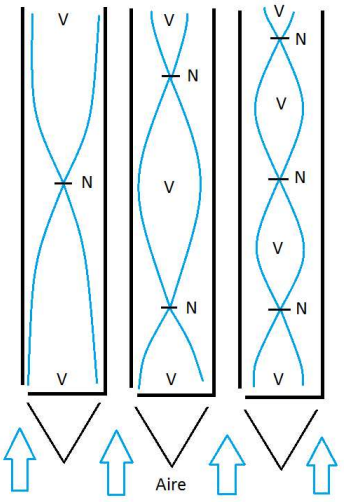


Figura 4. Al existir un extremo cerrado en el tubo impide el movimiento de las partículas de aire, similar a lo que pasa en una onda sobre una cuerda cuyo extremo se encuentra fijo y su longitud viene dada por $L = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, ..., (2n+1)\lambda/4$ para $n = 1, 2, 3, ..$

Las frecuencias propias del tubo vienen dadas por $f = v/4l, 3v/4l, 5v/4l, ..., (2n+1)v/4l$ para $n = 1, 2, 3, ...$

En este tipo de ondas se debe tener en cuenta si el tubo es abierto o cerrado, si este tiene ambos extremos abiertos como una flauta o flautín, la columna de aire que produce resuena en sus armónicos cada uno múltiplo de la frecuencia fundamental de la columna como sucedía en las cuerdas. Por el contrario, si el tubo es de madera y tiene un extremo abierto y uno cerrado, se debe tener en cuenta su forma, si este es cónico como un saxofón producirá todos los armónicos, pero si es un cilindro la columna de aire solo resonara a frecuencias de múltiplos impares de la frecuencia fundamental, e instrumentos de metal sin importar la forma del tubo resuenan en todas las frecuencias o armónicos.

Resulta más intuitivo pensar que el sonido producidos por estos es más grave en cuanto es más larga la columna de aire, por lo que muchos de estos instrumentos llevan agujeros que permitan jugar con esta condición y así abriendo paso a una gran gamma de frecuencias, por ejemplo, si reducimos la longitud de la columna a la mitad la frecuencia fundamental será del doble lo que hace que produzca sonidos mucho más agudos, como el flautín.

El modelo mecánico cuántico del átomo

A finales del siglo pasado, existía un modelo que predecía cosas tan importantes como la energía de ionización del átomo o los niveles de energía, pero estaba sustentada en bases que no eran posibles de medir de manera directa, además de que este trabajaba con un electrón con una órbita definida con total precisión, pero al llegar la idea revolucionaria de De Broglie de que las partículas también podrían mostrar un comportamiento de onda, Schrodinger, modela que aquellas partículas que Thomson descubrió tan solo unas décadas antes podían ser explicados mediante una onda especial llamada onda de materia u onda de probabilidad, creando así la base del entendimiento moderno del átomo como un modelo mecánico cuántico.

Creo que es el momento en el que se preguntan ¿pero cuál es la relación que existe entre estas ondas estacionarias y los electrones?, al parecer como en el modelo de las ondas estacionarias nos damos cuenta que estas solo se permiten vibrar a ciertas frecuencias permitidas, y gracias al modelo planteado por Planck donde nace la hipótesis de que la energía a escalas cuánticas se comporta de manera cuantizada, ayudó a que Schrodinger optara por este modelo para dar explicación a la idea de De Broglie. Teniendo en cuenta la ecuación de onda de Schrodinger:

$$\widehat{H}\Psi = E\Psi \tag{2}$$

Donde Ψ hace referencia a la función de onda, $\widehat{H}$ es conocida como el operador hamiltoniano y E como la energía del enlace del electrón, al resolver esta ecuación, se logra encontrar con varias soluciones, cada una con un valor definido E diferente pero que resulta permitido para cada una, como lo es en una onda estacionaria.

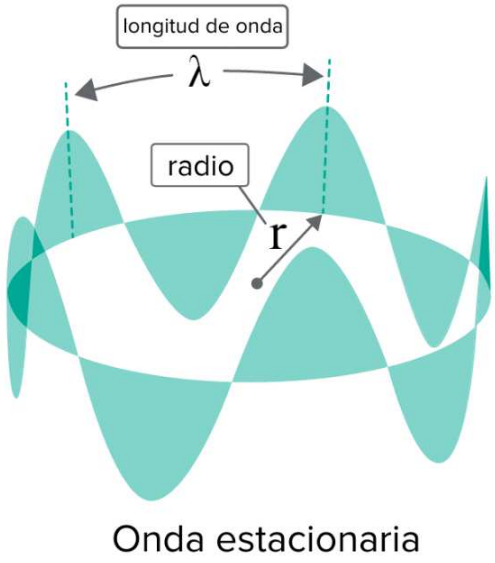


Figura 5. Representación pictórica de una Onda de materia del electrón.

Como se observa la longitud entre cresta y resta es la longitud de onda y el radio de Bohr es la distancia entre el núcleo y el primer orbital de energía, las crestas indican la mayor probabilidad de encontrar el electrón y los nodos la menor probabilidad para encontrarlos, por ejemplo en esta imagen vemos que caben 5 longitudes de onda en el círculo de manera muy precisa pero cuando esto no pasa se observa una interferencia destructiva dando a la cancelación o interferencia destructiva de la onda como se observar en la siguiente imagen:



Figura 6. Representación pictórica de la interferencia destructiva.

Preguntas

1. ¿Podemos producir una onda estacionaria en una cuerda superponiendo dos ondas que viajan en direcciones opuestas con la misma frecuencia, pero diferente amplitud? ¿Por que? ¿Podemos producirla superponiendo dos ondas que viajan en direcciones opuestas con diferente frecuencia, pero la misma amplitud? ¿Por que?

2. Las olas en el agua son una combinacion de ondas longitudinales y transversales. Defienda la siguiente afirmacion: "Cuando las olas chocan contra una pared vertical, ese punto es un nodo del desplazamiento longitudinal, pero un antinodo del desplazamiento transversal".

3. Ciertas ondas estacionarias en un alambre se describen con la ecuación (1), si $A_{sw} = 2{,}50mm$, $\omega = 942rad/s$, y $k = 0{,}750rad/m$. El extremo izquierdo del alambre esta en $x = 0$. ¿A que distancia de ese extremo están a) los nodos y b) los antinodos de la onda estacionaria?

Fuentes

[1] Física Universitaria, Sears, Zemansky, (12ava Edición), Vol1, (Cap 15.)

