# Una mirada microscópica al espacio de fases de un sistema de pocas partículas

*A microscopic look into the phase space of a system of few particles*

**Elaborado por:**

Hector Fabián Mejía Rodríguez 20081135029




Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Licenciatura en Física

Bogotá, 2018

# Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de ciencias y Educación

Trabajo de grado modalidad monografía presentado como requisito final para optar por el título de licenciado en física

**Elaborado por:**

Hector Fabián Mejía Rodríguez 20081135029

**Director**
Edwin Munevar
**Codirector**
Alfonso Leyva

# Agradecimientos

Expreso los agradecimientos mas sinceros a mi director Edwin Munévar y codirector Alfonso Leyva, quienes aportaron de manera significativa con mi formación como licenciado, para mis padres quienes contribuyeron con mi formación como ciudadano y a mi abuelo, quien gracias a sus consejos hicieron de mi un hombre preocupado por las cuestiones verdaderas y realmente importantes en la vida.

A mi novia por su apoyo incondicional, y siempre tener una frase de aliento en este proceso tan importante para mi vida.

**Resumen**

El presente trabajo pretende demostrar cómo un conjunto de pocas partículas se puede modelar como un sistema estadístico, teniendo como eje central, las trayectorias descritas en el espacio de configuraciones, a través de un experimento tipo partícula libre. Mediante la formulación hamiltoniana y lagrangiana se esquematizará la distribución de estados en el espacio de fase.

**Abstract**

The present research work aims at demonstrating how a set of few particles can be modeled as a statistical system, having as a central axis, the trajectories described in the configuration space, through a free-particle experiment. By means of the Hamiltonian and Lagrangian formulation, the distribution of states in the phase space is schematized.

# Tabla de Contenido


**1 Problema** **1**
- 1.1 Objetivos . . . 1
- 1.2 Objetivo General . . . 1
- 1.3 Objetivos Específicos . . . 1
- 1.4 Introducción . . . 2

**2 Fundamentación Teórica** **4**
- 2.1 Temperatura y Energía Cinética. . . . 4
  - 2.1.1 Modelo molecular del gas ideal . . . 5
  - 2.1.2 Interpretación molecular de la temperatura . . . 8
- 2.2 Distribución de rapideces. . . . 10
- 2.3 Entropía o Desorden Molecular. . . . 14
- 2.4 La Hipótesis Ergódica . . . 15
- 2.5 Enfriamiento de átomos . . . 17

**3 Mecánica de la partícula libre.** **19**
- 3.1 Ecuaciones De Movimiento (Newton, Lagrange y Hamilton.) . 19
- 3.2 Energía de la partícula libre en el sistema dinámico . . . 23
- 3.3 Densidad de estados . . . 23

**4 Análisis de Datos y Resultados Preliminares** **26**
- 4.1 Configuración Experimental . . . 26

**5 Discusión breve de resultados** **78**

**6 Conclusiones** **80**

# Capítulo 1

# Problema

En el marco de la física estadística se tienen que considerar la importancia de prácticas de laboratorio, que permitan hacer análisis cuantitativos de las variables físicas que caracterizan los sistemas microscópicamente, como lo son posiciones y velocidades, para que a través de los promedios tipo ensamble se pueda acceder al comportamiento macroscópico del sistema.

## 1.1 Objetivos

## 1.2 Objetivo General

Un acercamiento a la física estadística a través del estudio de la distribución de estados en el espacio de fases, para comprender el comportamiento del gas ideal.

## 1.3 Objetivos Específicos

- Analizar el comportamiento de las trayectorias de un conjunto de partículas para demostrar la hipótesis ergódica a través de un experimento tipo partícula libre.
- Mediante la formulación hamiltoniana y lagrangiana de un conjunto de partículas libres, esquematizar la distribución de estados en el espacio de fases y de configuraciones, respectivamente.
- Demostrar la reversibilidad del sistema, a través del estudio de las trayectorias de las partículas individuales en un intervalo de tiempo
- Estudiar el gas ideal bajo esta aproximación teórico-experimental.

## 1.4 Introducción

En el presente trabajo de investigación, se pretende dar respuesta al comportamiento de una partícula libre para entender la funcionalidad del gas ideal, (entiéndase gas ideal, como un conjunto de partículas que no interactúan entre si y sus trayectorias son netamente aleatorias). Es fundamental reconocer la importancia de éste, ya que fue el primer modelo matemático que permitió determinar la interacción de las variables fisícas descritas en su sistema. El presente trabajo de grado es el producto de un esfuerzo investigativo, motivado por el deseo de presentar una disertación digna y de alta calidad. Espero resulte tan atractivo de leer como fue atractivo de realizar.

Se estudió la trayectoria de una serie de partículas en el montaje de labóratorio teoría cinético-molecular, para esto, se realizan videos que se analizan posteriormente en el programa Tracker, y de esta forma, se obtiene información relevante de las trayectorias descritas por las partículas, paso a paso por medio de sus gráficas, donde se puede evidenciar los espacios de fases para cada partícula (momento y posición en función del tiempo) y el espacio de configuraciones (posición de las particulas para cada coordenada). La metodología estudiada en el comportamiento de las diferentes trayectorias, se realizó con videos de una partícula, luego dos, luego tres... hasta siete partículas y de esta forma, caracterizando todos los posibles recorridos en el espacio de configuración. El análisis gráfico se llevó a cabo en el programa gnuplot para una mejor comprensión de los datos experimentales.

Una partícula libre es aquella que no se encuentra sujeta a ninguna interacción, es decir, no se ve afectada por ningún tipo de campo, por este motivo, la magnitud de la fuerza resultante es igual a $\overrightarrow{0}$. Por tal razón la partícula libre deberá estar totalmente aislada, pero entonces sería imposible observarla, porque en el proceso de la observación, hay siempre una interacción entre el observador y la partícula. En la práctica, sin embargo, hay algunas partículas que se pueden considerar libres, ya sea porque se encuentran suficientemente lejos de otras y sus interacciones son despreciables, o porque las interacciones con las otras partículas se cancelan, dando una interacción total nula.

En el estudio de la física nuclear se han observado y analizado diferentes fenómenos, que dan cuenta de información detallada del mundo microscópico. Uno de los comportamientos atómicos estudiados, fue llevado a cabo por Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji y Williani D. Phillips[1], quienes se basaron fundamentalmente, en analizar la relación existente entre la luz (ra-

diación) y los átomos (materia). Este experimento fue de gran interés para la física, ya que por medio de él se demostró, que cuando un átomo es bombardeado por fotones a partir de un haz de luz, estos disminuyen su rapidez y se obtiene información concluyente sobre su temperatura. Por tal motivo es necesario realizar prácticas en las cuales se profundice el análisis teórico-experimental, para obtener información relevante a pequeña escala y evidenciar su comportamiento a niveles macro.

# Capítulo 2

# Fundamentación Teórica

## 2.1 Temperatura y Energía Cinética.

La cantidad que se encarga de demostrar que tan caliente o que tan frio está un objeto en comparación con una referencia, es la temperatura. La temperatura se expresa a través de un número, que se representa como una marca en una escala termométrica según sea la necesidad. Casi toda la materia se expande cuando su temperatura aumenta y se contrae cuando su temperatura disminuye.

Cuando las moléculas de un objeto se mueven más rápidamente, se suele decir que la temperatura ha aumentado. El hecho es que el calor se difunde siempre que hay una diferencia de temperatura y se trasmite del objeto más caliente al más frio. La transmisión del calor es el resultado de una propiedad especial de las moléculas. Estas no pueden conservar la energía para ellas, sino que deben compartirla con las moléculas vecinas. Por esta propiedad de las moléculas, dos objetos uno caliente y otro frio, mantenidos unidos por un periodo suficiente, alcanzan al fin una temperatura igual. Cuando se utliza un termómetro en un cuerpo, se debe considerar un instante de tiempo (t), antes de que indique la temperatura a la que se encuentra determinado cuerpo; Durante este intervalo, el calor se trasmite desde el cuerpo hasta el termómetro, pero una vez que el se encuentra a la temperatura del cuerpo, ya no hay mas transmisión de calor. A esto se le conoce como la ley cero de la termodinámica o el equilibrio térmico.

La temperatura se asocia con los movimientos aleatorios de las moléculas de una sustancia. En el caso más sencillo de un gas ideal, la temperatura es proporcional a la energía cinética promedio debida al movimiento de

traslación de las moléculas (esto es, el movimiento que se da a lo largo de trayectorias aleatorias). La temperatura es más complicada en los sólidos y en los líquidos, cuyas moléculas tienen menos libertad de movimiento y poseen energía potencial. Pero no deja de ser cierto que la temperatura guarda una relación estrecha con la energía cinética promedio del movimiento de traslación de cada molécula. De esta forma se puede advertir, que cuando se hace contacto con una superficie caliente, esta es la energía cinética que ha sido trasferida de las moléculas de la superficie a las moléculas del contacto.

La temperatura no es una medida de la energía cinética total de las moléculas de una sustancia. Hay dos veces mas energía cinética en dos litros de agua hirviendo que en un litro, pero la temperatura de ambos litros de agua es la misma porque la energía cinética promedio de las moléculas es la misma en cada caso.

### 2.1.1 Modelo molecular del gas ideal

Para realizar el estudio molecular del gas ideal es necesario y de vital importancia tener en cuenta las siguientes afirmaciones:

**1**. En los gases, las moléculas son numerosas y la separación promedio entre ellas es demasiado grande en comparación con sus dimensiones. En otras palabras, las moléculas ocupan un volumen despreciable en el contenedor. Esto es consistente con el modelo de gas ideal, en el que las moléculas se modelan como partículas.

**2**. Las moléculas obedecen las leyes de Newton, pero como un todo tienen un movimiento aleatorio. Por "aleatorio" se entiende que cualquier molécula se puede trasladar en cualquier dirección con cualquier rapidez.

**3**. Las moléculas interactúan sólo mediante fuerzas de corto alcance durante colisiones elásticas. Esto es consistente con el modelo de gas ideal, en el que las moléculas no ejercen fuerzas de largo alcance unas sobre otras.

**4**. Las moléculas tienen colisiones elásticas contra las paredes, éstas conducen a la presión macroscópica sobre las paredes del contenedor.

**5**. El gas en consideración es una sustancia pura; es decir, todas las moléculas son idénticas.

En un recipiente de ancho L (ver Fig. 2.1), en el cual las partículas chocan entre sí barriendo diferentes trayectorias.

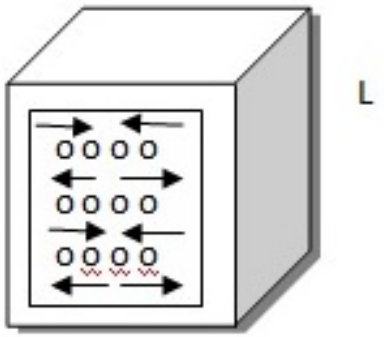



**Fig. 2.1** *Recipiente de ancho L, bajo las implicaciones del gas ideal.*

Se sabe que la presión experimentada dentro del recipiente es

$$P = \frac{F}{A} \tag{2.1}$$

Como A = $L^2$, se tiene:

$$P = \frac{F}{L^2} \tag{2.2}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, obtenemos

$$F = \frac{dp}{dt} \simeq \frac{\Delta p}{\Delta t} \simeq \frac{p_{(despues)} - p_{(antes)}}{\Delta t} \tag{2.3}$$

Aplicando la definición del momento, se sabe que la componente x de la fuerza promedio a largo plazo que ejerce la molécula sobre la pared es igual en magnitud y opuesta en dirección:

$$\frac{m(-v) - mv}{\Delta t} = \frac{-2mv}{\Delta t} \tag{2.4}$$

La rapidez de las partćulas se puede describir como $v = \frac{x}{t}$, y la distancia

recorrida como $x = 2l$, entonces:

$$\Delta t = \frac{2l}{v} \tag{2.5}$$

Por lo tanto se tiene:

$$\frac{-\cancel{2}mv^2}{\cancel{2}l} = \frac{-mv^2}{l} \tag{2.6}$$

De esta forma se tiene que la fuerza es:

$$F = \frac{-mv^2}{l} \tag{2.7}$$

Ahora, por la tercera ley de Newton, se sabe que la fuerza que ejerce la molécula sobre la pared, es igual en magnitud y opuesta en dirección que la fuerza que le ejerce la pared a la molécula:

$$F_{m-p} = -F_{p-m} \tag{2.8}$$

Por lo tanto:

$$\frac{mv^2}{l} = -(\frac{-mv^2}{l}) \tag{2.9}$$

De esta manera:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mv^2/l}{l^2} \tag{2.10}$$

Ahora:

$$PV = mv^2 \tag{2.11}$$

Se considera a una partícula con componentes de velocidad $v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}$ .El teorema de Pitágoras relaciona el cuadrado de la rapidez de la molécula con los cuadrados de las componentes de velocidad:

$$v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$$

Por tanto, el valor promedio de $\bar{v}^2$ para todas las moléculas en el contenedor se relaciona con los valores promedio de $v_{xi}^2, v_{yi}^2$ y $v_{zi}^2$ de acuerdo con la expresión

$$\bar{v_r}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2$$

Ya que el movimiento es completamente aleatorio (afirmación 2), los valores promedio $\bar{v}_x^2, \bar{v}_y^2$, y $\bar{v}_z^2$ son iguales uno a otro. Al usar este hecho, y la ecuación anterior, se encuentra que:

$$\bar{v}^2 = 3v_x^2 \tag{2.12}$$

Como sabemos que se tienen N partículas en nuestro recipiente, las podemos relacionar con la energía cinética de las mismas teniendo :

$$PV = \frac{1}{3}N\frac{mv^2}{2} \tag{2.13}$$

Se puede evidenciar que la presión de un gas es proporcional al número de moléculas por cada unidad de volumen y a la energía cinética traslacional promedio de las moléculas

$$P = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{1}{2}m\bar{v}^2\right) \tag{2.14}$$

Así concluimós que:

$$PV = \frac{2}{3}NE_k \tag{2.15}$$

De esta manera llegamos a la ecuación de estado de los gases ideales y se puede evidenciar que la energía cinética es proporcional a la temperatura.

$$PV = nRT \tag{2.16}$$

### 2.1.2 Interpretación molecular de la temperatura

Al escribir la ecuación (2.14) de la forma:

$$PV = \frac{2}{3}N\left(\frac{1}{2}m\bar{v}^2\right) \tag{2.17}$$

Al compararar la ecuación (2.17) con la ecuación (2.16) se puede reescribir como:

$$PV = Nk_BT \tag{2.18}$$

Al igualar las expresiones (2.17) y (2.18) se tiene:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}m\bar{v}^2\right) = k_BT \tag{2.19}$$

Y despejando la temperatura se obtiene:

$$T = \frac{2}{3k_B}\left(\frac{1}{2}m\bar{v}^2\right) \tag{2.20}$$

Este resultado muestra que la temperatura es una medida directa de la energía cinética molecular promedio. Reorganizando la expresión tenemos:

$$\frac{1}{2}m\bar{v^2} = \frac{3}{2}k_BT \tag{2.21}$$

Esto es, la energía cinética traslacional promedio por molécula es $\frac{3}{2}k_BT$ ya que $v_x^2 = \frac{1}{3}v^2$, es decir:

$$\frac{1}{2}m\bar{v_x}^2 = \frac{1}{2}k_BT \tag{2.22}$$

En forma similar, para las direcciones $y$ y $z$,

$$\tfrac{1}{2}m\bar{v_y}^2 = \tfrac{1}{2}k_BT \text{ y } \tfrac{1}{2}m\bar{v_z}^2 = \tfrac{1}{2}k_BT$$

De esta forma, cada grado de libertad traslacional aporta una cantidad igual de energía, $\frac{1}{2}k_BT$ al gas. (En general, un "grado de libertad" se refiere a un medio independiente por el que una molécula puede tener energía.) Una generalización de este resultado, conocido como teorema de equipartición de la energía, se dice que :

" Cada grado de libertad aporta $\frac{1}{2}k_BT$ a la energía de un sistema, donde posibles grados de libertad son aquellos asociados con la traslación, rotación y vibración de las moléculas".[2]

La energía cinética traslacional total de N moléculas de gas es simplemente N veces la energía promedio por cada molécula, que se conoce por la ecuación (2.21):

$$EK_{trastot} = N\left(\frac{1}{2}m\bar{v^2}\right) = \frac{3}{2}Nk_BT = \frac{3}{2}nRT \tag{2.23}$$

y esta se conoce como Energía cinética traslacional total de N moléculas de un gas ideal. donde se usó $k_B = R/N_A$ para la constante de Boltzmann y $n = N/N_A$ para el número de moles de gas. Si las moléculas de gas tienen sólo energía cinética traslacional, la ecuación (2.23) representa la energía interna del gas. Este resultado implica que la energía interna de un gas ideal sólo depende de la temperatura. La raíz cuadrada de $v^2$ se llama rapidez media cuadrática (rms) de las moléculas. De la ecuación (2.21) se encuentra que la rapidez rms es:

$$v_{rms} = \sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \tag{2.24}$$

donde M es la masa molar en kilogramos por cada mol y es igual a $m_0 N_A$. Esta expresión muestra que, a una cierta temperatura, las moléculas de menor masa m se trasladan más rápido, en promedio, que las moléculas que las moleculas de mayor masa.

## 2.2 Distribución de rapideces.

De esta forma, aparece en el escenario científico, Ludwig Edward Boltzmann, quien se encarga de revolucionar las ideas de la física a través de conceptos probabilísticos. Boltzmann se permitió entender por medio de los trabajos de Maxwell, la idea en la cual, las velocidades se rigen por medio de distribuciones estadísticas y que tienen un comportamiento similar a la distribución normal, o distribución gaussiana, es decir, la campana de gauss; esto sucede cuando el gas se encuentra en equilibrio.

Si N es el número total de moléculas, el número de molćulas con magnitudes de velocidad entre $v$ y $v + dv$ es $dN = N_v dv$. . Además, la fracción de moléculas con magnitudes de velocidad entre $v$ y $v + dv$ es $(N_v dv/N)$. Esta fracción también es igual a la probabilidad de que una molécula tenga una rapidez en el intervalo de $v$ a $v + dv$.

La expresión fundamental que describe la distribución de magnitudes de velocidad de N moléculas de gas es

$$N_v = 4\pi N(\frac{m}{2\pi k_B T})^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-mv^2/2k_B T} \tag{2.25}$$

donde $m$ es la masa de una molécula de gas, $k_B$ es la constante de Boltzmann y $T$ es la temperatura absoluta. El factor de Boltzmann se expresa como $e^{-E/k_B T}$ con $E = \frac{1}{2}mv^2$.

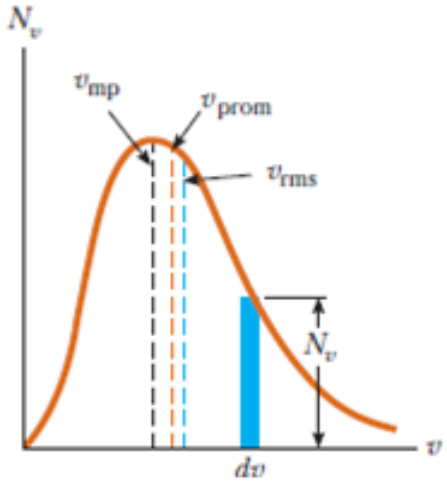



**Fig. 2.2** *Distribución de rapidez de moléculas de gas a cierta temperatura. El número de moléculas que tienen magnitudes de velocidad en el intervalo de v a v + dv es igual al área del rectángulo coloreado, Nv dv. La función Nv tiende a cero a medida que v tiende a infinito..*

Como se indica en la Fig 2.2 , la rapidez promedio es en cierto modo menor que la rapidez *rms*. La rapidez ms probable *vmp* es la rapidez a la que llega a un maximo la curva de distribucion. Con la ecuacion (2.22), se pueden hallar las diferentes rapideces. Para obtener los valores de raoidez entre dos valores determinados $a$ y $b$ hay que resolver la integral.

**Rapidez Media.**

Se tiene:

$$\frac{N_v(a \leq v \leq b)}{N} = \int_a^b dp(v) = \int_a^b G(v)dv = \int_a^b 4\pi v^2 (\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{(-\frac{mv^2}{2kT})} dv \tag{2.26}$$

Esta rapidez media, como cualquier valor medio, se puede obtener a partir de la funcide distribuci'on:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v dp(v) = \int_0^\infty v G(v)dv \tag{2.27}$$

$$= \int_0^\infty 4\pi v^3 (\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{(-\frac{mv^2}{2kT})} dv \tag{2.28}$$

$$= 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 e^{(-\frac{mv^2}{2kT})} dv \tag{2.29}$$

Esta integral puede resolverse con ayuda de tablas de integrales. En general, cuando la variable aparece con exponente impar antes de la exponencial:

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \tag{2.30}$$

Por lo tanto:

$$\langle v \rangle = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 e^{(-\frac{mv^2}{2kT})} dv \tag{2.31}$$

$$= 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} . \frac{1}{2(\frac{m}{2kT})^2} \tag{2.32}$$

$$\langle v \rangle = (\frac{8kT}{\pi m})^2 \tag{2.33}$$

De esta forma se encuentra, que la rapidez media de un de gas es tanto mayor cuanto mayor es la temperatura y cuanto menor sea la masa de las moleculas.

**Rapidez Cuadratica Media.**

Se tiene:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 dp(v) = \int_0^\infty v^2 G(v) dv \tag{2.34}$$

$$= \int_0^\infty 4\pi v^4 (\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{(-\frac{mv^2}{2kT})} dv \tag{2.35}$$

$$= 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^4 e^{(-\frac{mv^2}{2kT})} dv \tag{2.36}$$

Para resolver esta integral, en la que la variable aparece con un exponente par antes de la exponencial, se usa la relación:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{2n! \pi^{1/2}}{2^{2n+1} n! a^{n+1/2}} \tag{2.37}$$

Con lo que la rapidez cuadrática media resulta ser:

$$\langle v \rangle = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^4 e^{(-\frac{mv^2}{2kT})} dv \tag{2.38}$$

$$= 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} . \frac{4! \pi^{1/2}}{2^5 2! (\frac{m}{2kT})^{5/2}} \tag{2.39}$$

$$\langle v \rangle = \left( \frac{3kT}{m} \right) \tag{2.40}$$

Y la raíz de la rapidez cuadrática media (o rapidez 'root-mean square', $v_{rms}$) es:

$$v_{rms} = \langle v^2 \rangle^{1/2} = \left( \frac{3kT}{m} \right)^{1/2} \tag{2.41}$$

**Rapidez Mas Probable.**

Es aquella en la cual la probabilidad se hace máxima, lo que es equivalente, a que se hace máxima la función de distribución $G(v)$. Matemáticamente esto significa encontrar el valor de $v$ que hace nula la primera derivada de $G(v)$ respecto de $v$ y negativa la segunda derivada. Si se toma la primera derivada:

$$\frac{\partial G(v)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}[4\pi v^2 \left( \frac{m}{2\pi kt} \right)^{3/2} e^{(-\frac{mv^2}{2kT})}] \tag{2.42}$$

$$= 4\pi v^2 \left( \frac{m}{2\pi kt} \right)^{3/2} [2ve^{(-\frac{mv^2}{2kT})} - \frac{mv^3}{kT} e^{(-\frac{mv^2}{2kT})}] \tag{2.43}$$

$$= 4\pi v^2 \left( \frac{m}{2\pi kt} \right)^{3/2} ve^{(-\frac{mv^2}{2kT})} \left( 2 - \frac{mv^2}{kT} \right) \tag{2.44}$$

Hay tres valores distintos de $v$ tales que $\frac{\partial G(v)}{\partial v} = 0$. Estos valores son $v = 0; v = \infty$ y $v = (\frac{2}{kT})^{1/2}$. El único que es un verdadero máximo es el tercero, lo que se puede comprobar gráficamente (sobre la representación de $G(v)$ frente a $v$) o calculando la segunda derivada. Así, el valor más probable de la rapidez $v_p$) resulta ser:

$$v_p = \left( \frac{2}{kT} \right)^{1/2} \tag{2.45}$$

Las tres rapideces que se han caracterizado, rapidez media, la raíz de la rapidez cuadrática media y la rapidez más probable mantienen una relación constante para cada tipo de gas y temperatura.

## 2.3 Entropía o Desorden Molecular.

La física ha estado enmarcada por una serie de sucesos que le han permitido dar explicaciones concretas y eficaces a los fenómenos que han sido difíciles de comprender históricamente. En este ir y venir de ideas se han desarrollado las más hermosas y complejas teorías, que han dado origen a nuevas formas de concebir e interpretar el mundo a menor y mayor escala. En ese trasegar científico se llega al siglo XIX, en donde el pensamiento humano alcanza una de sus máximas expresiones, no solo en física, sino también en matemáticas, química, biología, filosofía, entre otras. La física por su parte, se encontraba inmersa entre el estudio del electromagnetismo y la estructura atómica, que por ese entonces, se consideraba un gran misterio a los ojos de los teóricos.

Aparece en el escenario científico una de las nociones más abstractas de la física, aquella que es capaz de relacionar Temperatura y energía interna como variables de estado;el valor de cada una sólo depende del estado termodinámico de un sistema, no del proceso que lo llevó a dicho estado..

