

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Índices de comprensión de trayectorias hipotéticas de aprendizaje en el juego de los Cuatro Caballos

Wilson Armando Gómez Cubillos

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación en Tecnología

Bogotá

2021

Índices de comprensión de trayectorias hipotéticas de aprendizaje en el juego de los Cuatro Caballos

Wilson Armando Gómez Cubillos

Trabajo de Grado para optar por el título de

Magister en Educación en Tecnología

Modalidad: Profundización

Director

Profesor PhD Jhon Jairo Páez Rodríguez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación en Tecnología

Bogotá

2022

ARTÍCULO 23, RESOLUCIÓN #13 DE 1946 “La Universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Sólo velará porque no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y porque las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vean en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia”

Dedicatoria

Dedíco este proyecto de grado a mi familia, mi novia, al director de proyecto, profesores de la maestría y a la Universidad Distrital, dado que es un esfuerzo para mejorar la enseñanza con el empleo de la tecnología y con la esperanza de que se abra la puerta a nuevos desarrollos en el uso de la programación y por ende el mejoramiento de la educación en el país.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios, a mi familia, director de proyecto de grado Jhon Páez, profesores de la maestría, compañeros de la licenciatura de matemáticas Nicolas y Juan David , mi novia Dallana López, ya que gracias a ellos tuve la oportunidad y la motivación para llevar a feliz término el proyecto. Espero que este trabajo permita cambios importantes en la educación y la formación en nuestro país.

Índice general

1. Introducción **11**
- 1.1. Motivación . . . 11
- 1.2. Contexto del problema . . . 11
- 1.3. Objetivos . . . 12
- 1.4. Justificación . . . 13

2. Antecedentes **17**
- 2.1. Trayectorias de Aprendizaje . . . 18
- 2.2. Modelos Computacionales . . . 20
- 2.3. Simulación y Juegos . . . 22

3. Estado del Arte y Marco Teórico **25**
- 3.1. Trayectorias hipotéticas de aprendizaje . . . 25
- 3.2. Juegos en Educación . . . 28
- 3.3. Práctica Deliberada . . . 29
  - 3.3.1. Proceso de generalización . . . 30
- 3.4. Grafos y Algoritmos . . . 32
  - 3.4.1. Grafos . . . 32
  - 3.4.2. Algoritmo de Dijkstra . . . 36
- 3.5. Lógica Difusa . . . 37

4. Implementación Tecnológica **39**
  - 4.0.1. Uso de Lógica difusa para el diseño de las ecuaciones . . . 43
  - 4.0.2. Uso del Algoritmo Dijkstra para el diseño de las ecuaciones . . . 47
  - 4.0.3. Diseño de la función de Ramificación . . . 48
  - 4.0.4. Diseño de la función de Buclicidad . . . 51

5. Validación **59**
- 5.1. Descripción diseño metodológico . . . 60
- 5.2. Participantes . . . 62
- 5.3. Materiales . . . 63
- 5.4. Condiciones y Procedimiento . . . 63
- 5.5. Métricas y Análisis . . . 64
  - 5.5.1. Rendimiento de la Tarea . . . 64
  - 5.5.2. Análisis comportamiento índice de Ramificación . . . 120

5.5.3. Análisis comportamiento del índice Buclicidad 122

6. Conclusiones **125**
6.1. Trabajos Futuros 127

7. Anexos **129**
Referencias 131

Índice de figuras

3.1. Ciclo de enseñanza trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Gómez y Lupiañez, 2007) . . . 26
3.2. Interpretación grafica de lógica tradicional y difusa (Díaz Córdova et al., 2017). . . 38

4.1. Grafo generado matriz de adyacencia juego Cuatro Caballos. . . . 41
4.2. Grafo dirigido juego Cuatro Caballos. . . . 44
4.3. Función de pertenencia (Ross, 2017). . . . 45
4.4. Unión difusa (Ross, 2017). . . . 45
4.5. intercepción difusa (Ross, 2017). . . . 45
4.6. Complemento (Ross, 2017). . . . 46
4.7. Operador Mamdani (Ross, 2017). . . . 47
4.8. Diagrama uso de control difuso. https://cayetanoguerra.github.io/ia/ (Apuntes lógica difusa). . . . 48
4.9. Grafo dirigido juego Cuatro Caballos. . . . 49
4.10. Cantidad de nodos con igual posibles movimientos. . . . 50
4.11. Función *g* proporción de bucles (4.5). . . . 54
4.12. Función *g* (4.5). . . . 54
4.13. Función *h* proporción movimientos por resolver el juego (4.6). . . . 55
4.14. Función *h* (4.6). . . . 55
4.15. Función de Buclicidad salida. . . . 56
4.16. Gráfica de las funciones de pertenencia. . . . 57
4.17. Superficie función de buclicidad. . . . 58

5.1. Esquema del diseño de la investigación . . . 60
5.2. Tablero Juego Cuatro Caballos `http://ritaportal.udistrital.edu.co:10198/horses` . . . 63
5.3. Sujeto 1 consolidado de partidas. . . . 65
5.4. Sujeto 1 partidas. . . . 66
5.5. Sujeto 1 datos generales. . . . 67
5.6. Sujeto 2 consolidado de partidas. . . . 71
5.7. Sujeto 2 partidas 1 a 12. . . . 72
5.8. Sujeto 2 datos generales. . . . 73
5.9. Sujeto 3 consolidado de partidas. . . . 80
5.10. Sujeto 3 partidas. . . . 81
5.11. Sujeto 3 datos generales. . . . 82

5.12. Sujeto 4 consolidado de partidas. 85
5.13. Sujeto 4 partidas. 86
5.14. Sujeto 4 datos generales. 86
5.15. Sujeto 5 consolidado de partidas. 89
5.16. Sujeto 5 partidas. 90
5.17. Sujeto 5 datos generales. 90
5.18. Sujeto 6 consolidado de partidas. 93
5.19. Sujeto 6 partidas. 94
5.20. Sujeto 6 datos generales. 94
5.21. Sujeto 7 consolidado de partidas. 97
5.22. Sujeto 7 partidas. 98
5.23. Sujeto 7 datos generales. 98
5.24. Sujeto 8 consolidado de partidas. 101
5.25. Sujeto 8 partidas. 102
5.26. Sujeto 8 datos generales. 102
5.27. Sujeto 9 consolidado de partidas. 104
5.28. Sujeto 9 partidas. 105
5.29. Sujeto 6 datos generales. 106
5.30. Sujeto 10 consolidado de partidas. 110
5.31. Sujeto 10 partidas. 111
5.32. Sujeto 10 datos generales. 111
5.33. Sujeto 11 consolidado de partidas. 114
5.34. Sujeto 11 partidas. 115
5.35. Sujeto 11 datos generales. 116

Índice de tablas

4.1. Inicio y final del juego 41
4.2. Reglas difusas 56

5.1. Promedios de Ramificación por categorías de generalización 121
5.2. Promedios de Buclicidad por categorías de generalización 123

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Reconocer de manera adecuada las trayectorias de aprendizaje da paso a realizar intervenciones más asertivas de parte de los docentes, generando así un mejor auto-reconocimiento del proceso de aprendizaje de estudiantes; sin embargo, las tecnologías actuales utilizadas en la educación de la matemática tienen pocos recursos para hacer el seguimiento automático del proceso para la solución de problemas estructurados en grandes volúmenes de datos. Entonces, el desarrollo de tecnologías basadas en un análisis de datos, contribuyó a refinar propuestas pedagógicas y didácticas de la educación, planteadas por autores como Simon y Tzur (2004) y de manera específica en educación matemática desarrollada por Freudenthal (1993) , específicamente en lo que tiene que ver con la matematización y el concepto de práctica deliberada como medio de aprendizaje (Anderson y Schunn, 2000) (Mayer, 2014). Sin embargo, se resalta que el alcance de este documento no es la teorización de la trayectorias de aprendizaje sino la exploración de la integración de herramientas como la analítica de datos en contextos educativos.

1.2. Contexto del problema

Las condiciones actuales de la educación matemática sugieren altos niveles de mediación con dispositivos tecnológicos y bajos niveles de interacción física entre estudiantes y docentes. Este

distanciamiento afecta las condiciones de los ambientes de aprendizaje para que los profesores reconozcan mejor el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Este desconocimiento afecta aspectos como:

- Las condiciones de intervención del profesor. En condiciones regulares, un profesor debe atender el proceso de más de treinta sujetos de manera concurrente. En dichas condiciones es complejo que los docentes identifiquen todos los patrones de aprendizaje de todos los sujetos y en lugar de esto, los docentes identifican fragmentos de patrones.

- Un mayor y detallado conocimiento del proceso de aprendizaje. La deficiencia causadas por las condiciones de atención del docente a varios estudiantes de manera paralela contribuye en la omisión de detalles en el desarrollo de las trayectorias de aprendizaje. Entonces, el detalle requerido para las intervenciones asertivas como son propuestas en las construcciones teóricas no emergen en contextos reales de educación matemática.

- • El planteamiento de estrategias que mejoren el proceso de aprendizaje. Sin un diagnóstico del nivel de conocimiento detallado en el que se encuentran los aprendices, se están generando intervenciones con falencias y debilidades conceptuales.

Es decir, hoy en día hay dificultades en la toma de decisiones educativas por parte de los docentes en tanto no tienen oportunidades continuas para el reconocimiento de los procesos de aprendizaje de sus alumnos, lo que da paso a preguntarse: ¿Cuales son las características de modelo de diagnóstico en la comprensión de trayectorias hipotéticas de aprendizaje para el juego estructurado llamado Cuatro Caballos?

1.3. Objetivos

- Objetivo General: Consolidar un modelo de diagnóstico de habilidades para la solución de problemas, mediante el análisis de índices en la comprensión de trayectorias hipotéticas del aprendizaje para el juego matemático llamado: Cuatro Caballos.

- Objetivos Específicos

    - Implementar un modelo computacional del espacio del juego Cuatro Caballos.
    - Diseñar los índices Buclicidad y Ramificación utilizando teoría de grafos, lógica difusa y algoritmo Dijkstra para complementar la comprensión de las trayectorias de aprendizaje.
    - Integrar las trayectorias de 11 sujetos durante la solución del juego en el espacio del problema modelado computacionalmente.
    - Explorar el comportamiento de los índices Buclicidad y Ramificación en base a las trayectorias realizadas por los sujetos.

1.4. Justificación

Las trayectorias de aprendizaje son útiles en la educación matemática al ayudar al planteamiento de intervenciones asertivas a los estudiantes. Dada la masificación de medios tecnológicos y sus ventajas, esta brinda la posibilidad de realizar reconocimientos de las trayectorias de aprendizaje mediante la analítica de datos. Para ello, en el documento se propone la realización de índices que miden características relevantes de las partidas realizadas por 11 sujetos en la solución del juego Cuatro Caballos. Se abordan cuatro etapas en el desarrollo del proyecto: realización de modelo matemático del juego Cuatro Caballos usando Matlab, representación de partidas realizadas por los sujetos desde página web del juego al modelo realizado, desarrollo y uso de índices de analítica de datos a las partidas realizadas por los 11 sujetos y análisis de información en base a la literatura existente sobre el tema. El trabajo contribuye en las líneas de investigación de los grupos GIIPLyM en educación matemática y DIDACTEC en educación con tecnología. La propuesta está soportada en los avances de la Universidad Distrital, entre ellos el de los autores O. León, Palomá, Jiménez, Guilombo, y González (2018) quienes propenden por la generación y uso de juegos que se basen en estructuras lógico matemáticas, proponen la simulación del juego

Circuito Cerrado el cual permite: la participación generalizada de estudiantes, una interacción espacio temporal mediante el diseño de una OVA y el uso de las TIC como herramienta en el diseño didáctico, sugieren una trayectoria hipotética de aprendizaje que les permite evidenciar el desarrollo de habilidades de subitización. En el caso de la investigación de Martínez Cardenas y cols. (2019), propone la articulación de trayectorias hipotéticas de aprendizaje como medio de investigación, para lo cual hace uso de tres juegos que dinamizan la experiencia: Circuito Cerrado, la Escalera y Mancalahoria. La investigación evidencia que el reconocimiento del aprendizaje no debe ser homogéneo sino atender a la pluralidad de maneras de abordar una situación. La investigación de los autores Jiménez Díaz y cols. (2015) consiste en la propuesta de una trayectoria de aprendizaje, la cual se basa en el seguimiento del planteamiento de trayectorias hipotéticas de aprendizaje hasta llegar a la formulación y descripción de las características de una trayectoria real de aprendizaje, en la cual se propende por potenciar en los niños de primera infancia habilidades de subitización. De los autores O. L. León, Saiz, Rojas, y Márquez (2014), se hace referencia a la utilidad que tiene en la educación matemática el uso de las Tecnologías de las Información y Comunicaciones TIC, al cambiar la perspectiva centrada en el docente a la del estudiante haciendo que las clases tengan un ambiente interactivo y de clase magistral. Las TIC son de utilidad en cuanto que generan aprendizajes significativos y por tanto proponen el reto de su inserción en la educación matemática. En la investigación de la autora Palomá Barrera y cols. (2018), identifica haciendo uso del juego de La Escalera una trayectoria de aprendizaje real en la que fomenta el aprendizaje en poblaciones diversas; para ello hace uso de las expresiones gestuales en personas sordas y ciegas. La investigación permite identificar tres categorías, principiante, intermedio y experto, que caracterizan la experticia de un jugador. De la autora Rodríguez Molina y cols. (2016), se propone la realización de la fundamentación teórica de la enseñanza de las operaciones básicas de suma resta al integrarla en un contexto inclusivo. Para ello utiliza como medio de medición el juego de La Escalera o Salto de la Rana; en el que propone un diseño de construcción que incorpore elementos como luces y sonidos. El juego genera habilidades de matematización al generarse modelos mentales en los estudiantes.