Movimiento amortiguado

Una de las características que tiene la naturaleza son los cambios que se pueden presentar de manera química o física. En estos cambios existe interacción entre pequeñas partículas que a su vez generan intercambios de energía y movimiento, es importante recordar que la energía puede transformarse en diferentes formas como lo es la energía calórica o eléctrica pero no se crea ni se destruye (Principio conservación se la energía). Otra característica importante que podemos percibir al observar la naturaleza son los procesos físicos, muchos de estos suelen presentarse de forma periódica, es decir que se vuelven repetitivos de manera cíclica en un intervalo de tiempo fijo un ejemplo de esto es la rotación de la tierra con respecto al eje polar. Un movimiento periodo se presenta cuando el sistema oscila con respecto a la posición de equilibrio estable, dicho sistema realiza la misma trayectoria una y otra vez, primero en un sentido y luego en el sentido opuesto, el ciclo completo de la trayectoria se da al momento en que cruza dos veces la posición de equilibrio, este movimiento oscilatorio lo podemos observar en las cuerdas de los instrumentos musicales, en un sistema masa resorte, en las moléculas de una red cristalina, etc.

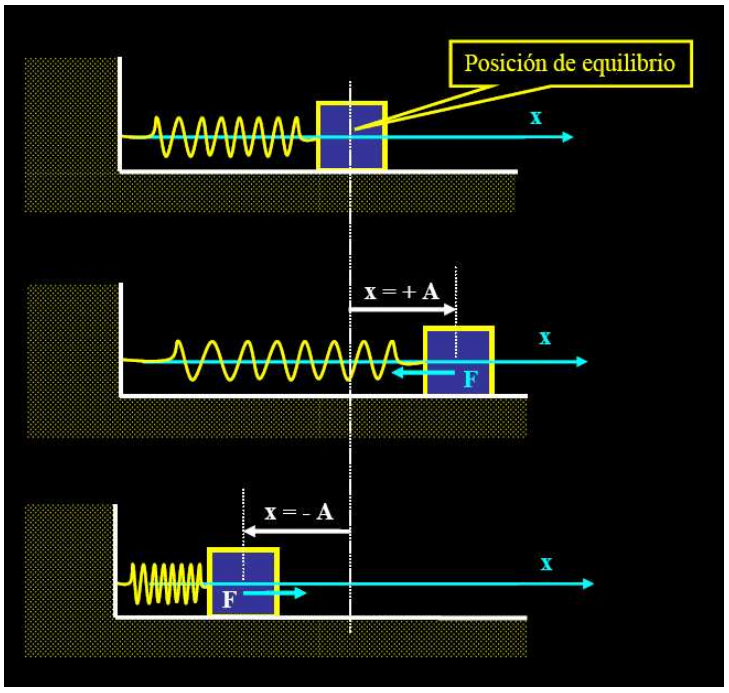


Figura 1. Sistema Masa Resorte

Estos movimientos oscilatorios están clasificados en tres tipos, el primero es el **movimiento armónico simple**, es aquel en que todo movimiento periódico y de trayectoria rectilínea tiene oscilaciones con amplitudes constantes (ej. Movimiento oscilatorio.) El segundo de ellos es el **movimiento amortiguado**, este nos dice que la amplitud decrece de manera gradual hasta que se detiene (ej. Sistema Masa- Resorte sumergido en un fluido) y finalmente pero no menos importante está el **movimiento forzado**, en este movimiento se introduce energía a un sistema amortiguado mientras este está en movimiento (ej. Energía que se le introduce al sistema cuando estamos jugando en un columpio.)

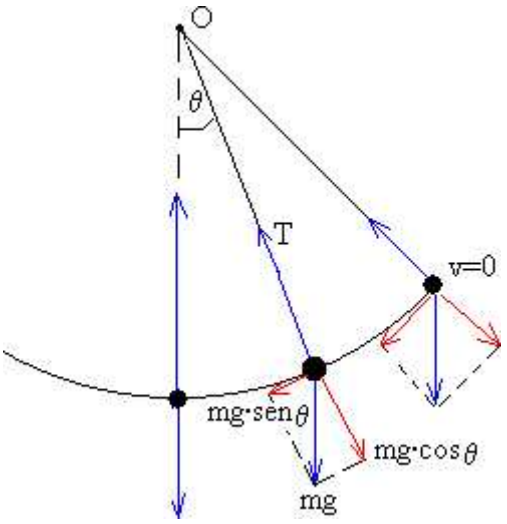


Figura 2. Péndulo simple.

El día de hoy nos centraremos un poco en lo que es el movimiento amortiguado, como sabemos todos los osciladores están expuestos a ciertos mecanismos de disipación de energía como puede ser la llamada fuerza de fricción, pero ¿Qué es eso de fuerza disipativa? Las fuerzas disipativas o fuerzas no conservativas son aquellas capaces de transformar la energía mecánica en calor, es decir que el trabajo realizado por la misma sobre una partícula que se mueve en cualquier dirección es diferente de cero.

Teniendo en cuenta lo anterior, un oscilador mecánico sometido únicamente a la Ley de Hooke no es del todo realista, pues este desprecia la presencia de dichas fuerzas y como hemos observado los osciladores

- Tienen una amplitud que disminuye respecto pasa el tiempo.
- Energía disminuye debido al W realizado por las fuerzas no conservativas.

Un ejemplo de amortiguador es la suspensión que encontramos en las bicicleta o en los automóviles, como sabemos, este tiene un resorte y en su parte interna un cilindro junto con un pistón, ahora bien, imaginemos que la bicicleta o el automóvil no dotaran de una suspensión, cada hundimiento en la carretera se sentiría como un golpe al interior del automóvil o que la suspensión no tuviese el cilindro junto con el pistón únicamente el resorte, en este caso el hundimiento producirá tantas oscilaciones que aun después de haber pasado por este las seguiríamos sintiendo dicha acción, es por esto que es de suma importancia que nuestra bicicleta o nuestro automóvil tengan un amortiguador, pues este genera en nuestros vehículos pequeñas oscilaciones que permitirán que este vuelva a su posición de equilibrio en el menor tiempo posible, ahora bien si introducimos un sistema masa resorte paralelo con el eje x, en un recipiente que contiene cierto fluido, cuyo amortiguamiento involucrado será proporcional a la velocidad del sistema.

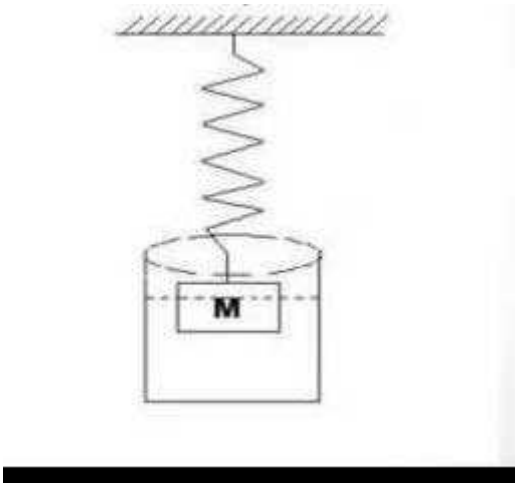


Figura 3. Sistema Masa-Resorte embebido en un fluido.