La entropía originalmente se formuló como un concepto útil en termodinámica. Sin embargo, su importancia creció conforme el campo de la mecánica estadística se desarrolló porque las técnicas analíticas de esta ciencia proporcionan un medio alternativo de interpretación y un significado más global de la entropía. En mecánica estadística el concepto de una sustancia se describe en términos del comportamiento estadístico de sus átomos y moléculas. Un hallazgo importante en estos estudios es que los sistemas aislados tienden hacia el desorden y la entropía es una medida de dicho desorden.

Fue el físico austriaco Ludwig Boltzmann quien decide postular la segunda ley de la termodinámica, a través de un enfoque estadístico, demostrando así, que las colisiones entre moléculas se ven reflejadas así mismas o entendidas por Boltzmann, como la hipótesis caótica molecular. De esta forma, logra demostrar que los sistemas dinámicos siempre tienden a su estado de equilibrio, este pensamiento tan intuitivo, le trajo a Boltzmann muchos detractores académicos, entre los que se destacan Henri Poincaré y Ernst Mach.

La ecuación a la que llega Boltzmann para caracterizar su entropía es:

$$S = k\ Log\ W \tag{2.46}$$

En donde $k$ se define como la constante de Boltzmann y $W$ se define como el número de micro estados que corresponden a un macroestado, esto indica,

que para cada macroestado existen diferentes micro-estados que corresponden ha dicho macroestado. De esta manera se puede observar, que la entropía adquiere una verdad probabílstica, en el marco de la termodinámica.

Suponiendo que todos los micro-estados sean probables, aparece una hipótesis que pretende demostrar que efectivamente esto es cierto a través de medios mecánicos, es decir, el sistema emplea el mismo tiempo en cada uno de los estados que son concurrentes con la energía total del sistema.

Boltzmann determinó que la evolución de un sistema termodinámico está caracterizado por estados de mayor probabilidad, esto indica, que el estado de equilibrio es aquel que posee la mayor probabilidad, por lo tanto se puede afirmar que la entropía es una medida probabilística del macroestado particular del sistema.

Pero no siempre la entropía fue considerada de caracter probabilistico, la formulación original de entropía en termodinámica involucra la transferencia de energía por calor durante un proceso reversible, esto en cualquier proceso infinitesimal en el que un sistema cambia de un estado de equilibrio a otro. Si $dQ_r$ es la cantidad de energía transferida por calor cuando el sistema sigue una trayectoria reversible entre los estados, el cambio en entropía $dS$ es igual a esta cantidad de energía para el proceso reversible dividida entre la temperatura absoluta del sistema:

$$ds = \frac{dQ_r}{T} \tag{2.47}$$

Se considera que la temperatura es constante porque el proceso es infinitesimal. Ya que la entropía es una variable de estado, el cambio en entropía durante un proceso sólo depende de los puntos extremos, por lo que es independiente de la trayectoria real seguida. En consecuencia, el cambio en entropía para un proceso irreversible se determina al calcular el cambio en entropía para un proceso reversible que conecta los mismos estados inicial y final.

## 2.4 La Hipótesis Ergódica

El término ergódico, proviene de las raíces griegas ergos: trabajo y odos: trayectoria.

A un sistema dinámico se le pueden asociar diferentes magnitudes físicas que se interpretan en los diferentes estados en los que se podría encontrar el sistema. La teoría ergódica, surge a través de la posibilidad matemática que se tiene, cuando el promedio de valores de dichas variables físicas, conforme avanza el intervalo de tiempo, es el mismo valor que se obtendría al promediar la misma variable medida en diferentes sistemas iguales, en el mismo instante de tiempo.

Sean $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ las coordenadas generalizadas de un sistema dinámico y las variaciones de estas en el tiempo, se expresan como:

$$\frac{dq_1}{dt} = \dot{q_1}, \frac{dq_2}{dt} = \dot{q_2}, \frac{dq_3}{dt} = \dot{q_3} \dots \frac{dq_n}{dt} = \dot{q_n} \tag{2.48}$$

Se llaman velocidades generalizadas del sistema dinámico, y las variaciones instantáneas de estas, en el intervalo de tiempo, se expresan como:

$$\frac{d\dot{q}_1}{dt} = \ddot{q_1}, \frac{d\dot{q}_2}{dt} = \ddot{q_2}, \frac{d\dot{q}_3}{dt} = \ddot{q_3} \dots \frac{d\dot{q}_n}{dt} = \ddot{q_n} \tag{2.49}$$

Y se llaman aceleraciones generalizadas del sistema.

Si se define un punto arbitrario en el espacio de fase $(y, x)$ y $(y, z)$ su vector posición estará descrito como $\overrightarrow{r} = x_{\hat{i}} + y_{\hat{j}} + z_{\hat{k}}$ y este, como función del tiempo, corresponde a:

$$\overrightarrow{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \tag{2.50}$$

Y de esta forma la velocidad:

$$\overrightarrow{v} = \dot{x}_{\hat{i}} + \dot{y}_{\hat{j}} + \dot{z}_{\hat{k}} \tag{2.51}$$

Cuya magnitud al cuadrado estará caracterizada por:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \tag{2.52}$$

Si $m$ es la masa del punto en el espacio de fase, se le puede asociar su respectiva energía cinética T, esta vendrá descrita como:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.53}$$

Se reemplaza $v^2$ de la ecuación (2.52) en la ecuación (2.53) y se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{2.54}$$

Si se deriva parcialmente la energía cinética respecto alas coordenadas $x, y, z$ se obtendran las componentes del momento o cantidad de movimiento de la partícula para cada coordenada:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m\dot{x} = P_x \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = m\dot{y} = P_y \tag{2.56}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = m\dot{z} = P_z \tag{2.57}$$

El momento en coordenadas generalizadas estará descrito por:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = P_i \tag{2.58}$$

## 2.5 Enfriamiento de átomos

De esta forma se llega a los estudios microscópicos más importantes y de gran importancia para la física y la química, la estructura atómica. Desde Demócrito se ha tenido la idea, que toda la naturaleza está compuesta por partículas indivisibles que conforman la materia, esta noción ha estado presente en muchas de las teorías que se han consagrado como verdaderas a través de la validación de investigaciones que así lo demuestran, muchas de estas, confirmadas por experimentos de gran valor económico, científico, político y social. Todo esto se le atribuye al comportamiento sui generis que caracteriza al átomo

Fue en 1997 cuando uno de estos experimentos se confirmó, el enfriamiento de átomos era posible, esto gracias a dos físicos estadounidenses y uno francés, William Philips, Steven Chu y Claude Cohen-Tannoudji respectivamente. El Centre National de la Recherche Sientifique (CNRS) por sus siglas en francés afirma: "que el enfriamiento de átomos por laser consiste en intercambiar cantidad de movimiento entre los fotones de luz laser y los átomos, ganando los fotones la cantidad de movimiento que los átomos pierden" [1]. Sabemos que los fotones son partículas carentes de masa en reposo y tienen una energía asociada dependiendo de su frecuencia, esto quiere decir:

$$E = h\nu \tag{2.59}$$

Existen dos fenómenos inscritos a los fotones: la emisión y la absorción. Cuando el fotón colisiona con el átomo, este absorbe su energía, la absorción solo ocurre con luz de color adecuado. Cada átomo tiene un conjunto de valores que está preparado a absorber, dependiendo de su estructura interna. Los átomos son colocados entre haces de láser opuestos dos a dos, de tal modo que los átomos siempre se dirigen hacia a uno y alejándose de otro. Para poder entender este fenómeno hay que comprender el efecto Doppler o enfriamiento Doppler, según el cual, un observador en movimiento relativo respecto una fuente de ondas sonoras o luminosas, la percibe con mayor frecuencia, si su movimiento es hacia la fuente, y menor si se aleja de esta. Un átomo en estado de reposo puede ser llevado a un estado "oscuro" en el cual no absorbe fotones. Cohen Tannoudji logró enfriar átomos entre los años 1988 y 1995, con un dispositivo experimental capaz de seleccionar los átomos más veloces, y conducirlos al estado oscuro, estado donde la rapidez del átomo disminuye considerablemente. Se demostró entre 1988 y 1995, que el método funciona en una, dos y tres dimensiones. Con seis haces de láser, se alcanzo un estado en el que la distribución de rapideces corresponde a una temperatura de 0,18k, bajo estas condiciones se puede considerar que la temperatura del átomo está asociada directamente con el comportamiento de su rapidez.

# Capitulo 3

# Mecánica de la partícula libre.

## 3.1 Ecuaciones De Movimiento (Newton, Lagrange y Hamilton.)

A partir del estudio de la partícula libre, es correcto afirmar que aplicando la mecánica de Newton, Lagrange y Hamilton,se pueden calcular las trayectorias decritas por las partículas, si se sabe que no existen fuerzas externas actuando sobre ellas y éstas no están acopladas a ningń tipo de campo.

**Descripción Newtoniana:**

La ecuación de movimiento viene descrita como:

$$\overrightarrow{F} = \frac{\overrightarrow{dp}}{dt} \tag{3.1}$$

Se sabe que la cantidad de movimiento es constante, por lo tanto:

$$0 = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} \tag{3.2}$$

Como $\overrightarrow{p}$ es $m\overrightarrow{v}$ la ecuación (3.2) se puede escribir como:

$$0 = \frac{d(m\overrightarrow{v})}{dt} \tag{3.3}$$

Se sabe que $dx/dt = \overrightarrow{v}$, por lo tanto se obtiene:

$$m\frac{dx}{dt} = k \tag{3.4}$$

Ordenando la ecuación diferencial en variables separables se obtiene:

$$dx = \frac{k}{m}dt \tag{3.5}$$

Se integra a ambos lados de la igualdad:

$$\int dx = \int \frac{k}{m}dt \tag{3.6}$$

Resolviendo la integral:

$$x + c_1 = \frac{k}{m}t + c_2 \tag{3.7}$$

Sabiendo que $c_2$–$c_1 = C$ y despejando $x$ se obtiene:

$$x = \frac{k}{m}t + C \tag{3.8}$$

En donde $k/m$ hace las veces de una constante es decir, la pendiente. Y entonces se obtiene una ecuación de la forma:

$$y = mx + b \tag{3.9}$$

Que brinda información acerca de la trayectoria de la partícula libre.

**Descripción Lagrangiana:**

Utilizando el principio de Lagrange, el cual dice que la energía cinética de un cuerpo menos la energía potencial del mismo proporciona información relevante respecto a su trayectoria:

$$L = T - V \tag{3.10}$$

Y se sabe por definición que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Como no existe ninguna fuerza externa actuando sobre la partícula, se tiene:

$$L = T - \not{V}^0 \tag{3.11}$$

Por lo tanto:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}_k^2 \tag{3.12}$$

La ecuación de movimiento estará descrita por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}m\dot{q}_k\right]\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}_k^2\right) = 0 \tag{3.13}$$

De esta forma:

$$m_k\ddot{q}_k = 0 \tag{3.14}$$

Para un sistema de de $n$ partículas libres la ecuación de movimiento es la misma para cada partícula, la ecuación (3.14) se puede reescribir como :

$$\frac{d}{dt}\left(m_k\dot{q}_k\right) = 0 \tag{3.15}$$

Como $m_k\dot{q}_k = \overrightarrow{p}$ y este es constante, la ecuación 3.15 se puede escribir como:

$$m_k\dot{q}_k = C \tag{3.16}$$

Por lo tanto:

$$\dot{q}_k = \frac{C}{m_k} \tag{3.17}$$

reescribimos la ecuación (3.17) y se obtiene:

$$dq_k = \frac{C}{m_k}dt \tag{3.18}$$

Se integra a ambos lados de la igualdad y se logra:

$$\int dq_K = \int \frac{C}{m_K}dt \tag{3.19}$$

reseolviendo la integral se obtiene:

$$q_k = \frac{C}{m_k}t + C_a \tag{3.20}$$

Que tiene la misma estructura a:

$$y = mx + b \tag{3.21}$$

**Descripción Hamiltoniana:**

Utilizando la formulación Hamiltoniana tenemos, a partir de las ecuaciones canonícas:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Por lo tanto:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \cancel{V^0} \tag{3.22}$$

De esta manera sobre la coordenada $x$:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{3.23}$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \tag{3.24}$$

Sobre la coordenada $y$:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \tag{3.25}$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} \tag{3.26}$$

y sobre la coordenada z

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{3.27}$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m} \tag{3.28}$$

Como el Hamiltoniano es función de $\dot{q}_i$, $p_i$ y de $L$ se tiene:

$$H \sum \dot{q}_i + p_i - L$$

De tal modo que:

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z \tag{3.29}$$

Entonces se obtiene:

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - \left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)\right] \tag{3.30}$$

Por lo tanto se llega a:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \tag{3.31}$$

Y se obtiene la ecuación de movimiento para cada coordenada:

$$\dot{p_x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{3.32}$$

$$\dot{p_y} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \tag{3.33}$$

$$\dot{p_z} = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \tag{3.34}$$

## 3.2 Energía de la partícula libre en el sistema dinámico

En el sistema dinámico estudiado se evidencia que es conservativo, en el cual se asumen $n$ grados de libertad y sean $q = (q_1, q_2, \ldots q_n)$ y $p = (p_1, p_2 \ldots p_n)$ las coordenadas generalizadas y momentos generalizados respectivamente, el Hamiltoniano del sistema se define como:

$$H = T - V \tag{3.35}$$

En donde la energía cinética T, depende de las $q_i$ y de $p_i$ y la energía potencial dependerá de todas las $q_i$. La evolución del sistema en el intervalo de tiempo, se puede describir por medio de las ecuaciones canonícas de Hamilton, ya que $H$ no depende de $t$. Por lo tanto:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \ con \ i = 1, 2, 3 \ldots n \tag{3.36}$$

Como el sistema es conservativo, se asume que:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{3.37}$$

De tal forma se infiere que la energía mecánica total del sistema se conserva.

La hipótesis ergódica tiene validez en sistemas dinámicos aislados, en los cuales se cumple que el sistema evolucione según la misma trayectoria relacionada con las condiciones iníciales, es decir, con $t_0$, de allí que las órbitas no se intercepten entre sí.

## 3.3 Densidad de estados

Considerando el espacio de fase para la partícula libre, que se mueve en una sola dimensión dentro de una región fija $0 < x < l$. Si la partícula posee una energía $E$, el momentum de la particula vendra dado por:

$$P_x = \pm\sqrt{2mE} \tag{3.38}$$

Ya que la energía total de la partícula es cin—'etica. La cantidad de "celdas" en el espacio de fase, las cuales representan todos los posibles sistemas con

energia menor que: $E = p^2/2m$, es solo el área del espacio de fase representada abajo, dividida por el tamaño de una "celda" ($h_0 = \delta p_x \delta q_x$). Se puede denotar el número de celdas con energía menor que $E$ como $\phi(E)$

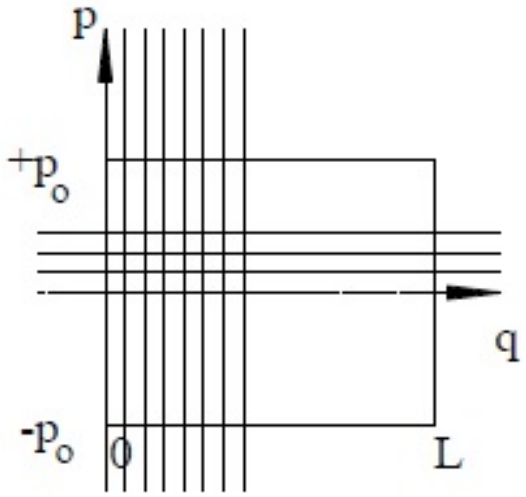



**Fig.2.3** *La región del espacio de fase para una partícula libre unidimensional limitada por la energía* $E = p^2/2m$ *y de dimensiones* $0 < x < l$.

La cantidad de celdas en el espacio de fase (el número de microestados del sistema) que corresponden para una partícula libre unidimensional, con una energía entre $E$ y $E + \delta E, \Omega E$, Por lo tanto debe ser :

$$\Omega(E) = \phi(E + \delta E) - \phi(E) = \frac{\partial \phi(E)}{\partial E} \delta E \tag{3.39}$$

o

$$\Omega(E) = \omega(E) \delta E \tag{3.40}$$

Donde $\omega(E)$ es la densidad de estados. Entonces se tiene:

$$\phi(E) = \frac{2P_x L_x}{h_0} = \frac{2L}{h_0} \sqrt{2mE} = \alpha E^{\frac{1}{2}} \tag{3.41}$$

Donde $\alpha$ es una cosntante que viene dada por $\alpha = \sqrt{8mL^2/h_0^2}$. De esta forma la cantidad de estados accesibles a una sola partícula unidimensional con energía entre cero y E es proporcional a $E^{\frac{1}{2}}$ . Pero esto es para una sola partícula unidimensional. En tres dimensiones, también podemos contar la cantidad de estados (celdas de espacio de fase) con energía menor que $E$, pero el espacio de fase en este caso es tridimensional y se debe considerar el volumen de seis dimensiones del espacio de fase accesible a la partícula

individual. Si supone que la partícula está confinada a una caja cúbica, cada dimensión es equivalente, y por lo tanto se tiene:

$$\phi(E) \propto E^{\frac{1}{2}} \tag{3.42}$$

para cada uno de los tres pares conjugados: $x, p_x; y, p_y$ y $z, p_z$ esto significa que la cantidad de células con energía inferior a E para una partícula libre en tres dimensiones viene dada por:

$$\phi(E) \propto E^{\frac{3}{2}} \tag{3.43}$$

$$\phi(E) = (\sqrt{8mL^2/h_0^2})^{3N} E^{\frac{3N}{2}} = (\sqrt{8m/h_0^2})^{3N} V^N E^{\frac{3N}{2}} \tag{3.44}$$

Siempre y cuando cada una de las partículas sea conocida. Si las partículas no son conocidas, entonces podemos intercambiar las partículas sin cambiar realmente el microestado del sistema. La cantidad de formas diferentes en que se pueden intercambiar N partículas es N!, por lo que se ha contado en exceso el número de microestados para este sistema. Por lo tanto, para partículas desconocidas, el número real de estados con energía menor a E viene dado por

$$\phi(E) = \frac{V^N}{N!}(\sqrt{8m/h_0^2})^{3N} E^{\frac{3N}{2}} \tag{3.45}$$

Se ha demostrado que el número de células (o microestados) en el espacio de fase es proporcional a la energía total del sistema elevado a alguna potencia, que se puede expresar en términos del número de grados de libertad del sistema. En el caso de N partículas que se mueven libremente en las tres dimensiones en una caja cúbica, hay $\mu$ grados de libertad. Por lo tanto:

$$\phi(E) = \frac{V^N}{N!}(\sqrt{8m/h_0^2})^{\mu} E^{\frac{\mu}{2}} \tag{3.46}$$

Para hallar la densidad de estados $\omega(E)$ se toma la derivada $\phi(E)$ con respecto a E, y se obtiene:

$$\Omega(E) = \frac{\partial \phi(E)}{\partial E}\delta E = \omega(E)\delta E = \frac{V^N}{N!}(\sqrt{8m/h_0^2})^{\mu} E^{(\frac{\mu}{2}-1)}\delta E \tag{3.47}$$

Ahora que el número de grados de libertad es proporcional al número de partículas en el sistema, N típicamente establecido, para que se tenga $(\frac{\mu}{2} - 1) \approx \frac{\mu}{2}$ y así obtener:

$$\omega(E) \propto E^{\frac{\mu}{2}} \tag{3.48}$$

# Capitulo 4

# Análisis de Datos y Resultados Preliminares

## 4.1 Configuración Experimental

El experimento fue llevado a cabo en los laboratorios de física de la Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas (Sede Macarena A), utilizando los siguientes Materiales:

1. Estroboscopio con indicacion digital.
2. Colector con cámara de registro.
3. Tripode phíwe.
4. Vaso de precipitación forma alta, 50 ml.
5. Cable de conexión; 32 A,750 mm. rojo.
6. Cable de conexión; 32 A,750 mm. azul.
7. Cuchara de acero fino; L, 210 mm.
8. Pepitas de poliestireno diferentes colores.
9. Cámara de video.
10. Computador (Tracker, Gnuplot)



**Fig. 4.1** *Montaje de laboratorio Teoría Cinética de los Gases.*

Como se observa en la Fig.4.1 el montaje teoría cinética de los gase permite realizar el análisis requerido para esquematizár las trayectorias de las particulas cuando se encuentran confinadas en un contenedor.

Inicialmente se obtendran las trayectorias en el espacio de fase (entiendase este, como una construcción matemática que permite representar el conjunto de posiciones y momentos unificados de un sistema de partículas). Luego en el espacio de configuraciones (entiendase este, como el espacio de todas las posibles posiciones instantáneas de un sistema mecánico). Teniendo claridad en que cada experiencia suministra una particula nueva respecto a la práctica anterior hasta llegar a siete particulas. Ésto para demostrar la pertinencia de la investigación y realizar análisis respecto a la información contenida en dichas gráficas.

**Condiciones iniciales de la práctica**:

- Potencial electrico = 3v
- Altura = 4cm
- tiempo = 0.343 s

La práctica se aborda desde una perspectiva teórica, resaltando la importancia del experimento como eje fundamental de la ciencia, reivindicando la fundamentación de la observación, toma de datos y análisis físico.

**Experiencia 1.(Una particula)**

En la primera experiencia se observa a una sola partícula que se encuentra dentro de un contenedor, como se muestra en la Fig. 4.2.

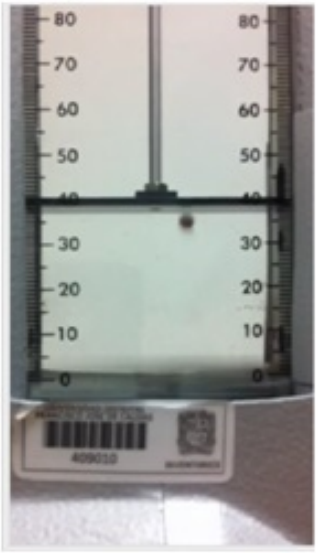
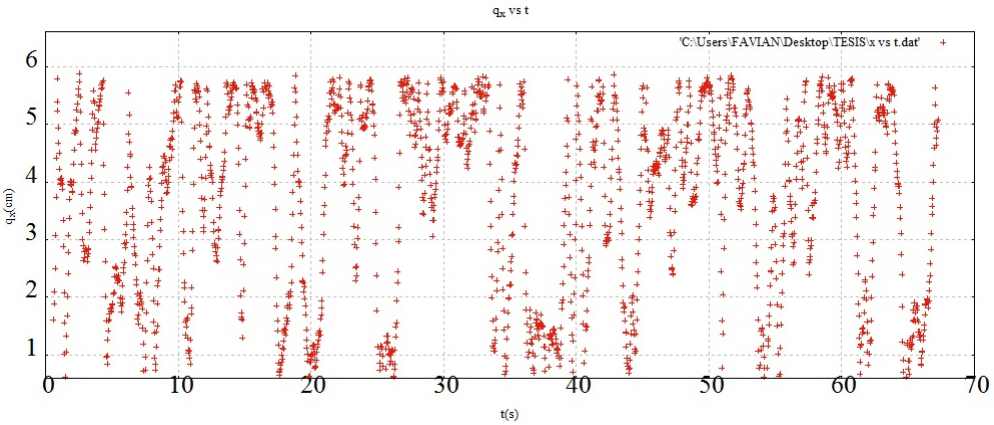


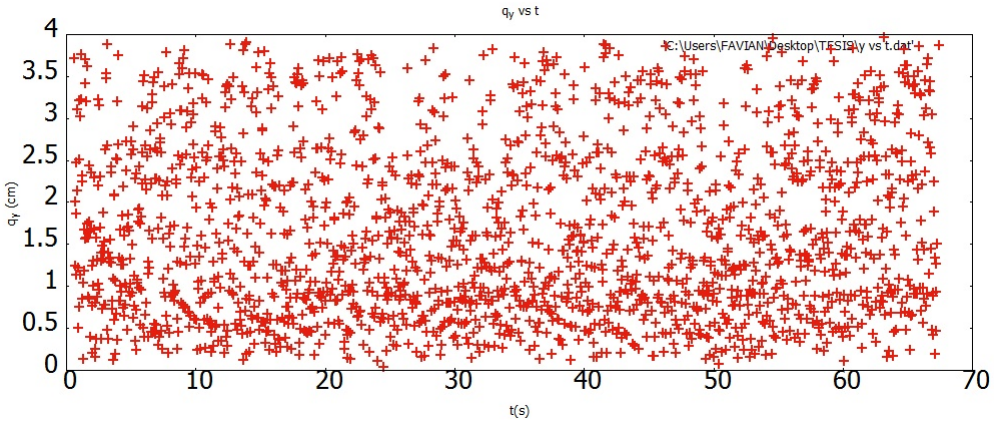

**Fig. 4.2** *Montaje Experiencia 1*

Se obtiene la siguiente gráfica para la pocisión $x$ en funcion del tiempo $t$



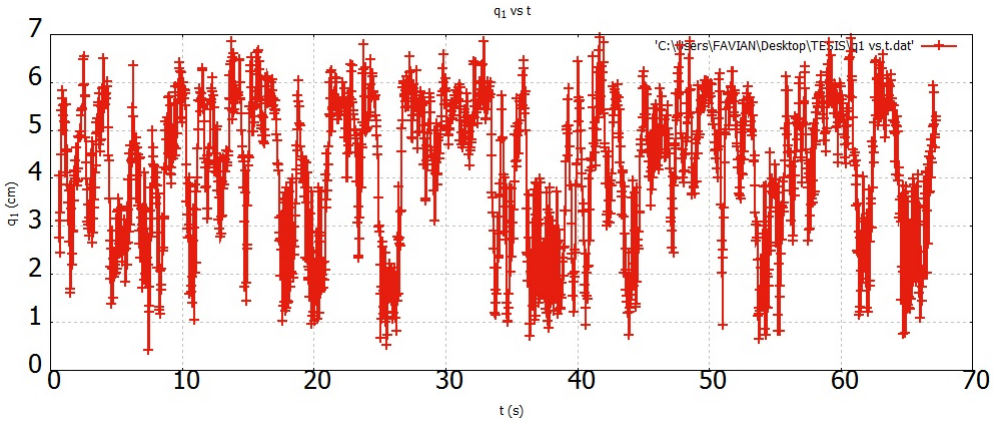

**Graf. 4.1** *Pocision $x$ en funcion del tiempo $t$ para una sola particula. Experiencia 1*

Para la pocisión en $y$ se obtuvo la siguiente gráfica:




**Graf. 4.3** *Pocisión y en función del tiempo t para una sola particula. Experiencia 1*

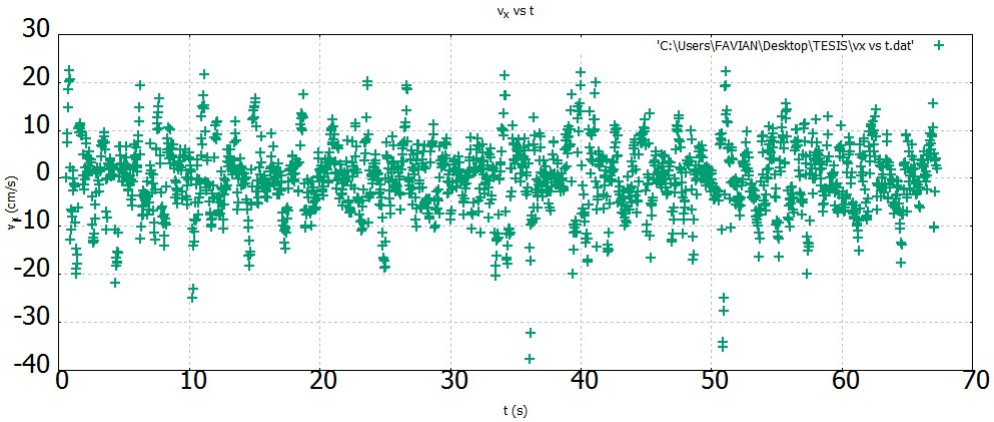
En coordenadas generalizadas se tiene para la posicion $q$ la siguiente grafica:




**Graf. 4.5** *Trayectoria de la particula en coordenadas generalizadas q. Experiencia 1*

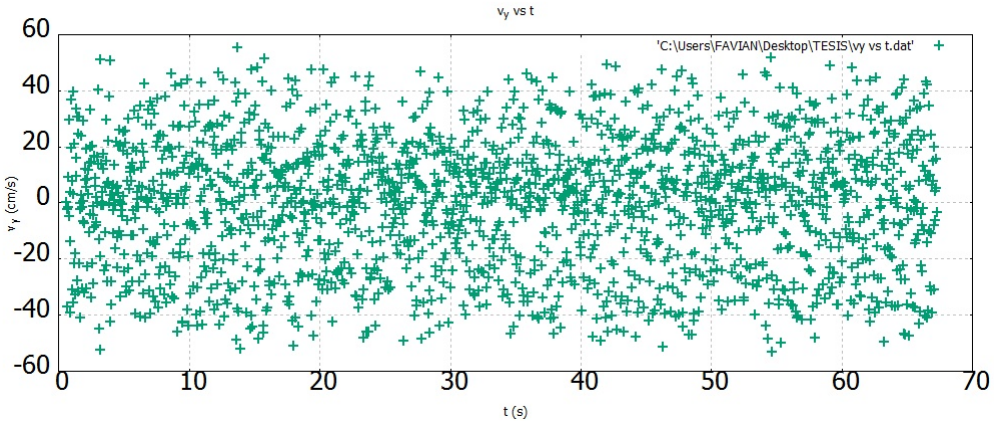
**Rapidez de la particula en sus respectivos ejes coordenados:**

Se obtiene la siguiente grafica para la $v_x$ en funcion del tiempo:



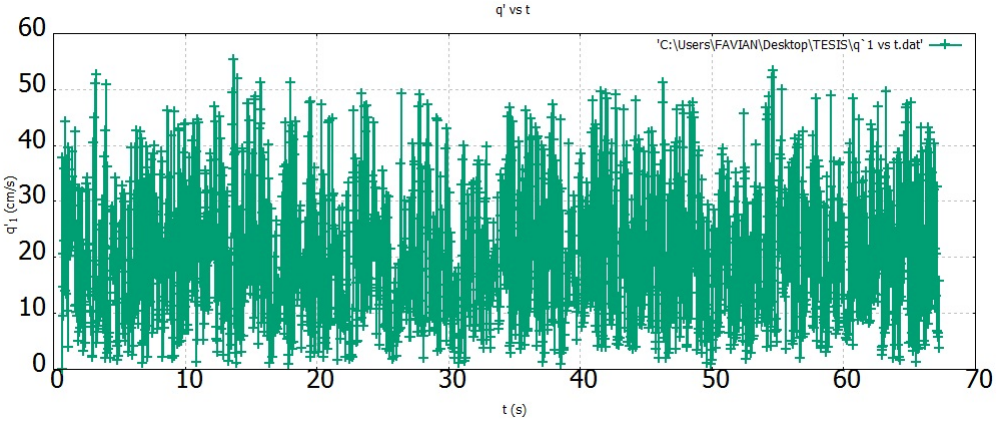

**Graf. 4.6** *Rapidez de la particula en el eje $x$. Experiencia 1*

Para la $v_y$ se obtuvo la siguiente grafica:



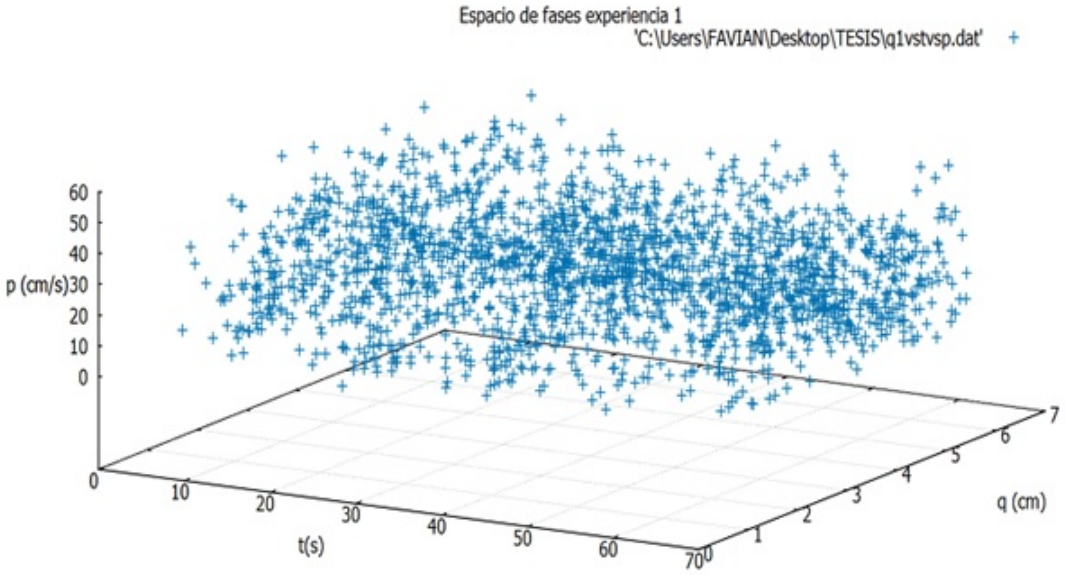

**Graf. 4.7** *Rapidez de la particula en el eje $y$. Experiencia 1*

En coordenadas generalizadas se obtuvo para la rapidez la siguiente grafica:



**Graf. 4.8** *Rapidez de la particula en coordenadas generalizadas q. Experiencia 1*

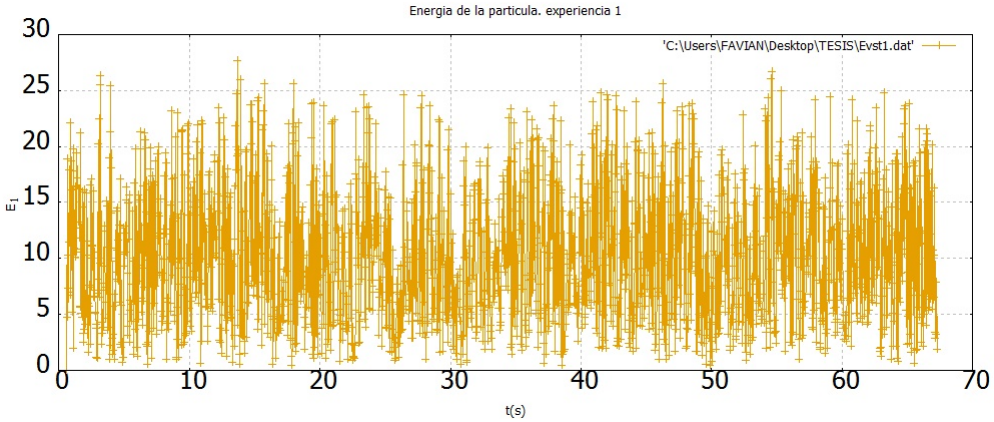
**Espacio de fases. Experiencia 1 (partícula 1)** :




**Graf. 4.9** *Espacio de fases. Experiencia 1*

**Energia de la particula. Experiencia 1:**

Para la obetnción de la representación esquematica de la energía, se calculo el modulo de la rapidez, es decir, se tomo la $v_x$ y la $v_y$, estas se elevaron al cuadrado y posterior a esto, el resultado fue dividido en 2. Por lo tanto se obtuvo la siguiente gráfica de la energía en la experiencia 1.




**Graf. 4.10** *Energia de la particula. Experiencia 1*

### Experiencia 2. (Dos particulas)

En la segunda experiencia se observa a dos pariculas ver (Fig. 4.3) que se encuentran bajo las mismas condiciones iniciales.

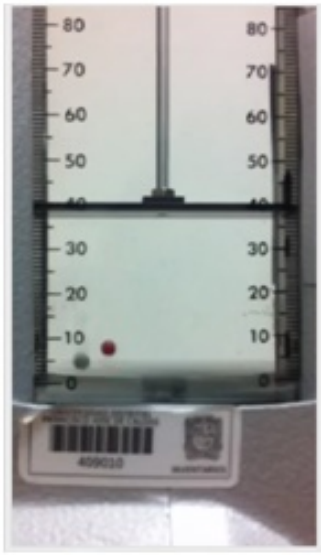
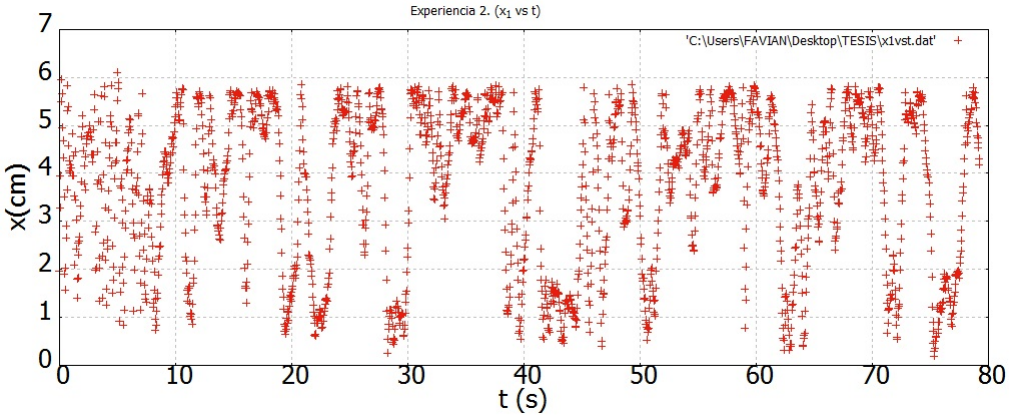


**Fig. 4.3** *Montaje Experiencia 2*

### Pocisión y rapidez de las particulas en sus respectivos ejes coordenados:

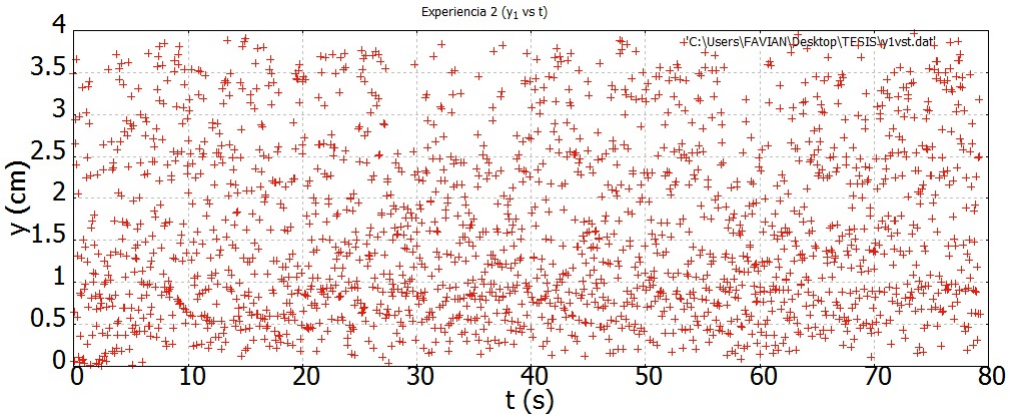
### Posición Experiencia 2 (partícula 1-2 )

Se obtiene la siguiente gráfica de la pocisión $x$ de la primera partícula en función del tiempo $t$



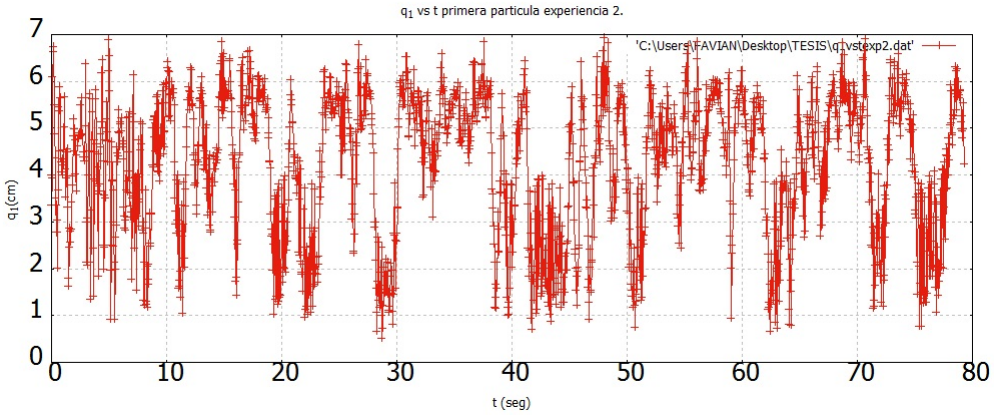

**Graf. 4.11** *Posición de la partícula 1 en el eje $x$. Experiencia 2*

La trayectoria de la primera partícula sobre el eje $y$ se caracteriza por medio de la siguiente gráfica:




**Graf. 4.12** *Posición de la partícula 1 en el eje $y$. Experiencia 2*

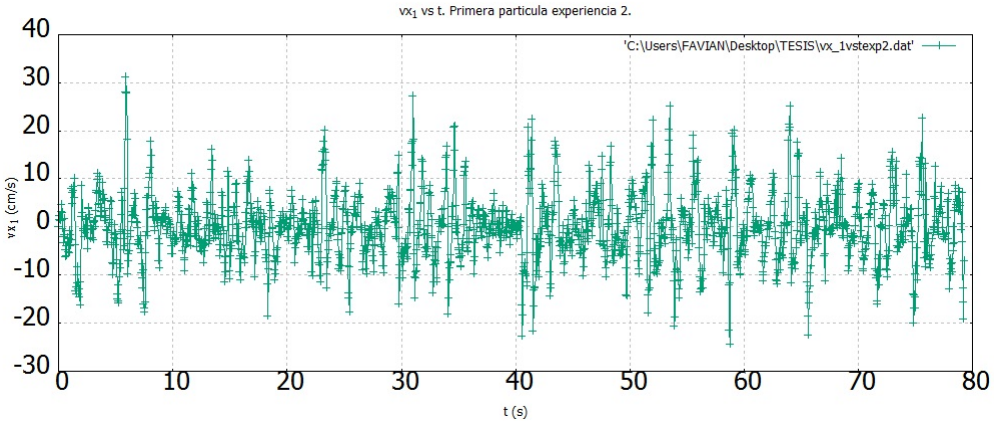
La trayectoria de la partícula 1 en coordenadas generalizadas $q_1$ en la experiencia (2) esta caracterizada por medio de la siguiente gráfica:




**Graf. 4.13** *Posición de la partícula 1 en coordenadas generalizadas q. Experiencia 2*

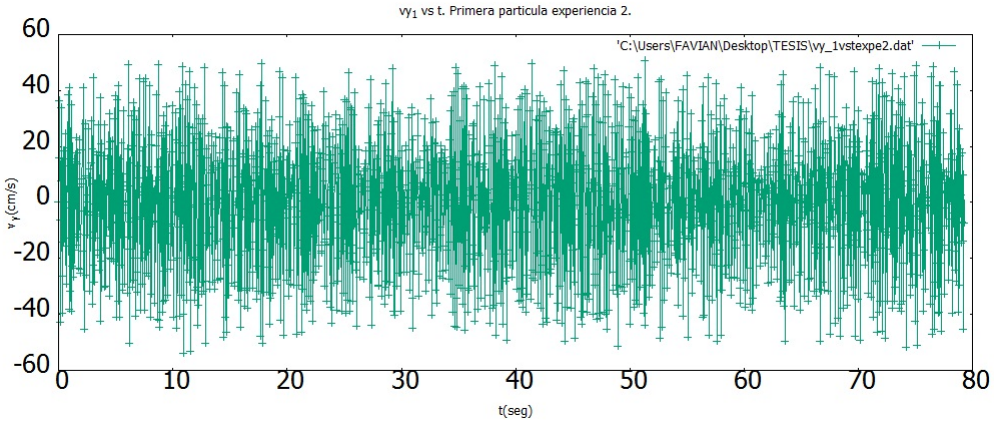
### Rapidez Experiencia 2 ( particula 1-2)

Se obtiene la siguiente grafica para la $v_x$ de la primera partícula en función del tiempo:



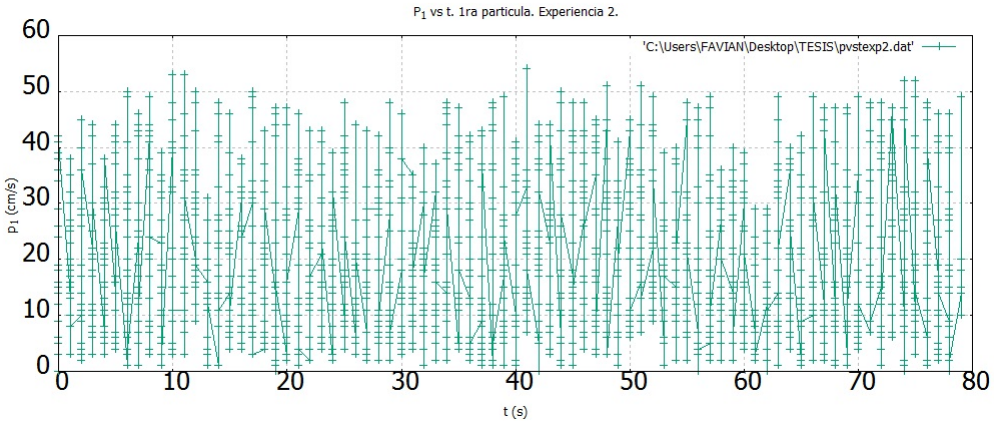

**Graf. 4.14** *Rapidez de la partícula 1 en la coordenada x. Experiencia 2*

Para la rapidez en el eje y $v_y$ se obtuvo la siguiente gráfica:




**Graf. 4.15** *rapidez de la partícula 1 en la coordenada $x$. Experiencia 2*

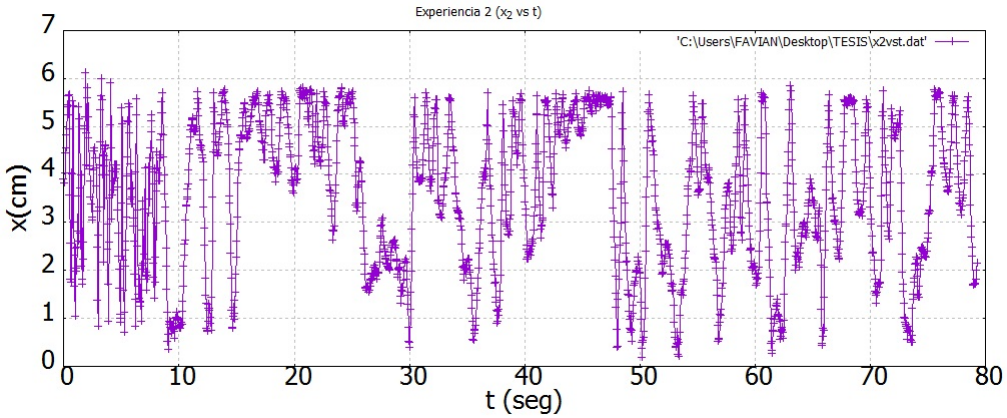
En coordenadas generalizadas la gráfica para la rapidez de la 1ra partícula en la experiencia 2 esta descrita como:




**Graf. 4.16** *Rapidez de la partícula 1 en coordenadas generalizadas $q$. Experiencia 2*

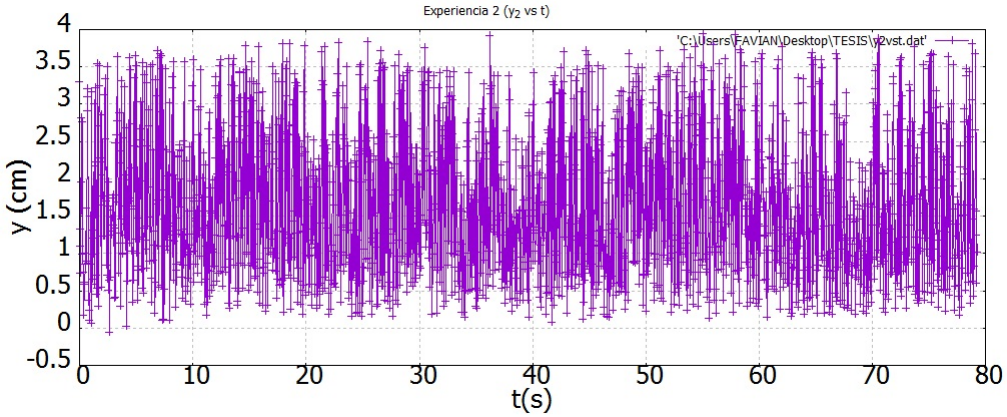
### Posición Experiencia 2 ( partícula 2-2)

Se obtiene la siguiente grafica de la posición $x$ de la segunda partícula en función del tiempo $t$.



