

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

ALGUNAS APLICACIONES DE HOMOLOGÍA SIMPLICIAL A PROBLEMAS CLÁSICOS DE LA GEOMETRÍA

Valentina Martínez González
Dirigido por: Álvaro Arturo Sanjuan Cuéllar

Bogotá DC
NOVIEMBRE de 2025

Resumen

El estudio sistemático de la topología algebraica fue iniciado a finales del siglo XIX (1.895-1.901) por el matemático francés Henri Poincaré en una serie de artículos [6] donde estudió la estructura de los espacios topológicos mediante el uso de herramientas algebraicas. En esta monografía abordaremos los complejos geométricos y poliedros finitos, utilizando la homología como método para identificar propiedades invariantes tales como la cantidad de agujeros y la conexidad [1, Sec 2.3. Pág 24].

En nuestro análisis final, el factor determinante es la estructura topológica de un complejo simplicial K y no la triangulación ni la orientación escogida. En particular, se estudia la clasificación de los cinco poliedros regulares a partir de la característica de Euler y de los números de Betti, con el fin de reducir la naturaleza abstracta de la topología algebraica a un marco más comprensible y visual. El trabajo muestra cómo el uso de la maquinaria algebraica proporciona un método eficaz para resolver problemas de geometría y topología, contribuyendo a la comprensión de la estructura subyacente de los poliedros.

Palabras clave: Homología, característica de Euler, números de Betti, poliedros regulares, complejos geométricos, invariantes topológicos.

Agradecimientos: Expreso mi más sincero agradecimiento al profesor Carlos Andrés Giraldo, por enseñarme que la pedagogía puede ser una experiencia atractiva y significativa. Gracias a sus clases comprendí el valor de visualizar los objetos con los que trabajamos en matemáticas y de encontrar en ello una forma de aprendizaje más profunda y creativa. A la profesora Carolina Mejía, por inspirarme a desarrollar un pensamiento crítico y reflexivo, y por su acompañamiento constante en mi formación académica y personal. Al profesor Sanjuán, por su apoyo a lo largo de este trabajo, por escucharme con paciencia y por enseñarme la importancia de la buena redacción, la claridad en la presentación de las ideas y la forma de expresarlas con precisión y sentido.

Asimismo, agradezco profundamente al Grupo de Género del Programa de Matemáticas, por ser un espacio de aprendizaje, reflexión y construcción colectiva. Allí aprendí a cuestionar, a pensar críticamente y a valorar la diversidad, el respeto y la empatía.

Finalmente, a mis compañerxs y profesores, por compartir conocimientos, experiencias y conversaciones que han enriquecido tanto mi formación académica como personal. Su compañía y apoyo han sido esenciales en este proceso.

1. INTRODUCCIÓN

La topología algebraica y la topología general, aunque surgieron de motivaciones diferentes. comparten el propósito común de describir la naturaleza de los espacios topológicos a través de propiedades invariantes bajo homeomorfismos. Mientras la topología general se consolidó como una teoría general para el análisis de funciones continuas, la topología algebraica nació motivada por problemas geométricos relacionados con trayectorias, superficies y espacios euclidianos.

La topología algebraica describe la estructura de un espacio topológico asociándole un sistema algebraico, nos basaremos en los grupos de homología simpliciales ya que ellos surgieron primero históricamente y para el objetivo de este trabajo es suficiente con su estructura [5]. Por lo tanto, los grupos proporcionan un método para comparar espacios mediante la homología. Para un espacio X el grupo asociado $G(X)$ refleja la estructura topológica y geométrica del espacio subyacente. Estos grupos reflejan características intrínsecas como la presencia de agujeros, aportando un método para comparar y clasificar espacios. Así, el poder de la topología algebraica se deriva del uso de la maquinaria algebraica para resolver problemas de topología y geometría. [1, Sec. 1.1. Pág 1,2].

En esta monografía se estudian los complejos geométricos y poliedros finitos como casos de aplicación, debido a que son fáciles de visualizar y lo suficientemente generales como para permitir aplicaciones significativas [1, Sec 1.3, Pág 8]. Utilizaremos la triangulación como método conveniente para visualizar los poliedros y convertirlos a una forma estándar y la orientación como un vehículo conveniente para catalogar la disposición de los símplices. Para describir su disposición utilizaremos un método proporcionado por la teoría de grupos sugerida por la gran matemática Emmy Noether alrededor de 1.925 y será este método el que utilizaremos en nuestro trabajo[1, Sec 1.4. Pág 13, 14].

Las estructuras de homología nos indican la conexidad o la cantidad de agujeros n-dimensional [1, Sec 2.3. Pág 24]. La generalización de estos números de conectividad que utilizó Enrico Betti para estudiar curvas y superficies recibieron el nombre de números de Betti en su honor. J.W. Alexander demuestra que los números de Betti son invariantes topológicos y la invariancia topológica de los grupos de homología fue demostrada por Oswald Veblen en 1.922.

Este análisis no solo permite reducir la abstracción propia de la topología algebraica, sino también establecer un puente entre la teoría algebraica y las propiedades geométricas concretas de los poliedros regulares. En particular, la clasificación de los cinco poliedros regulares mediante la característica de Euler y la homología, mostrando cómo estas herramientas logran reducir la abstracción de la topología algebraica y revelar la estructura topológica y geométrica subyacente de dichos poliedros.

2. COMPLEJOS GEOMÉTRICOS

Comencemos definiendo los espacios para los que está definido la homología simplicial [l, p. 8]. Para esto, primero necesitamos estudiar un poco geometría analítica.

Definición 1. Geométricamente independientes Sea un conjunto $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ se dice que son **geométricamente independiente** si para cualesquiera escalares reales t_i, las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^{k} t_i = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=0}^{k} t_i a_i = 0$$

implican que $t_i = 0$ para todo $i = 0, \ldots, k$.

Obsérvese que estas dos ecuaciones equivalen a exigir que los vectores

$$a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_k - a_0$$

sean linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Con este hecho en mente, el siguiente teorema clásico de álgebra lineal nos permite acotar el número de tales vectores.

Teorema 1. *Sea $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V de dimensión finita, sobre un campo F. Entonces, S puede extenderse a una base de V sobre F. Aún más, si $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ es cualquier base de V sobre F, entonces $r \leq n$ [2, p. 336].*

Aplicando este resultado al conjunto de vectores

$$\{a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0\} \subset \mathbb{R}^n$$

obtenemos que éstos no pueden ser más de n, lo cual implica directamente que

$$k = r \leq n.$$

Podemos interpretar la definición de independencia geométrica desde un punto de vista completamente geométrico.
Si $k = 1$, el conjunto $\{a_0, a_1\}$ siempre es geométricamente independiente: dos puntos determinan una recta.
Si $k = 2$, el conjunto $\{a_0, a_1, a_2\}$ es geométricamente independiente **si y sólo si** los tres puntos **no son colineales**. Es decir, determinan un subespacio afín de dimensión 2 (un plano).
En general, si los puntos son geométricamentre independientes, entonces

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$$



Figura 1: Geométricamente independientes.

determinan un subespacio afín de dimensión k. Geométricamente, decir que el conjunto **no** es geométricamente independiente es afirmar que todos los puntos están contenidos en un subespacio afín de dimensión estricamente menor que k.

Para verificar que el conjunto $\{a_0, a_1, a_2\}$ de puntos de la Figura 1(a) no son colineales en $\mathbb{R}^2$. Elegimos las coordenadas:

$$a_0 = (0,0), \qquad a_1 = (1,0), \qquad a_2 = (0,1).$$

Si existen t_0, t_1, t_2 con

$$t_0 + t_1 + t_2 = 0, \qquad t_0 a_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2 = 0,$$

la segunda ecuación en coordenadas da

$$(t_1, t_2) = (0,0).$$

Entonces $t_1 = t_2 = 0$. Por la suma $t_0 = t_1 + t_2 = 0$, da la ecuación trivial, así que el conjunto es geométricamente independiente.

Ahora verifiquemos que los tres puntos en $\mathbb{R}^2$ de la Figura 1(b) no son geométricamente independientes. Tomemos por ejemplo:

$$a'_0 = (0,0), \qquad a'_1 = (1,0), \qquad a_2 = (2,0).$$

Considera los escalares $t_0 = 1, t_1 = -2, t_2 = 1$. Entonces

$$t_0 + t_1 + t_2 = 1 - 2 + 1 = 0,$$

y

$$t_0 a'_0 + t_1 a'_1 + t_2 a'_2 = (0,0).$$

Hemos encontrado una relación no trivial con suma cero y suma ponderada cero, por lo que no son geométricamente independientes.