Partiendo de la segunda ley de Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kx - bv$$

Es decir

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} - kx = 0 \tag{1}$$

O bien

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} - \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

En donde $\gamma = b/m$ y $\omega_0^2 = k/m$.

Ahora bien, la constante b depende de la geometría del objeto ligado al resorte y de las características del fluido, el amortiguamiento queda entonces caracterizado por la magnitud γ que tiene dimensiones de frecuencia, y la constante ω_0^2 que representa la frecuencia angular natural del sistema en el caso de que estuviese ausente el amortiguamiento. Establecer una ecuación para las oscilaciones amortiguadas dependerá de introducir una frecuencia angular ω definida por

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

Sub-amortiguado se da cuando

$$\omega_0^2 > \frac{\gamma^2}{4} \tag{3}$$

Sobre amortiguado

$$\omega_0^2 < \frac{\gamma^2}{4} \tag{4}$$

Criticamente amortiguado

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma^2}{4} \tag{5}$$

Recordemos las ecuaciones de movimiento de lo anteriormente descrito

Movimiento armónico simple

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \tag{6}$$

Donde la solución para esta ecuación nos denota la posición de la partícula con respecto el tiempo

$$\varphi(t) = Acos(\omega_0 t + \alpha) \tag{7}$$

Movimiento amortiguado

$$\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \tag{8}$$

Aquí la posición de la partícula con respecto el tiempo para:

- Movimiento sobre amortiguado:

$$\varphi(t) = C_1 e^{\frac{-\gamma}{2}t + \omega' t} + C_1 e^{\frac{-\gamma}{2}t - \omega' t} \tag{9}$$

  Donde $\omega' = \sqrt{(\frac{\gamma}{2})^2 - \omega_0^2}$

- Movimiento críticamente amortiguado

$$\varphi(t) = C_1 e^{\frac{-\gamma}{2}t} + C_1 e^{\frac{-\gamma}{2}t} \tag{10}$$

- Movimiento subamortiguado

$$\varphi(t) = Acos(\omega^* t - \alpha) \tag{11}$$

  Donde $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\gamma}{2})^2}$

Movimiento amortiguado forzado

$$\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = F_0 cos(\omega_f t) \tag{12}$$

La solución para esta ecuación nos denota la posición de la partícula con respecto el tiempo es:

$$\varphi(t) = Ce^{\frac{-\gamma}{2}t} cos(cos(\omega^* t - \alpha) + \frac{F_0 cos(\omega_f t}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2) + \gamma^2 \omega_f^2}} \tag{13}$$

Donde $Ce^{\frac{-\gamma}{2}t} cos(cos(\omega^* t - \alpha)$ es la parte transitoria de la ecuación y $\frac{F_0 cos(\omega_f t}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2) + \gamma^2 \omega_f^2}}$ la parte estable.

Ejercicios

1. Determine la solución de la ecuación de movimiento asociada con el armónico amortiguado.

2. ¿Qué pasaría si $\gamma = 0$ en el movimiento amortiguado forzado?, ¿qué es el fenómeno de resonancia?

3. De acuerdo con la imagen número 2, realice la sumatoria de fuerzas para el eje Radial y el eje Tangencial, asociados con el Péndulo simple.

4. Una varilla uniforme de longitud L se sujeta por un clavo a un poste de modo que dos tercios de su longitud están por debajo del clavo, ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones cuando las amplitudes son pequeñas?

Ecuación de onda

Movimiento ondulatorio

Una Onda viajera clásica es una perturbación autónoma de un medio que se mueve en el espacio transportando energía e impulso. Nos inclinamos a imaginar la onda ideal como una entidad continua que existe en un área extendida. Cuando se arroja una piedra a un lago, se forman ondas circulares que se mueven hacia afuera **Figura 1.** Las ondas también se propagan a lo largo de una cuerda estirada, siempre y cuando la cuerda se mueva de un lado a otro **Figura 2.** Las ondas en el agua y en la cuerda son dos ejemplos comunes de movimiento ondulatorio, pero por ahora nos enfocaremos en estas ondas "mecánicas".



Figura 1. Imagen de una onda sobre la superficie del agua.

Ondas unidimensionales

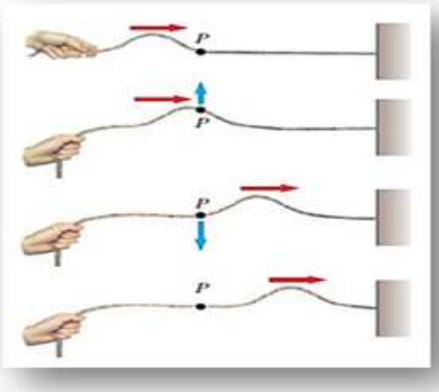


Figura 2. Representación pictórica de una onda sobre una cuerda.

Las ondas más corrientes y las que son más fáciles de visualizar son las ondas mecánicas entre las cuales están las ondas sonoras en el aire, las ondas en una cuerda, así como las ondas de compresión tanto en los sólidos como en los fluidos. Las ondas sonoras son longitudinales (el medio se desplaza en la dirección de propagación de la onda) **Figura 3.** Las ondas en una cuerda y las electromagnéticas son transversales (el medio se desplaza en una dirección perpendicular a la del movimiento de la onda) **Figura 2.** En todos los casos si

bien la perturbación que transporta energía avanza en el medio, los átomos individuales que participan en ello permanecen cerca de sus posiciones de equilibrio: la perturbación avanza, pero no el medio material se trata de una de las características principales de una onda que la distingue de un flujo de partículas, siendo precisamente esta propiedad la que permite la propagación de las ondas a velocidades altas.

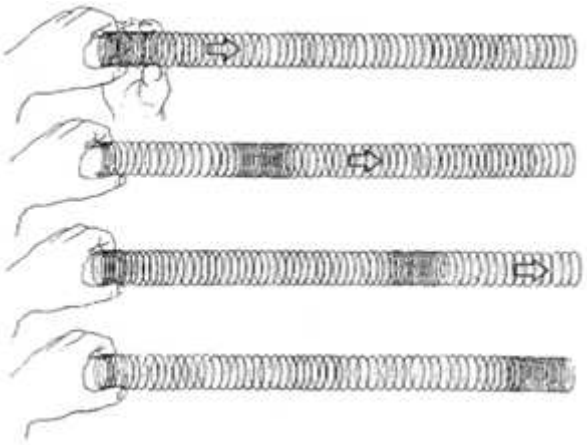


Figura 3. Representación pictórica de una onda longitudinal en un resorte.