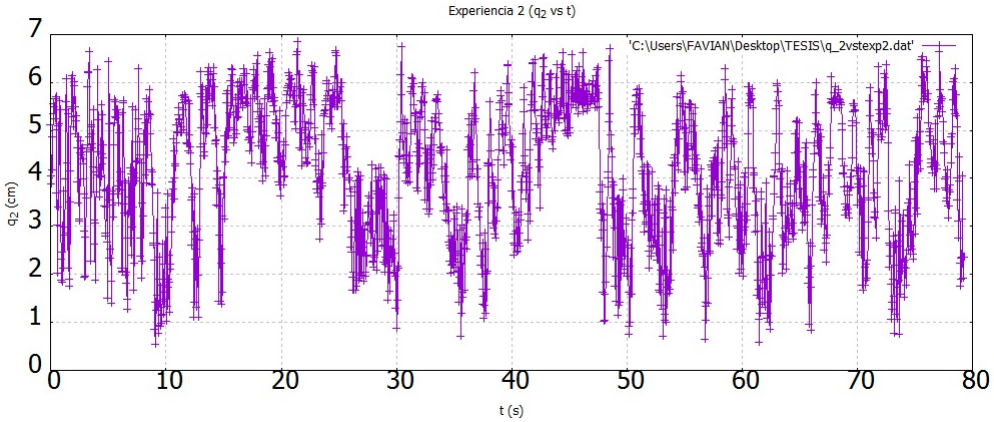

**Graf. 4.17** *Posición de la partícula 2 en la coordenada $x$. Experiencia 2*

Para la pocisión $y$ de la segunda partícula se obtuvo la siguiente gráfica:




**Graf. 4.18** *Posición de la partícula 2 en la coordenada $y$. Experiencia 2*

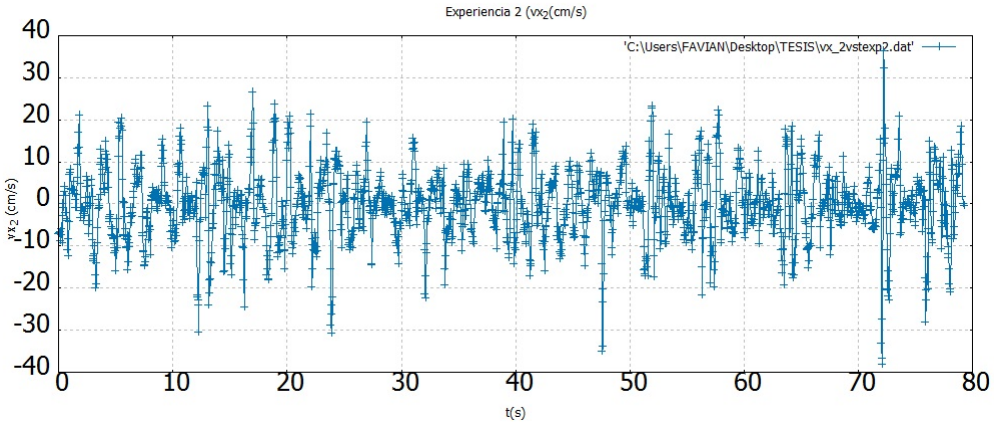
La trayectoria de la partícula 2 en coordenadas generalizadas $q_2$ en la experiencia (2) se encuentra descrita en la siguiente gráfica:




**Graf. 4.19** *Posición de la partícula 2 en coordenadas generalizadas $q_2$. Experiencia 2*

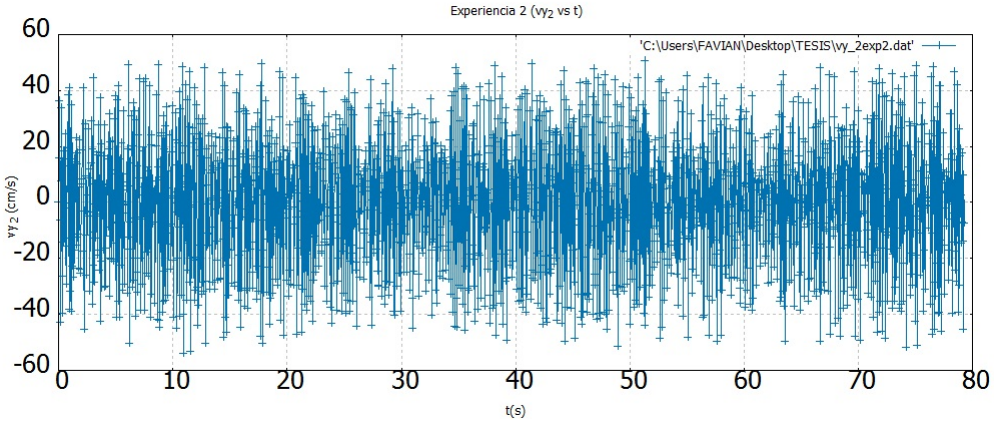
### Rapidez Experiencia 2 ( particula 2-2)

Para la $v_x$ de la segunda partícula en la experiencia 2 se obtiene la siguiente gráfica:



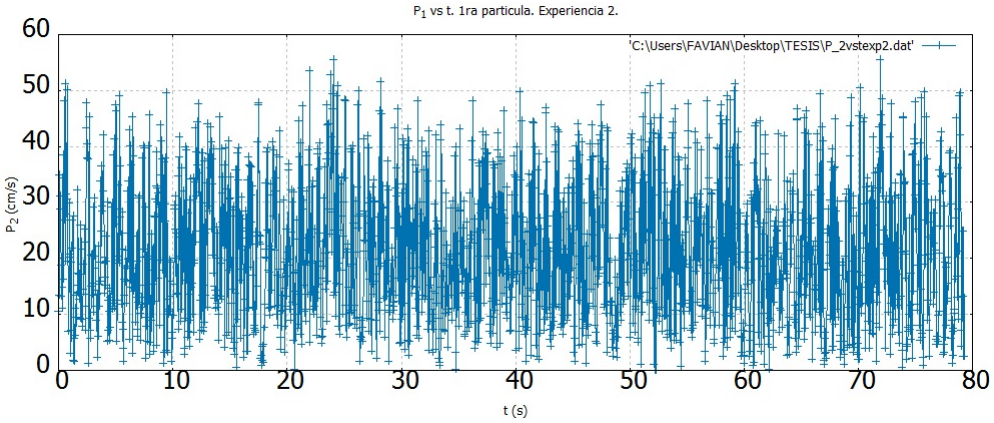

**Graf. 4.20** *Rapidez de la partícula 2 en la coordenada $x$. Experiencia 2*

Luego la $v_y$ de la segunda partícula vendra descrita por la siguiente gráfica:



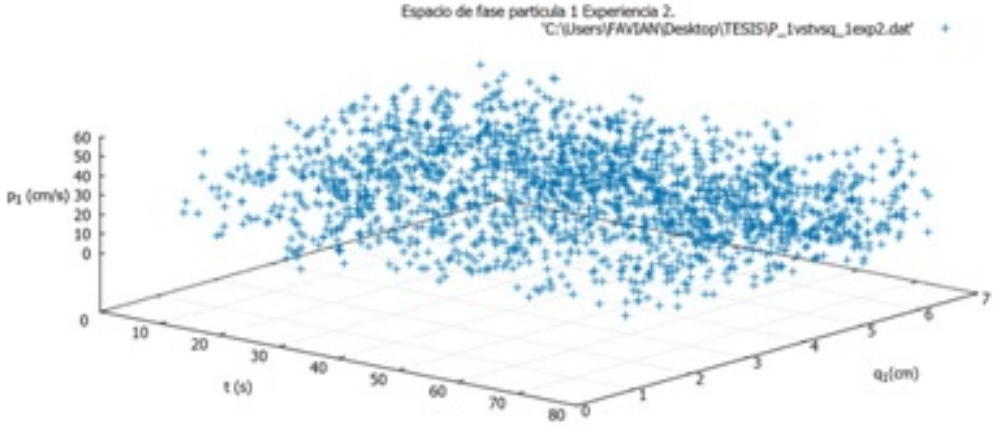

**Graf. 4.21** *Rapidez de la partícula 2 en la coordenada y. Experiencia 2*

Para la partícula 2 se tiene la rapidez en coordenadas generalizadas $q_2$.



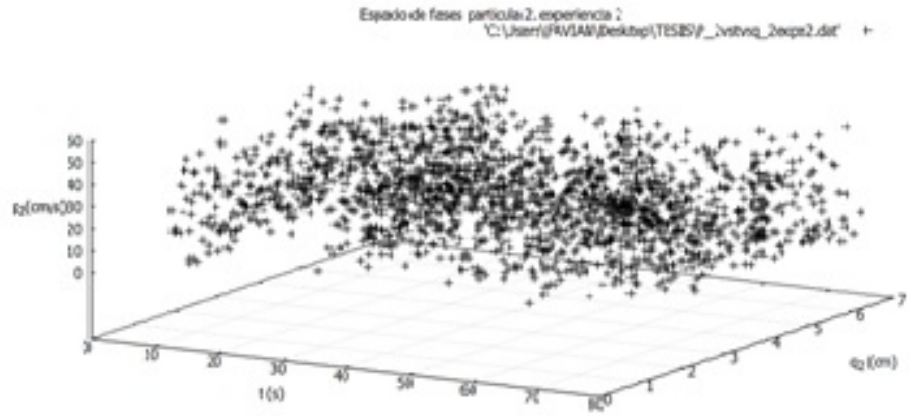

**Graf. 4.22** *Rapidez de la particula 2 en la coordenada $q_2$. Experiencia 2*

**Espacio de fases 2 experiencia (partícula 1-2)**



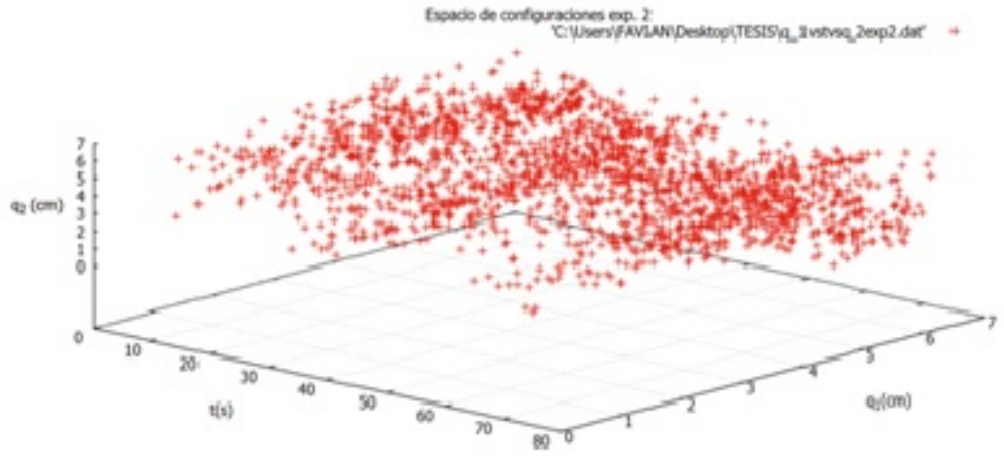

**Graf. 4.23** *Espacio de fases 1ra partícula. Experiencia 2*

**Espacio de fases 2 experiencia (partícula 2-2)**



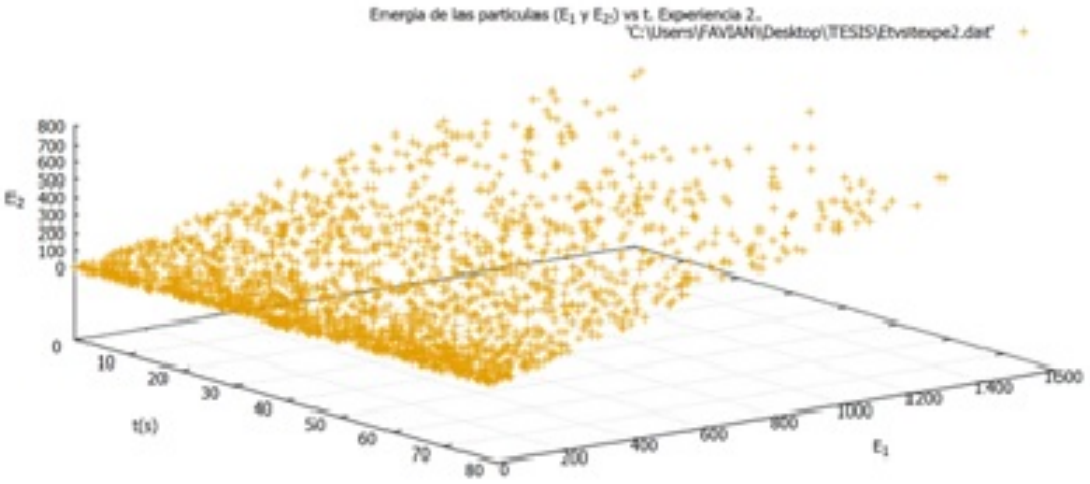

**Graf. 4.24** *Espacio de fases 2da partícula. Experiencia 2*

**Espacio de configuraciones. 2 experiencia**




**Gráf. 4.25** *Espacio de configuraciones. Experiencia 2*

**Energía de las Partículas. Experiencia 2**




**Graf. 4.26** *Energía de las partículas 1 y 2. Experiencia 2*

**Experiencia 3.(tres partículas)**

En la tercera práctica se observan a tres pariculas que se encuentran bajo las condiciones iniciales ver (Fig 4.4.)

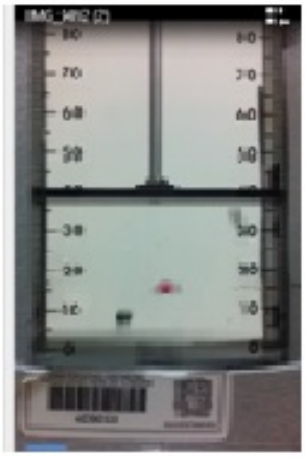
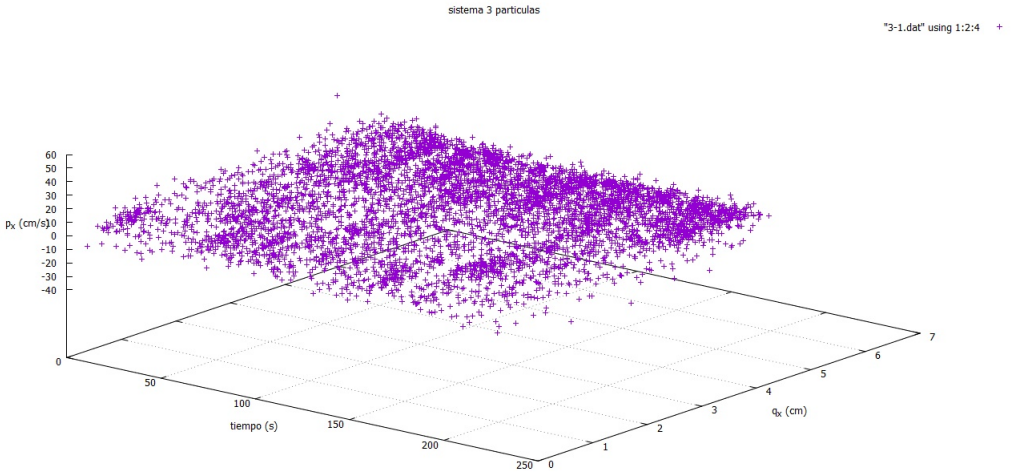
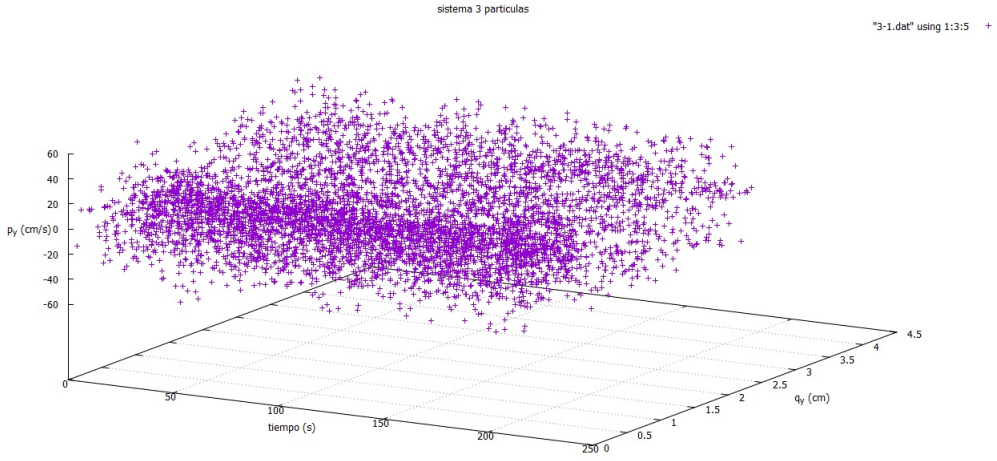


**Fig. 4.4** *Montaje Experiencia 3*

**Espacio de fases. Experiencia 3 (partícula 1-3)**

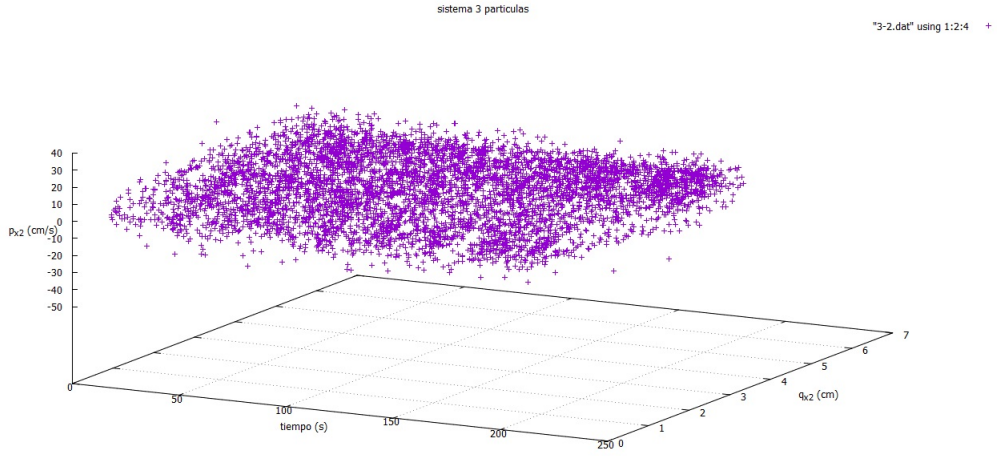



**Graf. 4.27** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 1-3 partícula*

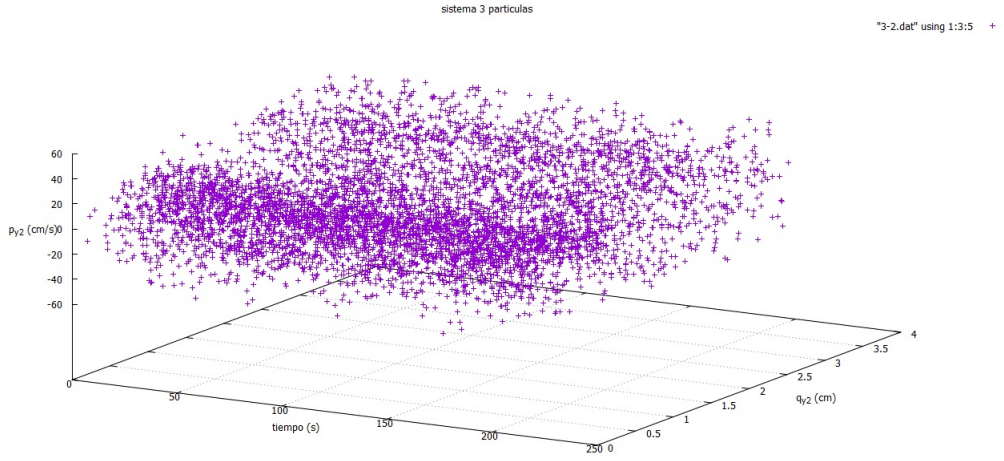



**Graf. 4.28** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 3-1 partícula*

**Espacio de fases. Experiencia 3 (partícula 2-3)**

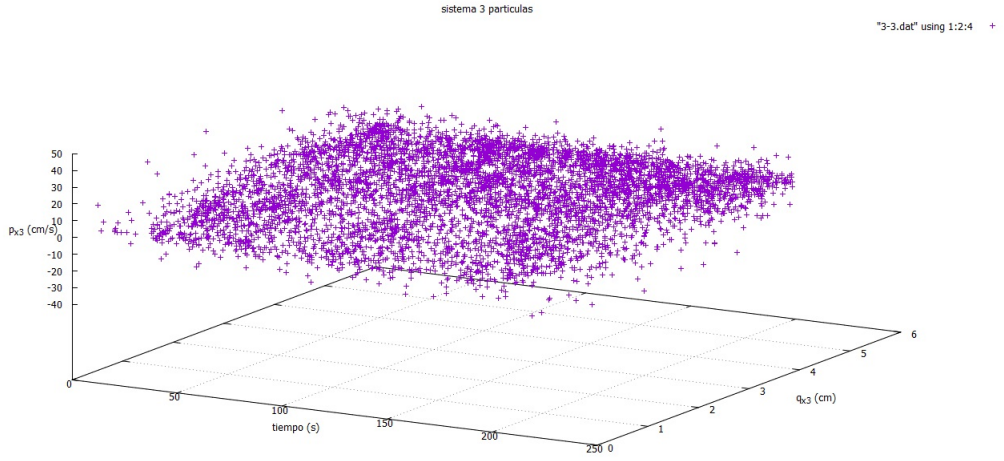



**Graf. 4.29** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 2-3 partícula*

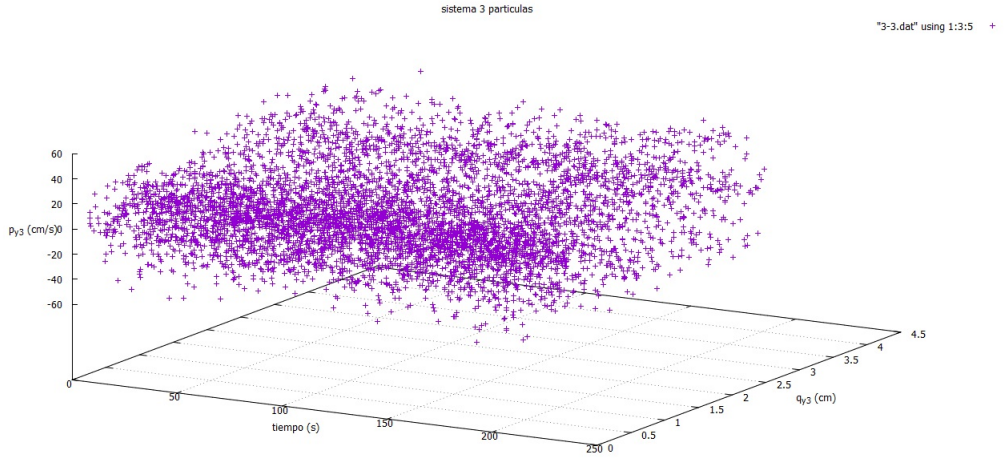



**Graf. 4.30** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 2-3 partícula*

**Espacio de fases. Experiencia 3 (partícula 3-3)**

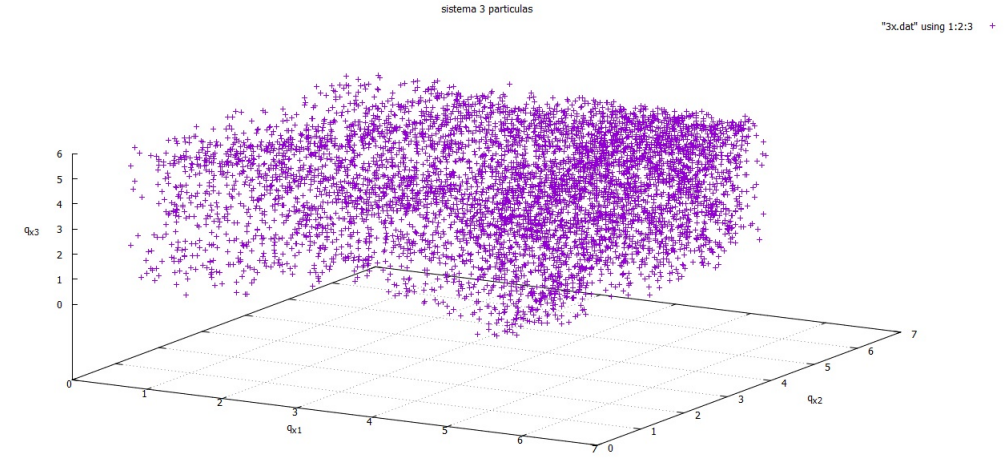



**Graf. 4.31** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 3-3 partícula*

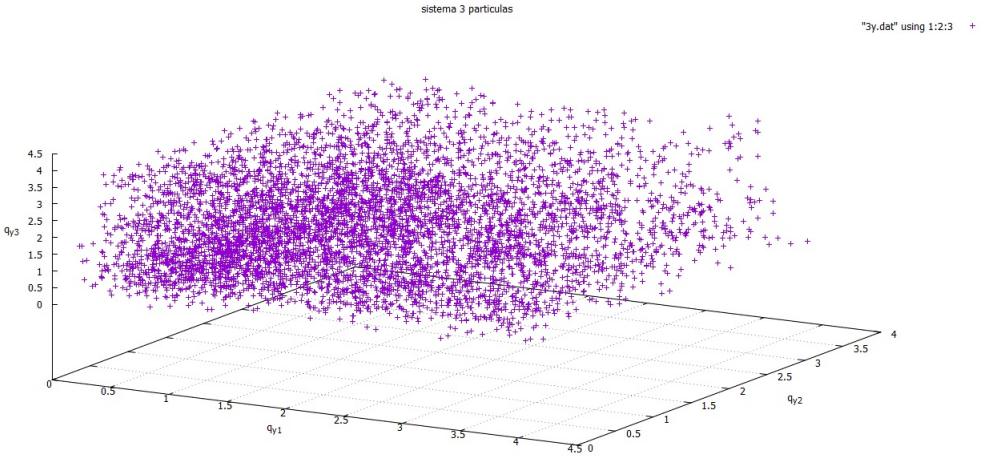



**Graf. 4.32** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 3-3 partícula*

## Espacio de configuraciones Experiencia 3



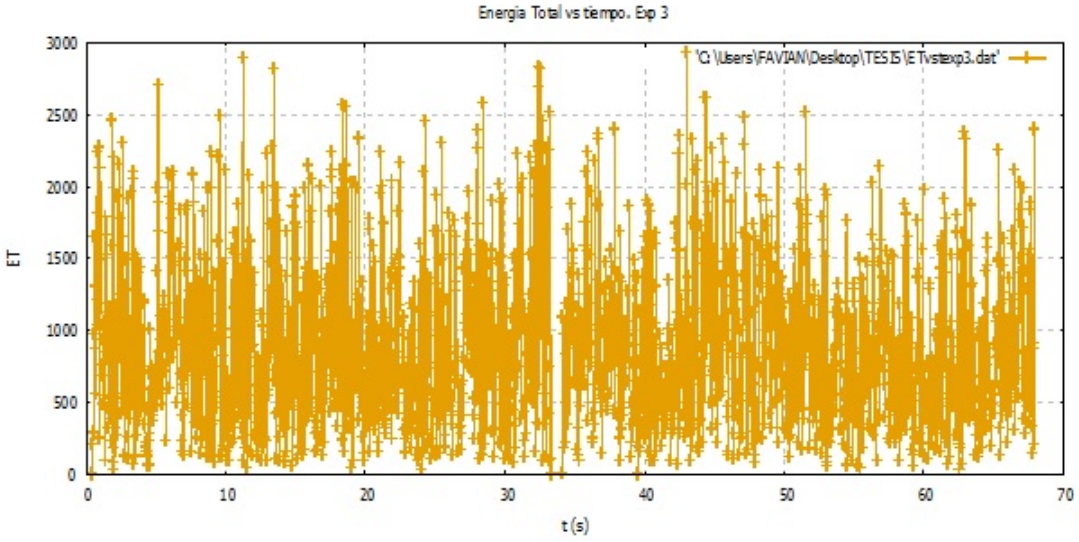

**Graf. 4.33** *Espacio de configuraciones en la coordenada x*




**Graf. 4.34** *Espacio de configuraciones en la coordenada y*

### Energia total de las partículas. Experiencia 3

Para determinar la energía total de las partículas, se realizó el calculo de la energía de cada partícula en las diferentes coordenadas y posterior a esto se obtuvo el valor de la energía promedio de las tres partículas en el tiempo estimado.