Una vez establecida la condición de independencia geométrica para los puntos, podemos definir la unidad básica de nuestra estructura: el **símplice**.

Definición 2. Sea $\{a_0,\dots,a_k\}$ un conjunto de puntos geométricamente independientes en $\mathbb{R}^n$. El **símplice geométrico k-dimensional** o **k-símplice**, denotado por σ^k, generado por $\{a_0,\dots,a_k\}$ es el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ para los cuales existen números reales no negativos $\lambda_0,\dots,\lambda_k$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1.$$

Los puntos $\{a_0,\dots,a_k\}$ se denominan **vértices** del símplice, y los números $\lambda_0,\dots,\lambda_k$ son **las coordenadas baricéntricas** del punto x [1, p. 8,9].

Consideremos los puntos de la Figura 2

$$a_0 = (0,0), \qquad a_1 = (1,0), \qquad a_2 = (0,1)$$

en $\mathbb{R}^2$. Ya verificamos que son **geométricamente independientes**, por lo que generan un 2-**símplice**. El símplice geométrico 2-dimensional generado por $\{a_0, a_1, a_2\}$ es el conjunto de todos los puntos

$$x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,$$

donde

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Sustituyendo las coordenadas de los vértices, obtenemos

$$x = \lambda_0(0,0) + \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, \lambda_2).$$

La condición $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$ implica que

$$\lambda_1 \geq 0, \qquad \lambda_2 \geq 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1,$$

por lo que el conjunto de puntos x describe **exactamente el triángulo** con vértices a_0, a_1, a_2, incluyendo su interior. En consecuencia,

$$\sigma^2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1\},$$

es decir, el **triángulo lleno** formado por los tres vértices.

En la geometría simplicial, las piezas que ponen un símplice se denominan **caras**.

Definición 3. Cara de un símplice Un k-símplice σ^k es una **cara** de un m-símplice σ^m con $k \leq m$, si cada vértice de σ^k es vértice de σ^m. Las caras de σ^m distintas de si mismas se llaman **caras propias** [1, p. 9].

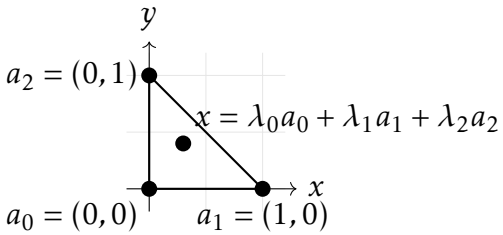


Figura 2: El 2-símplice generado por $\{a_0, a_1, a_2\}$ en $\mathbb{R}^2$.

Si σ^m es el símplice con vértices $a_0, \ldots, a_m$. Usaremos la siguiente notación

$$\sigma^m = \langle a_0 \ldots a_m \rangle.$$

Antes de construir objetos más complejos, debemos establecer una **regla de unión**, es decir, el criterio que determina cómo pueden intersectarse los símplices entre sí para formar estructuras mayores sin solapamientos indebidos ni discontinuidades.

Definición 4. Dos símplices σ^m y σ^n están **unidos propiamente** siempre que no se intersecten o la intersección $\sigma^m \cap \sigma^n$ sea una cara de σ^m y σ^n [1, p. 9].

En la Figura 3(a) los símplices están **propiamente unidos** ya que la intersección de dos símplices distintos es una cara propia. Por ejemplo, el tetraedro y el triángulo rojo se intersectan en un segmento y esta es una cara propia de los dos. Mientras que en la Figura 3(b) observamos que los símplices **no están propiamente unidos** porque los dos símplices mostrados se intersectan pero no en una cara propia de los dos.



Figura 3: Símplices propiamente unidos

Una vez que entendemos las reglas de construcción de los símplices y sus interconexiones, podemos definir el objeto central de nuestro estudio.

Consideremos los puntos en $\mathbb{R}^2$ de la Figura 4:

$$a_0 = (0,0), \qquad a_1 = (1,0), \qquad a_2 = (0,1), \qquad a_3 = (1,1)$$

A partir de esto definimos los siguientes símplices:

$$\sigma^1 = \langle a_0 a_1 a_2 \rangle, \qquad \sigma^2 = \langle a_1 a_2 a_3 \rangle.$$

Entonces, definimos el siguiente complejo geométrico

$$K = \{\text{todas las caras de } \sigma^1 \text{ y } \sigma^2\}.$$

Es decir, K contiene ambos triángulos y todas sus aristas y vértices. Este conjunto cumple las dos condiciones de la definición:

1. **Cada símplice incluye todas sus caras**: Como incluimos explícitamente las caras de σ^1 y σ^2, la primera condición se satisface.
2. **La intersección de dos símplices es una cara de uno de ellos**: Los triángulos σ^1 y σ^2 se intersectan exactamente en la arista
$$\langle a_1 a_2 \rangle,$$
que es una cara de ambos. Cualquier otra intersección entre símplices del complejo es o bien vacía o bien un vértice.

El portador geométrico

$$|K| = \sigma^1 \cup \sigma^2$$

es el cuadrado formado por los vértices a_0, a_1, a_2, a_3, triangulado por la diagonal que une a_1 y a_2.

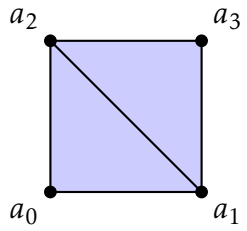


Figura 4: Complejo geométrico formado por los símplices $\sigma_1 = [a_0, a_1, a_2]$ y $\sigma_2 = [a_1, a_2, a_3]$.

Definición 5. Espacio triangulable Sea X un espacio topológico. Si existe un complejo geométrico K cuyo portador geométrico $|K|$ es homeomorfo a X, es decir, sea $f : |K| \longrightarrow X$ una biyección tal que la función f como la función inversa $f^{-1} : X \longrightarrow |K|$ son continuas entonces X se dice **espacio triangulable**, y el complejo K se llama una **triangulación** de X.

[7] Existen diversas condiciones estructurales que garantizan que un espacio topológico sea triangulable. Un primer ejemplo fundamental es el de las **superficies topológicas** 2 **y** 3 **dimensionales compactas**. Para precisar esta noción, recordemos que:

Definición 6. Sea (M,d) un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq M$ se dice **compacto** si para cualquier cubrimiento abierto $\mathcal{F}$ de A es posible extraer un subcubrimiento finito que también lo cubra [3].

Otro caso relevante es que toda 3-**variedad topológica** es triangulable, resultado notable que no se generaliza de manera inmediata a dimensiones superiores. Formalmente, utilizamos la noción estándar de variedad topológica:

Definición 7. Una **variedad topológica** n**-dimensional** es un espacio topológico que cumple tres propiedades fundamentales: es un espacio de Hausdorff, es localmente euclidiano de dimensión n y es 2-numerable [4].

Definición 8. Si un espacio X tiene una base numerable para su topología, entonces se dice que X satisface el **segundo axioma de numerabilidad**, o que es 2-**numerable** [3].

Estos son algunos casos, la triangulación proporciona una herramienta poderosa para estudiar el espacio desde una perspectiva combinatoria y geométrica. En particular, en nuestro trabajo utilizaremos la triangulación como un método conveniente para visualizar un poliedro y convertirlo en una forma estándar que facilite su análisis topológico.
[1] Como ejemplo fundamental, consideremos la **triangulación de la esfera** S^2, representado en la Figura 5. Recordemos que

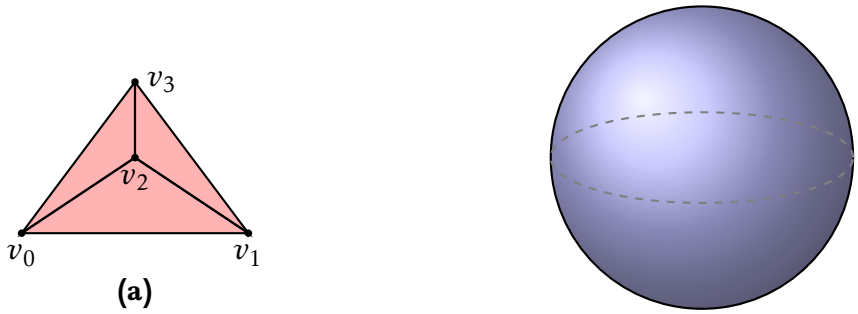
$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}.$$

Una forma estándar de obtener una triangulación de S^2 consiste en observar que el tetraedro regular en $\mathbb{R}^3$ es un complejo simplicial cuyos vértices, aristas y caras triangulares se apoyan exactamente sobre la superficie de la esfera. De hecho, si ∂T es un tetraedro regular inscrito en S^2, entonces su frontera ∂T es un complejo geométrico formado por cuatro triángulos euclidianos que encajan sin solaparse, y su portador geométrico $|\partial T|$ es homeomorfo a la esfera.