Imaginemos una perturbación ψ que viaja en la dirección positiva de x con una velocidad constante v. La naturaleza especifica de la perturbación no es por el momento importante, podría ser el desplazamiento vertical de la cuerda en la **Figura 2.** Dado que la perturbación está en movimiento debe ser una función tanto de la posición como del tiempo, pudiendo, por consiguiente, escribirse como

$$\psi = f(x,t) \tag{1}$$

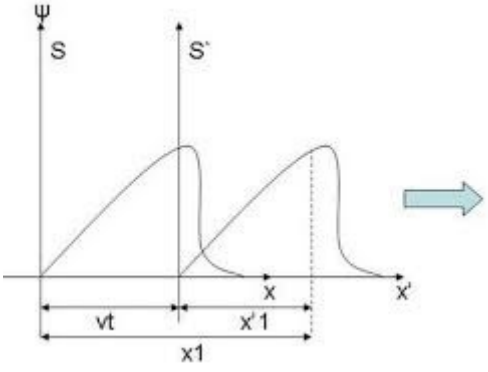


Figura 4. Imagen de una perturbación tomada desde el inicio hasta el final de su desplazamiento a través del espacio.

Por el momento nos limitaremos a una onda que no cambia su forma mientras avanza a través del espacio. La **Figura 4.** Es una exposición de una perturbación, tomada al comienzo y al final del intervalo de tiempo t, el pulso a realizado un desplazamiento vt a lo largo del eje x, pero en todos los otros aspectos permanece inalterada. Ahora introducimos un sistema coordenado S‘ que viaja junto con el pulso a la velocidad v. En este sistema ψ ya no es

función del tiempo y al movernos junto con S‘, vemos un perfil constante estacionario con la misma forma funcional que la ecuación (2)

$$f(x,0) = f(t) \tag{2}$$

Aquí la coordenada es x‘ en lugar de x, de tal forma que

$$\psi = f(x') \tag{3}$$

La perturbación se ve igual para cualquier valor de t en S‘ como lo era en S para $t = 0$ cuando S y S‘ tenían un origen común. De la **Figura 3.** Se deduce que

$$x' = x - vt \tag{4}$$

De tal forma que ψ puede escribirse en términos de las variables asociadas con el sistema estacionario S como

$$\psi(x,t) = f(x - vt) \tag{5}$$

Entonces, esto representa la forma más general de la función de onda unidimensional. Para ser más específicos, solamente tenemos que escoger una forma, ecuación (2) y luego reemplazar (x–vt) por x en $f(x)$. La expresión resultante describe una onda que tiene el perfil deseado y que se mueve en la dirección positiva del eje x con una velocidad v.

La ecuación diferencial de la onda

En 1747, Jean Le Rond d‘ Alembert incorporo unas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales al tratamiento matemático de la física. Ese mismo año, escribió un artículo sobre el movimiento de cuerdas vibrantes en el que aparece, por primera vez la llamada ecuación diferencial de ondas. Esta ecuación diferencial en derivadas parciales, de segundo orden y lineal se utiliza normalmente para definir toda clase de onda física. Se trata una ecuación diferencial en derivadas parciales porque la onda tiene que ser una función de varias variables independientes, es decir, las del espacio y tiempo. Una ecuación diferencial lineal está compuesta esencialmente por dos o más términos, cada cual hecho por una constante que multiplica a una función $\psi = f(x)$ o a sus derivadas. Lo importante es que cada termino tiene que aparecer solo en su primera potencia; no puede haber tampoco ningún producto cruzado de ψ con sus derivadas o de sus derivadas. Recuerden que el orden de una ecuación diferencial equivale al orden de la derivada mas alta en aquella ecuación.

Por lo tanto, ahora podemos deducir la forma unidimensional de la ecuación de onda a sabiendas de que la onda más simple que viaja con una velocidad fija necesita dos constantes (amplitud y frecuencia o longitud de onda) para especificarla sugiriendo así derivadas segundas.

Anexo 4. Guías paso a paso de mecánica clásica

Ejercicios de cinemática

1. Un automóvil parte del reposo y se acelera uniformemente hasta alcanzar una rapidez de $5\frac{m}{s}$ en $10s$. Encuentre su aceleración y la distancia que recorre en este tiempo.

   Para poder obtener una solución a este problema primero debe establecerse los datos.

- Datos

$$v_0 = 0 \tag{1}$$

$$v_f = 5\frac{m}{s} \tag{2}$$

$$t = 10s \tag{3}$$

Como la aceleración es:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} = \frac{(5-0)\frac{m}{s}}{10s} = 0{,}50\frac{m}{s^2}$$

Para la velocidad tenemos

$$\overline{v} = \frac{5+0}{2} = 2{,}5\frac{m}{s}$$

Y por último el desplazamiento viene dado por:

$$s = \overline{v} * t = (2{,}5\frac{m}{s})(10s) = 25$$

2. Un automóvil parte del reposo y se acelera a $4\frac{m}{s^2}$ durante una distancia de $20m$. ¿Con qué rapidez ira en ese momento? ¿Cuánto tiempo tardo?

- Datos

$$v_0 = 0 \tag{4}$$

$$a = 4\frac{m}{s^2} \tag{5}$$

$$S = 20m \tag{6}$$

Se remplaza en la siguiente expresión para el desplazamiento S

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a * S \tag{7}$$

$$v_f^2 = (0\frac{m}{s})^2 + 2(4\frac{m}{s^2})(20m)$$

$$v_f = \pm(160\frac{m^2}{s^2})^{\frac{1}{2}} = \pm 12{,}6\frac{m}{s}$$

Solo es de interés la solución positiva ya que se toma el movimiento del auto en el sentido positivo de las x. Dicho esto se procede a hallar el tiempo

$$at = v_f - v_0 \tag{8}$$

$$(4\frac{m}{s^2})t = 12{,}6\frac{m}{s} - 0\frac{m}{s}$$

$$t = \frac{12{,}6s}{4}$$

$$t = 3{,}15s$$

3. En 1904 Ford estableció el récord mundial de velocidad para una milla en un Ford 999 y tardo 39.4s. ¿Cuál fue su rapidez media en millas por hora y en kilómetros por hora?

- Datos

$$S = 1milla \tag{9}$$

$$t = 39{,}4s \tag{10}$$

$$v_m = \frac{1}{39{,}4s}\frac{milla}{s} = 0{,}025\frac{millas}{s}$$

$$0{,}025\frac{milla}{s} * \frac{1{,}609km}{1milla} * \frac{3600s}{1h} = 144{,}81\frac{km}{h}$$

$$0{,}025\frac{milla}{s} * \frac{3600s}{1h} = 90\frac{millas}{h}$$

4. Una muchacha arroja una pelota en línea recta hacia arriba con una rapidez de $40\frac{ft}{s}$, como se muestra en la **Figura 1.**¿Cuánto tiempo tardará en llegar a un punto que se localiza $20ft$ arriba del suelo, cuando se encuentre cayendo de regreso? Despréciense los efectos del aire.