La presente investigación surge a raíz del creciente uso de las tecnologías como herramienta en la educación matemática, así como mediadoras entre docente y estudiantes. Las características que tienen las tecnologías actuales permiten analizar cantidades importantes de información haciendo uso de la analítica de datos y por tanto ser útil en la propuesta de métodos que ayuden a los docentes a un mejor entendimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes. La tecnología y su aplicación en diversos campos del conocimiento, paulatinamente se incorpora en la educación, dado a como se refiere el autor Gómez (1997) la tecnología ofrece la capacidad del manejo dinámico de objetos matemáticos y abre la posibilidad de vivir experiencias que no se logran con medios tradicionales como el lápiz y el papel.

La analítica de datos y su extendido uso en diferentes campos como la industria y la automación donde generalmente son usados son útiles en la educación, dada la propiedad de interpretar y hacer visibles patrones que son necesarios para el entendimiento y toma de decisiones de manera instantánea y sistemática.

Es por ello, que este proyecto usa las cualidades de la analítica de datos en lograr inferir mediante el uso de índices la habilidad y generación de estrategias en la solución de un juego estructurado. Los índices propuestos en el proyecto consisten en algoritmos que cuantifican lo acertado que son las decisiones tomadas por un jugador, lo cual permite observar el gradual entendimiento del juego, desarrollo de estrategias y solución del mismo.

Finalmente, el campo del desarrollo de software y la generación de códigos es una de las características relevantes en la actual industria 4.0, es así como el sector de la educación debe apropiarse de sus ventajas y lograr mejorar la comprensión de los procesos de entendimiento al plantearle problemas a los estudiantes. Es por ello, que la motivación del proyecto se centra en incentivar el desarrollo de nuevos algoritmos que sirvan de apoyo en el análisis de las trayectorias de aprendizaje, como así también la adaptación y uso de los propuestos en este proyecto en otros juegos

Capítulo 2

Antecedentes

Introducción

La tecnología y su dinamismo han logrado transformar nuestro entorno a la vez que muestra nuevas posibilidades en campos del conocimiento aún por explorar, en particular en el campo de la analítica de datos y su uso en la educación. Además de ello, el diseño de modelos de diagnóstico de habilidades de solución en juegos estructurados como un recurso en el apoyo del aprendizaje en los centros educativos representan una oportunidad para la enseñanza en nuestro país. Así, se ha hecho evidente que el empleo de la analítica de datos que apoye el entendimiento de las trayectorias de aprendizaje no está presente en la formación académica de nuestro sistema educativo, lo cual representa una falencia a la hora de aprovechar las oportunidades de usar las nuevas tecnologías en beneficio de los educadores que deseen entender el proceso de aprendizaje de los estudiantes y por tanto diagnosticar y establecer estrategias asertivas que propendan por un mejor aprendizaje. Con la finalidad de mitigar el problema antes expuesto, se plantea la realización de dos índices denominados Buclicidad y Ramificación, para caracterizar el proceso de aprendizaje al intentar resolver el problema de los Cuatro Caballos. Como respuesta a esta propuesta, se pretende entender las trayectorias de aprendizaje apoyando el diseño de herramientas y estrategias atendiendo a la diversidad de la población de los estudiantes.

2.1. Trayectorias de Aprendizaje

Las trayectorias de aprendizaje, hacen referencia a la progresión del aprendizaje guiado a través de objetivos. Algunos de los conceptos relevantes asociados a las trayectorias de aprendizaje son; pensamiento estructurado, aprendizaje adaptativo y metacognición. A continuación, se amplian tales conceptos.

El pensamiento estructurado es el proceso de lograr dividir y relacionar diferentes aspectos de un problema a resolver (Bustamante, 2018), en el artículo describen una herramienta educativa basada en el uso de robots como medio para incentivar el pensamiento estructurado. En lo que respecta al aprendizaje adaptativo, este se relaciona con la personalización del conocimiento dependiendo de las particularidades de los estudiantes (Yang, Hwang, y Yang, 2013), en el artículo se expone un sistema teniendo en cuenta diversas características cognitivas de los estudiantes mediante el desarrollo de un sistema. Por último, cuando se habla de Metacognición hace referencia a la capacidad que como personas tenemos de autorregulación del proceso de aprendizaje (Rozo, 2011) , así, se hace evidente que, realiza un análisis sobre los videojuegos de computadora y su relación con la Metacognición y lo relaciona con la creatividad y el trabajo autónomo, es un elemento poco explorado, y que puede ser la base de nuevas relaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Así, el aprendizaje adaptativo, que según la revisión el método de investigación con el cual usualmente se estudia es enfoque cuantitativo y el otro concepto asociado es el de Metacognición el cual usual se usa el método de investigación es enfoque cuantitativo. De los conceptos anteriores se va a realizar una caracterización de los métodos de investigación a partir de diferentes artículos. El aprendizaje adaptativo es un método que busca personalizar el aprendizaje según las necesidades del sujeto (Daniel, Cano, y Cervera, 2015), del concepto hace referencia los autores Fernández, Vázquez, y Cornejo (2018), en donde mediante el uso de un software denominado Kavelearning se busca determinar si promueve el aprendizaje adaptativo con un enfoque cuantitativo un alcance descriptivo y diseño cuasiexperimental. Otros autores son

González, Benchoff, Huapaya, y Remon (2017), quienes realizaron un estudio de la promoción del aprendizaje adaptativo con la personalización de las autoevaluaciones según los estilos de aprendizaje predominantes con un enfoque cuantitativo y un alcance descriptivo. Finalmente, los autores Lerís, Sein-Echaluce, Hernández, y Fidalgo-Blanco (2016), realizaron una consulta entre los participantes de cursos virtuales y masivos corroborando si realmente se propendía por el aprendizaje adaptativo, siendo una investigación con un enfoque cualitativo un alcance correlacional y un diseño cuasiexperimental. En conclusión, lo adecuado para investigar sobre el aprendizaje adaptativo es un enfoque cualitativo, con un alcance descriptivo y un diseño cuasiexperimental.

La metacognición hace referencia a la capacidad que como personas tenemos de autorregular nuestro proceso de aprendizaje (Rozo, 2011). En el concepto tratado se encuentran autores como Trisca (2012), quien estudia como la presentación de materiales y la tutoría pueden afectar el aprendizaje metacognitivo para ello usa un enfoque cuantitativo con un alcance explicativo y un diseño experimental. Para el caso de los autores Mato-Vázquez, Espiñeira, y López-Chao (2017), tratan sobre cómo afecta el aprendizaje metacognitivo a estudiantes de sexto grado en el área de matemáticas en el documento se plantea un diseño cuasiexperimental con enfoque cuantitativo y alcance correlacional. Para los autores Di Muro y Sandoval (2017), plantea un enfoque cuantitativo donde la muestra fueron 532 estudiantes universitarios inscritos en primer semestre de diferentes carreras de la Universidad Nacional Experimental del Táchira los cuales se les caracterizo el perfil metacognitivo mediante un método de investigación estadístico. Suárez-Fernández-Miranda, Aguayo-González, y Lama-Ruiz (2019), se tomó como población los estudiantes de Ingeniería Mecánica universidad de Sevilla el autor en el documento se estudia el uso de Machine Learning y Educational Data Mining con la finalidad de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje el método de investigación fue estadístico con enfoque cuantitativo. En conclusión, lo adecuado para investigar proyectos en los cuales se involucra la metacognición con un enfoque cuantitativo con un diseño experimental y alcance correlacional.

Los conceptos anteriormente expuestos son relevantes en el proyecto de grado; en el caso del

aprendizaje estructurado, este hace referencia al conocimiento que se debe desarrollar para resolver problemas. Para el aprendizaje adaptativo importa generar de manera temporal estrategias de solución a partir del problema y de la observación, finalmente el concepto de metacognición es relevante ya que busca estimular el trabajo independiente apoyándolo con un software como herramienta.

En conclusión, las trayectorias de aprendizaje, tiene su trasfondo en cuanto a ser una herramienta de autorregulación del aprendizaje, lo que está en concordancia con los conceptos asociados anteriormente y con el hecho de que el aprendizaje es un proceso en donde se trazan objetivos y se alcanzan con estrategias de solución.

2.2. Modelos Computacionales

Los algoritmos, son una secuencia de acciones ordenadas de manera sistemática con la intencionalidad de realizar una tarea en concreto (Muggleton, 2014). Algunos de los conceptos relevantes asociados a los algoritmos son: algoritmos computacionales, algoritmo Dijkstra y lógica difusa. A continuación, se ampliarán tales conceptos. Los algoritmos computacionales son secuencias de instrucciones bien estructuradas que permiten lograr llevar a cabo alguna actividad de manera práctica (Muggleton, 2014), en el artículo se aborda las motivaciones por las cuales Alan Turing centró su trabajo en el desarrollo de la inteligencia artificial, que es un tipo especial de algoritmo además del desarrollo de la lógica computacional que es base los algoritmos. Del concepto hace referencia los autores Mora-Torres, Laureano-Cruces, y Velasco-Santos (2011) en este proyecto se pretende realizar una interfaz entre estudiante y un agente pedagógico, la metodología es investigativa en donde se demuestra que es posible mejorar las interacciones cognitiva y la afectiva mediante una interfaz. Para el caso de los autores, López Reguera, Hernández Rivas, y Farran Leiva (2011) la población son los estudiantes de ingeniería de la Universidad de Concepción en donde realizaron una plataforma que logra apoyar el proceso de enseñanza/aprendizaje de cursos de programación usando una metodología de la investigación

con enfoque cuantitativo, el proyecto mostró una mejoría en el trabajo autónomo de los estudiantes. En el caso de los autores, Jerez Naranjo y Garófalo Hernández (2012) la población son los estudiantes de la carrera de ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica de la universidad CUJAE, en donde los investigadores usaron un método de investigación con enfoque cuantitativo con el propósito de que los estudiantes mejoraren el aprendizaje basado en actividades logrando una mejora en habilidades prácticas.

En este orden de ideas Guerrero, Guamán, y Caiza (2015) la población son los estudiantes de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Escuela Politécnica de Ecuador, en donde lograron mejorar el aprendizaje mediante un sistema de calificación automática que logra adaptarse a las necesidades particulares de los estudiantes, los investigadores usaron un método mixto. El algoritmo Dijkstra es un algoritmo computacional que logra hallar la trayectoria entre dos nodos predeterminados con el menos costo posible entre los posibles caminos que los une (Wang, Yu, y Yuan, 2011). Este algoritmo, se presenta como un método que logra hallar la distancia óptima entre dos nodos determinados de un grafo Martínez, Colina, Ramírez, y cols. (2013). Del concepto hacen referencia los autores Luna, Sánchez, y Pinzón (2012), donde en el artículo se trata sobre el uso de trayectorias halladas mediante el algoritmo Dijkstra y usadas con un algoritmo genético que optimiza las trayectorias realizadas por un robot, usando un método de investigación con enfoque cuantitativo. Para los autores, Mandow, Villalba, y Coego (2010) en el artículo hacen uso del algoritmo Dijkstra como método heurístico y como variante del algoritmo Backtrack para lograr enseñar sobre temas de inteligencia artificial usando un método de investigación con enfoque cuantitativo. Finalmente, para los autores, Giráldez-Cru, Mesejo, Segura, Fernández-Olivares, y González (2021), se hace uso de la gamificación como medio para la enseñanza de técnicas de inteligencia artificial usando como método de investigación el enfoque cuantitativo. El algoritmo Dijkstra, es útil para el proyecto ya que es este el algoritmo que permite calcular distancias en un grafo necesario y determinar caminos óptimos, finalmente la lógica difusa es útil para lograr estimar a partir del análisis de las jugadas de los participantes la calidad de la solución. En conclusión, los algoritmos son útiles para analizar y estimar el

aprendizaje de un jugador, dado que logra de manera sistemática hallar valores representativos de las decisiones tomadas por el participante brindando una herramienta para el diagnostico de una cantidad elevada de sujetos.

2.3. Simulación y Juegos

La práctica deliberada, es la realización de actividades planeadas con objetivos presisos para mejorar alguna habilidad cognitivo (Mayer, 2014). Algunos de los conceptos relevantes asociados a las prácticas deliberadas son: simulación y juegos didácticos. A continuación, se ampliarán tales conceptos.