En consecuencia, la aplicación que envía cada punto de una cara del tetraedro al punto correspondiente sobre S^2 mediante la proyección radial desde el origen define un homeomorfismo

$$f : |\partial T| \longrightarrow S^2,$$

lo cual muestra que S^2 es un **espacio triangulable**. Esta construcción constituye el ejemplo más simple y clásico de triangulación de una superficie cerrada.



(a)

(b) Esfera

Figura 5: Triangulación (a) y esfera (b)

3. Orientación de los complejos geométricos

En el contexto de la homología simplicial, no basta con describir la forma geométrica de los símplices; es fundamental asignarles un **sentido** o **dirección**. Esta necesidad introduce el concepto de **orientación**.
Para formalizar esta idea, debemos recurrir a las operaciones básicas de reordenamiento de vértices, siendo la **transposición** el elemento fundamental.

Definición 9. Una **transposición** es una función biyectiva $\Pi : \{a_0, a_1\} \longrightarrow \{a_0, a_1\}$ [2]

$$\Pi = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ \Pi(a_0) & \Pi(a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

Un resultado clave de la teoría de grupos visto en [2] Frailegh-Permutaciones II, Página 52 establece que cualquier permutación de un conjunto finito de al menos dos elementos es un producto de transposiciones. Esta descomposición permite clasificar todas las posibles reordenaciones según la paridad del número de transposiciones utilizadas.

Definición 10. Un **m-símplice orientado**, $m > 1$, se obtiene de un n-símplice $\sigma^m = \langle a_0 \dots a_m \rangle$ eligiendo un orden para sus vértices. La clase de equivalencia de las permutaciones pares es decir, del producto de un número par de transposiciones del orden elegido determina el **símplice orientado positivamente** $+\sigma^m$, mientras que la clase de equivalencia de las permutaciones impares determina el **símplice orientado negativamente** $-\sigma^m$. Un **complejo geométrico orientado** se obtiene de un complejo geométrico al asignar una orientación a cada uno de los símplices [1, p. 12].

Si los vértices $a_0, \dots, a_p$ de un complejo K son los vértices de un p-símplice σ^p, entonces el símbolo $+\langle a_0 \dots a_p \rangle$ denota la clase de permutaciones pares del orden indicado $a_0, \dots, a_p$ y $-\langle a_0 \dots a_p \rangle$ denota

la clase de permutaciones impares. Si quisiéramos que la clase de permutaciones pares de este orden determinara el símplice orientado positivamente, entonces escribiríamos

$$+\sigma^p = \langle a_0 \dots a_p \rangle$$

Una orientación de un 2-símplice se representa con una flecha circular. El símplice orientado $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ se indican en la Figura 6(a) dibujando una flecha en la dirección de $\langle a_2 a_0 a_1 \rangle$ en el sentido contrario a las agujas del reloj entonces $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$, $\langle a_1 a_2 a_0 \rangle$, y $\langle a_2 a_0 a_1 \rangle$ denotan a $+\sigma^2$. Mientras que en la Figura 6(b) dibujamos una flecha en la dirección de $\langle a_1 a_0 a_2 \rangle$ a favor de las manecillas del reloj indicando que el símplice está orientado en sentido contrario, $\langle a_0 a_2 a_1 \rangle$, $\langle a_2 a_1 a_0 \rangle$, y $\langle a_1 a_0 a_2 \rangle$ denotan a $-\sigma^2$. Entonces

$$+\sigma^2 = +\langle a_0 a_1 a_2 \rangle \qquad -\sigma^2 = -\langle a_0 a_1 a_2 \rangle = +\langle a_0 a_2 a_1 \rangle.$$

(Así $+\langle a_0 a_2 a_1 \rangle$ denota la clase de permutaciones pares de a_0, a_2, a_1, y $-\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ denota la clase de permutaciones impares de a_0, a_l y a_2.)



Figura 6: Orientación

El método para orientar un complejo que utilizaremos será asignar una orientación a cada símplice individualmente sin tener en cuenta la forma en que se unen los símplices. A partir de este punto, asumimos que a cada complejo en consideración se le asignara alguna orientación y la orientación la utilizaremos como un vehículo conveniente para catalogar la disposición de los símplices. Sin embargo, ni la triangulación particular ni la orientación particular hacen ninguna diferencia en el resultado final.

Definición 11. Sea K un complejo geométrico orientado con símplices σ^{p+1} y σ^p cuyas dimensiones difieren en 1. Asociamos con cada uno de estos pares (σ^{p+1}, σ^p) un **número de incidencia** $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$ definido de la siguiente manera: Si σ^p no es una cara de σ^{p+1}, entonces $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$. Supongamos que σ^p es una cara de σ^{p+1}. Etiquete los vértices $a_0, \dots, a_p$ de σ^p de modo que $+\sigma^p = +\langle a_0 \dots a_p \rangle$. Sea v el vértice de σ^{p+1} que no está en σ^p. Entonces $+\sigma^{p+1} = \pm\langle v a_0 \dots a_p \rangle$. Si $+\sigma^{p+1} = +\langle v a_0 \dots a_p \rangle$, entonces $[a^{p+1}, \sigma^p] = 1$. Si $+\sigma^{p+1} = -\langle v a_0 \dots a_p \rangle$, entonces $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = -1$ [1, p. 13].

De esta manera, la relación entre las incidencias en las distintas dimensiones de $\sigma^2 = \langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ de la Figura 6, $\sigma_1^1 = \langle a_1 a_2 \rangle$ y $\sigma_2^1 = \langle a_0 a_2 \rangle$, combinada con la incidencia en el punto $\sigma^0 = \langle a_2 \rangle$, satisface la siguiente propiedad:

$$[\sigma^2, \sigma_1^1][\sigma_1^1, \sigma^0] + [\sigma^2, \sigma_2^1][\sigma_1^2, \sigma^0] = 0.$$

Teorema 2. *[1] Sea K un complejo orientado, σ^p un p-símplice de K y σ^{p-2} una $p-2$-cara de σ^p. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}][\sigma_i^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 0, \qquad \sigma^{p-1} \in K$$

Demostración. Etiquetamos los vértices $v_0, \ldots, v_{p-2}$ tal que $+\sigma^{p-2} = \langle v_0 \ldots v_{p-2} \rangle$. Luego σ^p tiene dos vértices adicionales a y b, y nosotros podemos asumir que $+\sigma^p = \langle a b v_0 \ldots v_{p-2} \rangle$. Los términos no nulos ocurren en la suma solo para dos valores σ^{p-1}, a saber,

$$\sigma_1^{p-1} = \langle a v_0 \ldots v_{p-2}, \rangle \qquad \sigma_2^{p-1} = \langle b v_0 \ldots v_{p-2} \rangle.$$

Ahora debemos tratar cuatro casos determinados por las orientaciones de σ_1^{p-1} y σ_2^{p-1}.

- **Caso 1**: Supongamos que

  $$+\sigma_1^{p-1} = +\langle a v_0 \ldots v_{p-2} \rangle, \qquad +\sigma_2^{p-1} = +\langle b v_0 \ldots v_{p-2} \rangle.$$

  Entonces

  $$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = -1, \qquad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = +1,$$
  $$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = +1, \qquad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = +1,$$

  así $\sum_{i=1}^{n} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}][\sigma_i^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 0$.

Dado que los otros tres casos se desarrollan de manera análoga al primero, se presentará únicamente la demostración correspondiente al primer caso. □

Esta propiedad de que la suma de las incidencias compuestas sea nula es la motivación fundamental para el torema que establece que el **borde de un borde es cero**, un principio central en homología simplicial.