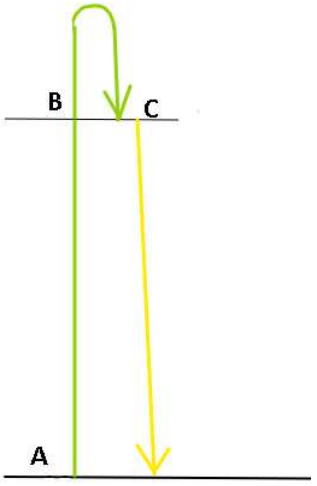


Figura1. Representación pictórica del problema 4.

- Datos

Tomando el acenso como positivo se tiene:

$$a = -32\frac{ft}{s^2} \tag{11}$$

$$s = 20ft \tag{12}$$

$$v_0 = 40\frac{ft}{s} \tag{13}$$

Se procede a hallar la v_f

$$2aS = v_f^2 - v_0^2 -$$

$$2 * (-32\frac{ft}{s^2})(20ft) = v_f^2 - (40\frac{ft}{s})^2$$

$$-1280\frac{ft^2}{s^2} + 1600ft^2s^2 = v_f^2$$

$$(320\frac{ft^2}{s^2})^{\frac{1}{2}} = v_f$$

$$\pm 17{,}9\frac{ft}{s} = v_f$$

Se procede a escoger la solución negativa ya que en esta se establece el movimiento de caída del cuerpo para pasar por el punto **C** el signo positivo representa la solución donde la pelota va de manera ascendente al punto B

$$v_f = v_0 + at$$

$$-17{,}9\frac{ft}{s} = 40\frac{m}{s} - (32\frac{ft}{s^2})t$$

$$17{,}9t = 40\frac{ft}{s} + 17{,}9\frac{ft}{s}$$

$$32t = 57{,}9s$$

$$t = \frac{57{,}9}{32}s = 1{,}81s$$

5. una piedra es lanzada en línea recta hacia arriba con una rapidez v desde un punto localizado a h metros sobre el suelo. Demuéstrese que el tiempo que tarda la pelota en golpear el suelo es

$$\frac{v}{g}(1 + (1 + \frac{2hg}{v^2})^{\frac{1}{2}}) \tag{14}$$

Si se observa la **Figura 2.** y por galileo sabemos que la velocidad inicia es la velocidad final de la piedra por lo tanto para esta será v. Para el instante en el que pasa por h otra vez tenemos la siguiente expresión

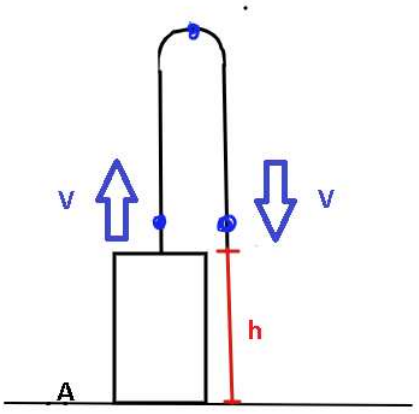


Figura 2. Representación pictórica de la situación del problema 5.

$$v_f^2 = v_0^2 - 2g\Delta y$$
$$v_f^2 = v^2 - 2g(y_f - y_0)$$

como $y_0 = h$ y $y_f = 0$

$$v_f^2 = v^2 - 2g(0 - h)$$
$$v_f^2 = v^2 + 2gh$$
$$v_f = (v^2 + 2gh)^{\frac{1}{2}}$$
$$v_f = \pm(1 + \frac{2gh}{v^2})^{\frac{1}{2}} v$$

retomando la formulación para la velocidad

$$v_f = v_0 - gt$$
$$t = \frac{v_f - v_0}{-g}$$

Asumiendo la solución negativa ya que la piedra va cayendo:

$$t = \frac{-(1 + \frac{2gh}{v^2})^{\frac{1}{2}} v - v}{-g}$$
$$t = \frac{v}{g}((1 + \frac{2gh}{v^2})^{\frac{1}{2}} + 1)$$

Ejercicios propuestos

1. Una pelota de basketball lanzada al canasto comienza a caer verticalmente desde este, sin velocidad inicial. En el mismo instante, desde un punto situado a una distancia l del canasto, se tira una pelota de tenis contra la pelota de basketball. ¿Con que velocidad inicial debe ser lanzada la pelota de tenis para que choque con la de basketball a una distancia h del cesto?

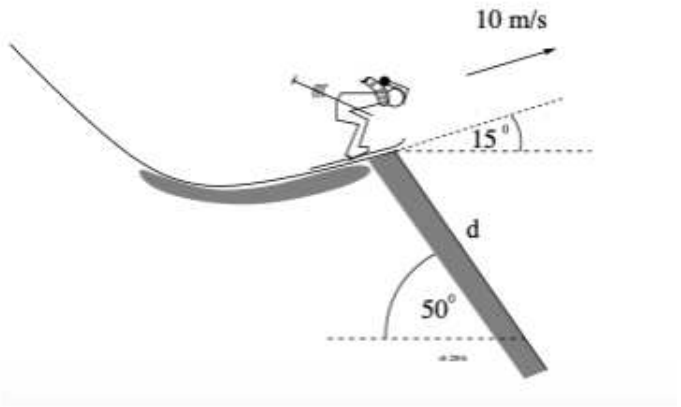
2. Un punto se mueve sobre un camino circular en el plano xy, con coordenadas dadas por $x = rcos(\frac{\alpha t2}{2})$, $y = rsen(\frac{\alpha t_2}{2})$, donde r y α son constantes. Interprete el significado de r y α y determine las componentes x e y de la aceleración del punto cuando $(a)t = 0$ y $(b)\alpha(t2) = \pi$.

3. El piloto de un avión que transporta un paquete de correo a un lugar remoto desea soltarlo en el momento justo para que alcance el punto A. ¿Qué ángulo θ con la horizontal deberá formar la visual al blanco en el instante del lanzamiento? El avión vuela horizontalmente a una altura de $152[m]$ con una velocidad de $193[km/h]$.

4. Una partícula se mueve en una espiral plana $r = Aexp(k?)$, tal que la rapidez se mantiene constante e igual a v_0. Determine:

   i. a en función de r y θ;
   ii. Demuestre que en todo instante la aceleración es perpendicular a la velocidad;
   iii. encuentre el ángulo θ y la velocidad angular $\dot{\theta}$ en función del tiempo.