**Graf. 4.35** *Energía Total de las partículas . Exp 3*

**Experiencia 4. (cuatro partículas)**

En la cuarta experiencia se observan a cuatro partículas ver (Fig 4.5) que se encuentran bajo las mismas condiciones iniciales.

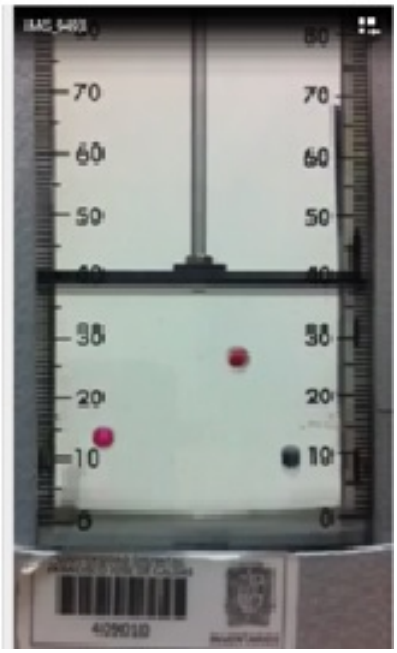
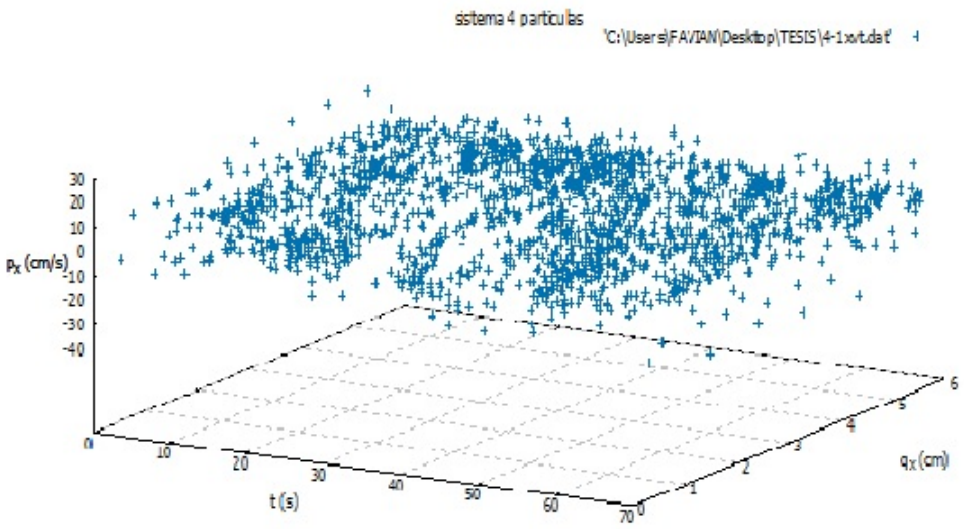
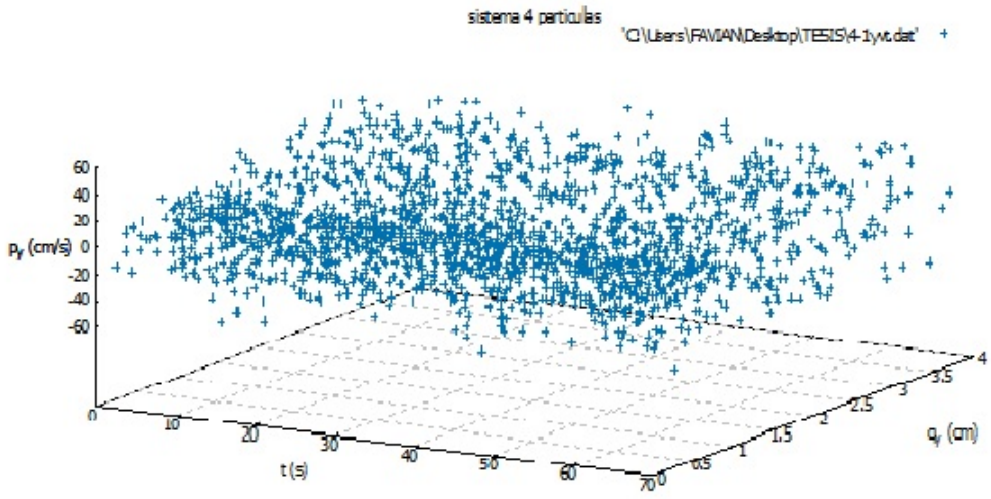



**Fig. 4.5** *Montaje Experiencia 4*

**Espacio de fases. Experiencia 4 (partícula 1-4)**

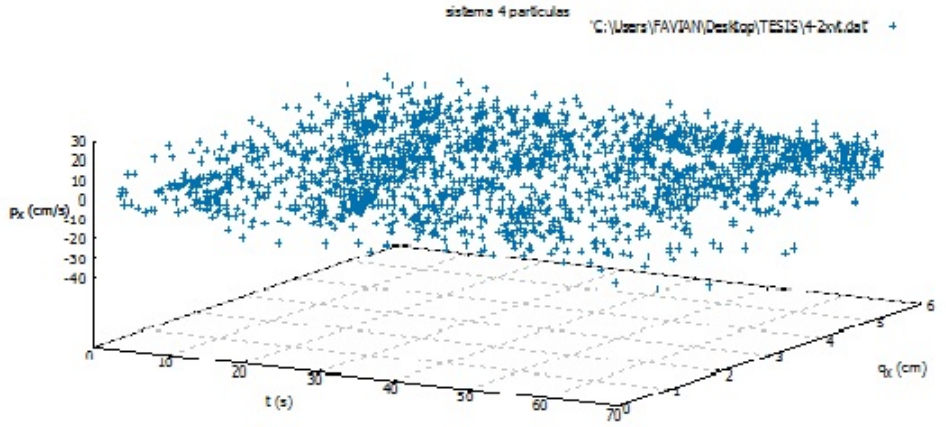



**Graf. 4.36** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 1-4 partículas*

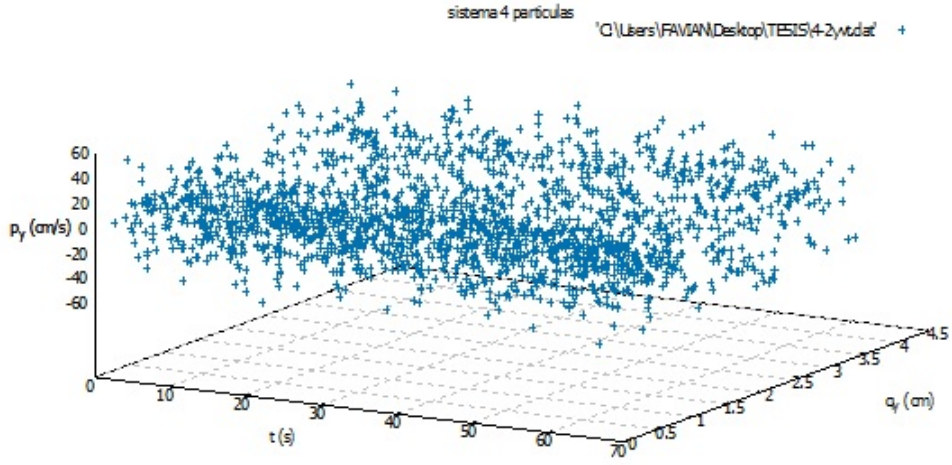



**Graf. 4.37** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 1-4 partículas*

**Espacio de fases. Experiencia 4 (partícula 2-4)**

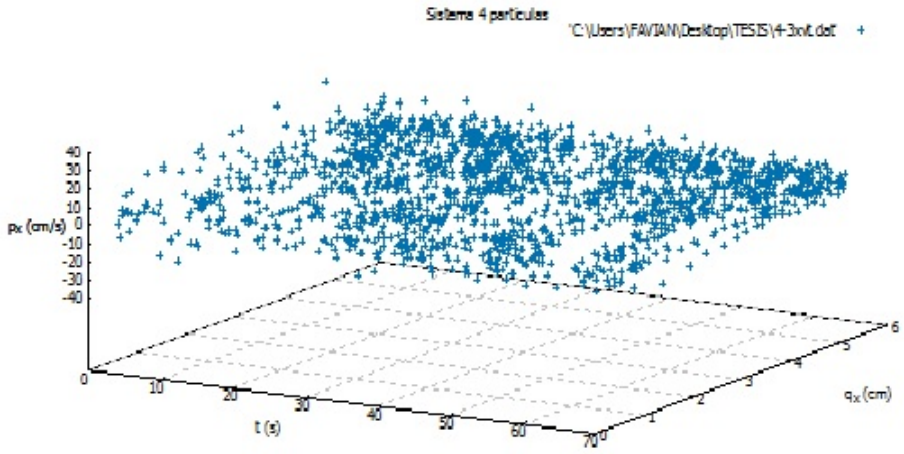



**Graf. 4.38** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 2-4 particulas*

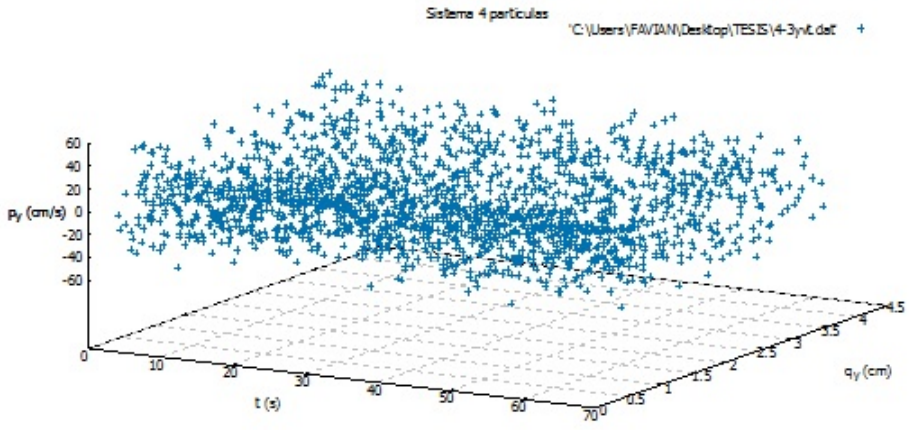



**Graf. 4.39** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 2-4 partículas*

**Espacio de fases. Experiencia 4 (partícula 3-4)**

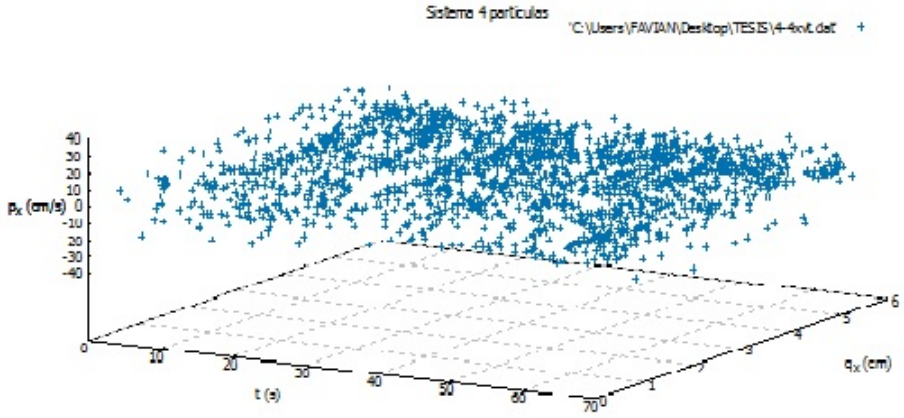



**Graf. 4.40** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 3-4 partículas*

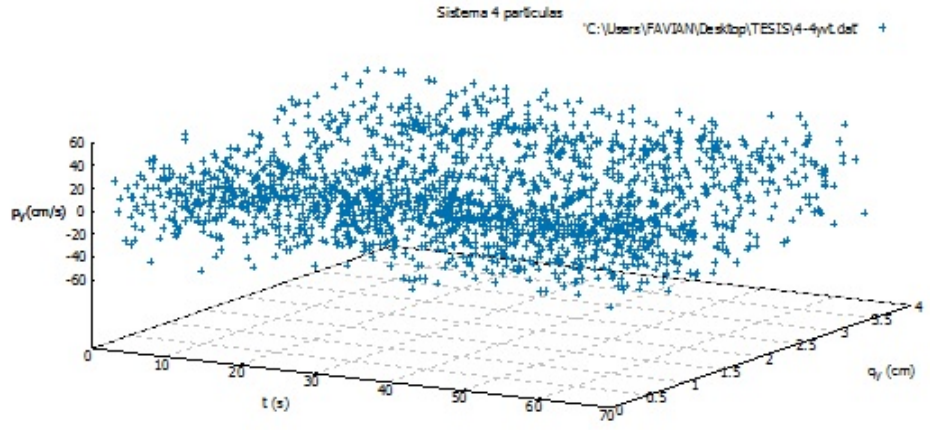



**Graf. 4.41** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 3-4 partículas*

**Espacio de fases. Experiencia 4 (particula 4-4)**

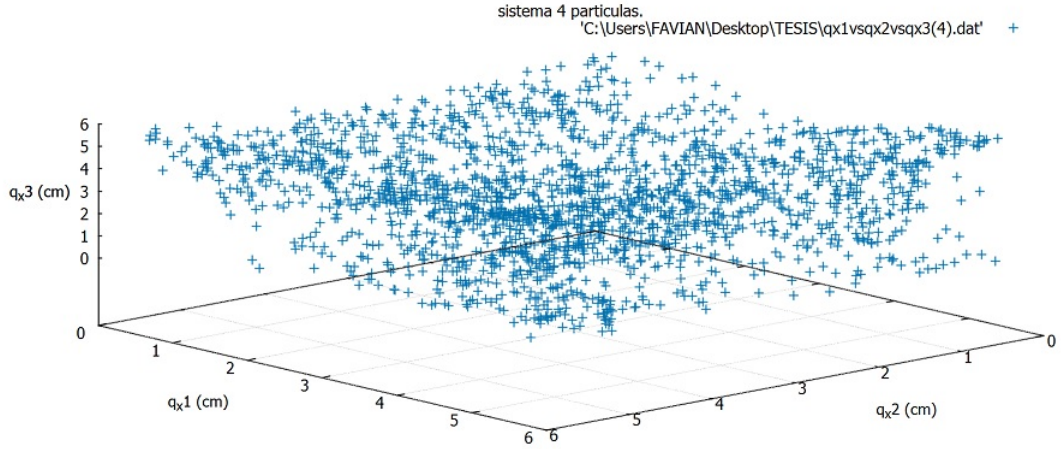



**Graf. 4.42** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 4-4 partículas*

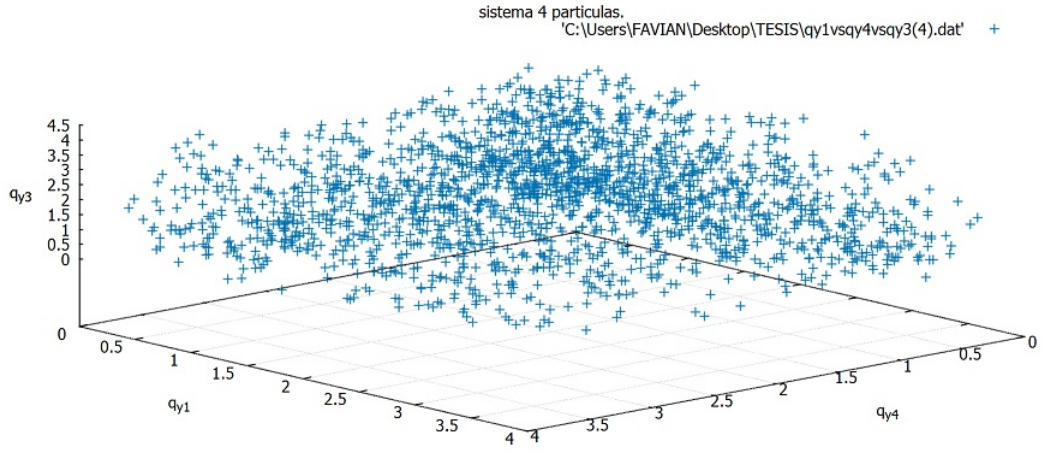



**Graf. 4.43** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 4-4 partículas*

**Espacio de configuraciones Experiencia 4**

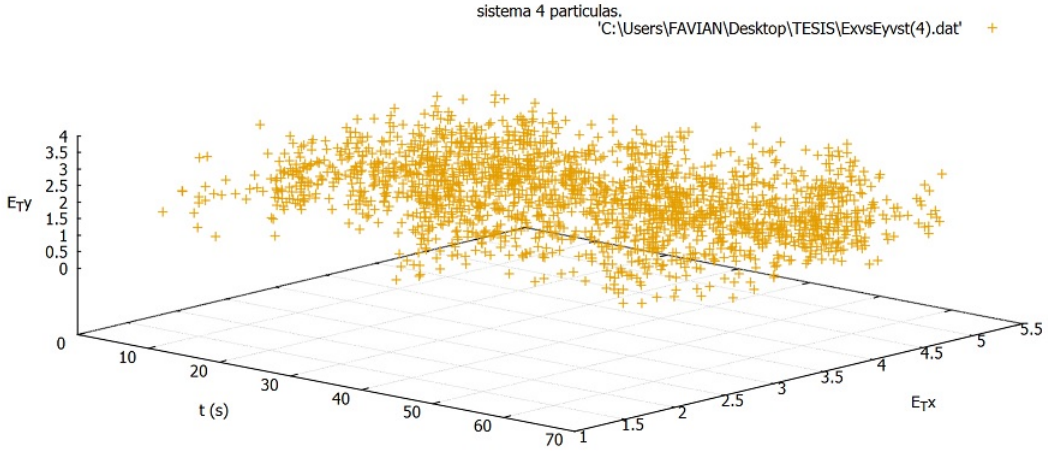



**Graf. 4.44** *Espacio de configuraciones en la coordenada x para las partículas (1,2 y 3). Experiencia 4.*

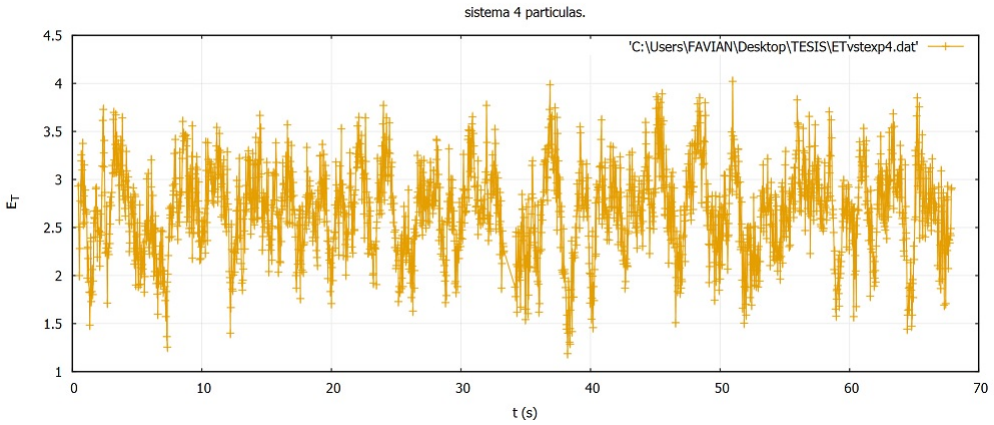



**Graf. 4.45** *Espacio de configuraciones en la coordenada y para las partículas (1,4 y 3). Experiencia 4.*

**Energia total de las partículas. Experiencia 4**




**Graf. 4.46** *Energía de las partículas en $x$ e $y$ . Experiencia 4.*




**Graf. 4.47** *Energía Total del sistema. Experiencia 4.*

### Experiencia 5. (cinco particulas)

En la quinta experiencia se observan a cinco pariculas ver (Fig 4.6) que se encuentran bajo las mismas condiciones iniciales.

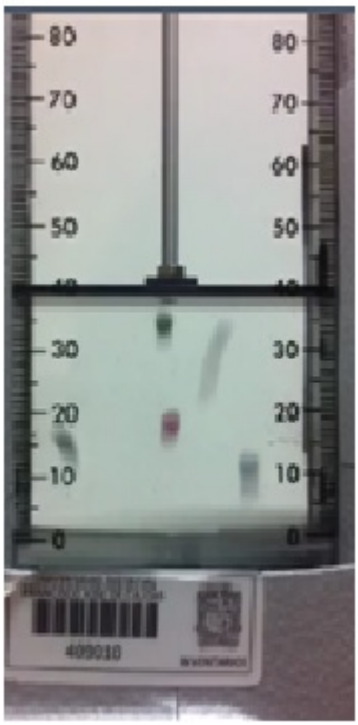
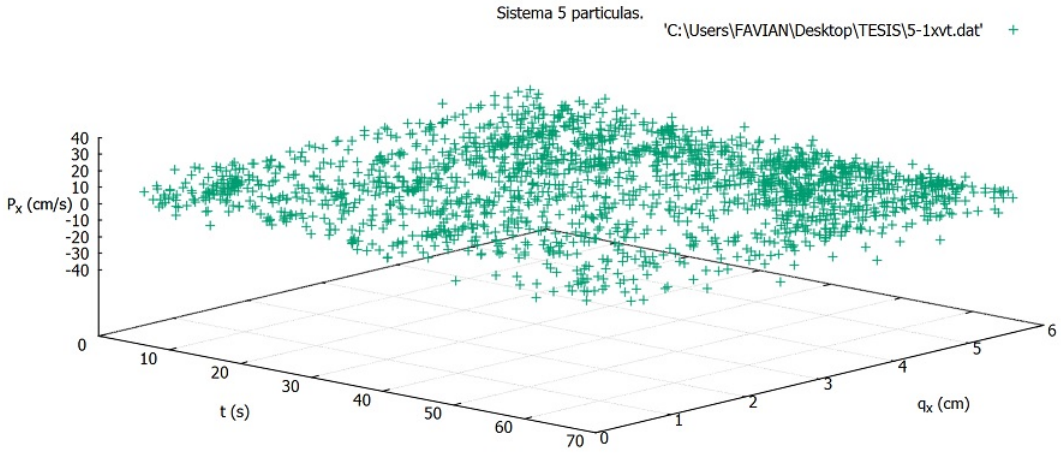
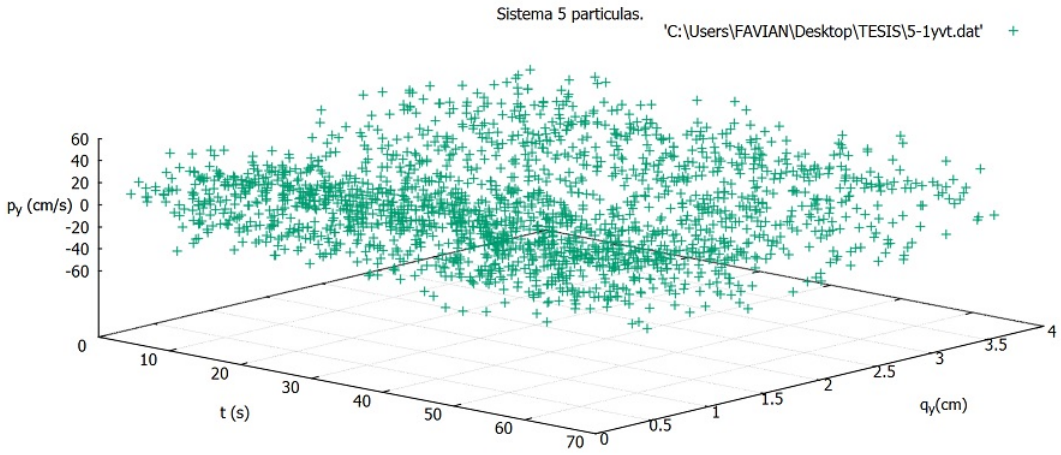