4. GRUPOS DE HOMOLOGÍA

Para aplicar herramientas algebraicas a los complejos geométricos, es necesario construir objeto que permitan la suma y la resta de los símplices orientados. Estos objetos son las p-**cadenas**. Los grupos de cadenas exhiben una estructura algebraica fundamental conocida como **grupo abeliano libre**.

Definición 12. Un grupo abeliano con un conjunto generador no vacío C que satisface que cada elemento distinto de cero en un grupo G se puede expresar de manera única en la forma

$$a = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_rx_r, \qquad m_i \neq 0, m_i \in \mathbb{Z}, x_i \in X$$

es un **grupo abeliano libre** y X es una **base** del grupo [2].

Esta propiedad de unicidad es poderosa, pues establece una equivalencia fundamental:

Teorema 3. *Si G es un grupo abeliano libre distinto de cero con una base de r elementos, entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ con r factores [2].*

Demostración. Sea G un grupo abeliano libre distinto de cero con una base de r elementos. Por definición de grupo abeliano libre definimos la aplicación

$$\phi : \mathbb{Z}^r \longrightarrow G, \phi(m_1, m_2, \ldots, m_r) = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_rx_r.$$

- **Homomorfismo**: El homomorfismo ϕ respeta la suma en ambos grupos:

$$\begin{aligned}
&\phi\Big((n_1, n_2, \ldots, n_r) + (m_1, m_2, \ldots, m_r)\Big) \\
&= \phi\Big(n_1 + m_1, n_2 + m_2, \ldots, n_r + m_r\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{r} (n_i + m_i)x_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} n_ix_i + \sum_{i=1}^{r} m_ix_i \\
&= \phi(n_1, n_2, \ldots, n_r) + \phi(m_1, m_2, \ldots, m_r).
\end{aligned}$$

- **Inyectividad**: Dado que la representación de $a \in G$ es única, si $\phi(n_i) = \phi(m_i)$ entonces $n_i = m_i$ para todo i.

- **Sobreyectiva**: Por hipótesis $\{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ es una base de G, luego genera a G. Por como definimos la función $\sum_{i=1}^{r} n_ig_i = \phi(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ por lo que $\{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ se puede expresar como $\phi(n_1, n_2, \ldots, n_r)$. Así ϕ es sobre.

Por lo tanto, G es isomorfo a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}$ con r factores. □

Una p-**cadena** es la herramienta que materializa la combinación formal de símplices orientados en este grupo abeliano libre.

Definición 13. Sea K un complejo simplicial orientado. Si $p \in \mathbb{Z}^+$, una **cadena** p-**dimensional** o p-**cadena**, es una función c_p de la familia de p-simplices orientados de K a los enteros, tal que:

- $c(\sigma) = -c(\sigma')$ si σ y σ' son orientaciones opuestas del mismo símplice.
- $c(\sigma) = 0$ para todos los p-símpliciales σ excepto para un número finito.

Con la operación de suma punto inducida por los enteros, la familia de p-cadenas forma un **grupo de cadenas** p-**dimensional de** K. Este grupo es denotado por $C_p(K)$ [1].

Para relacionar los grupos de cadenas entre sí, es necesario definir un homomorfismo que conecte las dimensiones. Este es el **operador borde**.

Definición 14. [1] Si $g * \sigma^p$ es una p-cadena elemental con $p \geq 1$, el **borde** de $g * \sigma^p$, denotado por $\partial_p(g * \sigma^p)$, está definido por

$$\partial_p(g * \sigma^p) = \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] g * \sigma_i^{p-1}.$$

Este operador borde ∂_p se extiende por linealidad a un homomorfismo de grupos entre los grupos de cadenas consecutivos:

$$\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K).$$

En otras palabras, si $c_p = \sum_{i=1}^{n} g_i * \sigma_i^p$ es una p-cadena arbitraria (una suma de cadenas elementales), el borde de c_p es simplemente la suma de los bordes de sus componentes:

$$\partial_p(c_p) = \sum_{i=1}^{n} \partial_p(g_i * \sigma_i^p).$$

Adicionalmente, el **borde de una** 0-**cadena se define como cero** (pues los vértices no tienen caras).

La secuencia de homomorfismos del operador borde conecta los grupos de cadenas de un complejo K de manera decreciente en dimensión. Esta relación se conoce como la **sucesión de cadenas**.

Teorema 4. *Si $p \geq 2$, entonces la composición $\partial_p \circ \partial_{p-1} : C_p(K) \longrightarrow C_{p-2}(K)$ en el diagrama*

$$C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K) \longrightarrow C_{p-2}(K),$$

es el homomorfismo trivial [1].

Demostración. Sin perdida de generalidad, mostraremos que para cada p-cadena elemental $\partial\partial(g * \sigma^p) = 0$.

$$\begin{aligned}
\partial_p \circ \partial_{p-1}(g * \sigma^p) &= \partial_{p-1}\left(\sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} \left[\sigma^p, \sigma_i^{p-1}\right] g * \sigma_i^{p-1} \right) \\
&= \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} \partial_{p-1}\left(\left[\sigma^p, \sigma_i^{p-1}\right] g * \sigma_i^{p-1} \right) \\
&= \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} \sum_{\sigma_j^{p-2} \in K} \left[\sigma^p, \sigma_i^{p-1}\right]\left[\sigma_i^{p-1}, \sigma_j^{p-2}\right] g * \sigma_j^{p-2} \\
&= \sum_{\sigma_j^{p-2} \in K} \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} \left[\sigma^p, \sigma_i^{p-1}\right]\left[\sigma_i^{p-1}, \sigma_j^{p-2}\right] g * \sigma_j^{p-2}.
\end{aligned}$$

Por el **teorema 3.1**:

$$\sum_{\sigma_j^{p-2} \in K} \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} \left[\sigma^p, \sigma_i^{p-1}\right]\left[\sigma_i^{p-1}, \sigma_j^{p-2}\right] g * \sigma_j^{p-2} = 0.$$

□

Esta sucesión será fundamental para definir los grupos de ciclos y los grupos de bordes, los cuales finalmente determinarán la homología de la esfera.

Definición 15. Si $p \in \mathbb{Z}^+$, un **ciclo p-dimensional** en K, o p-ciclo, es una p-cadena z_p tal que $\partial(z_p) = 0$. La familia de p-ciclos es, por lo tanto el núcleo del homomorfismo $\partial : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$, denotado por $Z_p(K)$ y llamado el **grupo de ciclos p-dimensionales** de K.

Si $p \geq 0$, una p-cadena b_p es un **borde p-dimensional** en K, o p-borde, si hay una $(p+1)$-cadena c_{p+1} tal que $\partial(c_{p+1}) = b_p$. La familia de p-bordes es la imagén homeomorfa $\partial(C_{p+1}(K))$, llamado **grupo borde p-dimensional** de K y denotado por $B_p(K)$ [1].

Determinamos la estructura de los grupos de **ciclos del tetraedo** K de la Figura 7 resolviendo la ecuación $\partial_p(c_p) = 0$ para cada dimensión p.
Como el borde del tetraedro no contiene 3-símplices. Entonces

$$Z_3(K) \cong \{0\}$$

El grupo $Z_2(T)$ se determina resolviendo $\partial_2(c_2) = 0$. Esta condición genera un sistema de ecuaciones lineales (donde cada arista 1-dimensional se iguala a cero), lo que se traduce en una matriz de

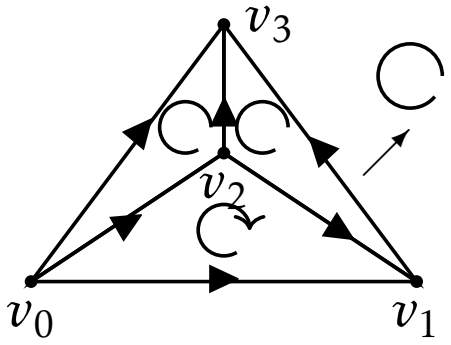


Figura 7: Símplices de la esfera

coeficientes.
La matriz del sistema lineal $[A|0]$ para los coeficientes b_i de la 2-cadena se reduce a:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