5. Un esquiador deja una rampa de salto con una rapidez de 10 [m/s], formando un ángulo de 15 grados hacia arriba de la horizontal, como se indica en la figura. La inclinación de la ladera de la montaña es de 50 grados y la resistencia del aire es despreciable. Encuentre: a) la distancia a la que cae el esquiador a lo largo de la ladera de la montaña, y b) las componentes de la velocidad justo en el instante en el que cae en la ladera.



Ejercicios de Dinámica

1. El helicóptero del dibujo se mueve horizontalmente hacia la derecha con una velocidad constante $\overrightarrow{v}$. El peso del helicóptero es $p = 53800N$. La fuerza acensional $\overrightarrow{F}$ generada por la rotación de las hélices forma un angulo de 21 grados con respecto a la vertical.
   a) ¿Cuál es la intensidad de la fuerza ascensional?
   b) Determine la resistencia del aire R que se opone al movimiento.

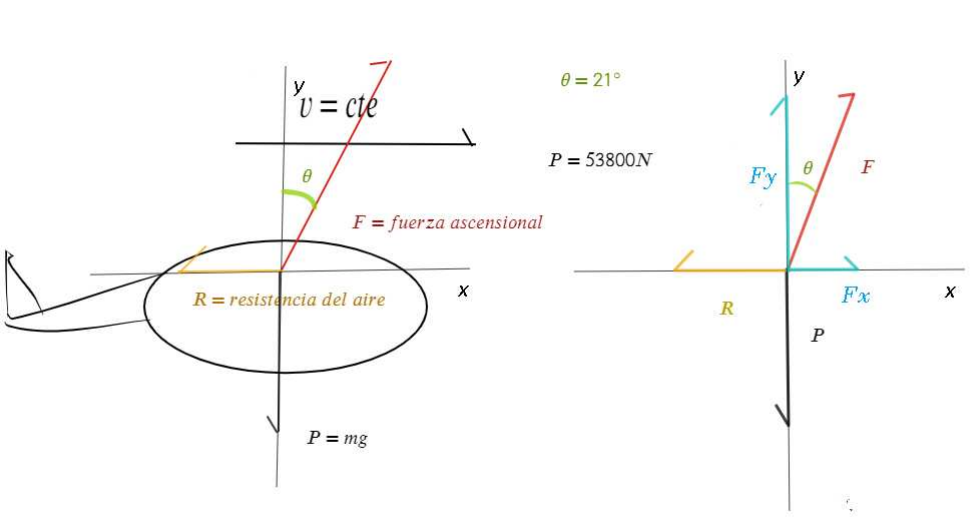


Figura 1. Esquema del problema y diagrama de fuerzas del sistema físico (helicóptero)

Sumatoria de fuerzas

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$-R + F_x = ma_x$$
$$-R + Fsen(21) = m(0)$$
$$Fsen(21) = R$$
$$0{,}36F = R \tag{1}$$
$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$-P + F_y = ma_y$$
$$-53800N + 0{,}93F = m(0)$$
$$0{,}93F = 53800N$$
$$F = \frac{53800N}{0{,}93} = 57849{,}5N \tag{2}$$

Remplazando ***(2)*** en ***(1)***

$$0{,}36(57849{,}5N) = R$$
$$20825{,}85N = R \tag{3}$$

2. Una botella de vino de cosecha, de 1.4kg, descansa horizontalmente en un botellero como se muestra en la **Figura 2.**. Las dos superficies de la derecha forman un ángulo de 90 grados y la superficie de la derecha forma un ángulo de 45 grados con la horizontal. Cada superficie genera una fuerza sobre la botella perpendicular a la superficie. Ambas fuerzas tienen el mismo módulo $\boldsymbol{F}$. Hallar $\boldsymbol{F}$

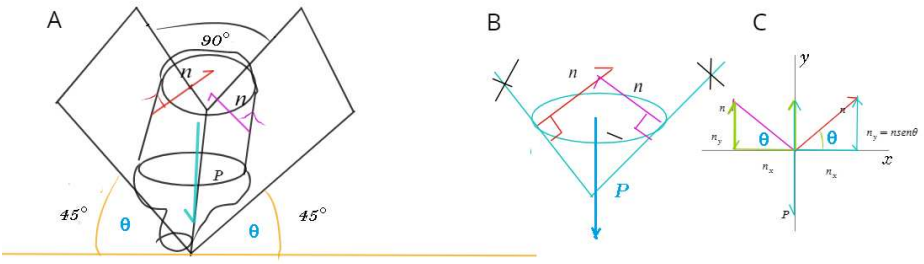


Figura 2. A) Representación pictórica del problema. B) Vista frontal del sistema físico. C) Diagrama de cuerpo libre.

Sumatoria de fuerza.

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$\Sigma F_x = 0$$
$$-n_x + n_x = 0 \tag{4}$$
$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$-P + 2n_y = 0 \tag{5}$$
$$-(1{,}4kg) * (9{,}8m7s^2) + 2nsen(45) = 0$$
$$n = \frac{13{,}72N}{1{,}41}$$
$$n = 9{,}73N \tag{6}$$

3. Realice el siguiente sistema teniendo en cuenta los datos de la **Figura 3.**.

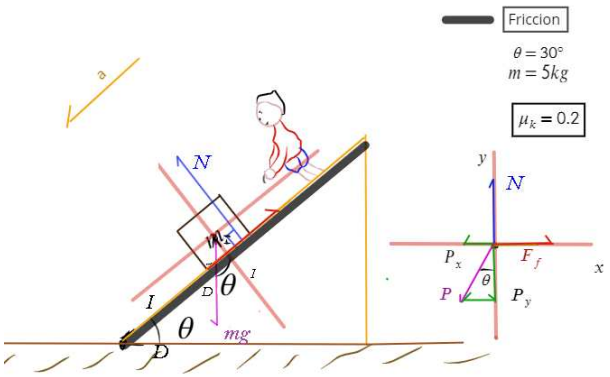


Figura 3. Representación pictórica del problema con su respectivo diagrama de cuerpo libre y los datos.

Hallar la aceleración del sistema.

Para ello primero se procede a realizar la descomposición vectorial.

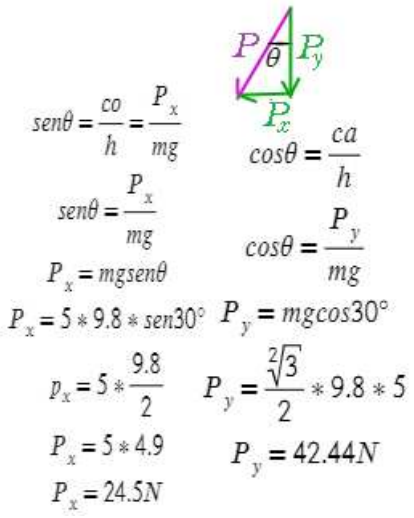


Figura 4. Descomposición del vector peso en sus componentes rectangulares (x, y).