- Simulación. Una simulación, es el uso de algoritmos para imitación un sistema a través del tiempo con la finalidad de lograr predecir el sistema a futuro (A. M. M. Herrera y Mancilla, 1999), en el artículo se hace una reseña sobre la evolución del concepto de simulación desde su desarrollo por parte de John Von Neumann y su importancia. Juego didáctico es el uso de la lúdica como herramienta útil para la enseñanza de manera entretenida y divertida (Campillo, 2013) en el artículo se plantea el uso de aparatos tecnológicos y la implementación de juegos, los cuales de manera interactiva y dinámica se logre aprender. El modelamiento, es una abstracción matemática con la cual se pretende entender a partir de las variables más relevantes un sistema (Uzcátegui, Dávila, y Tucci, 2011), en el artículo se plantea el uso de modelos para sistemas económicos, de inteligencia artificial, sistemas multiagentes y de biología. En general, una simulación es la imitación de parte de un sistema, en el cual mediante el uso de un modelo es posible representar parte de la realidad, logrando que un usuario sea capaz de interactuar con el sistema (Osorio Villa, Angel Franco, Franco Jaramillo, y cols., 2012). Del concepto hace referencia los autores Moreno, García, y Fuentes (2016), donde hacen una propuesta de un material didáctico para la enseñanza de RNA, con un enfoque cuantitativo y alcance exploratorio, la población es los estudiantes de área relacionadas con la tecnología. Otros autores son Díaz y Chautemps

(2016), los cuales proponen la implementación de cursos abiertos masivos en línea, mediante el uso de un simulador de energía nuclear, tales autores usaron un enfoque cuantitativo, con un alcance correlacional y un diseño preexperimental, la población fueron los tecnólogos de la universidad de Córdoba. Para el caso de los autores Andrade y Sotélo (2012), se propone una aplicación llamada Bio-Router v.1.0 para la simulación de redes de sensores; el cual es usado en la enseñanza de ese tipo de tecnologías, los autores usaron un enfoque cuantitativo, con un alcance exploratorio, la población fueron los estudiantes y profesores interesados en saber sobre redes de sensores. Finalmente los autores Pantoja, Placencia, Castro, Mora, y Valenzuela (2018), realizaron un artículo con una propuesta que se basa en una aplicación web usada por nutricionistas clínicos para estudiantes poco familiarizados con la tecnología como herramienta didáctica incentivando el aprendizaje activo, el enfoque fue cuantitativo, con un alcance correlacional y un diseño preexperimental, la población fueron los estudiantes de la carrera de Nutrición y Dietética de la Universidad Católica de la Santísima Concepción en Chile. En conclusión, lo adecuado para investigar sobre temas de simulación en la educación, es con un enfoque cualitativo, con un alcance exploratorio y un diseño preexperimental.

- Juegos Didácticos. Son una técnica de enseñanza que tiene el propósito de incrementar la participación de los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje mientras se divierten (B. M. Herrera, 2017). En el concepto tratado se encuentran autores como Aceituno, Marmolejos, Marte, Bolivar, y Aceituno (2014), en el artículo se propone el uso de un video juego llamado ”la mansión de la física”para suplir la falta de prácticas de laboratorio, con un enfoque cuantitativo un alcance descriptivo y la población son los estudiantes que ingresan al Instituto Técnico Colombiano (INTEC) y asisten a la clase de Física General. Para el caso de los autores Roncancio-Ortiz, Ortiz-Carrera, Llano-Ruiz, Malpica-López, y Bocanegra-García (2017), el autor realiza una revisión de las ventajas y desventajas del uso de videojuegos a partir de otros documentos, con un enfoque cuantitativo, un alcance exploratorio. Para el autor Pitarch (2018), se propone el estudio de la pertinencia del uso de

los Smartphone en el aprendizaje de idiomas y como estos aumentan la motivación por aprender, con un enfoque cuantitativo, un alcance exploratorio y la población estudiantes interesados en aprender idiomas. Finalmente, para los autores Gil-Sánchez, Masot, y Alcañiz (2014), los autores proponen el uso y fabricación de juguetes electrónicos para el aprendizaje de la realización de aparatos electrónicos, con un enfoque cuantitativo, un alcance correlacional, un diseño cuasiexperimental, en donde la población son los estudiantes de ingeniería aeroespacial de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV).

Capítulo 3

Estado del Arte y Marco Teórico

Introducción

La enseñanza de algún tema conlleva la necesidad de plantear la planeación de un orden particular para la presentación de los temas que culminen en su comprensión; de lo anterior se hace uso de información como el conocimiento previo del profesor y estudiantes, actividades lúdicas, entre otras. Por consiguiente, el profesor debe formularse hipótesis y generar estrategias. En el proyecto se formulan índices de diagnóstico de aprendizaje al de resolver un problema estructurado, el cual es útil para plantear hipótesis que conduzcan a la generación de estrategias que mejoren el proceso educativo. Por lo tanto, en el capítulo se van a abordar dos conceptos: las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y los juegos en la educación.

3.1. Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

La dinámica que surge entre profesor y alumno se puede entender como un ciclo en el cual el profesor se replantea la manera de enseñar en base a las actividades propuestas. El conocimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes es necesario en la propuesta de actividades y estas a su vez en el conocimiento de los estudiantes. Es precisamente la formulación de estrategias y su

constante refinamiento lo que genera un ciclo o como expresa el autor Simon (1995) trayectorias hipotéticas de aprendizaje; en el cual el autor realiza una propuesta de reconstrucción de la pedagogía matemática en base a la perspectiva del constructivismo. Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, son instrumentos conceptuales que incluyen el planteamiento de objetivos para el aprendizaje, actividades que promueven el aprendizaje y la formulación de hipótesis del proceso de aprendizaje. A continuación, se muestra un diagrama que ilustra el ciclo de enseñanza y la incorporación de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje. La experiencia de los profesores

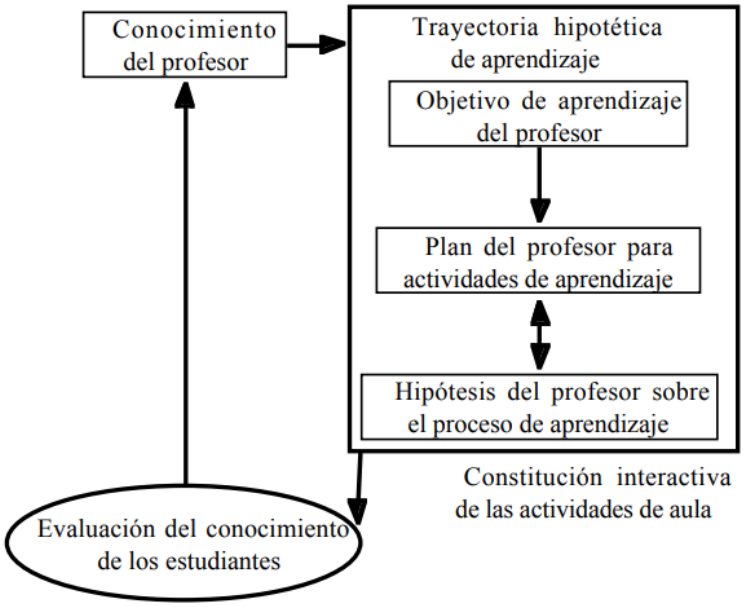


Figura 3.1: Ciclo de enseñanza trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Gómez y Lupiañez, 2007)

formada en continuos replanteamientos de las actividades propuestas y la reacción de estas por parte de los estudiantes, conlleva un constante proceso de reflexión y por tanto de generación de hipótesis. Para los autores Simon y Tzur (2012) y como complemento del trabajo realizado por Simon (1995), propone un marco en el cual las hipótesis y las actividades propuestas se complementan, en el documento se encuentran los siguientes: la realización de una trayectoria hipotética de aprendizaje tiene como base el conocimiento que sobre la temática matemática tienen los estudiantes, la planificación de las estrategias de aprendizaje deben ser guiados

mediante la hipótesis formulada, las actividades son útiles en la realización de herramientas en cuanto promueven el aprendizaje y las hipótesis deben ser reformuladas como un proceso cíclico de perfeccionamiento. Simon (1995) hace referencia al papel del modelo constructivista como un marco útil en el entendimiento del aprendizaje de los estudiantes. Aun así, el constructivismo no incluye el cómo enseñar en las aulas; por tanto, es un desafío el proponer estrategias y métodos para lograrlo.

El concepto de trayectorias de aprendizaje, es un término que se introdujo por Martin Simón el cual propendía formular una enseñanza basada en una perspectiva constructivista (O. León y cols., 2018). Actualmente las trayectorias de aprendizaje se relacionan con la educación, siendo una herramienta para el aprendizaje adaptativo y también el aprendizaje autónomo. A continuación, se va a ampliar el concepto de trayectorias de aprendizaje a partir de los conceptos de; pensamiento estructural, aprendizaje adaptativo y metacognición. Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje requieren de la formulación de acciones que sean verificadas en cuanto a la mejora de la enseñanza de algún tema. Un problema estructurado al requerirse de estrategias sistemáticas en su solución, permite representar algoritmicamente tales estrategias y hacer visible el proceso de aprendizaje y poder evaluarlo. Es por tanto que el uso de juegos en la educación no tiene solamente la ventaja de presentar los problemas de manera atractiva a los estudiantes, sino que también como problemas estructurados logran retar al jugador a plantearse soluciones sistemáticas que son sensibles a rastrear el proceso de razonamiento del jugador y por tanto ser apoyo en la formulación de hipótesis del proceso de aprendizaje.

El pensamiento estructurado, es la manera de lograr de forma estratégica la solución de problemas a partir del entendimiento sistemático, razonado y ordenado de las características del problema, la relación con la tecnología se basa en por ejemplo el uso de la robótica que propende por el pensamiento sistemático y organizado al hacerse uso de algoritmos (Bustamante, 2018). El aprendizaje adaptativo, tiene su inicio con el auge de la inteligencia artificial; el cual es la principal herramienta para lograr ese tipo de aprendizaje, tal herramienta debe lograr interactuar con el usuario y adaptarse al método con el cual aprenda mejor. En la actualidad el aprendizaje

adaptativo ha tomado otra dimensión debido al uso masificado del Internet y de diferentes aparatos tecnológicos como celular y tabletas (Yang y cols., 2013). La predicción de los mejores métodos de aprendizaje, se han visto potenciados por las Tecnologías de la Información y las Telecomunicaciones (TIC) y el uso de estadísticas (Truong, 2016).

La metacognición, tiene su inicio en la psicología junto con la cognición con el trabajo de J. Flavell, el cual uso el concepto en 1976 definiéndolo como procesos cognitivos sobre la cognición o lo que es lo mismo la capacidad de una persona en regular sus propios procesos cognitivos: la importancia reside en que un estudiante logra planear, realizar seguimiento y autoevaluar el aprendizaje de un tema (Gaviria, 2019). La metacognición actualmente tiene como herramienta la tecnología, ya que esta no solo tiene la posibilidad encontrarse presente de manera presencial, sino que también en el trabajo independiente (Azevedo y Aleven, 2013).

3.2. Juegos en Educación

Las simulaciones, tienen su inicio con la aparición de la informática, ya que la complejidad de una simulación depende de la capacidad de cómputo del sistema informático, se considera que las simulaciones computacionales se masificaron en la segunda guerra mundial, con matemáticos como; Alan Turing o Von Neumann (A. M. M. Herrera y Mancilla, 1999). Las simulaciones computacionales, logran imitar un sistema a partir de las variables más relevantes como datos de entrada, mostrando resultados que ayudan a predecir el comportamiento de tal sistema; las simulaciones pueden ser usadas en educación ya logran hacer entendible un sistema (Lorenzo, Sicilia, y Sánchez, 2012). El modelamiento, tiene su inicio con el uso de los algoritmos matemáticos implementados en la naciente informática, los modelos matemáticos fueron implementados con la finalidad de entender diferentes sistemas y hoy día representan una herramienta útil para la abstracción de sistemas que requieren ser investigados (Uzcátegui y cols., 2011) La modelación computacional es una herramienta que, al ser integrada junto a los juegos, representa una estrategia de aprendizaje útil, ya que incluye tanto al pensamiento computacional

como a también al modelado científico (Clark y Sengupta, 2020).

Los juegos, tienen su inicio con varios pensadores que usaban la lúdica como método para facilitar la enseñanza, entre ellos se puede mencionar a Juan Comenio o Pestalozzi, actualmente los juegos se han popularizado por el uso de diferentes aparatos computacionales que haciendo uso de la interacción humano máquina genera un interés por el aprendizaje (Campillo, 2013). Los juegos computacionales han mostrado ser útiles como herramientas que incentivan el aprendizaje, aun así, se ha evidenciado que, sin estrategias de aprendizaje o modelos de apoyo, el aprendizaje no impacta de la manera esperada, por lo tanto, es necesaria la formulación de juegos educativos que impacten al estudiante de manera significativa y le sea interesante (Hwang y Wu, 2012).