La solución indica las dependencias: $b_0 = -b_3$, $b_1 = -b_3$ y $b_2 = b_3$. Al sustituir estas relaciones en la 2-cadena general, la expresión se reduce a un solo generador, lo que significa que el grupo de ciclos está generado por la superficie cerrada del tetraedro:

$$b_3(-\langle v_0v_2v_1\rangle - \langle v_0v_1v_3\rangle + \langle v_0v_2v_3\rangle + \langle v_1v_3v_2\rangle).$$

Así, el grupo de 2-ciclos es isomorfo a los enteros, reflejando el único hueco encerrado por la superficie del tetraedro (la esfera S^2). Así que:

$$Z_2(T) = \text{gen}\{-\langle v_0v_2v_1\rangle - \langle v_0v_1v_3\rangle + \langle v_0v_2v_3\rangle + \langle v_1v_3v_2\rangle\} \cong \mathbb{Z}.$$

El grupo $Z_1(T)$ se calcula resolviendo $\partial_1(c_1) = 0$, donde el borde de la 1-cadena se iguala a cero para cada vértice 0-dimensional. El sistema matricial resultante para los coeficientes c_i se reduce a:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

La solución $c_0 = -c_3 + c_4$, $c_1 = c_3 + c_5$, $c_2 = -c_4 - c_5$ implica que el grupo de 1-ciclos tiene **tres generadores independientes**. Al sustituir, la 1-cadena general se expresa como una combinación lineal de tres ciclos cerrados:

$$c_3(-\langle v_0v_1\rangle + \langle v_0v_2\rangle + \langle v_2v_1\rangle) + c_4(\langle v_0v_1\rangle - \langle v_0v_3\rangle + \langle v_1v_3\rangle) + c_5(\langle v_0v_2\rangle - \langle v_0v_3\rangle + \langle v_2v_3\rangle).$$

Por lo tanto, el grupo de 1-ciclos es:

$$Z_1(T) = \text{gen}\{-\langle v_0v_1\rangle + \langle v_0v_2\rangle + \langle v_2v_1\rangle, \langle v_0v_1\rangle - \langle v_0v_3\rangle + \langle v_1v_3\rangle, \langle v_0v_2\rangle - \langle v_0v_3\rangle + \langle v_2v_3\rangle\} \cong \mathbb{Z}^3.$$

Dado que ∂_0 es el homomorfismo trivial, todo 0-cadena es, por definición un 0-ciclo. Por lo tanto el grupo de 0-ciclos es idéntico al grupo de 0-cadenas:

$$Z_0(T) = C_0(K) \cong \mathbb{Z}^4.$$

El grupo de bordes p-dimensionales, $B_p(T)$, es la **imagén** del operador borde ∂_{p+1} y representa los ciclos que son, de hecho, límites de figuras de dimensión superior. A continuación se detalla el cálculo de estos grupos para la triangulación del tetraedro.
El **Grupo Borde** 2-**Dimensional** $B_2(T)$ es la imagén del operador borde ∂_3. Al no tener 3-símplices, podemos deducir que

$$B_2(T) = Im(\partial_3) = \{0\}$$

Continuando, el **Grupo Borde** 1-**Dimensional** $B_1(T)$ es la imgén de ∂_2. Aunque la composición $\partial_2 \circ \partial_3$ es cero, $B_1(T)$ está generado por los bordes de los 2-símplices del tetraedro. Estos bordes forman los ciclos cerrados de aristas que pueden ser

$$B_1(T) = \text{Im}(\partial_2)$$
$$= \text{gen}\{\langle v_2v_3\rangle - \langle v_1v_3\rangle + \langle v_1v_2\rangle, \langle v_1v_3\rangle - \langle v_0v_3\rangle + \langle v_0v_1\rangle, \langle v_0v_2\rangle - \langle v_1v_2\rangle - \langle v_0v_1\rangle\} \cong \mathbb{Z}^3.$$

La base de $B_1(T)$ consiste en los tres ciclos cerrados que bordean las caras del tetraedro.
Finalmente, el **Grupo Borde** 0-**Dimensional** ($B_0(T)$) es la imagén de ∂_1. Está generado por las diferencias entre pares de vértices, que representan las 0-cadenas conectadas por aristas. Al elegir un vértice $\langle v_0\rangle$, los generadores independientes resultan ser las diferencias de ese vértice con los demás

$$B_0(T) = \text{Im}(\partial_1) = \text{gen}\{\langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle, \langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle, \langle v_3\rangle - \langle v_0\rangle\} \cong \mathbb{Z}^3.$$

La relación fundamental que permite la definición de la homología es la inclusión de los bordes en los ciclos, la cual es una consecuencia directa de la nulidad del operador borde al ser aplicado dos veces:

Teorema 5. *Si K es un complejo orientado, entonces $B_p(K) \subset Z_p(K)$ para $p \in \mathbb{Z}, 0 \leq p \leq n$, donde n es la dimensión de K [? , p. 18].*

Demostración. Sea $b_p(K) \in B_p(K)$, $p \geq 0$. Por definición de p-borde, hay una $(p+1)$-cadena c_{p+1} tal que $\partial_{p+1}(c_{p+1}) = b_p$. Por el teorema 4.1 $\partial_p\Big(\partial_{p+1}(c_{p+1})\Big) = \partial(b_p) = 0$ y finalmente por definición de ciclo, $b_p \in Z_p(K)$. □

Pensamos intuitivamente en un p-ciclo como una combinación lineal de p-símplices que forman un circuito completo. Los p-ciclos que encierran .ªgujeros"son los ciclos interesantes, y son los que no son bordes de $(p+1)$-cadenas. Restringimos nuestra atención a los ciclos no acotados y descartamos los acotados. Poincaré dijo que un p-ciclo es el borde de una $(p+1)$-cadena **homóloga a cero**. Esta distinción se traduce algebraicamente en una relación de equivalencia dentro del grupo de ciclos $Z_p(K)$:

Definición 16. Dos p-ciclos w_p y z_p en un complejo K son **homólogos**, escritos $w_p \sim z_p$, siempre que haya una $(p+1)$-cadena tal que [1, p. 18]

$$\partial(c_{p+1}) = w_p - z_p.$$

Esta relación de homología para p-ciclos es una relación de equivalencia y particiona a $Z_p(K)$ en **clases de homología**

$$[z_p] = \{w_p \in Z_p(K) : w_p \sim z_p\}.$$

Puesto que $w_p \sim z_p$ si y solo si $w_p - z_p$ pertenece al grupo de bordes $B_p(K)$, una clase de homología es una **clase lateral** de $Z_p(K)$ por su subgrupo $B_p(K)$

$$[z_p] = z_p + B_p(K) = \{z_p + \partial(c_{p+1}) : \partial(c_{p+1}) \in B_p(K)\}.$$

Por lo tanto, las clases de homología son en realidad los miembros del grupo cociente.

Definición 17. Sea $p \in \mathbb{Z}^+$, el grupo de homología p-dimensional de K es el grupo cociente [1, p. 19]

$$H_p(K) = \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}.$$

En términos de homología, un **agujero** es una obstrucción a que un ciclo sea el borde de un símplice de dimensión superior. En otras palabras, un ciclo p–dimensional representa un *agujero* cuando pertenece a $Z_p(K)$ pero no a $B_p(K)$, es decir, cuando no puede escribirse como el borde de ningún $(p+1)$–símplice. Los grupos de homología

$$H_p(K) = \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}$$

miden precisamente estas obstrucciones: si $H_p(K) \neq 0$, entonces existe al menos un agujero p–dimensional.

De manera intuitiva: Un agujero en dimensión 0 corresponde a componentes desconectadas.
Un agujero en dimensión 1 corresponde a un lazo que no puede contraerse.
Un agujero en dimensión 2 corresponde a una cavidad cerrada, es decir, a una superficie que encierra un volumen.

Así, la homología clasifica los distintos tipos de agujeros presentes en el espacio y determina en qué dimensiones aparecen.