**Fig. 4.6** *Montaje Experiencia 5*

**Espacio de fases. Experiencia 5 (particula 1-5)**

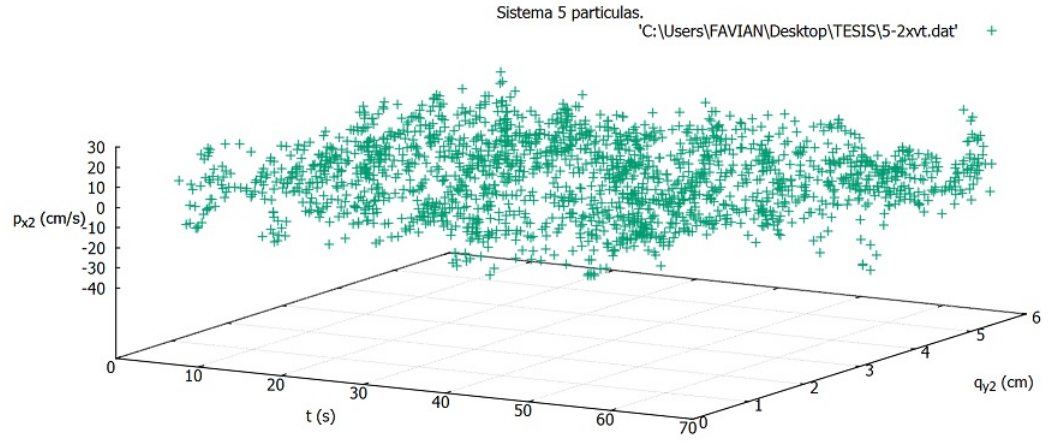



**Graf. 4.48** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 1-5 particulas*

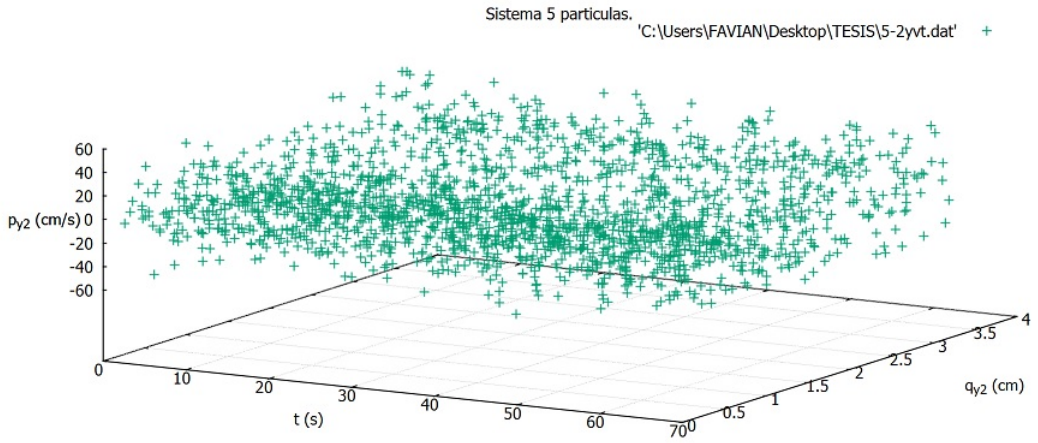



**Graf. 4.49** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 1-5 partículas*

**Espacio de fases. Experiencia 5 (partícula 2-5)**

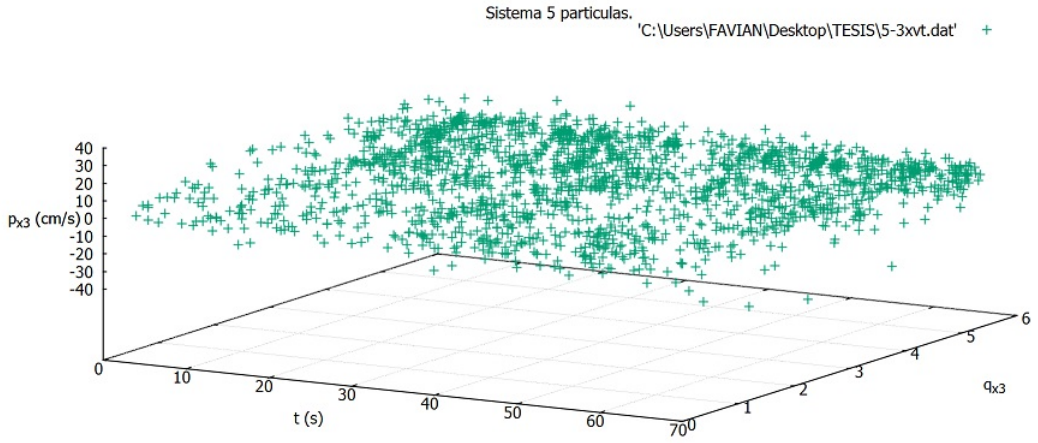



**Graf. 4.50** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 2-5 partículas*

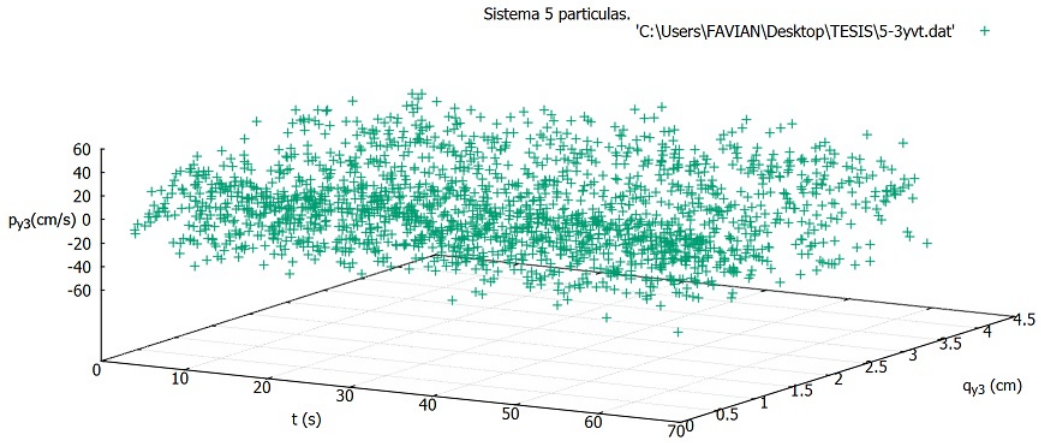



**Graf. 4.51** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 2-5 partículas*

### Espacio de fases. Experiencia 5 (partícula 3-5)

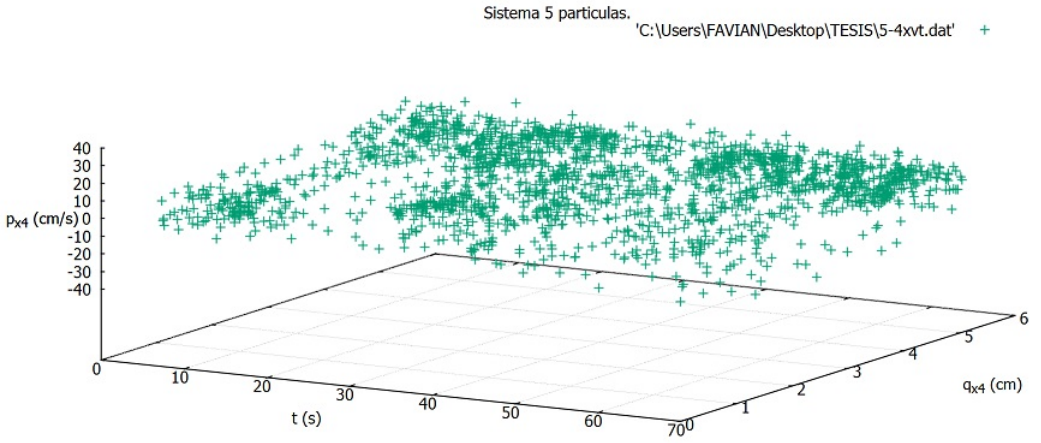



**Graf. 4.52** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 3-5 partículas*

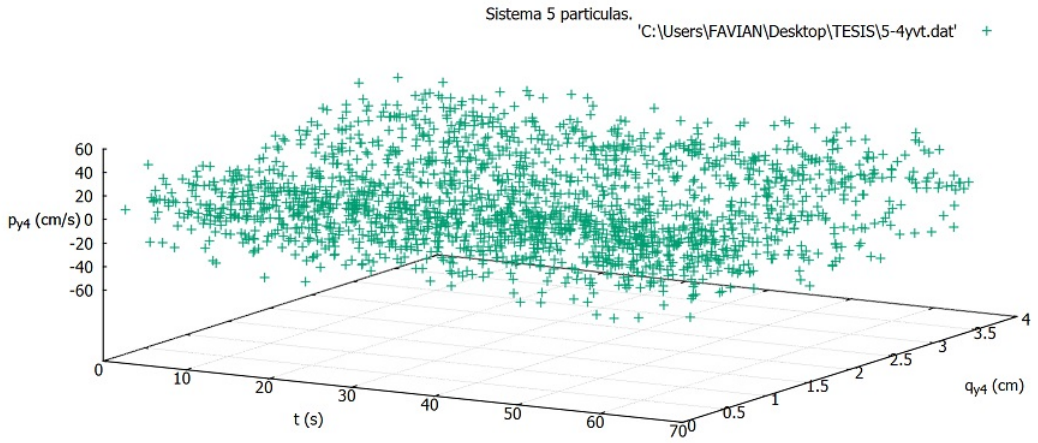



**Graf. 4.53** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 3-5 partículas*

### Espacio de Fases. Experiencia 5 (partícula 4-5)

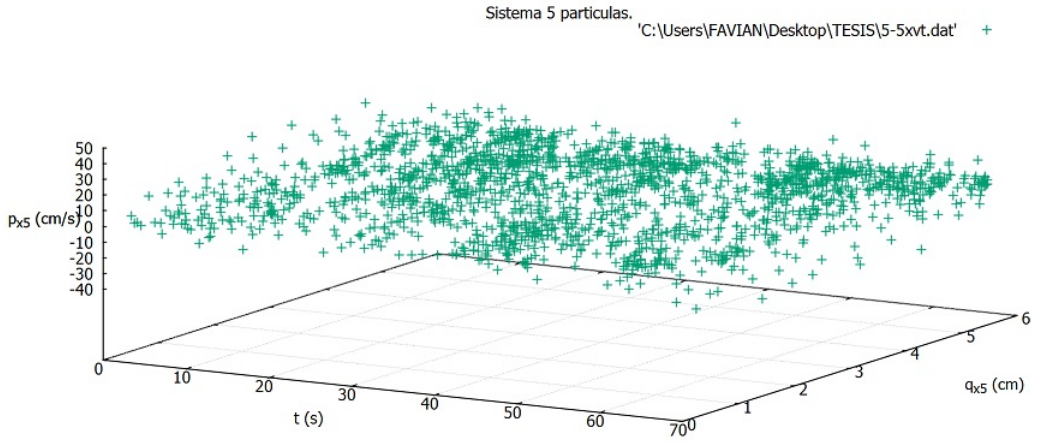



**Graf. 4.54** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 4-5 partículas*

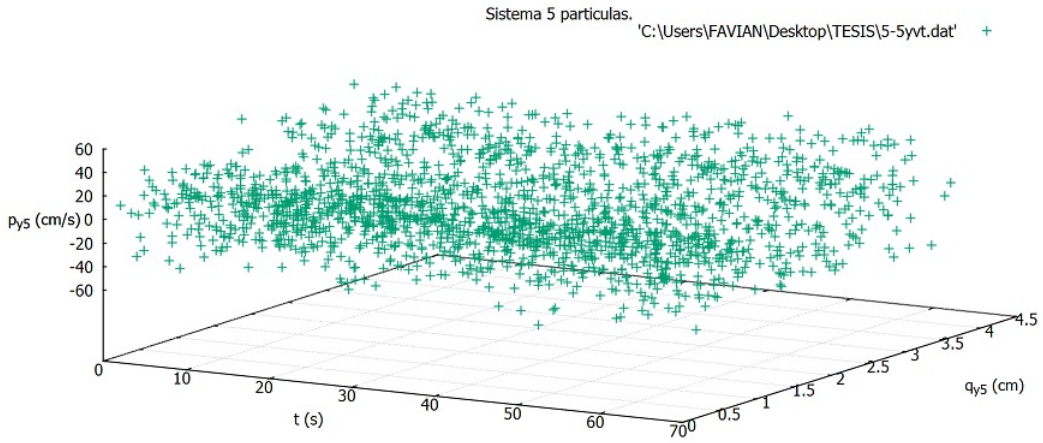



**Graf. 4.55** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 4-5 partículas*

### Espacio de Fases. Experiencia 5 (partícula 5-5)

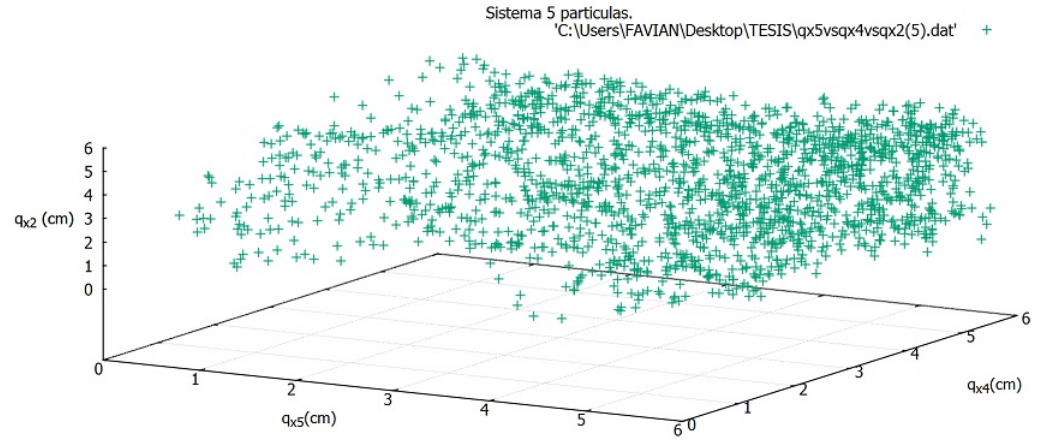



**Graf. 4.56** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 5-5 partículas*

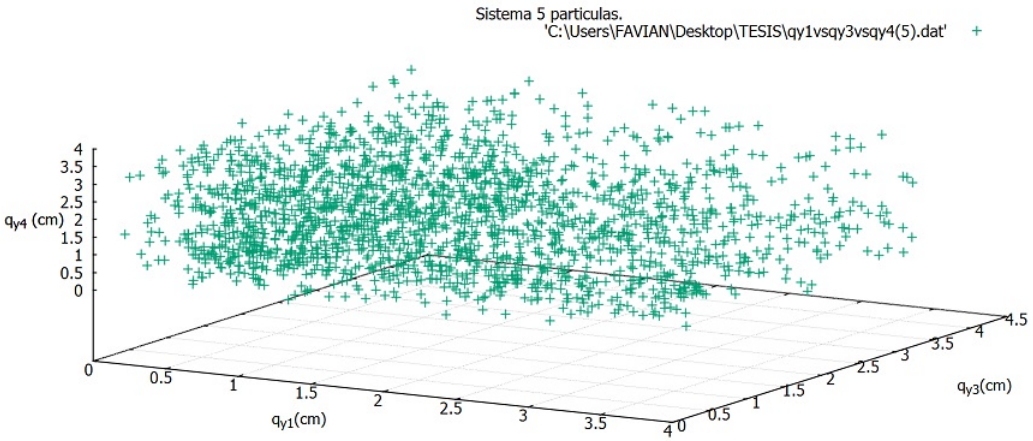



**Graf. 4.57** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 5-5 partículas*

### Espacio de configuraciones Experiencia 5

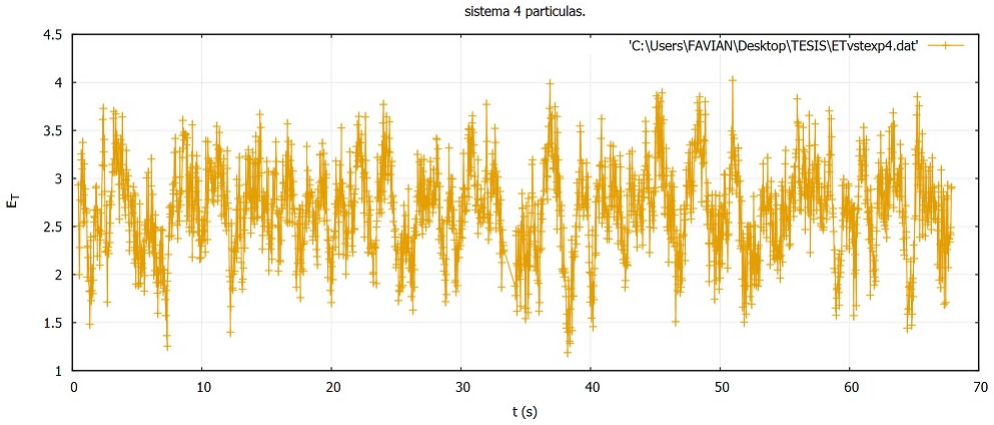



**Graf. 4.58** *Espacio de Configuraciones en la coordenada x para las particulas (5,4 y 2). Experiencia 5-5 partículas*




**Graf. 4.59** *Espacio de Configuraciones en la coordenada y para las partículas (1,3 y 4). Experiencia 5-5 partículas*

### Energia total de las partículas. Experiencia 5




**Graf. 4.60** *Energía Total del sistema. Experiencia 5.*

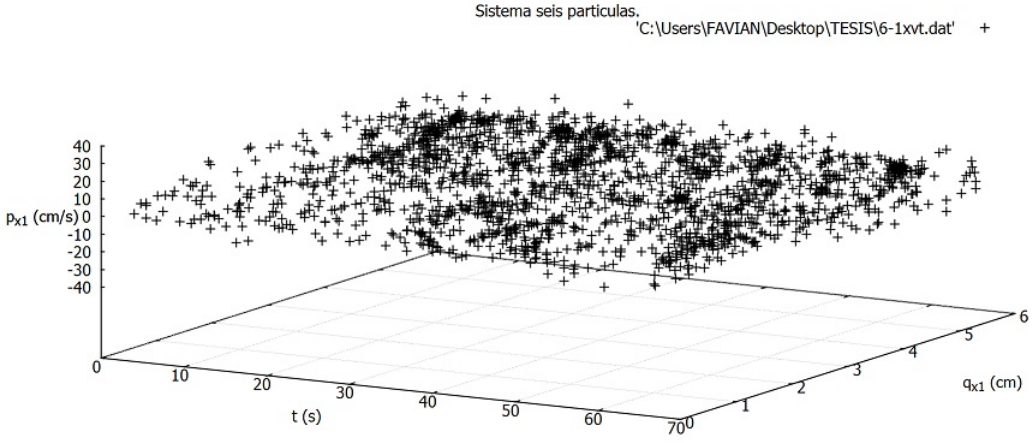
### Experiencia 6. (seis partículas)

En la sexta experiencia se observan a seis partículas (ver Fig.4.7) que se encuentran bajo las mismas condiciones iniciales.