3.3. Práctica Deliberada

La práctica deliberada es una teoría que se basa en la realización reiterada de actividades que desarrollan la pericia buscando llegar a un grado de experticia. Tal teoría ha sido estudiada y desarrollada por autores como Ericsson (Ericsson y cols., 2006). La adaptación del hombre a su entorno ha supuesto la búsqueda del entendimiento y manipulación de este. La constante acumulación de conocimientos y aprendizajes a través del tiempo, supone la habilidad de lograr entender y extraer de lo que nos rodea aquellas características relevantes de los objetos que son de interés, se ha utilizado las matemáticas como medio para describir nuestro entorno, como un lenguaje útil para representar mediante símbolos aquellas características que son susceptibles a ser mesuradas; tal capacidad de abstracción y generación de modelos se considera matematizar. De hecho, las matemáticas por sí misma se han convertido en objeto de matematización; dado que algunas civilizaciones antiguas no solo llegaron a usarlas de manera práctica, sino a generar una estructura robusta al formularse leyes y teoremas que tienen su sustento en demostraciones formales y basadas en la lógica. Dada la relevancia de las matemáticas, su evolución a través del tiempo y la utilidad tanto práctica como de formalización se hace necesario saber cómo enseñarlas (Freudenthal, 1968). El proceso de matematización consiste en la abstracción de elementos

relevantes de un fenómeno o situación a analizar, generar un modelo mental y conseguir relacionar las diferentes variables que lo componen para finalmente inferir una regla general. Ahora, lograr la matematización de algún fenómeno o situación implica un proceso anterior de aprendizaje, por tanto, es necesario utilizar estrategias y métodos que lleven a los estudiantes a alcanzar a generar modelos mentales que describan situaciones de interés. La práctica deliberada es entendida como el entrenamiento riguroso de manera monitoreada y continua para llevar a alguien a dominar alguna habilidad (Anderson y Schunn, 2000), el uso de la práctica deliberada es necesaria para que los estudiantes logren; identificar, asociar y valorar, aquellas características necesarias para generar un modelo. Según el autor Ericsson y cols. (2006) la práctica no se debe limitar a realizar la misma tarea, sino que estas deben ir incrementando su dificultad; además de ser propuestas y diseñadas adrede para lograr un aumento en la habilidad de respuesta. De lo anterior es posible evidenciar que se presupone una intencionalidad en las propuestas de las actividades, las cuales se deben ir perfeccionando y mejorando a medida que los sujetos practican; es por ello que la práctica deliberada requiere de la formulación de trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Finalmente, el uso de la práctica como medio útil de aprendizaje tiene su base en la acumulación de respuestas acertadas; según la ley del efecto la práctica brinda la oportunidad de conseguir ejemplos acertados y no acertados generando una respuesta de recompensa y castigo (Mayer, 2014).

3.3.1. Proceso de generalización

La existencia de patrones en la naturaleza es la base del entendimiento del entorno y de su manipulación. Las ciencias usan la capacidad de inferencia y encontrar relaciones entre diferentes fenómenos que nos caracterizan como seres racionales. Tanto la matemática como las ciencias físicas usan la observación en la búsqueda de desvelar leyes generales, aun así, la matemática exige el uso de la demostración rigurosa (Polya, Zugazagoitia, y cols., 1965). El lograr abstraer se considera una cualidad intelectual en la cual se extrae características fundamentales de algún concepto, por tanto, es un reto. La generalización se basa en abstraer de varios conceptos lo

fundamental y común para formar un concepto general que las abarque a todas, es por tanto necesario entender el proceso de generalización para desvelar la manera en la cual formamos conceptos cada vez más complejos de lo que nos rodea. El uso del juego de los Cuatro Caballos al ser estructurado reta al jugador a lograr abstraer las características y patrones al realizar sucesivos movimientos, para finalmente desarrollar un concepto general del juego que lleve a su solución.
La generalización, siendo entendida como el proceso en el cual se infieren reglas y principios matemáticos, para los investigadores en este tema se trata también de la deducción de patrones y propiedades que son susceptibles a ser analizadas. Por tanto, la generalización es un proceso de matematización que el estudiante genera a partir de las habilidades de inferencia y de relación de variables (Freudenthal, 1993). El estudio del proceso de generalización en los estudiantes es un desafío, el capturar las particularidades de como los estudiantes están logrando el proceso es complejo. Para la autora (Ellis, 2007) el hecho que los investigadores no logren captar todas aquellas instancias, puede resultar en pasar aquellas relevantes de manera desapercibida y que son claves en poder entender como los estudiantes relacionan variables dentro de la solución de un problema. Es posible evidenciar el proceso de generalización en la solución de un problema, cuando; se constata la ampliación del conocimiento, existe relación entre las expresiones de los estudiantes con las decisiones tomadas y es posible encontrar particularidades entre diferentes estudiantes.
La propuesta realizada por (Ellis, 2007), se basa en el análisis realizado desde el punto de vista del alumno, buscando de tal manera evidenciar el proceso de generalización desde el actor. Por tanto, el proceso de abstracción y de matematización encuentra su análisis desde el punto de vista de los estudiantes, evidenciando lo que interpretan y paulatinamente construyen como general. La autora propone las siguientes categorizaciones, fruto del análisis de un experimento de enseñanza:

- Relación: los estudiante abstraen particularidades, ideas y situaciones que tengan conexiones entre ellas. El estudiante no necesariamente debe saber la causa de la relación, pero si considerar su potencial uso. Es una etapa de exploración de las características del juego, además, del entendimiento de las más importantes en función de sus conexiones.

- Búsqueda: después de abstraer características importantes y haber encontrado relaciones, los estudiantes plantean estrategias las cuales serán sometidas a verificación. Por tanto, se realiza la misma acción de manera reiterada en la búsqueda de elementos de similitud. La búsqueda es un continuo proceso de prueba de estrategias caracterizado por sucesivos intentos similares.

- Extensión: El proceso de abstracción genera un entendimiento del problema que lleva a relacionar características relevantes en la solución. La generación de estrategias por parte de los estudiantes y su posterior verificación conducirán a la inferencia de una estructura más general, el planteamiento de un modelo y por tanto la matematización de la situación a resolver. El proceso de extensión es valioso en las ciencias dado que este genera la descripción de un fenómeno general.

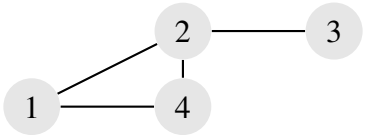
3.4. Grafos y Algoritmos

3.4.1. Grafos

La teoría de grafos es una rama de las matemáticas y de la ciencia de la computación que esquematiza una red; entendida como la asociación entre una colección finita de elementos denominada nodos o vértices mediante conexiones denominadas aristas. La aplicación de la teoría de grafos es variada, dado que existen diversos fenómenos que pueden ser representados como una red, ejemplo: la relación entre usuarios de una plataforma, la conexión entre vías de diferentes ciudades o las citaciones entre artículos. La teoría de grafos inicio debido a un problema planteado al matemático Leonhard Euler; consistía en encontrar la manera de cruzar siete puentes sin repetirlos regresando al mismo punto de partida, en lo que se denominó en el "problema de los puentes de Königsberg". Desde su creación la teoría de grafos tiene diferentes aplicaciones como lo son las telecomunicaciones, la ingeniería o los sistemas informáticos (Foulds, 2012). La aplicación de la teoría de grafos en el proyecto planteado consiste en la

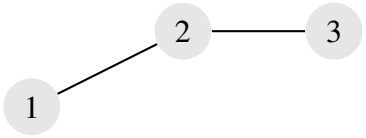
representación del juego los cuatro caballos en una red; donde los vértices hacen referencia a un estado del tablero, que es una posición en particular de los cuatros caballos en el tablero de tres por tres y las aristas que unen dos nodos que representan el movimiento en "L" de un caballo, en el grafo es posible representar los movimientos realizados por un jugador y del mismo lograr extraer información sobre las partidas jugadas y los índices planteados en el proyecto.
En esta sección se dará a conocer las definiciones básicas relacionadas con la teoría de grafos. Las definiciones se basan en las propuestas en el libro "Modern graph theory". (Foulds, 2012)

Definición 3.4.1 (Grafo)**.** *Un grafo G se define como un par de conjuntos ordenados* $G = (V, E)$*, en donde V es un conjunto de elementos denominados vértices o nodos, además para el documento se considera que la cantidad de vértices es finita. El conjunto E lo conforman conjuntos con cardinal dos* $\{x, y\}$ *donde tanto x como y son nodos del conjunto V, los elementos del conjunto E son denominados aristas o arcos. Como ejemplo podemos encontrar el siguiente grafo:*



En el caso del grafo anterior, se puede determinar que el conjunto de nodos consiste de cuatro elementos $V = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ y el conjunto de vértices es $E = \{\{1,\ 2\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 4\},\ \{2,\ 3\}\}$.

Definición 3.4.2 (Subgrafo)**.** *Se define que* $G' = (V', E')$ *es un subgrafo de* $G = (V, E)$ *si se cumple que* $V' \subseteq V$ *y* $E' \subseteq E$*, en tal caso se escribe que* $G' \subseteq G$*. Como ejemplo se tiene el siguiente subgrafo generado a partir del grafo del ejemplo anterior:*

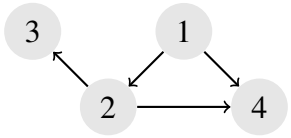


El grafo anterior G' es un subgrafo de G, dado que $G' = \{1,\ 2,\ 3\} \subseteq G$ y
$V' = \{\{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\}\} \subseteq V$ por tanto $G' \subseteq G$.

Definición 3.4.3 (Grafo dirigido)**.** *Un grafo dirigido o también denominado dígrafo G, al igual que un grafo es un conjunto de dos elementos $G = (V,E)$ donde V es el conjunto de vértices o nodos y el conjunto E es el conjunto de pares ordenados de elementos del conjunto V, esto es:*

$$E \subseteq \{(a,b) \in V \times V | a \neq b\}$$

Por tanto, un grafo difiere de un dígrafo en cuanto a que en el dígrafo las aristas o arcos tienen una dirección en particular de un nodo a otro en los grafos la no, un ejemplo sobre dígrafos es como sigue:



El dígrafo anterior consta de 4 nodos $V = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ y el conjunto
$E = \{(1,2),\ (1,4),(2,4),(2,3)\}$ consta de elementos con conjuntos ordenados.

Definición 3.4.4 (Grafo y subgrafo ponderado)**.** *Un grafo o subgrafo ponderado cumple la característica de que cada arista o arco tiene asociado un número real positivo, el cual cuantifica el coste de moverse entre nodos contiguos. Esto es, una función w con dominio en el conjunto E hacia los reales positivos: $w : E \longrightarrow, \mathbb{R}^+$*
En la aplicación de la teoría de grafos como ejemplo, se puede considerar los nodos como ciudades, las aristas como las vías que los unen y la ponderación como la distancia entre ciudades. En el caso del modelo propuesto se considera un dígrafo, en donde cada arista tiene asociado el número 1 dado que el pasar un nodo a otro contiguo se considera un paso.

Definición 3.4.5 (Grado de un vertice)**.** *El grado de un nodo es definido como la cantidad de aristas que están conectadas al nodo evaluado. En el caso de un grafo dirigido el grado hace referencia a dos cantidades; uno es el grado de salida el cual es la cantidad de nodos desde el cual es posible llegar desde el nodo evaluado y el grado de entrada el cual es la cantidad de nodos desde los cuales es posible llegar al nodo evaluado. En el caso del ejemplo de la definición*

de grafo dirigido o dígrafo, tenemos que el grado del nodo 2 *es* 3 *dado que está relacionado con los nodos* 1, 2 *y* 3. *En contraste en el ejemplo de la definición de dígrafo, se tiene que el grado de salida del nodo* 2 *es* 2 *dado que posible llegar desde el nodo evaluado a los nodos* 3 *y* 4, *para el caso del grado de llegada el grado es de* 1 *dado que puede llegar al nodo evaluado solo desde el nodo* 1.

Definición 3.4.6 (Camino o trayectoría)**.** *Un camino o trayectoria hace referencia a un subgrafo en el cual las aristas generan un camino continuo de un nodo a otro. En el caso del dígrafo que modela el juego de los cuatro caballos; un camino hace referencia al paso entre estados del tablero caracterizados por representar el movimiento en "L" de manera alternada, empezando con una ficha blanca.*

Definición 3.4.7 (Grafo o dígrafo, conexo y disconexo)**.** *Un grafo se define como conexo, si cualesquiera dos nodos del grafo tiene un camino o trayectoria que los una. En el caso de existir dos nodos que no se conecten mediante algún camino se dice que es un grafo disconexo.*

Definición 3.4.8 (Matriz de adyacencia)**.** *La matriz de adyacencia es una representación mediante una matriz cuadrada de n filas y columnas, donde:*

- *n es la cantidad de nodos del grafo o dígrafo.*
- *Una componente de la matriz es igual a la ponderación de la arista que une un nodo a otro de un grafo, en caso de no existir tal arista la componente se considera nula.*
- *En un dígrafo una componente de la matriz de adyacencia es la ponderación de la arista que una el nodo de una fila con el nodo una columna. Por tanto, si una arista no une un nodo a otro la componente es nula.*
- *La matriz de adyacencia de un grafo es una matriz simétrica.*
- *La matriz de adyacencia de un grafo dirigido es una matriz no simétrica con diagonal nula.*

Dada la capacidad de representación de problemas usando teoría de grafos, en particular en ponderar las distancias entre nodos; se hace necesario el lograr encontrar un trayecto óptimo que comuniquen dos nodos en un grafo. El algoritmo ideado por el científico de la computación Edsger Wybe Dijkstra que lleva el nombre de algoritmo de camino más corto o algoritmo Dijkstra, lograr a partir de dos nodos dados encontrar el trayecto que los una con el menor coste posible (Makariye, 2017).