Al aplicar esta definición a los grupos de ciclos ($Z_p(K)$) y grupos de bordes ($B_p(K)$) previamente calculados para el **tetraedro**, se obtienen los siguientes **grupos de homología**:

$$H_3(T) \cong \frac{\{0\}}{\{0\}} \cong \{0\} \qquad H_2(T) \cong \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \cong \mathbb{Z} \qquad H_1(T) \cong \frac{\mathbb{Z}^3}{\mathbb{Z}^3} \cong \{0\} \qquad H_0(T) \cong \frac{\mathbb{Z}^4}{\mathbb{Z}^3} \cong \mathbb{Z}.$$

5. ESTRUCTURA DE LOS GRUPOS DE HOMOLOGÍA

El siguiente teorema muestra que los grupos de homología de un complejo son independientes de la elección de orientación para sus símplices

Teorema 6. *Sea K un complejo geométrico con dos orientaciones, y sean K_1 y K_2 los complejos geométricos orientados resultantes. Entonces, los grupos de homología $H_p(K_1)$ y $H_p(K_2)$ son isomorfos para cada dimensión p [? , p. 23]*

Demostración. Sea K un complejo geométrico. Los grupos de cadenas $Cp(K_1)$ y $C_p(K_2)$ están generador por los mismos p-símplices, σ^p, con coeficientes en $\mathbb{Z}$.
Sean $\partial^{(1)} : C_p(K_1) \longrightarrow C_{p-1}(K_1)$ y $\partial^{(2)} : C_p(K_2) \longrightarrow C_{p-1}(K_2)$ los operadores borde para cada orientación.
Si la orientación de un p-símplice σ^p se invierte, su generador en C_p cambia de σ^p a $-\sigma^p$, entonces $\partial_p(-\sigma^p) = -\partial_p(\sigma^p)$.
Definamos un homomorfismo $\phi_p : C_p(K_1) \longrightarrow C_p(K_2)$ que modela el cambio de orientación. Para un p-símplice cuya orientación ha sido invertida en K_2 respecto a K_1:

$$\phi_p(\sigma^p) = -\sigma^p.$$

En general, ϕ_p es un isomorfismo que actúa como multiplicación por ± 1 sobre cada generador. Para una p-cadena elemental $g * \sigma^p$ en K_1, con $p \geq 1$,

$$\partial_p^{(2)}\Big(\phi_p(g*\sigma^p)\Big) = \partial_p^{(2)}(-g*\sigma^p) \qquad = -\sum_{\sigma^{p-1}\in K} g*[\sigma^p,\sigma^{p-1}]*\sigma^{p-1},$$

$$\phi_{p-1}\Big(\partial_p^{(1)}(g*\sigma^p)\Big) = \phi_{p-1}\Big(\sum_{\sigma^{p-1}\in K} g*[\sigma^p,\sigma^{p-1}]*\sigma^{p-1}\Big) \qquad = -\sum_{\sigma^{p-1}\in K} g*[\sigma^p,\sigma^{p-1}]*\sigma^{p-1},$$

Ambas expresiones coinciden, por lo que $\partial_p^{(2)} \circ \phi_p = \phi_{p-1} \circ \partial_p^{(1)}$ en cada generador, y por linealidad se cumple en todo $C_p(K_1)$. Entonces ϕ es un isomorfismo de complejo de cadenas.
Si $z_p \in Z_p(K_1)$, entonces

$$\partial_p\Big(\phi_p(z_p)\Big) = \phi_{p-1}\Big(\partial_p(z_p)\Big) = \phi_{p-1}(0) = 0,$$

por lo que $\phi_p(z_p) \in Z_p(K_2)$. Por lo tanto, $\phi_p\Big(Z_p(K_1)\Big)$ es un subconjunto de $Z_p(K_2)$.
Si $\partial_{p+1}(C_{p+1}) \in B_p(K_1)$, entonces

$$\phi_p\Big(\partial_{p+1}(c_{p+1})\Big) = \partial_{p+1}\Big(\phi_{p+1}(c_{p+1})\Big),$$

por lo que $\phi_p\Big(\partial_{p+1}(c_{p+1})\Big)$ está en $B_p(K_2)$. Así, ϕ_p mapea $B_p(K_1)$ en $B_p(K_2)$ e induce un homomorfismo del grupo cociente $H_p(K_1) = \frac{Z_p(K_1)}{B_p(K_1)}$ a $H_p(K_2) = \frac{Z_p(K_2)}{B_p(K_2)}$ definido por

$$\phi^*([z_p]) = [\phi_p(z_p)],$$

para cada clase de homología $[z_p]$ en $H_p(K_1)$.
Al invertir los roles de K_1 y K_2 se obtiene una secuencia $\psi = \{\psi_p\}$ de homomorfismos:

$$\psi_p : C_p(K_2) \longrightarrow C_p(K_1),$$

de tal modo que ϕ_p y ψ_p son inversos entre si para cada p. Esto implica que es el inverso ψ_p^* es el inverso de ϕ_p^* y, por lo tanto,

$$\phi_p^* : H_p(K_1) \longrightarrow H_p(K_2)$$

es un isomorfismo para cada dimensión p. □

Por ejemplo, consideremos la triangulación de la esfera S^2. Independientemente de cómo se orienten los triángulos que conforman el complejo, los grupos de homología permanecen iguales:

$$H_0(T) \cong \mathbb{Z}, \qquad H_1(T) \cong \{0\}, \qquad H_2(T) \cong \mathbb{Z}.$$

La estructura del grupo de homología de dimensión cero $H_0(K)$ permite determinar si el poliedro asociado $|K|$ es conexo. Para formalizar esta relación introducimos primero la noción de símpleces conexos.

Definición 18. Sea K un complejo. Dos símpleces s_1 y s_2 son **conexos** si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

a $s_1 \cap s_2 \neq \emptyset$

b Existe una secuencia $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ de 1-símpleces de K tal que $s_1 \cap \sigma_1$ es un vértice de $s_1, s_2 \cap \sigma_p$ es un vértice de s_2, y, para $1 \leq i < p$, $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ es un vértice común de σ_i y σ_{i+1} [l, p. 24].

A partir de esta noción se tiene el siguiente resultado fundamental.

Teorema 7. *Sea K un complejo con r componentes combinatorias. Entonces $H_0(K)$ es isomorfo a la suma directa de r copias del grupo $\mathbb{Z}$ de los enteros [1, p. 25].*

Demostración. Sea K' un componente combinatorio de K y $\langle a' \rangle$ un 0-símplice en K'. Dado cualquier 0-símplice $\langle b \rangle$ en K', existe una secuencia de 1-símplices

$$\langle ba_0 \rangle, \langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle, \ldots, \langle a_p a' \rangle.$$

de b a a' de tal manera que para cada par de 1-símpleces sucesivos tengan un vértice común. Si $g \in \mathbb{Z}$, definimos una 1-cadena c_1 en la secuencia de 1-símpleces asignando g o $-g$ a cada símplece (dependiendo de la orientación) de modo que $\partial_1(c_1)$ sea $g\langle b \rangle - g\langle a' \rangle$ o $g\langle b \rangle + g\langle a' \rangle$. Por lo tanto, cualquier 0-cadena $g\langle b \rangle$ es homológa a una de las 0-cadenas $g\langle a' \rangle$ o $-g\langle a' \rangle$. De ello se deduce que cualquier 0-cadena en K' es homológa a una 0-cadena elemental $h\langle a' \rangle$ donde $h \in \mathbb{Z}$.
Aplicando este resultado a cada componente combinatoria $K_1, \ldots, K_r$ de K, existe un vértice $a^i \in K_i$ tal que cualquier 0-ciclo en K_i es homológo a una 0-cadena de la forma $h_i\langle a^i \rangle$ donde $h_i \in \mathbb{Z}$. Entonces, dado cualquier 0-ciclo $c_0 \in K$, existen enteros $h_1, \ldots, h_r$ tal que

$$c_0 \sim \sum_{i=1}^{r} h_i \langle a^i \rangle.$$

Supongamos dos 0-cadenas de este tipo $\sum h_i\langle a^i \rangle$ y $\sum g_i\langle a^i \rangle$ representa la misma clase de homología. Entonces

$$\sum_{i=0}^{r} (g_i - h_i)\langle a^i \rangle = \partial_1(c_1) \tag{l}$$

para alguna 1-cadena c_1. Dados a^i y a^j pertenecen a componentes combinatorias diferentes cuando $i \neq j$, entonces la Ecuación (1) es imposible a menos que $g_i = h_i$ para cada i. Por lo tanto, cada clase de homología $[c_0] \in H_0(K)$ tiene una representación única de la forma $\sum h_i \langle a^i \rangle$. La función

$$h_i \langle a^i \rangle g \longrightarrow (h_1, \ldots, h_r),$$

es el isomorfismo requerido entre $H_0(K)$ y la suma directa de r copias de $\mathbb{Z}$. □

Corolario 1. *Si un poliedro $|K|$ tiene r componentes y triangulación K, entonces $H_0(K)$ es isomorfo a la suma directa de r copias de $\mathbb{Z}$.*

6. EL TEOREMA DE EULER-POINCARÉ

Si $|K|$ es un poliedro rectilíneo homeomorfo a la 2-esfera S^2 con V vértices, E aristas, y F caras bidimensionales, entonces

$$V - E + F = 2$$

Este resultado fue descubierto en 1752 por Leonhard Euler (1707-1783). La primera aplicación real de la teoría de homología por parte de Poincaré fue una generalización de la fórmula de Euler a poliedros generales.