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$-P_x + F_f = ma_x$$

$$-24{,}5N + 8{,}49N = (-5kg)a$$

$$\frac{-24{,}5N + 8{,}49N}{-5kg} = a$$

$$3{,}2\frac{m}{s^2} = a \tag{7}$$

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$N - p_y = ma_y$$

$$N - p_y = m(0)$$

$$N = P_y$$

$$N = 42{,}44N \tag{8}$$

4. Un automovil de 3300lb viaja a 38mi/h cuando de aplican los frenos hasta quedar en reposo. Los neumáticos al derrapar experimentan una fuerza de rozamiento de aproximadamente 0.7 veces el peso del automóvil. ¿Qué distancia recorre el automóvil antes de detenerse?

Lo primero es hacer la conversión de los datos al SI.

$$P = 3300lb * \frac{4{,}45N}{1lb} = 14700N$$

$$m = \frac{P}{g} = \frac{14700N}{9{,}8\frac{m}{s^2}} = 1500kg$$

$$v = 38\frac{mi}{h} * 1{,}61\frac{km}{mi} * \frac{1h}{3600s} * \frac{1m}{10^{-3}km} = 17\frac{m}{s}$$

Para este problema se toma la definición de que la fuerza neta de un sistema es igual a su masa por la aceleración que esta experimenta.

$$F_{neta} = -m * a \tag{9}$$

Se tiene que la fuerza de rozamiento F_f es 0.7 veces mas pequeña que el peso del automóvil.

$$0{,}7P = F_f$$

$$0{,}7 * 14700N = 10300N$$

Sustituyendo este valor en ***(9)***.

$$10300N = -m * a$$

$$\frac{10300N}{-1500kg} = a$$

$$a = -6{,}9\frac{m}{s^2}$$

De esta forma y con la ayuda de la ecuación de cinemática

$$v_f^2 - v_0^2 = 2as$$

Despejamos ***s***

$$s = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a}$$

$$s = \frac{0 - (17\frac{m}{s})^2}{2(-6{,}9\frac{m}{s^2})}$$

$$s = \frac{289\frac{m^2}{s^2}}{13{,}8} = 20{,}94m$$

La distancia de frenado que necesita el automóvil o que recorre es de aproximadamente $21m$

5. Un chico que se encuentra en un trineo tiene una masa total de 60kg y esta acelerado a $1{,}5\frac{m}{s^2}$.¿Cuál es la magnitud de la fuerza que experimenta el chico y el trineo para llevar esta aceleración.

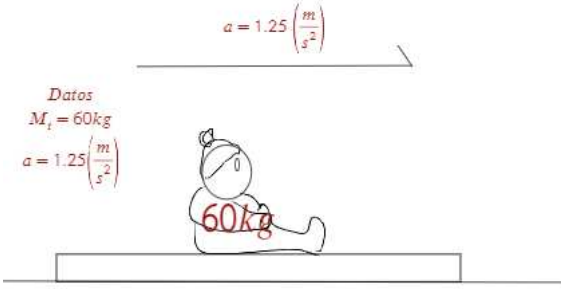


Figura 4. Representación pictórica del problema 5.

Retomando la **ecuación*(9)***

$$F_{neta} = 60kg * 1{,}25\frac{m}{s}$$

$$F = 75N$$

Ejercicios propuestos

1. El sistema de la figura consiste en dos masas m_1 y m_2 unidas por un hilo inextensible que pasa por un orificio practicado en una mesa horizontal sin rozamiento. En cierto instante, la masa m_2 esta en reposo y la masa m_1 se mueve con velocidad tangencial v_0 a una distancia r_0 del orificio. La masa m_2 puede o no continuar en reposo dependiendo de la relacion matematica entre m_1, m_2, r_0, y g.

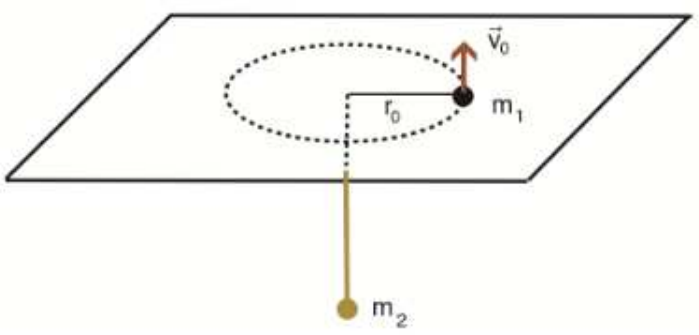


Figura 5. Representación pictórica del problema propuesto **1.**

- Determinar la relacion para que m_2 permanezca en reposo
- Suponiendo ahora que m_2 tiene velocidad no nula, calcular las velocidades de ambas partículas cuando la masa m_2 ha descendido una distancia $\boldsymbol{d}$. Se supone que el hilo tiene una masa mucho más pequeña que m_1 y m_2

2. Se muestra un péndulo cónico de masa m y longitud L que forma un angulo alfa con la dirección vertical. Se quiere analizar si se conserva el impulso angular desde los centros de momento Oy O'

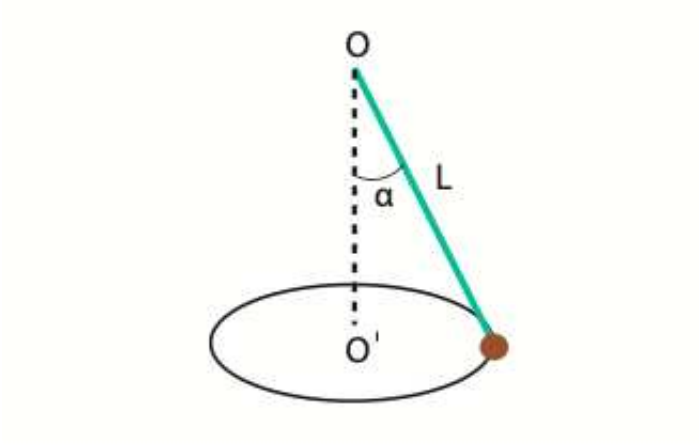


Figura 6. Representación pictórica del problema propuesto **2.**

3. Un cohete de 125 kg (incluyendo todo su contenido) tiene un motor que produce una fuerza vertical constante (el empuje) de 1720 N. Dentro de este cohete, una fuente de energía eléctrica de 15.5 N descansa sobre el piso. a) Obtenga la aceleración del cohete. b) Cuando éste ha alcanzado una altitud de 120 m, ¿con qué fuerza el piso empuja la fuente de energía? (Sugerencia: empiece con un diagrama de cuerpo libre para la fuente de energía eléctrica.)