3.4.2. Algoritmo de Dijkstra

De otra parte, el algoritmo Dijkstra también conocido como el algoritmo de caminos mínimos, fue deducido por el científico en computación Edsger W. Dijkstra, fue originalmente publicado en 1959 en la revista Numerische Mathematik y constituye un robusto algoritmo que es usado en diferentes campos del conocimiento como un método heurístico para reconocer la distancia mínima entre un conjunto de nodos (Frana y Misa, 2010) actualmente el algoritmo es rediseñado para mejorar su velocidad de calculo del más corto, como también para el caso de lógica difusa. El algoritmo de Dijkstra aplicado del nodo a al z, se basa en ir construyendo el camino más corto empezando con los nodos contiguos al nodo inicial y buscando el más cercano, luego de manera reiterativa se va construyendo el camino con el nodo más cercano hallado previamente hasta encontrar el nodo final. De manera detallada se tendrán etiquetas permanentes en los nodos cuyo proceso del algoritmo detecte como mínimo y etiquetas provisionales las cuales son candidatas a ser mínimas; la etiqueta del nodo v se le asigna el valor de $L(v)$ y los nodos con etiquetas temporales se encuentran en el conjunto T cuyos elementos son suprimidos a medida se encuentra una etiqueta permanente. La primera etiqueta permanente es la del nodo de inicio $L(a) = 0$, el algoritmo encuentra la ruta más corta entre el nodo de inicio y el nodo con una etiqueta permanente. Por tanto, el algoritmo finaliza cuando se le asigna una etiqueta permanente al nodo z (Johnsonbaugh, 2005).

Algorithm 1: Matriz adyacencia grafo dirigido Cuatro Caballos

(Johnsonbaugh, 2005).

Entrada: ponderaciones de aristas w, nodo de inicio a, nodo final z.

Salida: longitud hasta el nodo final $L(z)$, etiquetas permanentes que construyen el trayecto entre nodos desde el inicial hasta el final. dijkstra(w,a,z,L){

$L(a) = 0$

Para todo nodo x diferente de a

$L(x) = \infty$

T ▷ Es el conjunto de nodos cuyas etiquetas no son permanentes

while $z \in T$ **do**

$v = min\{L(v) \mid v \in T\}$

$T = T - \{v\}$

Para todo nodo $x \in T$ contiguo a v.

$L(v) = min\{L(v)\ ,\ L(v) + w(v,x)\}$

end

}

3.5. Lógica Difusa

La lógica difusa es un concepto desarrollado por el profesor Lofti A. Zaded de la universidad Berkeley en California, quien generalizó el concepto de lógica clásica donde se tiene la posibilidad de 0 o 1 a valores intermedios. Se considera en una manera elegante y práctica de inferir resultados a partir de información vaga e imprecisa (Eduardo, De Vito, y cols., 2006). Actualmente es usada en varios campos del conocimiento como ejemplo la automatización ya que logra optimizar la toma de decisiones en las realizaciones de acciones en una máquina. La manera en la que una persona describe su entorno basado en su percepción no se realiza mediante cantidades numéricas, sino a través de palabras y de frases que ponderan características sensibles a ser medibles. Tales características pueden ser por ejemplo la temperatura de un objeto que

puede ser calificada como alta, media o baja, además tales calificativos pueden variar entre personas siendo por tanto expresiones subjetivas basadas en por ejemplo la experiencia (Díaz Córdova, Coba Molina, y Navarrete, 2017). La lógica difusa por tanto pondera características teniendo en cuenta los matices que estas pueden tener, en contraste la lógica clásica o tradicional pondera con dos valores las características como se muestra en la figura 3.2.

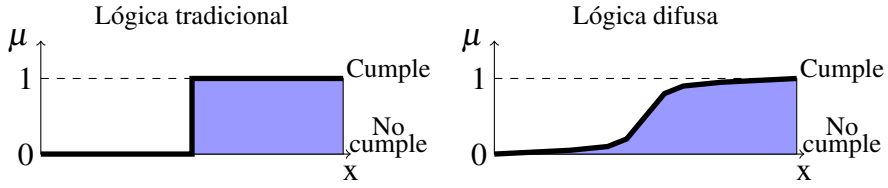


Figura 3.2: Interpretación grafica de lógica tradicional y difusa (Díaz Córdova et al., 2017).

Capítulo 4

Implementación Tecnológica

En la sección se expondrán términos relacionados con la teoría de grafos y el modelo computacional que simula los posibles estados de posiciones de los caballos en el tablero y el movimiento en "L" de las fichas teniendo en cuenta la alternancia del color de las fichas.

Grafo dirigido juego Cuatro Caballos

El modelo computacional realizado para el modelamiento del juego Cuatro Caballos genera un grafo donde los nodos representan las diferentes posiciones de los 4 caballos en el tablero y las aristas representan el movimiento de uno de los caballos en **"L"**. A continuación, se pretende realizar un esbozo de la realización del código computacional el cual, al ingresar los diferentes movimientos de los caballos en diferentes partidas realizadas por un jugador, se logra como resultado de su funcionamiento calcular los índices de Buclicidad, Ramificación, cantidad de jugadas realizadas, cantidad de bucles, pasos dados entre los bucles y pasos que faltaron para llegar a resolver el juego.

Dado que el juego consiste en el movimiento de cuatro caballos, dos negros y dos blancos en un tablero de tres por tres, es posible determinar la cantidad de diferentes posiciones de los caballos en el tablero mediante el uso de la técnica de conteo permutación, esto es: $8P4 = 1680$, se utilizan 8 posibles posiciones en el tablero de tres por tres dado que el cuadro en el centro no se utiliza

debido a los movimientos en “L” de los caballos. La construcción del código comienza con la creación de una matriz denominada “Estados” de 1680 filas y 9 columnas, en donde cada fila es una posición en particular de las fichas en el tablero. El siguiente paso consiste en comparar cada fila de la matriz con las demás buscando aquellas en la que se identifiquen el movimiento de solo una ficha, luego se verifica que el movimiento de la ficha identificada sea un movimiento en “L”; usando las coordenadas del cambio de posición de la ficha como catetos, se verifica usando el teorema de Pitágoras que la hipotenusa al cuadrado sea igual a 5, como se muestra a continuación en el código:

Algorithm 2: Matriz adyacencia grafo Cuatro Caballos

```
if (Posi(1,1) − Posi(2,1))^2 + (Posi(1,2) − Posi(2,2))^2 = 5 then
    Rela(i, j) = 1;
else
    if mod(FiJu, 2) = 0 then
        Color(i, j) = FiJu;
    else
        Color(i, j) = FiJu;
    end
end
```

Del código anterior cuando se identifica el movimiento de un caballo representado por una arista se generan dos matrices, como sigue:

- Una es la matriz de adyacencia denominada \$Rela$”, en la cual se ubica el número 1 referenciando la posibilidad de realizar una jugada del nodo i al nodo j y viceversa.
- La matriz denominada \$Color$” es la matriz \$Rela$”, con la diferencia de no ubicarse un número 1 sino el número a asociado a la ficha movida (1 y 3 para los caballo de color blanco y los números 2 y 4 para caballos de color negro).

La figura 4.1 muestra el grafo generado al graficar la matriz de adyacencia “Rela”, la cantidad de

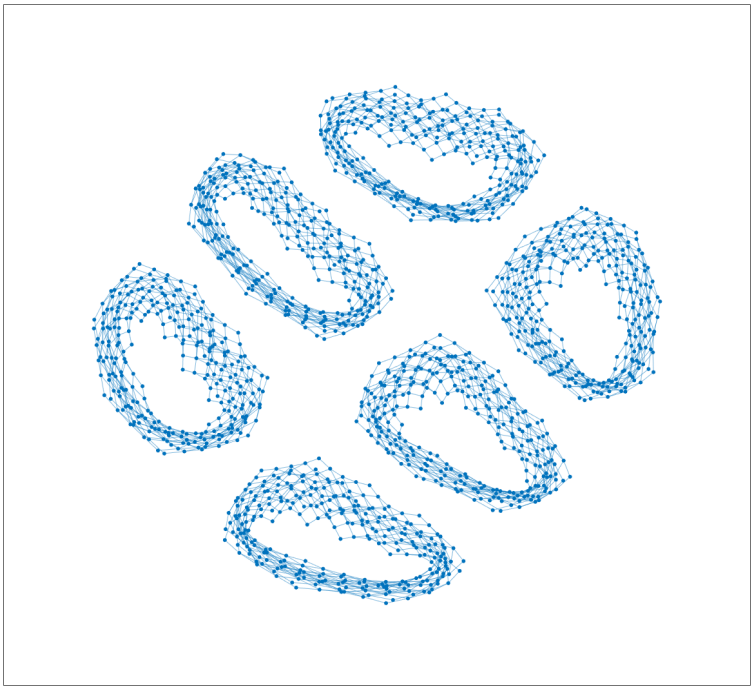


Figura 4.1: Grafo generado matriz de adyacencia juego Cuatro Caballos.

nodos es de 1680 y la cantidad de aristas es de 3840. El grafo es disconexo con 6 subgrafos conexos cada uno de 280 nodos.

Dado que el juego hereda la regla de turnar entre caballo de color blanco y caballo de color negro empezando con un caballo de color blanco, se debe cumplir tal regla en el grafo de la figura 4.1. Para lo cual, se hace necesario construir un grafo dirigido que se centre solo en uno de los subgrafo conexos y que contenga los nodos que representan el inicio y final del juego que se muestra en la tabla 4.1.

1	0	3	4	0	2
0	0	0	0	0	0
2	0	4	3	0	1
Inicio			Final		

Tabla 4.1: Inicio y final del juego

Se genera un vector denominado “TurnoBN” de una columna con 1680 filas, en el cual en la fila *i*

se anota la distancia entre el nodo de inicio (nodo 129) y el nodo *i*. Por tanto, en la fila 129 se le asigna el número 0, dado que la distancia del nodo de inicio a el mismo es nulo. El código del algoritmo 3 muestra el código usado para construir el vector \$TurnoBN$".

Algorithm 3: Vector distancia desde nodo inical hacia el resto de nodos

```
for k = 1 : 19 do
    for i = 1 : tamano do
        if TurnoBN(i,1) = (k-1) then
            for j = 1 : tamano do
                if (TurnoBN(j,1) = -1)&(Color(i,j) =
                  0)&(mod(Color(i,j),2) = ((1+(-1)^k)/2)) then
                    TurnoBN(j,1) = k;
                end
            end
        end
    end
end
```

El algoritmo busca los nodos relacionados con los ya anotados en la vector usando la matriz \$Color$" y les anota un paso de más teniendo en cuenta el turno de color de las fichas. Tal turno lo identifica usando la función módulo del número asignado al caballo a evaluar, verificando e intercalando el valor de 0 y 1 como sigue:

$$(1+(-1)^k)/2 = \begin{cases} 1 \quad si \quad k\ es\ par \\ \\ 0 \quad si \quad k\ es\ impar \end{cases}$$

A partir de la matriz "TurnoBN" es posible identificar los nodos de inicio y final de la tabla 4.1 dentro del grafo de la figura 4.1 asociado a la matriz "Rela". Por tanto, es posible extraer el subgrafo conexo y construir un grafo dirigido que modele el intercambio de color de los caballos. El código realizado se muestra en el algoritmo 5 y se basa en el hecho de tenerse que una cantidad

par de movimientos implica la jugada de una ficha blanca y una cantidad impar implica la jugada de una ficha negra.

Algorithm 4: Matriz adyacencia grafo dirigido Cuatro Caballos

```
for i = 1 : 1680 do
    if TurnoBN(i,1) ≠ −1 then
        for j = 1 : 1680 do
            if
             RelaDigra(i, j) ≠ 0)&(mod(Color(i, j),2) ≠ mod(TurnoBN(i,1),2)
             then
                RelaDigra(i, j) = 0;
            end
        end
    end
end
```

Finalmente, el resultado obtenido al lograr modelar la relación entre los nodos o posiciones de las fichas en el tablero y su relación de movimiento en "L" de un caballo de manera alternada se puede observar en la siguiente figura :

4.0.1. Uso de Lógica difusa para el diseño de las ecuaciones

La lógica difusa es útil en el proyecto dado que ayuda a ponderar la afectación al resolver el juego de los Cuatro Caballos al repetir dos estados en una partida. A continuación, se pretende realizar una exposición sobre los conceptos asociados a la lógica difusa en base a la teoría presentada en el libro "Fuzzy Logic" (Ross, 2017).

Definición 4.0.1 (Variables lingüísticas)**.** *Las variables lingüísticas describen el estado de un fenómeno a estudiar mediante palabras o frases. Tales variables hacen una descripción que caracteriza en base a la experiencia, estudio estadístico o algún otro argumento el objeto de estudio; logrando asociar tales variables a valores numéricos y de esta manera usar la*

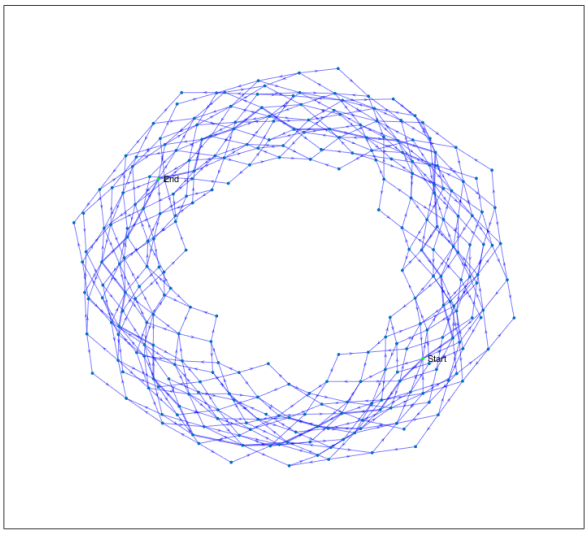


Figura 4.2: Grafo dirigido juego Cuatro Caballos.

matemática como medio para inferir nueva información. Como ejemplo se puede mencionar la calidad en el servicio de atención en un restaurante como buena, regular o mala.