Definición 19. Sea K un complejo orientado. Una familia $\{z_p^1, \ldots, z_p^r\}$ de p-ciclos es **linealmente independiente con respecto a la homología**, o **linealmente independiente mod** $B_p(K)$, si no existen enteros $g_1, \ldots, g_r$ no todos cero, tal que la cadena $\sum g_i z_p^i$ es homóloga a 0. El mayor entero r para el cual existen r p-ciclos linealmente independientes con respecto a la homología se denota por $R_p(K)$ y se llama el p-ésimo **número de Betti** del complejo K [1, p. 26].

El número de Betti $R_p(K)$ mide, en cierto sentido, la **cantidad de "agujeros" p-dimensionales** presentes en el complejo K. Cada grupo de homología $H_p(K)$ capta la estructura topológica de K en el nivel p, y su rango (el número de Betti) nos indica cuántos ciclos p-dimensionales independientes no son frontera de una cadena de dimensión superior.

En el teorema que sigue, suponemos que el grupo de coeficientes se ha elegido como números racionales y no los enteros.

Teorema 8. *El Teorema de Euler-Poincaré Sea K un complejo geométrico orientado de dimensión n, y para $p = 0, 1, \ldots, n$ sea α_p denota el número de p-símpleces de K. Entonces*

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \alpha_p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p R_p(K),$$

donde $R_p(K)$ denota el p-ésimo número de Betti [1, p. 26].

Demostración. Dado que todos los grupos de cadenas son abelianos libres finitamente generados, podemos usar el teorema de dimensión. Para la secuencia exacta:

$$0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow C_p \longrightarrow B_{p-1} \longrightarrow 0.$$

Por el teorema de la dimensión, se cumple:

$$\dim C_p = \dim Z_p + \dim B_{p-1}.$$

Como $\dim C_p = \alpha_p$, obtenemos:

$$\alpha_p = \dim Z_p + \dim B_{p-1}.$$

El p-ésimo número de Betti, $R_p(K)$, es el rango del grupo de homología $H_p(K)$. Para la secuencia exacta:

$$0 \longrightarrow B_p(K) \longrightarrow Z_p(K) \longrightarrow H_p(K) \longrightarrow 0.$$

Aplicando nuevamente el teorema de rango:

$$\dim (Z_p) = \dim (B_p) + \dim (H_p).$$

Usando la notación $b_p = \dim(B_p)$ (el número de p-fronteras linealmente independientes),

$$\dim Z_p = b_p + R_p(K).$$

Sustituyendo en la otra, resulta:

$$\alpha_p = (b_p + R_p(K)) + b_{p-1} = b_p + b_{p-1} + R_p(K).$$

Así,

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p (b_p + b_{p-1} + R_p(K)) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p R_p(K).$$

□

El **Teorema de Euler-Poincaré** revela una profunda relación entre la estructura combinatoria de un complejo simplicial y su topología subyacente. En particular, establece que la suma alternada del número de símplices de cada dimensión coincide con la suma alternada de los correspondientes números de Betti, que miden los .ªgujerosïndependientes del espacio.

Definición 20. Si K es un complejo de dimensión n, el número

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p R_p,$$

se llama **característica de Euler** [1, p. 27].

Los números de Betti recibieron su nombre en honor a Enrico Betti (1823-1892) y generalizan los números de conectividad que utilizó en el estudio de curvas y superficies.

Definición 21. Un **poliedro rectilíneo** en el espacio Euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$ es un sólido limitado por poligonos convexos unidos adecuadamente. Los poligonos que lo delimitan se llaman caras, las intersecciones de las caras se llaman aristas y las intersecciones de las aristas se llaman vértices. Un **poliedro simple** es un poliedro rectilíneo cuyas caras son polígonos planos regulares y cuyos ángulos poliedricos son congruentes [1, p. 28].

Para determinar la característica de Euler de la esfera S^2 utilizamos los **números de Betti**, que corresponden al rango de los grupos de homología en cada dimensión calculados en la sección de **Grupos de homología**. Aunque estos grupos se calculan a partir de una triangulación concreta del espacio, sus rangos —los números de Betti— dependen únicamente de la topología de S^2, y no del complejo simplicial particular que se elija. En primer lugar, el grupo $H_0(T) \cong \mathbb{Z}$, de modo que su número de Betti es $R_0 = 1$. En dimensión uno, el grupo $H_1(S^2) \cong \{0\}$, por lo que este grupo es trivial y se obtiene $R_1 = 0$. Finalmente, el grupo $H_2(T) \cong \{0\}$ y por tanto $R_2 = 1$ Entonces S^2 tiene **característica de Euler**

$$\chi(T) = \sum_{p=0}^{2} (-1)^p R_p(T) = 1 - 0 + 1 = 2.$$

Aplicando el Teorema de Euler-Poincaré a S^2 produce el siguiente teorema:

Teorema 9. *Si S es un poliedro simple con V vértices, E aristas y F caras, entonces $V - E + F = 2$ [1, p. 28].*

Demostración. Considere una cara τ de S teniendo n_0 vértices y n_1 aristas. Calculando vértices – aristas + caras se obtiene $n_0 - n_1 + 1$ para la única cara τ. Elija un nuevo vértice v en el interior de τ, y una el nuevo vértice con cada uno de los vértices originales mediante un segmento de línea. En la triangulación de τ, un nuevo vértice y n_0 nuevas aristas son añadidas. Además, una cara τ se reemplaza por n_0 nuevas caras. Entonces

$$\text{vértices - aristas + caras} = (n_0 + 1) - (n_1 + n_0) + n_0 = n_0 - n_1 + 1,$$

de modo que la suma $V - E + F$ no cambia en el proceso de triangulación. Sea α_i, $i = 0, 1, 2$, denota el número de i-símplices en la triangulación de S es obtenida de esta manera. Entonces

$$V - E + F = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2,$$

por el argumento anterior. El Teorema de Euler-Poincaré muestra que

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = R_0(S^2) - R_1(S^2) + R_2(S^2) = 2.$$

Por lo tanto,

$$V - E + F = 2$$

para cualquier poliedro simple. □

El resultado fundamental de Euler establece una restricción geométrica crucial para cualquier poliedro simple. Esta condición nos permite ahora abordar una pregunta clásica de la geometría: **¿Cuántos poliedros regulares (sólidos platónicos) pueden existir?** La respuesta, sorprendente por su limitación, se deduce al imponer la relación $V - E + F = 2$ a las propiedades de simetría de los poliedros.

Teorema 10. *Solo hay cinco poliedros regulares y simples [1, p. 29].*

Demostración. Supongamos que S es un poliedro con V vértices, E aristas y F caras.
Sea m el número de aristas que confluyen en cada vértice y n el número de aristas de cada cara. Dado que cada cara tiene al menos tres aristas, se tiene $n \geq 3$. Para relacionar V, E y F, observemos lo siguiente:
Cada vértice es extremo de m aristas; por tanto, al contar todas las incidencias vértice–arista se obtiene mV. Sin embargo, cada arista tiene dos extremos, por lo que se cuenta dos veces. De ahí se deduce que $mV = 2E$.
Análogamente, cada cara está limitada por n aristas, y cada arista pertenece exactamente a dos caras. Por tanto, $nF = 2E$.
En consecuencia,

$$mV = 2E = nF.$$

Además, por la fórmula de Euler para poliedros convexos, se cumple

$$V - E + F = 2.$$

Sustituyendo $V = \frac{nF}{m}$ y $E = \frac{nF}{2}$ en la fórmula de Euler, obtenemos:

$$\frac{nF}{m} - \frac{nF}{2} + F = 2,$$

Por lo tanto,

$$F(2n - mn + 2m) = 4m,$$

y debe cumplirse que

$$2n - mn + 2m > 0.$$

Dado que $n \geq 3$, esto da

$$2m > n(m-2) \geq 3(m-2) = 3m - 6,$$

por lo que $m < 6$. Así m solo puede ser $1, 2, 3, 4$ o 5.
Las relaciones

$$F(2n - mn + 2m) = 4m, \qquad n \geq 3, m < 6,$$

producen los siguientes valores para (m, n, F):

- Si $m = 3$, entonces
$$F = \frac{12}{2n - 3n + 6} = \frac{12}{6 - n}.$$
Para que F sea positivo, debe cumplirse que $n < 6$. Al sustituir los valores enteros posibles de n se obtiene que para $n = 3$ el valor de F es 4, para $n = 4$ el valor de F es 6 y para $n = 5$ el valor de F es 12. De esta manera, se obtienen tres combinaciones posibles $(3, 3, 4)$, $(3, 4, 6)$ y $(3, 5, 12)$.