4. Se tira horizontalmente de tres trineos sobre hielo horizontal sin fricción, usando cuerdas horizontales. El tirón es horizontal y de 125 N de magnitud. Obtenga

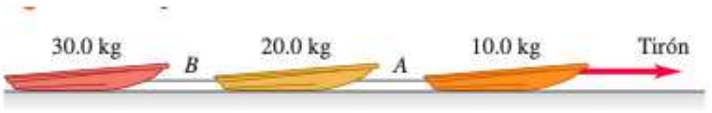


Figura 7. Representación pictórica del problema propuesto **4.**

- La aceleración del sistema.
- La tensión en las cuerdas A y B.

5. Una estudiante de física que juega con una mesa de hockey de aire (sin fricción) observa que, si imparte al disco una velocidad de 3.80 m/s a lo largo de la mesa, de 1.75 m, al llegar el disco al otro lado se ha desviado 2.50 cm a la derecha, pero aún con una componente de velocidad longitudinal de 3.80 m/s. Ella concluye, anticipadamente, que la mesa no está nivelada y calcula correctamente su inclinación a partir de la información mencionada. ¿Cuál es el ángulo de inclinación?

Ejercicios de medidas e incertidumbre

Realice las siguientes conversiones

1. $50\frac{km}{h} a \frac{mm}{\mu s}$

   Solución:

$$50\frac{km}{h} * \frac{mm}{\mu s} * \frac{10^3 m}{1km} * \frac{10^2 cm}{1m} * \frac{10mm}{1cm}\frac{1h}{3600s} =$$

$$\frac{50 * 10^6 * 10^{-3} mm}{3{,}6\mu s} = 13{,}8 * 10^3 \frac{mm}{\mu s}$$

2. $40\frac{millas}{s} a \frac{ft}{Ms}$

   Solución:

$$40\frac{millas}{s} * \frac{1609{,}34m}{1milla} * \frac{1ft}{0{,}3048m} * \frac{1Ms}{10^6 s} = 0{,}21\frac{ft}{Ms}$$

   Halle el error porcentual teniendo en cuenta que este está definido por:

$$\%e = \frac{\Delta x}{x} * 100\,\% \tag{1}$$

3. $109{,}3 \pm 0{,}5m$

   Solución:

$$\%e = \frac{0{,}5}{109{,}3} * 100\,\% = 0{,}46\,\%$$

4. $52{,}36 \pm 2{,}5\mu m$

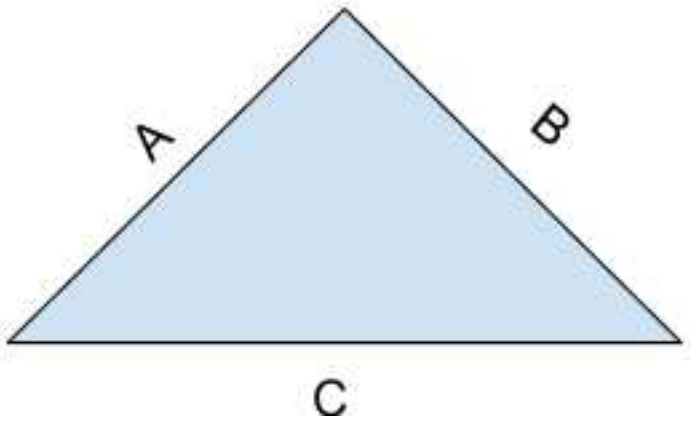
   Solución:

$$\%e = \frac{\Delta x}{x} * 100\,\%$$

$$\%e = \frac{2{,}5}{52{,}36} * 100\,\% = 4{,}7\,\%$$

Dispersión de error

Halle el error del área (Δs) del siguiente triángulo



si $A = 15 \pm 0{,}1cm$, $B = 15 \pm 0{,}2cm$ y $C = 20 \pm 0{,}2cm$

$$A_{rea} = \frac{b * h}{2} \tag{2}$$

$$h = ((A)^2 - (\frac{C}{2})^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Remplazando los valores de A y C en (2)

$$h = ((15 \pm 0{,}1)^2 - (\frac{20 \pm 0{,}2}{2})^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$h = [15^2 \pm 15^2[\frac{2 * 0{,}1}{15}] - \frac{20^2 \pm 20^2[\frac{2*0{,}2}{20}]}{4}]^{\frac{1}{2}}$$

$$h = [225 \pm 225 * [0{,}007] - (100 \pm 100 * 0{,}02)]^{\frac{1}{2}}$$

$$h = [225 \pm 1{,}58cm^2 - (100 \pm 2cm^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$h = [(225 - 100) \pm ((1{,}58)^2 + (2)^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$$

$$h = [125 \pm 2{,}54cm^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$h = [125]^{\frac{1}{2}} \pm [125]^{\frac{1}{2}} * (\frac{\frac{1}{2} * 2{,}54}{125})$$

$$h = 11{,}18 \pm 0{,}11cm$$

Como la base mide $20 \pm 0{,}2cm$ y la altura es de $11{,}18 \pm 0{,}11cm$ se tiene que (2) nos queda

$$A = \frac{1}{2}(20 \pm 0{,}2cm) * (11{,}18 \pm 0{,}11cm)$$

$$A = (20 * 11{,}18) \pm (20 * 11{,}18)[(\frac{0{,}2}{20})^2 + (\frac{0{,}11}{11{,}18})^2]^{\frac{1}{2}}$$

El área es de

$$A = 223{,}6 \pm 0{,}013cm^2$$

$$A = s \pm \Delta s \tag{4}$$

Ejercicios propuestos

1. Cuantos nanosegundos tarda la luz en viajar $1{,}00ft$ en el vació?

2. Un campo cuadrado que mide $100{,}0m$ por $100{,}0m$ tiene un área de 1,00 hectárea. Un acre tiene un área de 43,600 ft . Si un campo tiene un área de 12,0 acres, ¿cual es su equivalencia en hectáreas?

3. Estime el error de aproximación al medir
   a) una distancia aproximada de 75 cm con una cinta métrica
   b) una masa de unos 12 g con una balanza analítica
   c) un lapso de aproximadamente 6 min con un cronómetro.

4. Al comer una bolsa de galletas con chispas de chocolate, usted observa que cada una es un disco circular con diámetro de 8,50cm, 60,02cm y espesor de 0,050cm, 60,005cm.

   a) Calcule el volumen promedio de una galleta y la incertidumbre del volumen.
   b) Obtenga la razón diámetro espesor y la incertidumbre de dicha razón.

5. El motor mas potente que había para el automóvil clásico ChevroletCorvette Sting Ray modelo 1963 desarrollaba 360 caballos de fuerza y tenia un desplazamiento de 327 pulgadas cubicas. Exprese este desplazamiento en litros (L) usando solo las conversiones 1 L 51,000cm^3 y 1in 52.54cm