Definición 4.0.2 (Definición conjunto difuso y de membresía)**.** *Un conjunto difuso es una extensión del conjunto clásico, donde en el clásico un elemento pertenece o no pertenece al conjunto. En el caso de un conjunto difuso se incluye pertenencia al conjunto con valores intermedios. Por tanto, para una variable lingüística H se le asocia una función de pertenecía denotada $\mu_{H(x)}$ que cumple con la condición $0 \leq \mu_{H(x)} \leq 1$, donde el valor numérico 0 significa que no cumple con la condición H y en el caso de 1 significa que si cumple con la condición H. Un ejemplo se muestra en la figura 4.3 en donde solo para el valor de $x = 2$ se tiene que la variable lingüística cumple plenamente con la variable lingüística H.*

Definición 4.0.3 (Operaciones sobre conjuntos difusos)**.** *Las operaciones definidas sobre los conjuntos difusos se realizan a las funciones de pertenencia representando nueva información, en base a la realización de operaciones lógicas a las variables lingüísticas. Las operaciones son las*

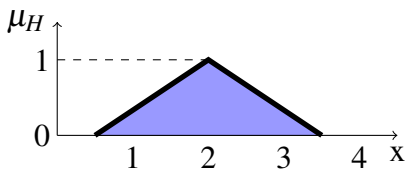


Figura 4.3: Función de pertenencia (Ross, 2017).

siguientes:

Unión $\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

Intersección $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$

Complemento $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \ \mu_A(x)$

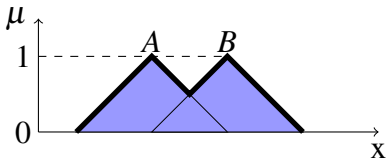


Figura 4.4: Unión difusa (Ross, 2017).

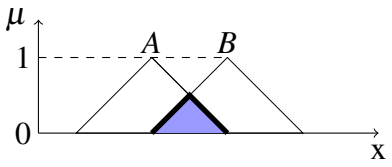


Figura 4.5: intercepción difusa (Ross, 2017).

Definición 4.0.4 (Controlador Mamdani)**.** *La inferencia a partir de variables lingüísticas que han sido representadas mediante funciones de pertenencia, se realiza mediante reglas que relacionan tales funciones con operadores lógicos. Las reglas usan operadores "o" e "y" para las funciones de pertenencia de entrada y estas deben implicar otra función de transferencia. En el proyecto de grado se utiliza el operador "y", bajo afirmaciones del tipo Si-Entonces. Por tanto, se utiliza el implicador de Mamdani el cual es una generalización de Modus Ponens de la lógica clásica el cual se ajusta al tipo de reglas propuestas en el proyecto. El controlador de Mamdani y su*

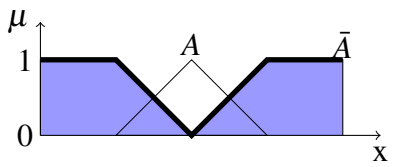


Figura 4.6: Complemento (Ross, 2017).

inferencia se puede describir como se muestra en la ecuación 4.1, donde se tiene n reglas y dos valores de entrada "i" y j:

$$\mu_{B_r^{'}}(y) = \mu_{A_{pq}}(i) \wedge \mu_{A_{pq}}(j) \wedge \mu_{B_p}(y) \; con \; p,q \; y \; r \; \varepsilon \{1, ..., \; n\} \tag{4.1}$$

El fusificador utilizado después de usar la inferencia de Mamdani a cada una de las reglas es el siguiente:

$$\mu_{B^{'}}(y) = \mu_{B_1^{'}}(y) \vee ... \vee \mu_{B_n^{'}}(y) \tag{4.2}$$

La figura 4.7 muestra gráficamente el uso de los operadores lógicos.

Dado que el resultado es una función de pertenencia, es necesario calcular un dato que sea representativo y que por tanto sea resultado de evaluar los dos valores de entrada i y j. El procedimiento de hallar tal valor se denomina defusificador y este se basa en el campo de física, al hallarse el centro de gravedad. La ecuación 4.3 es útil para hallar tal valor.

$$y_d(i,j) = \frac{\int y \; \mu_{B^{'}}(y) dy}{\int \mu_{B^{'}}(y) dy} \tag{4.3}$$

El resultado es una superficie que depende de los valores de entrada i y j, a continuación, un diagrama que muestra el procedimiento descrito figura 4.8.

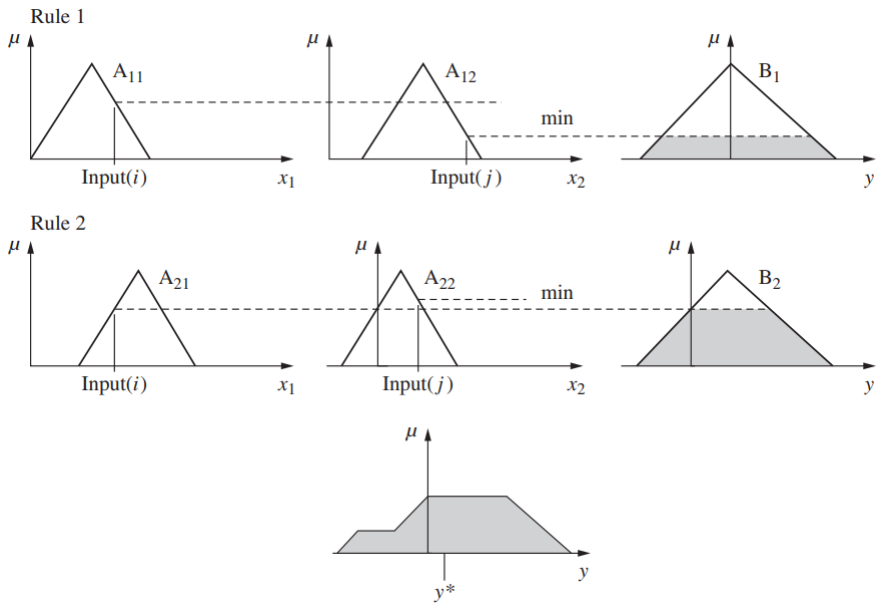


Figura 4.7: Operador Mamdani (Ross, 2017).

4.0.2. Uso del Algoritmo Dijkstra para el diseño de las ecuaciones

El algoritmo Dijkstra es útil para lograr calcular en el juego de los Cuatro Caballos la mejor solución de llegar del nodo inicial al nodo final que aparece en la Tabla 4.1. Para tal fin se hace uso del grafo de la Figura 4.2 y mediante el algoritmo Dijkstra es posible hallar la mejor solución la cual se muestra en la Figura 4.9; en la gráfica es posible encontrar dos caminos que involucran 17 nodos por tanto 16 aristas que representan los movimientos mínimos para poder resolver el problema. De la gráfica es posible encontrar dos caminos los cuales representan la estrategia de solución del juego, el cual consiste en mover las fichas en sentido horario o en sentido antihorario. El algoritmo Dijkstra también será usado para lograr extraer información del grafo como la distancia que le falta a un jugador para lograr llegar a resolver el problema de manera óptima o medir la calidad de los movimientos del jugador.

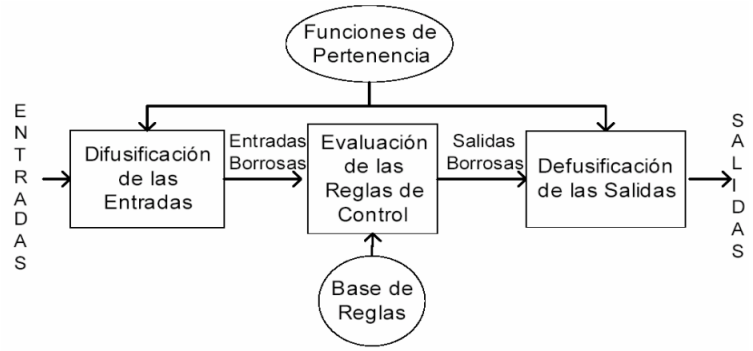


Figura 4.8: Diagrama uso de control difuso. https://cayetanoguerra.github.io/ia/ (Apuntes lógica difusa).

4.0.3. Diseño de la función de Ramificación

El índice de ramificación es un valor numérico que cuantifica los aciertos realizados al escoger una trayectoria en particular. Un jugador generalmente se plantea una estrategia de solución encontrando características en el juego que se puedan aprovechar, para luego poner en práctica realizando una partida y evaluar su conveniencia. Si un jugador estima que su estrategia no tiene los resultados deseados, en el recorrido realizado entre las diferentes posiciones de las fichas se podrá detectar las fallas de la escogencia. El grafo que modela el juego de los cuatro caballos evidencia que cualquier estado del tablero tiene cierta posibilidad de escogencia de movimientos, como se muestra en la figura 4.10 excepto para ocho nodos los cuales no tienen posibilidad de movimiento (juego cerrado). El índice plantado evalúa en cada movimiento si se realizó el acertado otorgándole una ponderación de uno y si no es acertado de cero, luego se promedia los valores numéricos obteniéndose como ponderación de 0 a 1 los movimientos acertados del total de movimientos. El índice de Ramificación (Rami) compara la distancia mínima (dm) entre el nodo que se desea evaluar y el siguiente estado hasta lograr llegar al nodo solución (Target) siguiendo la trayectoria de la partida con “p” movimientos. Si la distancia mínima del nodo evaluado menos un movimiento coincide con la distancia mínima del siguiente nodo se califica

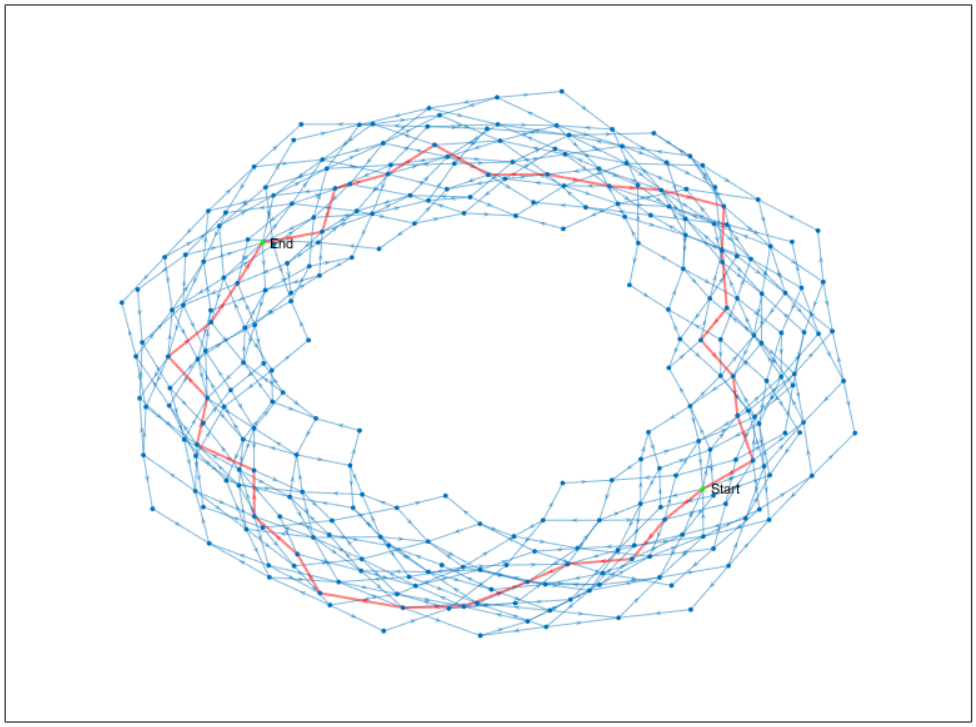


Figura 4.9: Grafo dirigido juego Cuatro Caballos.

con uno, sino con un cero, esto se puede evidenciar en la ecuación 4.4.

$$c_i = \begin{cases} 1 \quad si \quad m(n_i, Target) - 1 \;=\; dm(n_{i+1}, Target) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad donde\ i \in \{1, ..., p-1\} = I \\ 0 \quad si \quad dm(n_i, Target) - 1 \;<\; dm(n_{i+1}, Target) \end{cases} \tag{4.4}$$

El valor numérico de Ramificación es el promedio de la ponderación de cada nodo:

$$Rami = promedio\,\{c_i\}_{i \in I}$$

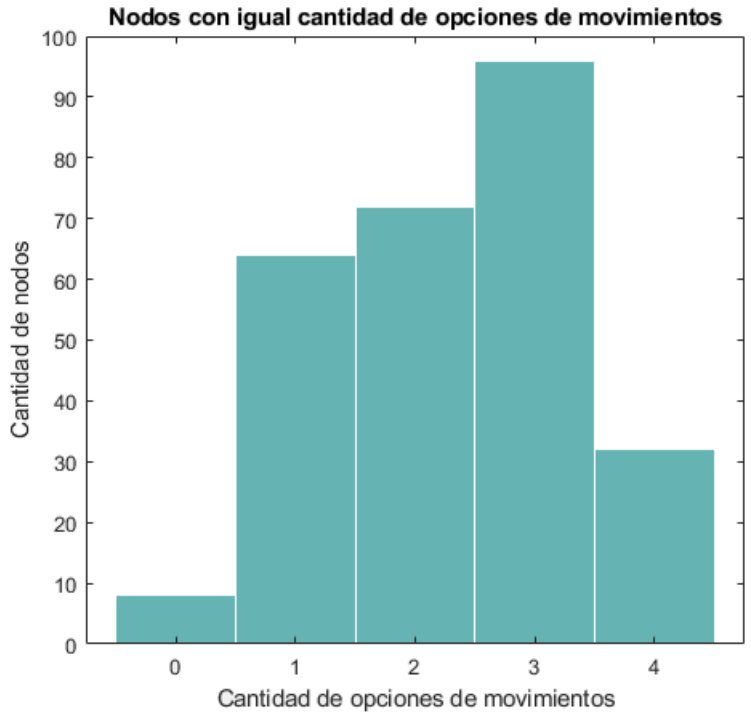


Figura 4.10: Cantidad de nodos con igual posibles movimientos.