- Si $m = 4$, entonces
$$F = \frac{16}{2n - 4n + 8} = \frac{16}{8 - 2n}.$$
Para que $F > 0$, se requiere $n < 4$. El único valor entero posible es $n = 3$, que produce $F = 8$. Así obtenemos $(4, 3, 8)$.

- Si $m = 5$, se tiene
$$F = \frac{20}{2n - 5n + 10} = \frac{20}{10 - 3n}.$$
Para $F > 0$, debe cumplirse $n < \frac{10}{3} \approx 3{,}33$, y el único valor entero posible es $n = 3$, lo que da $F = 20$. Así obtenemos $(5, 3, 20)$.

Por tanto, los únicos valores posibles son:

$$(3, 3, 4), \quad (3, 4, 6), \quad (4, 3, 8), \quad (3, 5, 12), \quad (5, 3, 20).$$

Cada uno de estos triples (m, n, F) corresponde a un poliedro regular:

m	n	Caras	Poliedro
3	3	4	Tetraedro
3	4	6	Cubo
4	3	8	Octaedro
3	5	12	Dodecaedro
5	3	20	Icosaedro

□

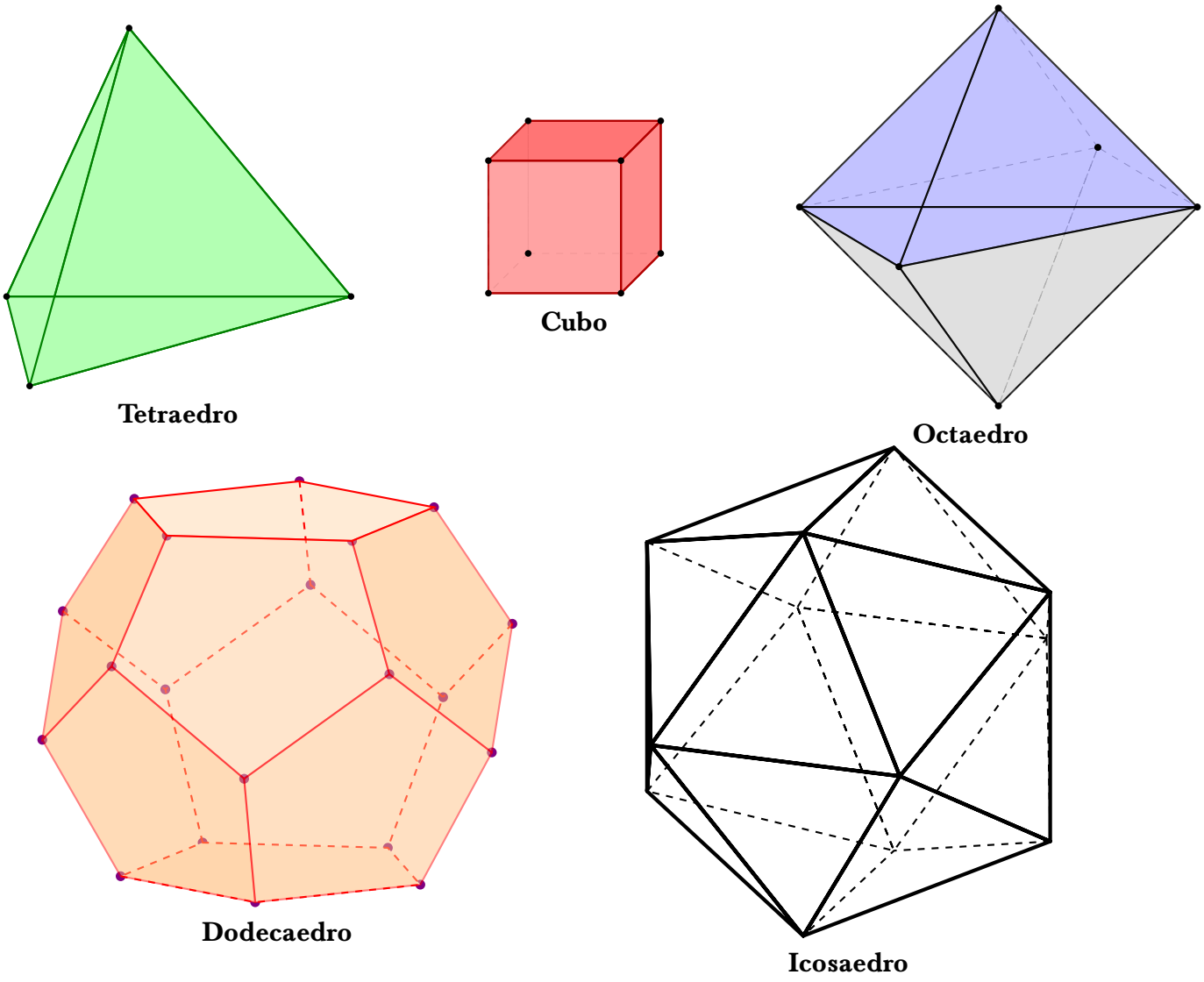


Figura 8: Poliedros Platónicos

Así, el estudio realizado permitió demostrar, a partir de relaciones combinatorias y topológicas fundamentales, que solo existen cinco poliedros regulares y simples: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Este resultado evidencia la armonía entre la estructura algebraica y la forma geométrica, y resalta cómo la abstracción matemática permite comprender de manera precisa las simetrías y propiedades que subyacen en los cuerpos regulares.

En conclusión, la triangulación cumple un papel esencial dentro del estudio de los espacios topológicos, ya que permite representar los espacios topológicos mediante complejos geométricos. Como

se observó en el caso de la esfera, este proceso facilita el análisis de los espacios al descomponerlos en símplices, lo que nos brinda una forma más concreta de abordar su estructura y comprender sus propiedades desde una perspectiva geométrica y combinatoria.
A partir de esta construcción, los grupos de homología adquieren una importancia central, pues ofrecen una manera algebraica de describir y cuantificar las características de los espacios. Estas herramientas permiten identificar y contar los agujeros y como se mostró en este trabajo, también proporcionan información sobre la conexidad a través del 0-grupo de homología. De esta manera, la homología establece un puente entre la intuición geométrica y la formalización algebraica.
De este modo, se revela una profunda relación entre la topología, la geometría y el álgebra, donde cada una de estas áreas aporta métodos y perspectivas que se complementan. El estudio de propiedades topológicas mediante herramientas algebraicas permite comprender mejor la forma y la estructura de los espacios geométricos, mostrando cómo la matemática se construye como una red interconectada en la que las distintas ramas dialogan para ofrecer una visión más completa del objeto de estudio.

REFERENCIAS

[1] F. H. Croom. *Basic concepts of algebraic topology*. Springer Science & Business Media, 2012. pages 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 17, 20, 21, 22, 23, 24

[2] John B Fraleigh, Mateos Lopez, et al. Algebra abstracta: primer curso. 1988. pages 3, 9, 12

[3] I. M. James. *Alexandroff spaces*. Number 29. 1992. pages 8

[4] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*, volume 202 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2 edition, 2011. pages 8

[5] James R Munkres. *Elements of algebraic topology*. CRC press, 2018. pages 2

[6] Henri Poincaré. *Analysis situs*. Gauthier-Villars Paris, France, 1895. pages 1

[7] Álvaro Pena Vaquero. Pruebas elementales del teorema de la curva de jordan y del teorema de triangulación de superficies, Año (colocar el año del TFG). pages 8