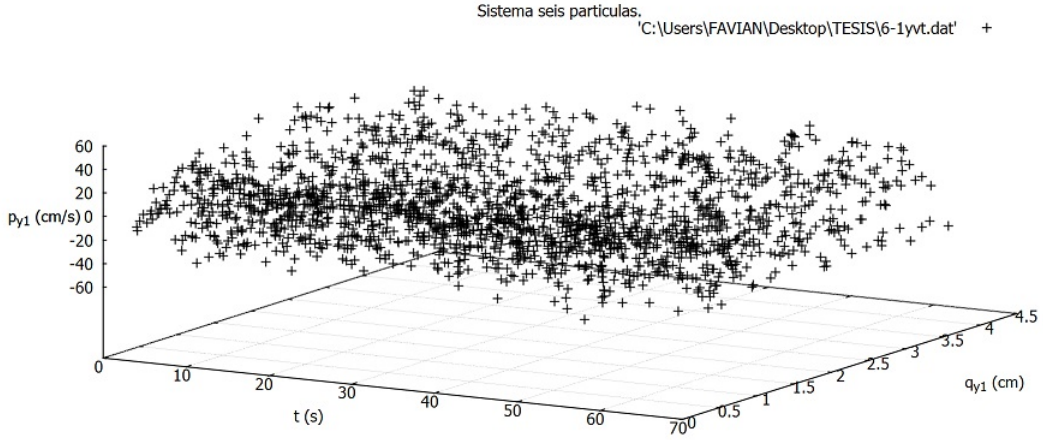



**Fig. 4.7** *Montaje Experiencia 6*

**Espacio de Fases. Experiencia 6 (partícula 1-6)**

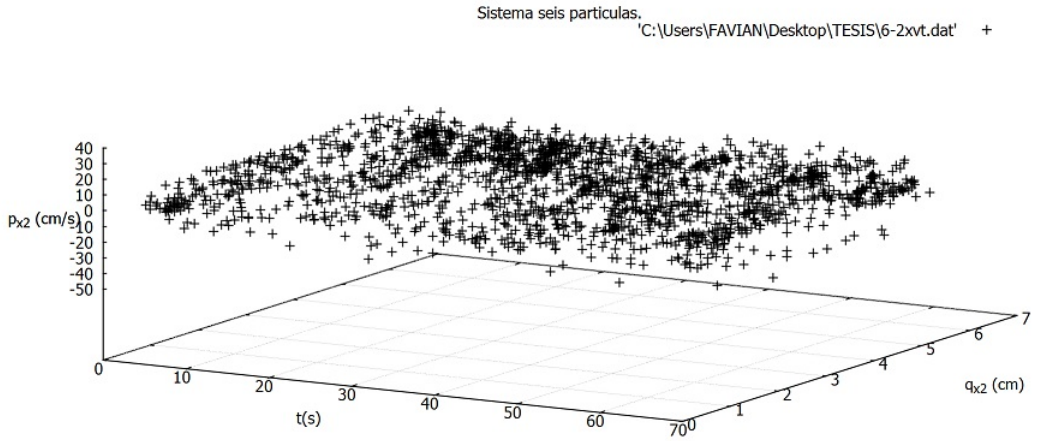



**Graf. 4.61** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 1-6 partículas*

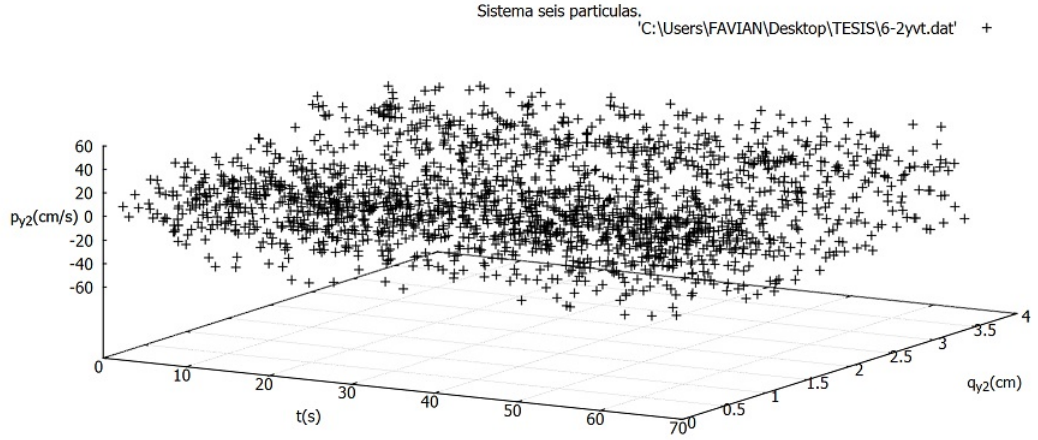



**Graf. 4.62** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 1-6 partículas*

### Espacio de Fases. Experiencia 6 (partícula 2-6)

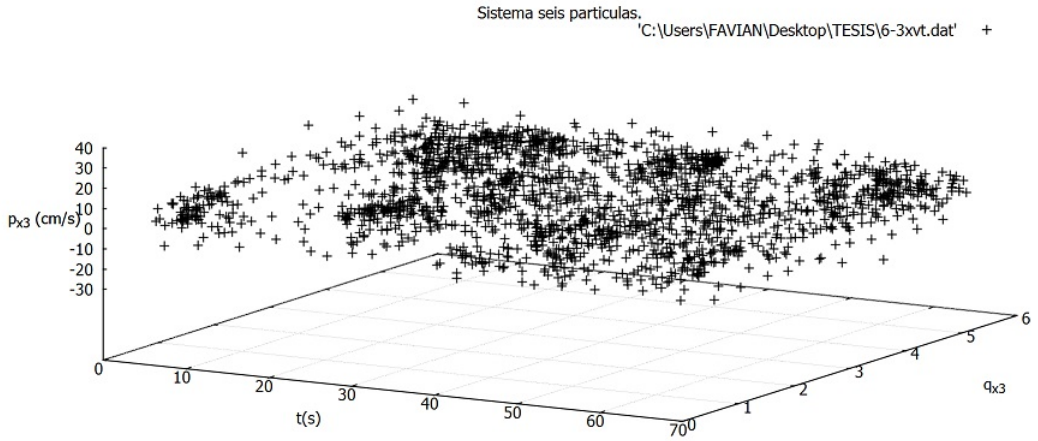



**Graf. 4.63** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 2-6 partículas*

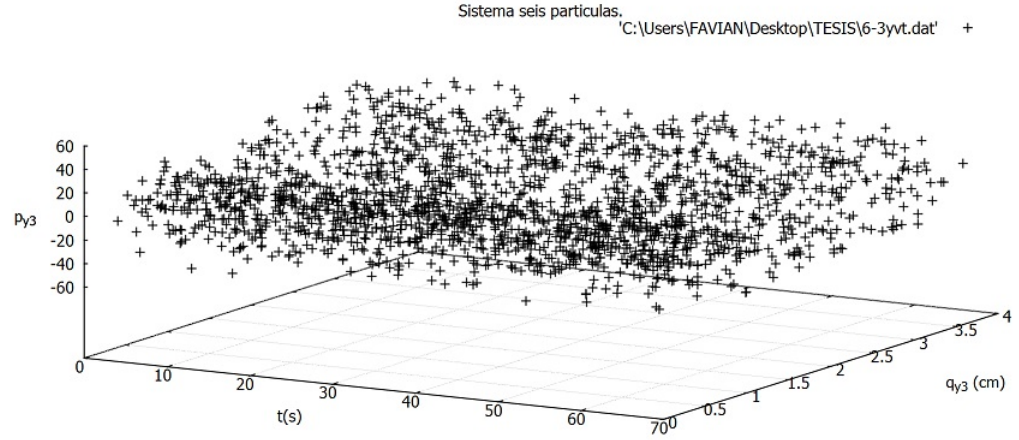



**Graf. 4.64** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 2-6 partículas*

### Espacio de Fases. Experiencia 6 (partícula 3-6)

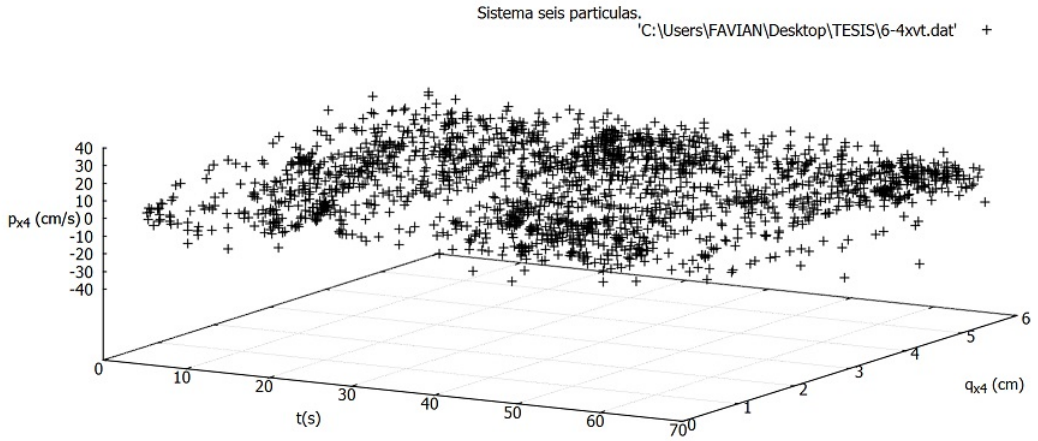



**Graf. 4.65** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 3-6 partículas*

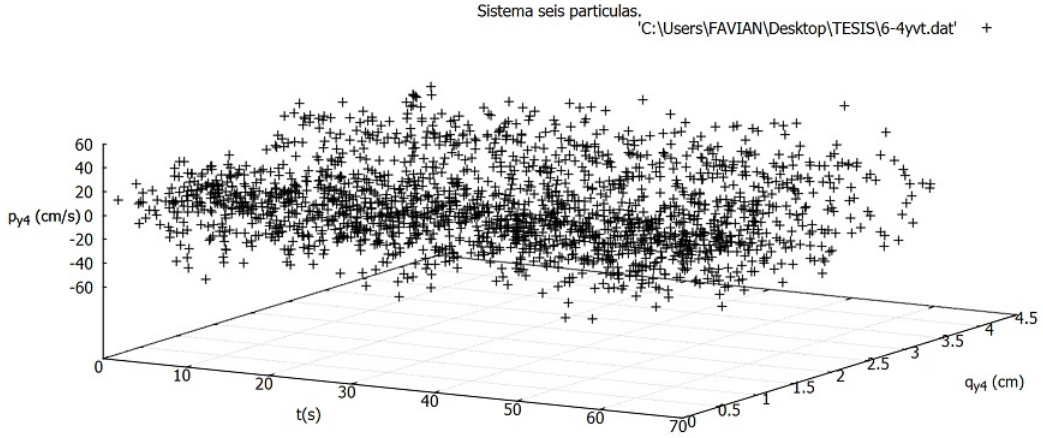



**Graf. 4.66** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 3-6 partículas*

### Espacio de Fases. Experiencia 6 (partícula 4-6)

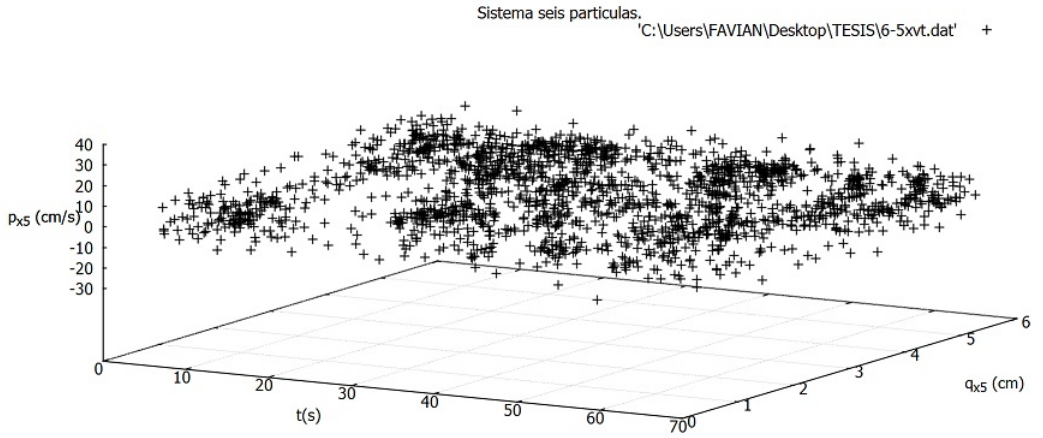



**Graf. 4.67** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 4-6 partículas*

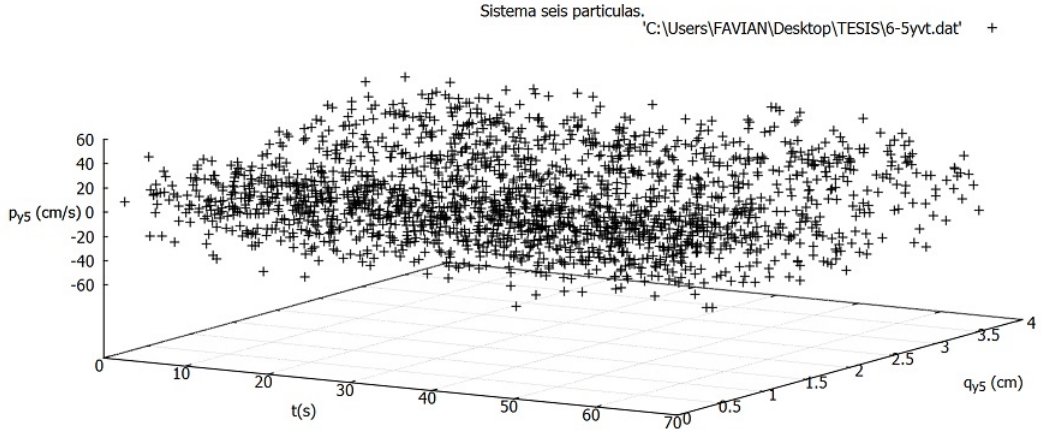



**Graf. 4.68***Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 4-6 partículas*

**Espacio de Fases. Experiencia 6 (partícula 5-6)**

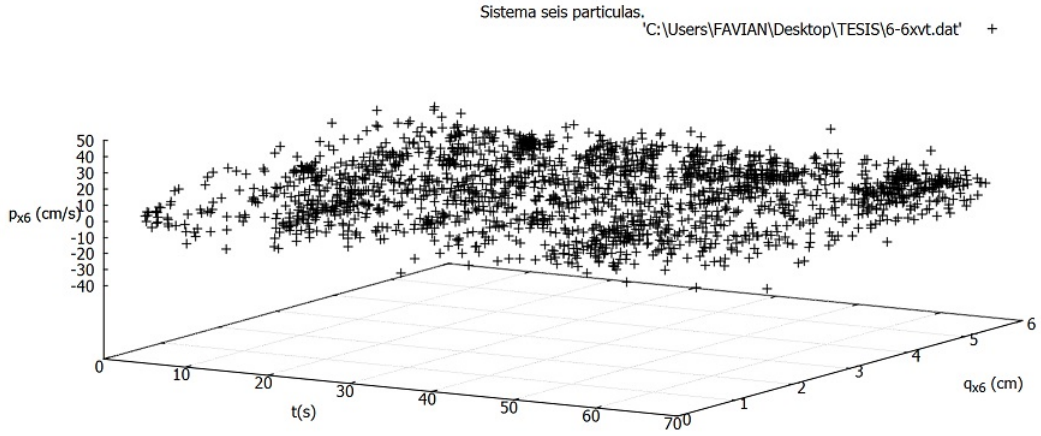



**Graf. 4.69** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 5-6 partículas*

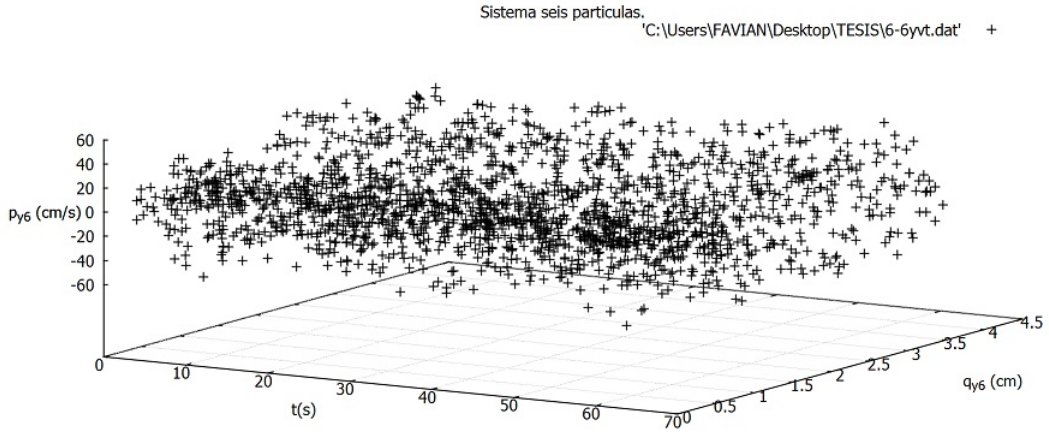



**Graf. 4.70** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 5-6 partículas*

### Espacio de Fases. Experiencia 6 (partícula 6-6)

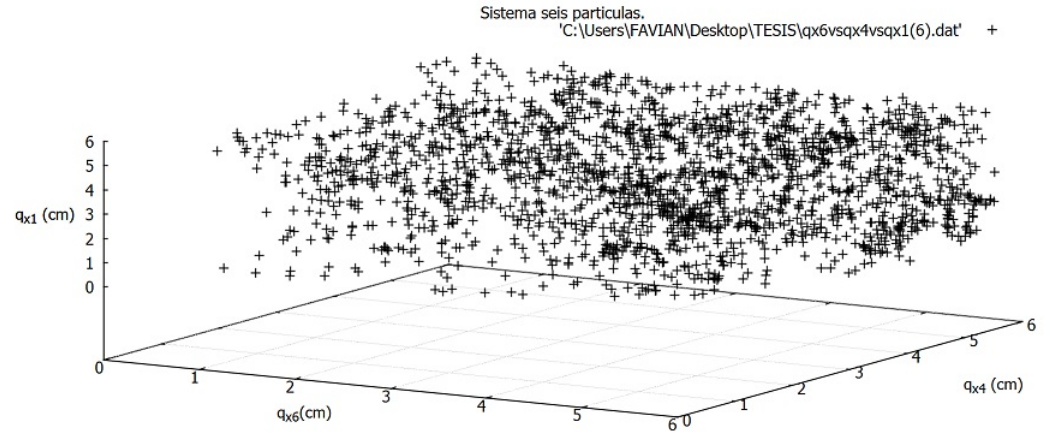



**Graf. 4.71** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 6-6 partículas*

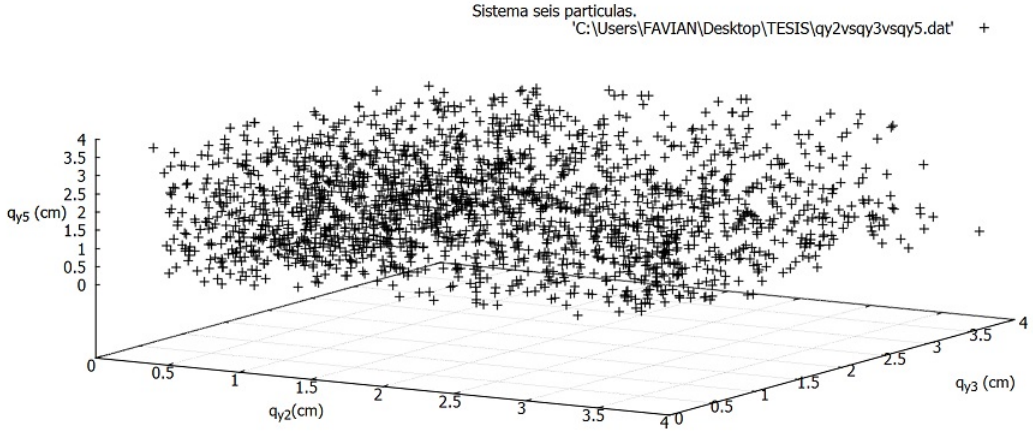



**Graf. 4.72** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 6-6 partículas*

### Espacio de configuraciones Experiencia 6

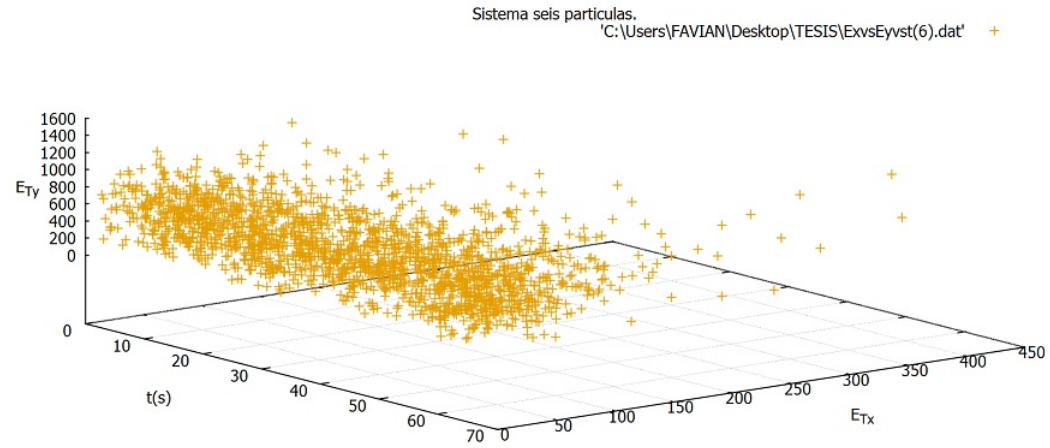



**Graf. 4.73** *Espacio de Configuraciones en la coordenada x para las particulas (6,4 y 1). Experiencia 6 partículas*

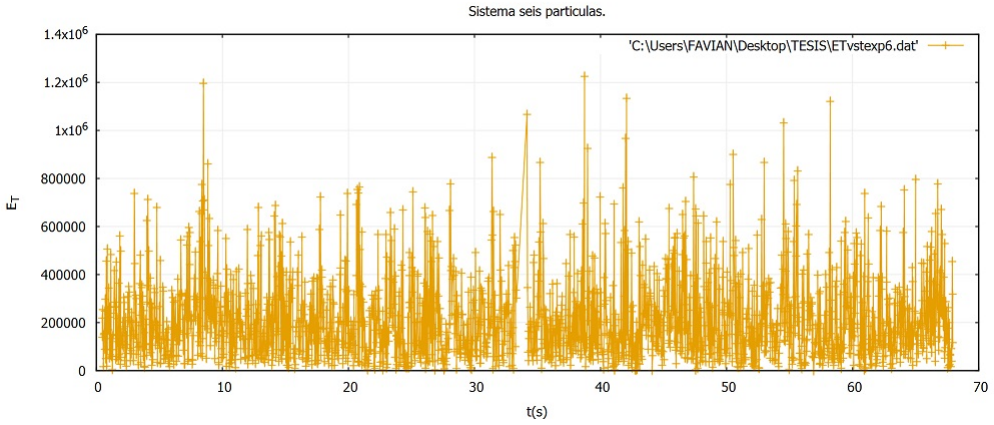



**Graf. 4.74** *Espacio de Configuraciones en la coordenada y para las particulas (2,3 y 5). Experiencia 6 partículas*

### Energía total de las partículas. Experiencia 6




**Graf. 4.75** *Energía de las particulas en $x$ e $y$ . Experiencia 6.*




**Graf. 4.76** *Energía Total del sistema. Experiencia 6.*

### Experiencia 7. (siete particulas)

En la septima experiencia se observan a siete partículas (ver Fig 4.8) que se encuentran bajo las mismas condiciones iniciales.

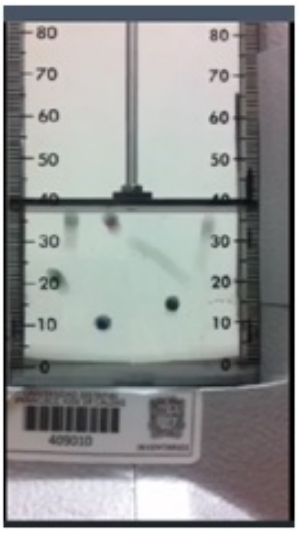
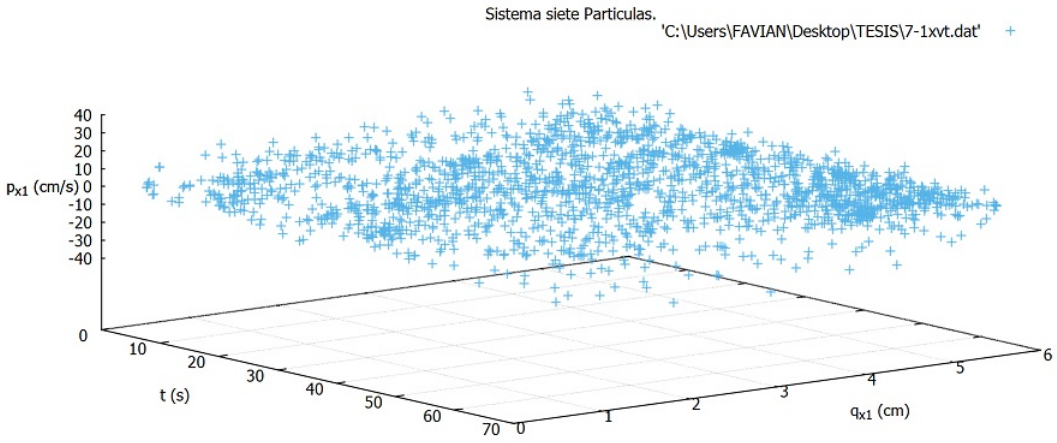
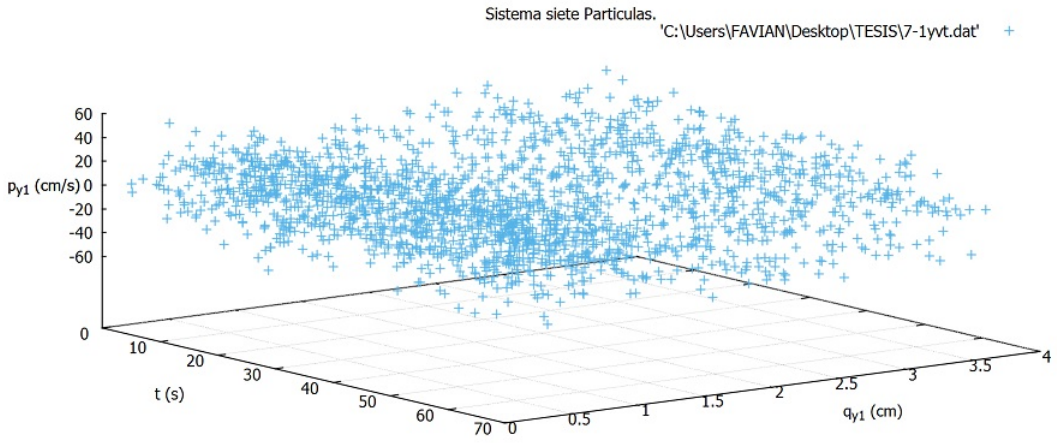