El promedio se puede calcular haciendo uso el algoritmo 4.10.

Algorithm 5: Algoritmo ramificación.

```
for i = 1 : RecoF − 1 do
    numera=tamaño(dijkstra(grafo,RecoNodos(1,i),Target)); numera=numera-1
     denomi=tamaño(dijkstra(grafo,RecoNodos(1,i+1),Target))
    if numera = denomi then
        Califi=1
    end
    Califi=0
end
Rami=Rami/(RecoF-1);
```

El algoritmo 4.10 usa el valor numérico de *RecoF* para cuantificar la cantidad de nodos del recorrido por tanto $RecoF - 1$ hace referencia de que se debe evaluar todos los nodos excepto el último (ya que no representa la decisión de mover una ficha). El algoritmo Dijkstra calcula en el

grafo la distancia desde el nodo *i* hasta el final *Target* y le resta la unidad para hallar la cantidad de pasos para llegar al final. Luego calcula la distancia entre el nodo siguiente de la trayectoria $i+1$ hasta el final *Target*, en este caso no de resta la unidad ya que se evalúa un paso después del nodo evaluado. Los datos se contratan en el condicional y se calcula finalmente el promedio en la variable Rami. Lográndose de esta manera calcular de 0 a 1 el índice de acierto de los movimientos realizados por el jugador, siendo el valor de 1 el que todos estén bien ejecutados.

4.0.4. Diseño de la función de Buclicidad

El índice de buclicidad calcula la incidencia que tiene sobre un jugador al resolver el juego de los cuatro caballos el repetir estados del tablero dentro de una trayectoria de una partida dada. La manera de lograr calcular el índice, se basa en calcular la cantidad de movimientos en el cual se inicia y finaliza en el mismo estado con respecto a la cantidad total de movimientos. Además de la cantidad de movimientos que faltaron para resolver el juego de manera óptima, con respecto a la cantidad mínima de movimientos para resolver el juego que es de 16. Dados los dos datos anteriormente descritos, cada uno se puede interpretar como estimaciones de la proporción de incidencia en el jugador para lograr resolver el juego y ser estos interpretados mediante las calificaciones de alto, medio y bajo. El índice finalmente se calcula usando un algoritmo basado en la lógica difusa y logra ser útil para interpretar el proceso de razonamiento del jugador. A continuación, se pretender exponer con detalle el cálculo del índice de buclicidad en función de la trayectoria generada por una partida de un jugador.

Algoritmo de valores de entrada para el cálculo de índice de buclicidad

La trayectoria de una partida incluye un bucle cuando el recorrido de los estados después de cierta cantidad de movimientos se repite, esto es: un nodo se repite después de recorrer cierta cantidad de aristas. De lo anterior es deseable calcular aquellos nodos en los que se presenta buclicidad y la cantidad de movimientos o aristas entre los bucles. Para ello se utiliza el algoritmo 6, en el que se revisa nodo a nodo si sus posteriores siguiendo las aristas en algún momento se repite y de

hacerlo se sigue la revisión un nodo después del final de un bucle.

Algorithm 6: Detección de bucles en trayectorias de partidas en el juegohttps://es.overleaf.com/project/608619a211aca68dff92f3b4 Cuatro Caballos

```
f                                          ▷ Cantidad de nodos en la trayectoria.
recorrido                                  ▷ Vector de nodos del recorrido.
cantibucle = 0;                            ▷ Cantidad de bucles.
Totalbucles = 0;                           ▷ Total aristas entre todos los nodos.
i = 1;
while i <= f − 1 do
    for j = i + 1 : f do
        if recorrido(1, i) = recorrido(1, j) then
            cantibucle = cantibucle + 1;
            longitud = j − i               ▷ Cantidad de aristas dentro de un bucle.
            i = j;                         ▷ Necesario revisar nodos luego de un bucle hallado.
            Totalbucles = Totalbucles + longitud;
            break
        end
    end
    i = i + 1;
end
```

Del algoritmo 6, se calcula la cantidad total de movimientos entre todos los bucles $Totalbucles$ y el movimiento total de la trayectoria $f-1$. Por tanto, la proporción entre los dos datos, seria:

$$g(Totalbucles) = \frac{Totalbucles}{f-1} \tag{4.5}$$

Para el caso de la proporción de la cantidad de movimientos que restaron para lograr resolver el juego de manera óptima fll, con respecto a la cantidad óptima de 16 movimientos, se tiene que la

proporción entre los dos datos, sería:

$$h(fll) = \begin{cases} \frac{fll}{16} & si \quad fll \leq 16 \\ \\ 1 & si \quad fll > 16 \end{cases} \tag{4.6}$$

Funciones de pertenencia o membresía

Los valores numéricos de las ecuaciones 4.5 y 4.6, son analizados mediante el uso de lógica difusa; dado que el índice de Buclicidad se calcula en función de la cantidad de movimientos dados para que se repita la misma posición de los caballos y como esta afecta la solución del juego. A continuación, se explica la caracterización de las dos cantidades como variables lingüísticas.

En el caso de los bucles realizados en una trayectoria, se utilizan cuatro variables lingüísticas que califican la cantidad de movimientos realizados entre los bucles en función de la cantidad total de movimientos ecuación 4.5. Las variables lingüísticas son: bajo, medio bajo, medio alto y alto. Dado que la ecuación 4.5 es un valor que se encuentra entre 0 y 1, se debe ponderar a que valores numéricos en el rango de la función *g* se asignan a las variables lingüísticas. Para ello se hace uso del hecho que la ecuación 4.5 tiene un comportamiento lineal por tanto, las cuatro variables lingüísticas fraccionan el rango de la función g con la misma importancia. De la figura 4.11 se puede inferir dada la linealidad de la relación entre las variables, las siguientes asignaciones a las variables lingüísticas:

- Bajo entre 0 y 0,25.
- Bajo medio entre 0,25 y 0,5.
- Bajo alto entre 0,5 y 0,75.
- Alto entre 0,75 y 1.

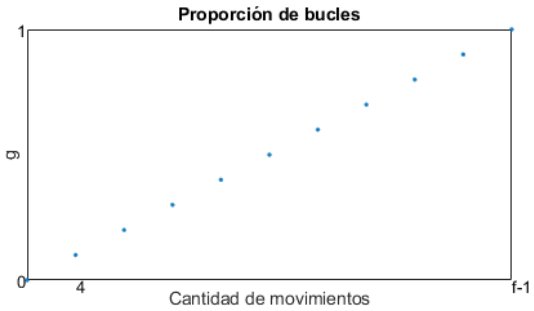


Figura 4.11: Función *g* proporción de bucles (4.5).

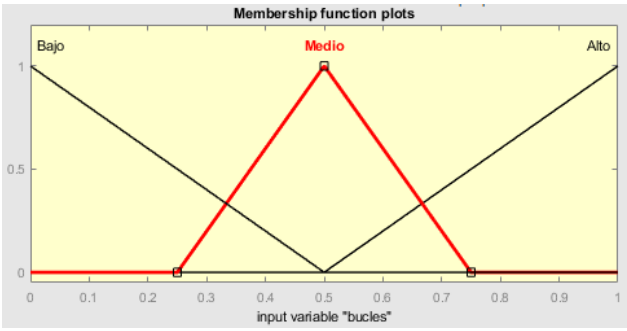


Figura 4.12: Función *g* (4.5).

En el caso de la ecuación (4.6), el argumento es análogo al caso de la ecuación (4.5), dado que la ecuación también tiene un comportamiento lineal como se muestra en la figura 4.13.

Por tanto, dada la linealidad de la gráfica de la figura 4.13, se puede realizar la asignación análoga a la realizada en la función *g* y generar la asignación de variables lingüísticas como se muestra en la figura 4.14.

Como respuesta al análisis de las dos variables de entrada descritas anteriormente, se desea obtener un valor numérico entre 0 y 1 el cual logre mesurar la afectación de repetir estados en el juego en la solución del mismo. Para ello se utilizan las variables lingüísticas de afectación baja, afectación baja promedio, afectación alta promedio y afectación alta. Lo cual fracciona el rango de la función de buclicidad (salida entre 0 y 1) en 4 unidades como sigue:

- Afectación baja entre 0 y 0,25.

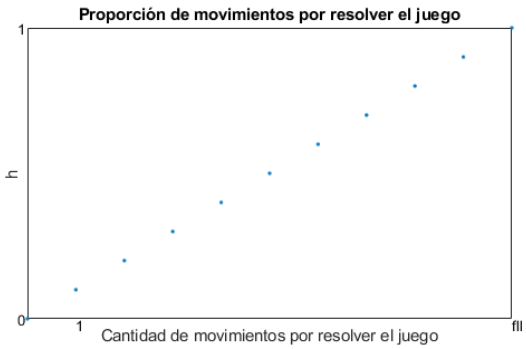


Figura 4.13: Función *h* proporción movimientos por resolver el juego (4.6).

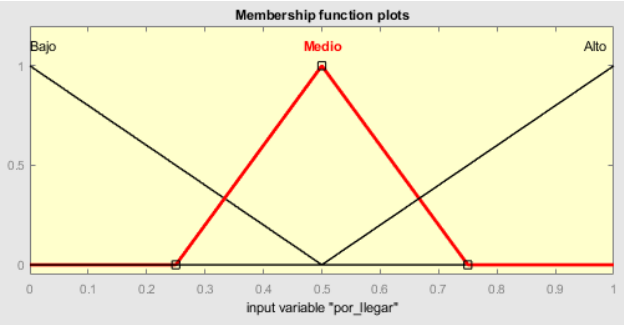


Figura 4.14: Función *h* (4.6).

- afectación baja promedio entre 0,25 y 0,5.
- afectación alta promedio entre 0,5 y 0,75.
- afectación alta 0,75 y 1.

La asociación entre variables lingüísticas y el rango de la función de buclicidad, se representa gráficamente mediante funciones de pertenencia trapezoidales como se muestra en la figura 4.15:

Reglas difusas y función de buclicidad

A partir de las funciones de pertenencia es posible establecer las reglas con las cuales se estima la afectación que tiene los bucles en una partida en la solución del juego. Para ello hay que tener en

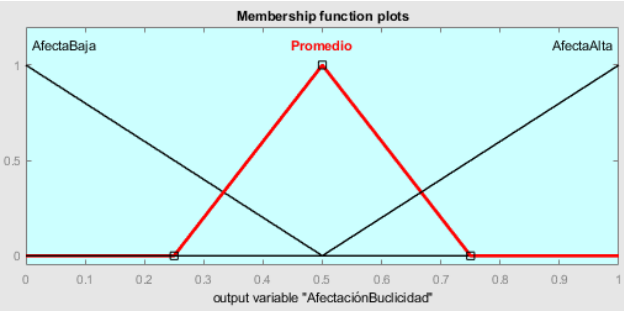


Figura 4.15: Función de Buclicidad salida.

cuenta las tres variables lingüísticas de las figuras 4.12 y 4.14, por tanto se puede establecer nueve reglas las cuales se asignan de acuerdo a los resultados esperados como se muestra en la Tabla 4.2. Dado que se utiliza el controlador de Mamdani, para el caso de las funciones de pertenecía de

Por llegar (h) / Bucle (g)	Bajo (Bh)	Medio (Mh)	Alto (Ah)
Alto (Ag)	Afectación media (Am)	Afectación alta (Aa)	Afectación alta (Aa)
Medio (Mg)	Afectación baja (Ab)	Afectación media (Am)	Afectación alta (Aa)
Bajo (Bg)	Afectación baja (Ab)	Afectación baja (Ab)	Afectación media (Am)

Tabla 4.2: Reglas difusas

entrada se utiliza el operador lógico de intersección esto es $\mu_{A\cap B} = min\{\mu_A, \mu_B\}$. La implicación se calcula con el operador de Mamdani como se muestra en la figura 4.16, donde se muestran nueve reglas donde la función g y h denominadas “Bucles” y “Por llegar” respectivamente se califican mediante las variables lingüísticas Bajo, Medio y Alto. Las funciones de pertenencia de la salida “Afectación Buclicidad” con las variables Afectación Baja, Promedio y Afectación Alta. En el ejemplo para la función g el 0.427 de los movimientos totales se realizaron dentro de un bucle y faltó el 0.595 de movimientos por resolver el juego de los 16 movimientos mínimos, ponderando con 0.515 el ingresar a un bucle la incidencia de no llegar a resolver el juego. El