**Fig. 4.8** *Montaje Experiencia 7*

**Espacio de Fases. Experiencia 7 (partícula 1-7)**

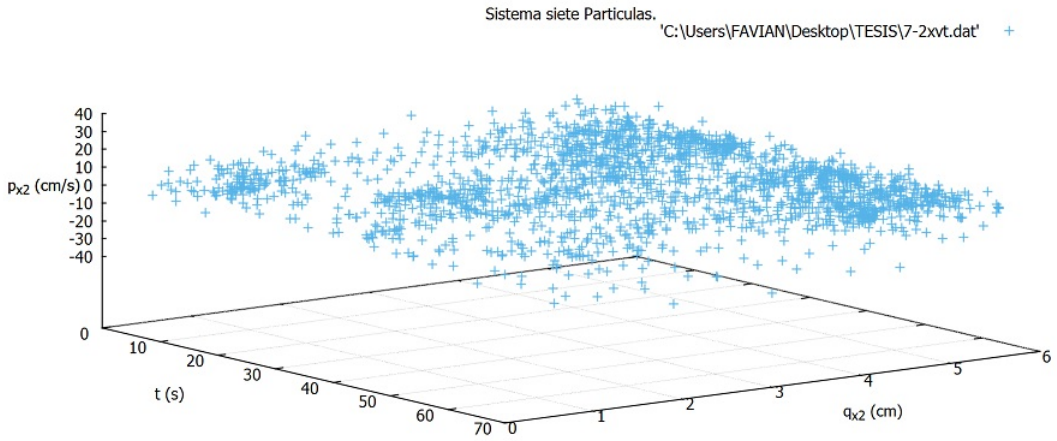



**Graf. 4.77** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 1-7 partículas*

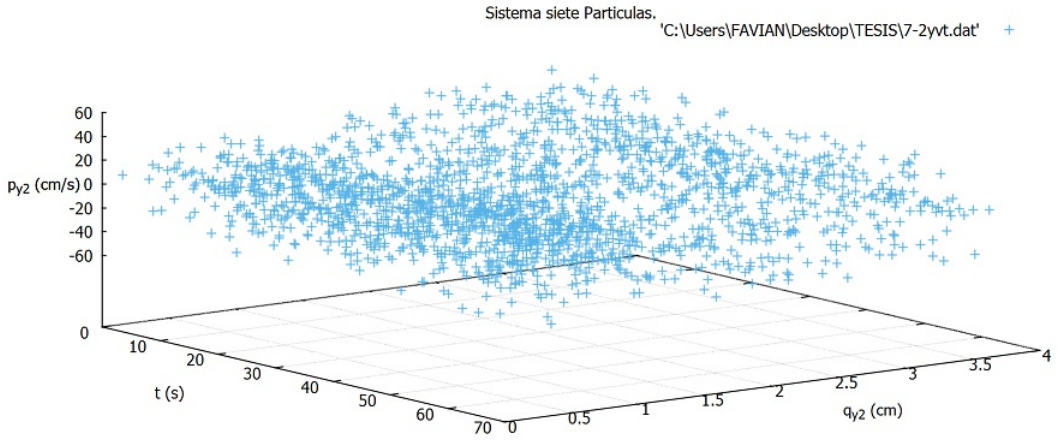



**Graf. 4.78** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 1-7 partículas*

**Espacio de Fases. Experiencia 7 (partícula 2-7)**

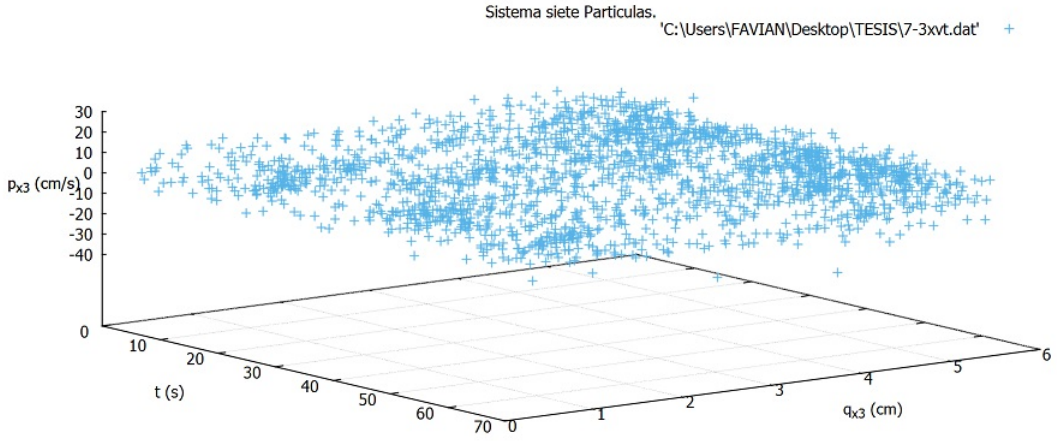



**Graf. 4.79** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 2-7 partículas*

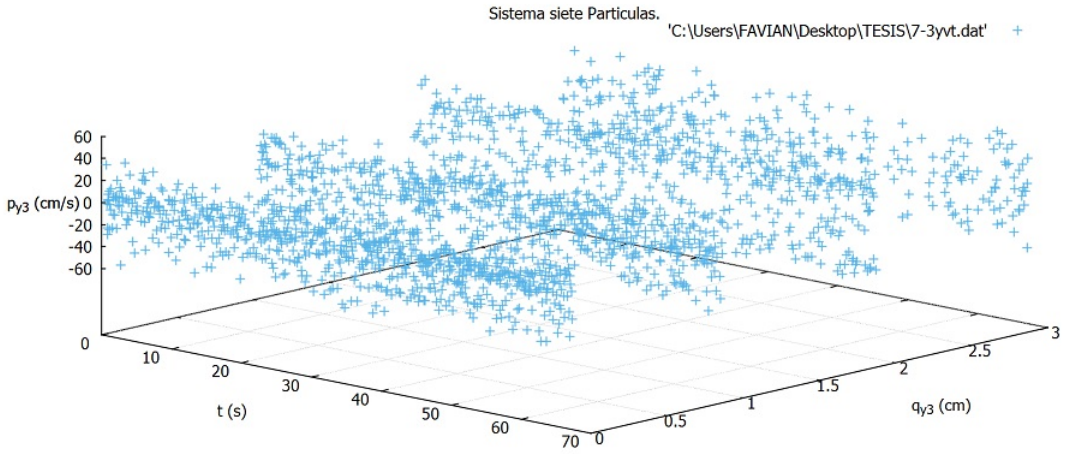



**Graf. 4.80** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 2-7 partículas*

**Espacio de Fases. Experiencia 7 (partícula 3-7)**

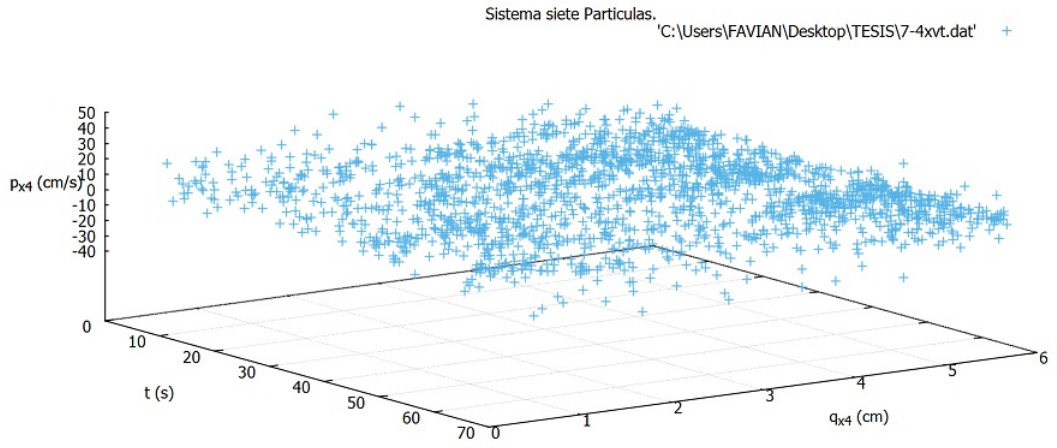



**Graf. 4.81** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 3-7 partículas*

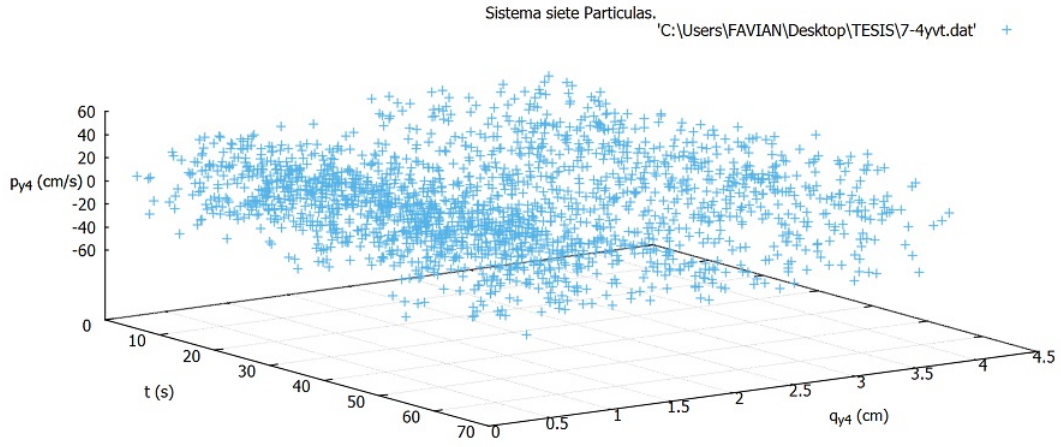



**Graf. 4.82** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 3-7 partículas*

**Espacio de Fases. Experiencia 7 (partícula 4-7)**

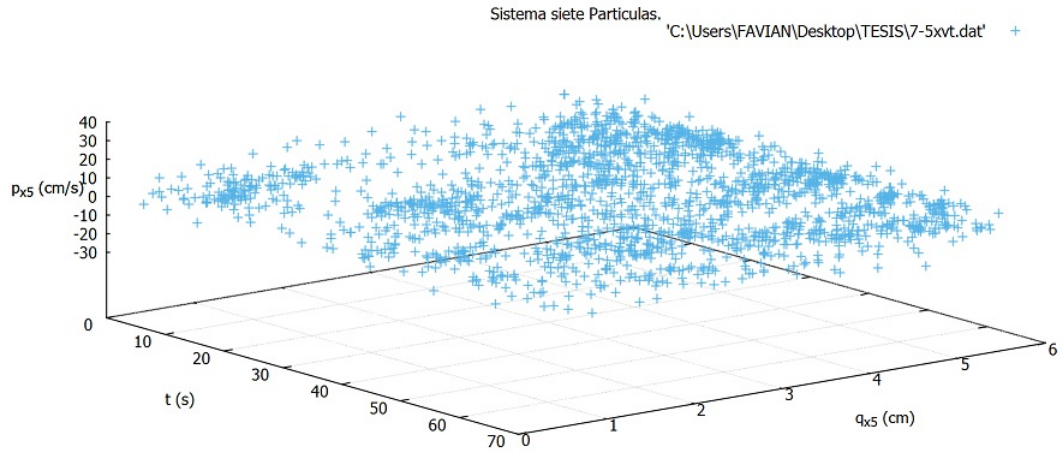



**Graf. 4.84** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 4-7 partículas*

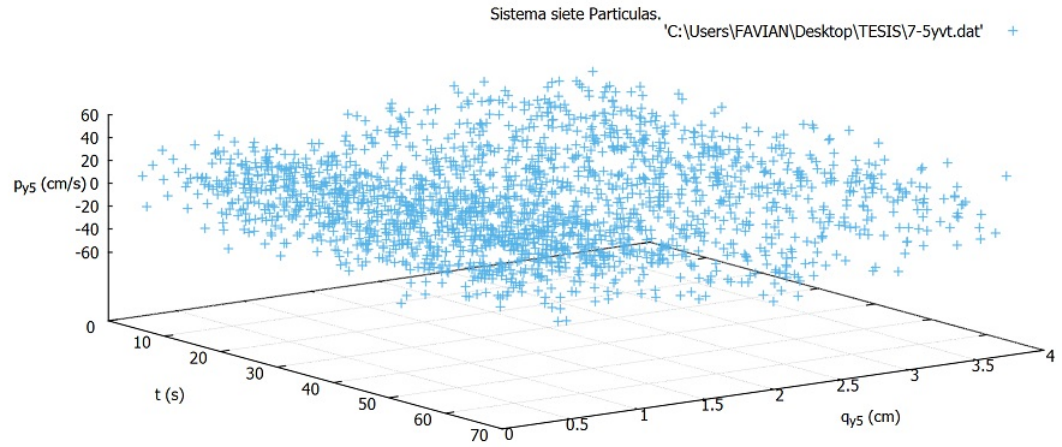



**Graf. 4.84** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 4-7 partículas*

**Espacio de Fases. Experiencia 7 (partícula 5-7)**

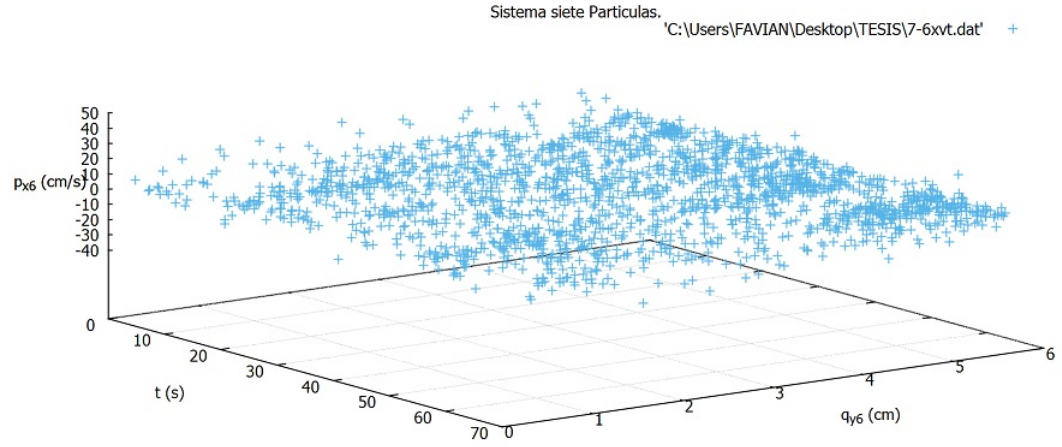



**Graf. 4.85** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 5-7 partículas*

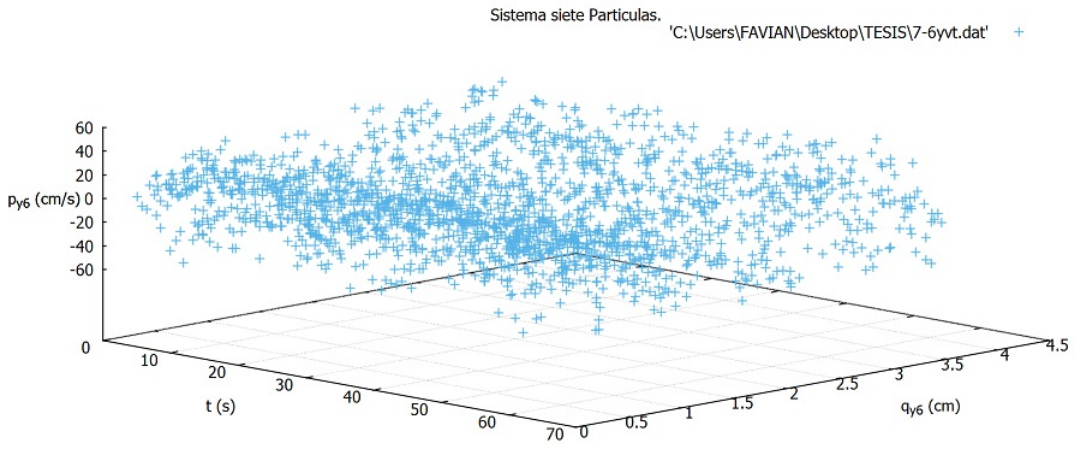



**Graf. 4.86** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 5-7 partículas*

**Espacio de Fases. Experiencia 7 (partícula 6-7)**

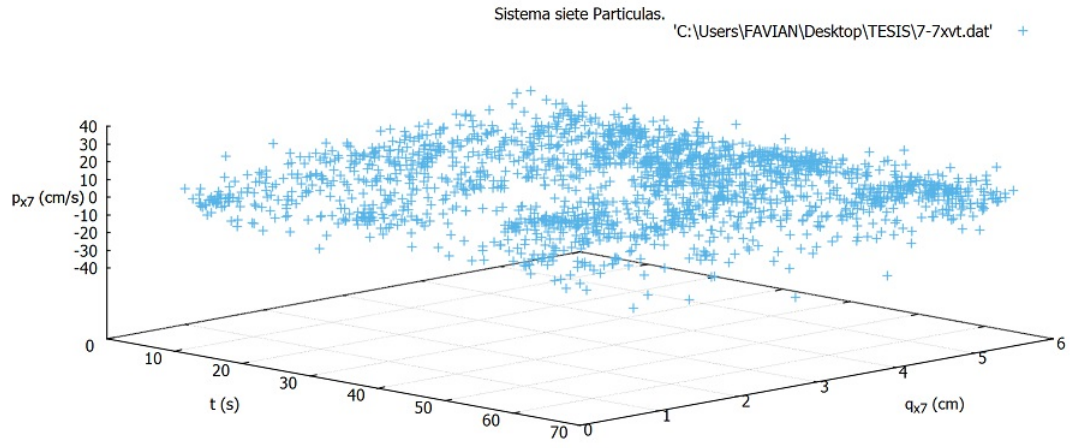



**Graf. 4.87** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 6-7 partículas*

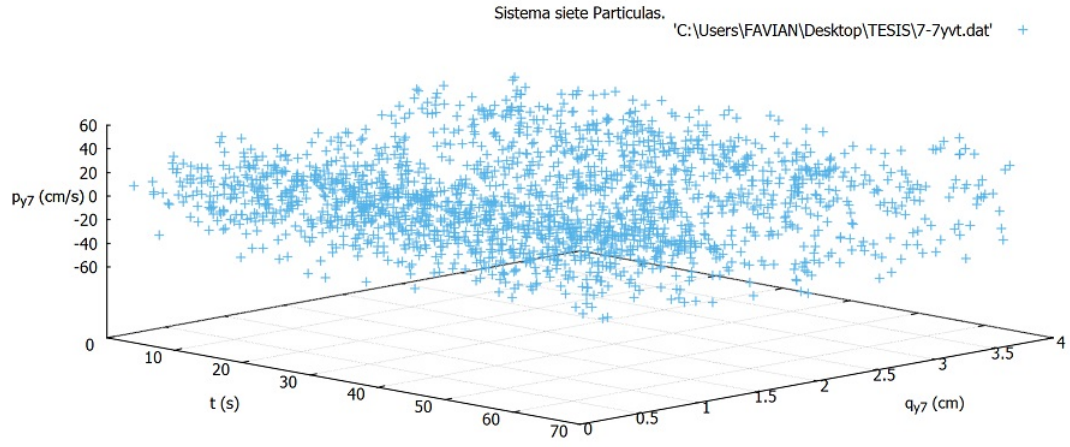



**Graf. 4.88** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 6-7 partículas*

**Espacio de Fases. Experiencia 7 (partícula 7-7)**

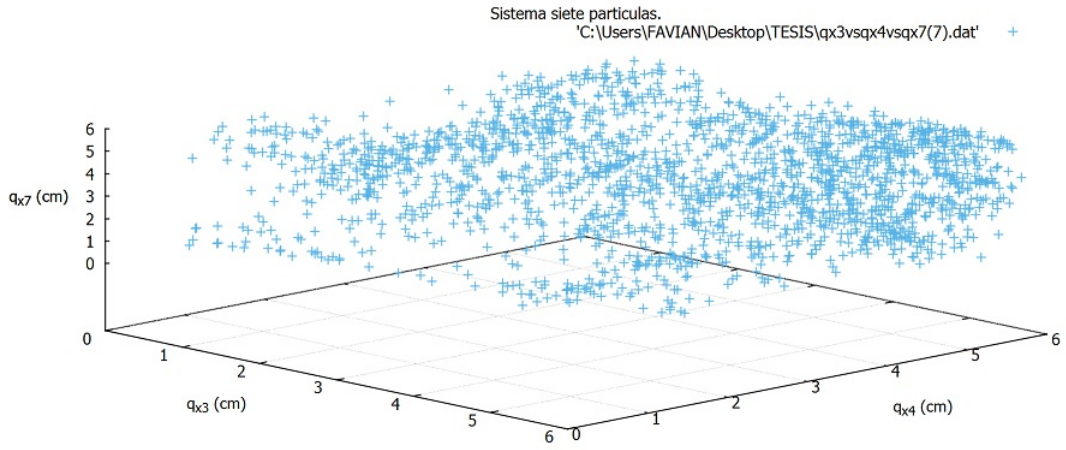



**Graf. 4.89** *Espacio de fases en la coordenada x. Experiencia 7-7 partículas*

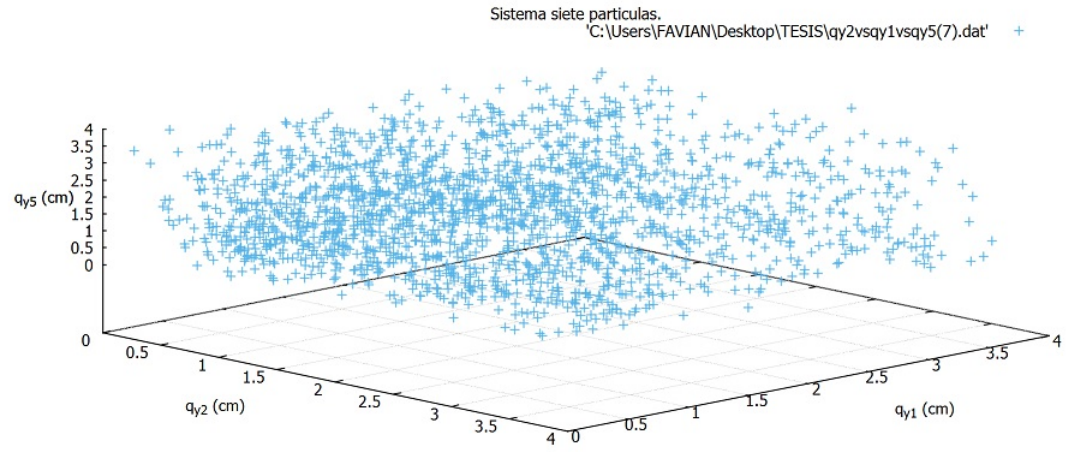



**Graf. 4.90** *Espacio de fases en la coordenada y. Experiencia 7-7 partículas*

**Espacio de configuraciones Experiencia 7**

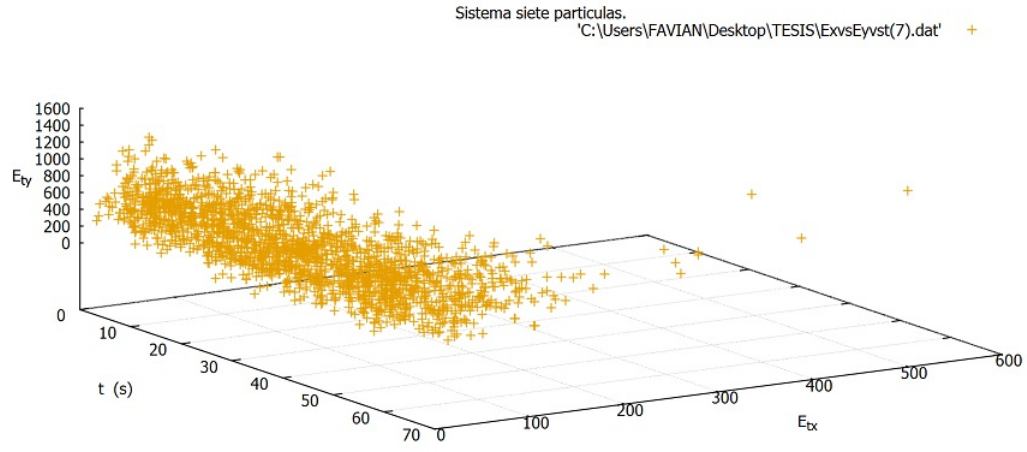



**Graf. 4.91** *Espacio de Configuraciones en la coordenada x para las particulas (3,4 y 7). Experiencia 7 partículas*

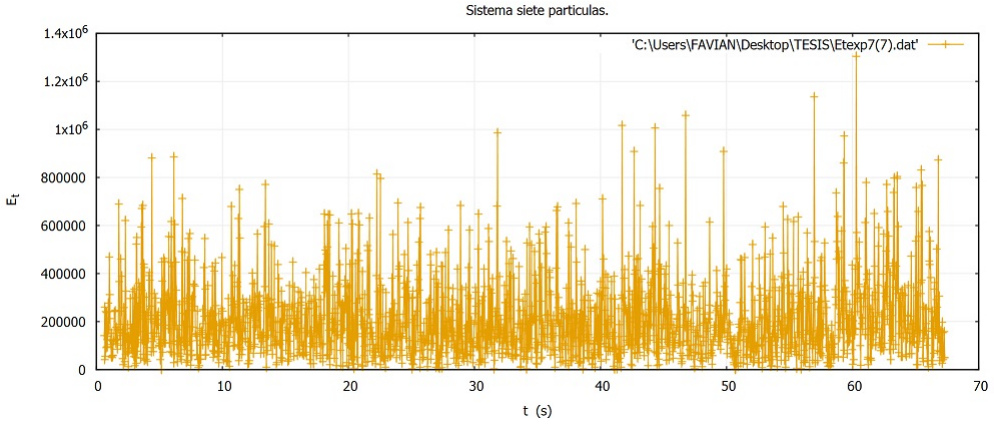



**Graf. 4.92** *Espacio de Configuraciones en la coordenada y para las particulas (2,1 y 5). Experiencia 6 partículas*

**Energía total de las partículas. Experiencia 7**




**Graf. 4.93** *Energía de las partículas en $x$ e $y$ . Experiencia 7.*




**Graf. 4.94** *Energía Total del sistema. Experiencia 7.*

# Capitulo 5

# Discusión breve de resultados

Las gráficas obtenidas demuestran que las trayectorias descritas en los espacios de fases son similares, esto permite concluir que sin importar el número de particulas que se tengan el comportamiento de las posiciones y los momentos tienden a hacer iguales en cualquier instante de tiempo.

En este caso estdeterminado por las posiciones y los momentos de todas las partículas en un instante dado, las cuales determinan de manera unívoca el estado del sistema en cualquier otro instante. Así, que se tendrán 6N (grados de libertad) variables reales independientes (3 coordenadas y 3 componentes del momento lineal por cada partícula). se denotorá genéricamente dicho estado por $(p, q)$, donde $p$ y $q$ son dos vectores de 3N dimensiones, cuyas componentes son las de los momentos y las coordenadas, respectivamente.

En las gráficas se encuentran valores promedio de las cantidades dinámicas $p, q$ en vez de valores individuales precisos para cada componente del sistema (ya que no interesa el comportamiento de cada componente individual, porque dicho comportamiento no es observable) sino en el comportamiento del sistema como un todo; si se olvida por un momento la estructura interna del sistema y simplemente se usan los valores medidos experimentalmente de U (energía interna) y W (trabajo), se estaria utilizando la termodinámica clásica para comprender la fenomenología del gas ideal.

Así se puede relacionar la temperatura T del sistema con la energía cinética promedio de las partículas en el sistema. Por tanto, la temperatura es definida independientemente del movimiento del sistema relativo al observador. No se necesita indicar aquí la relación precisa entre la temperatura y la energía cinética ya que se ha mencionado anteriormente.

Es suficiente por el momento suponer que, dada la energía cinética promedio en un sistema, se puede calcular la temperatura del sistema, y recíprocamente. En este sentido se habla de la temperatura de un gas.

En este sistema se tiene la misma temperatura en todas sus partes, de modo que la energía cinética promedio de las partículas en cualquier región del sistema es la misma, se dice que está en equilibrio térmico.

En un sistema aislado, cuya energía interna es constante, la temperatura puede cambiar si la energía cinética interna cambia, debido a un cambio en la energía potencial interna. Pero si la energía potencial interna de un sistema aislado permanece constante, que es el caso del presente estudio, entonces la energía cinética promedio del sistema permanecería constante, o sea, su temperatura no cambiará. Cuando el sistema no está aislado, puede intercambiar energía con el resto del universo, lo que puede resultar en un cambio de su energía cinética interna y, por tanto, de su temperatura. Por lo tanto se evidencia que en el instante de tiempo $t$ todos los micro-estados descritos en los espacios de fase con la misma energía (constante) serán proporcionales al volumen de la región, es decir, todos los microestados accesibles son igualmente probables a lo largo de un período de tiempo prolongado.

# Capitulo 6

# Conclusiones

- Los resultados de la investigación permiten evidenciar que independientemente del número de partículas las trayectorias describen comportamientos similares .

- El análisis realizado por medio de las formulaciones Newtoniana, Hamiltoniana y Lagrangiana son pertinentes para esquematizar la distribución de estados .

- En el espacio de fases del sistema se pude validar la hipótesis ergódica, ya que después de un tiempo determinado la energía es proporcional al volumen de la caja, donde se encuentran confinadas las partículas.

- En los espacios de configuraciones se evidencia la reversibilidad de la práctica, ya que es allí donde después de determinado tiempo las partćulas vuelven a estar en sus estados iniciales.

- En el modelo del gas ideal, las partículas se comportan de forma libre, esto debido a que no están sometidas a ningún tipo de campo ni fuerzas que interactuen sobre ellas.

# Referencias Bibliográficas


[1] MANIPULATING ATOMS WITH PHOTONS
https://www.nobelprize.org/nobel$_p$*rizes/physics/laureates/*1997/*cohen−tannoudji − lecture.pdf*

[2] Greiner, W; Neise, L; Stocker, H (1995). "Thermodynamics and stastical mechanics". New York, EE.UU: Editorial Springer science

[3] Goldstein, H. (1987). "Mecánica Clásica". Barcelona, España: Editorial Reverte.Vol.2

[4] Landau, L. (1986). "Física Estadística". Barcelona, España: Editorial Reverte.Vol.5