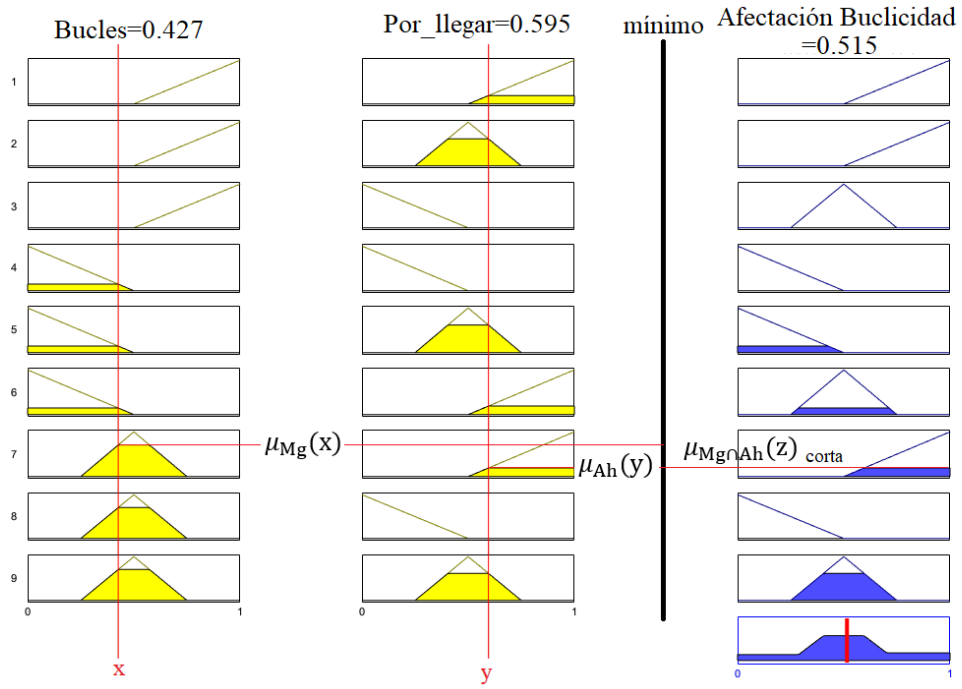


Figura 4.16: Gráfica de las funciones de pertenencia.

operador Mamdani luego de calcular el mínimo en cada una de las reglas, corta la función de pertenencia respectiva, la operación en la regla 7, es:

$$(\mu_{Mg}(x) \wedge \mu_{Ah}(y)) \wedge \mu_{Aa}(z)$$

Luego de calcular cada una de las funciones de membrecía usando la ecuación anterior, se aplica la unión $\mu_{A \cup B} = max\{\mu_A, \mu_B\}$. La función resultante se le aplica el método de defusificación de centroide. El resultado es una función que pondera de 0 a 1 la incidencia sobre un jugador el poder resolver el juego de los cuatro caballos al repetir posiciones, la gráfica de tal función se muestra en la figura 4.17.

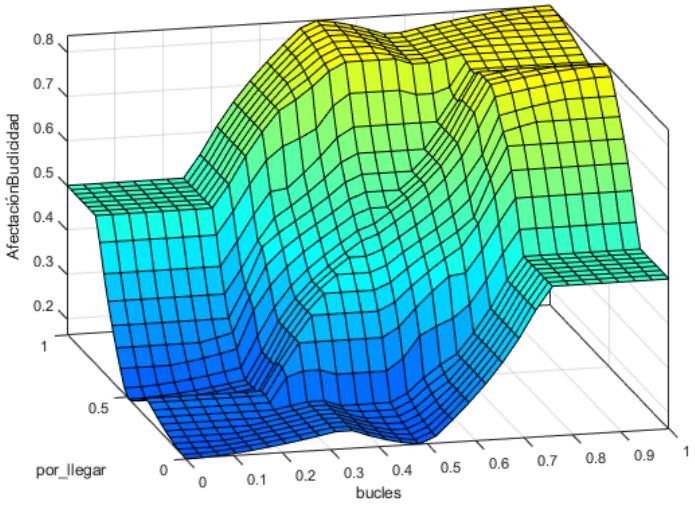


Figura 4.17: Superficie función de buclicidad.

Conclusión

El juego Cuatro Caballos al basarse en la ubicación de 4 fichas en un tablero de 9 casillas y algunas reglas plantadas, permite cuantificar y representar el juego mediante un grafo dirigido. Además, es posible representar la trayectoria de las partidas realizadas por un jugador a través de pasos entre nodos; cumpliendo las reglas representadas por las aristas direccionadas. Dado que se establece una métrica de la menor distancia entre dos nodos en base al algoritmo Dijkstra, es posible extraer información de las trayectorias de las partidas y lograr plantearse índices que pretenden caracterizar e inferir información de las estrategias de solución de un jugador.

Capítulo 5

Validación

El trabajo de investigación propuesto tiene las siguientes características:
Enfoque mixto, dado que en el proyecto se propone la recolección de datos de las partidas realizadas por algunos sujetos, los cuales serán analizados cuantitativamente al utilizarse los índices de Buclicidad y Ramificación, además, de utilizarse representaciones gráficas de las partidas en el grafo dirigido asociado al juego. También se realiza un análisis cualitativo de las expresiones verbales y no verbales, usando como insumo videos realizados a los sujetos resolviendo el juego. Finalmente, se analiza los resultados de los índices y las expresiones verbales buscando relaciones entre ellos.
Alcance exploratorio, dado que en el proyecto se presenta la propuesta de dos índices denominados Ramificación y Buclicidad, con los que se pretende evaluar el aprendizaje de solución de un juego estructurado; se tiene el interés de examinar las características y utilidades de estos índices en cuantificar los aciertos realizados al transcurrir una partida y la incidencia que tiene en un jugador la realización bucles en la solución del juego. Este capítulo describe el proceso de validación de las dos ecuaciones propuestas: Ramificación y Buclicidad, para ello se utiliza un enfoque mixto con diseño concurrente; el cual tiene la capacidad de contrastar los análisis cualitativos y cuantitativos infiriendo resultados de los dos enfoques. Además de un alcance exploratorio, debido a que los índices fueron propuestos y se pretende desvelar la utilidad

y características de los mismos.

5.1. Descripción diseño metodológico

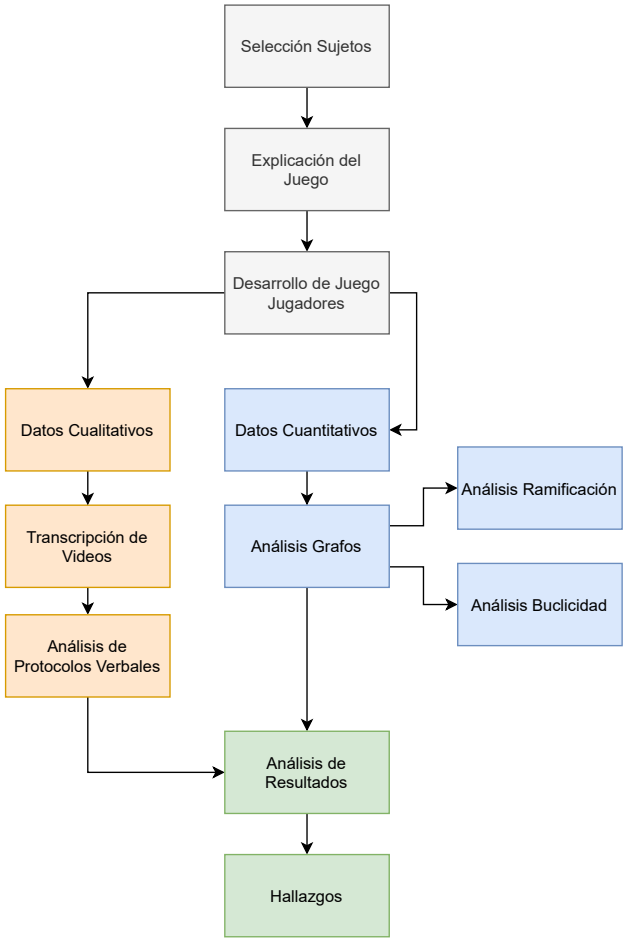


Figura 5.1: Esquema del diseño de la investigación

- **Recolección Datos Cualitativos.** Es posible medirla cualitativamente mediante la descripción de expresiones verbales y no verbales generadas por los sujetos al intentar resolver el juego.

- **Recolección Datos Cuantitativos.** es posible medir cuantitativamente las categorías de la

variable mediante el análisis de los resultados de los índices propuestos. El planteamiento y generación de índices de apoyo en el diagnóstico del aprendizaje de la solución de juegos estructurados, entendido como el medio para extraer información a partir de la representación de las partidas realizadas. Se constituye por elementos como la formulación matemática de los índices de Buclicidad y Ramificación.

- Análisis Función de Ramificación
- Análisis Función de Buclicidad

- **Análisis de Resultados**.

  - **Datos cualitativos**:

    Procedimiento: aplicación del juego a 11 sujetos.

    Producto: archivo con 11 videos y consolidado de los movimientos realizados.

  - **Transcripción de vídeos**:

    Procedimiento: extraer de los videos instancias de las expresiones verbales y no verbales de los sujetos.

    Producto: consolidado de expresiones de los sujetos para su análisis.

  - **Análisis de protocolos verbales**:

    Procedimiento: se clasifica la información mediante las categorías de clasificación de (Ellis, 2007).

    Producto: consolidado de expresiones verbales y no verbales de acuerdo a las categorías de generalización.

  - **Datos cuantitativos**:

    Procedimiento: aplicación del juego a 11 sujetos.

    Producto: archivo de los movimientos de cada partida de los sujetos.

  - **Análisis Ramificación y Buclicidad**:

Procedimiento: se clasifica la información mediante las categorías de clasificación de Ellis (2007).

Producto: promedio de los índices de cada categoría por sujeto.

- **Análisis de resultados**:

  Procedimiento: contrastar el análisis cuantitativo y cualitativo.

  Producto: análisis mediante categoría Ellis (2007), práctica deliberada (Anderson y Schunn, 2000) (Mayer, 2014) y matematización (Freudenthal, 1968).

- **Hallazgos**:

  Procedimiento: evidenciar la utilidad de los índices de Buclicidad y Ramificación.

  Producto: conclusión del proyecto.

La validación de los índices propuesto, entendido como la capacidad de diagnosticar el aprendizaje en la solución del juego Cuatro Caballos por parte de un jugador. Se constituye por elementos de conocimiento: habilidad de generar estrategias y mejoramiento paulatino en la solución de juegos estructurados.

5.2. Participantes

Dado que los juegos estructurados se caracterizan por tener una finalidad siguiendo normas, se hace necesaria la formulación de estrategias para lograr resolverlos generando hipótesis y de esta manera lograr una proyección a futuro. Es por tanto necesario que los participantes estén en la capacidad de utilizar el razonamiento deductivo y lograr generar ideas abstractas, es así que se seleccionaron 11 sujetos en edades entre los 8 y 13 años. Las participaciones de la investigación se realizaron bajo la previa autorización de los acudientes mediante un consentimiento informado, además se contó con la ayuda de estudiantes del programa de licenciatura de matemáticas de la Universidad Distrital ”Francisco José de Caldas”quienes grabaron y realizaron análisis de expresiones verbales.

5.3. Materiales

El material utilizado consiste en el uso de un tablero de ajedrez de $3x3$, en el cual se ubican 2 caballos blancos y 2 caballos negros en sus esquinas de forma tal que los caballos del mismo color se encuentren en la misma fila. El juego finaliza cuando los caballos de color negro se ubican en la posición de los blancos y viceversa, usando la menor cantidad de movimiento en "L" usual de los caballos de ajedrez. Fue posible la recolección automática de movimientos mediante una simulación del juego que se encuentra de manera libra en la siguiente página http://ritaportal.udistrital.edu.co:10198/horses.

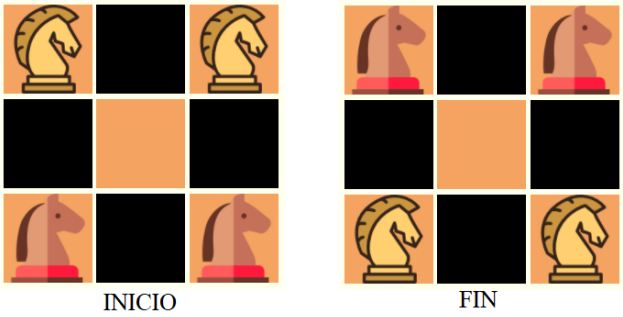


Figura 5.2: Tablero Juego Cuatro Caballos `http://ritaportal.udistrital.edu.co:10198/horses`

5.4. Condiciones y Procedimiento

El procedimiento comienza con el consentimiento informado por parte de los acudientes de los sujetos a evaluar. Luego se les da a conocer las reglas del juego y se realiza una grabación a las partidas; tales partidas y sus movimientos representan diferentes posiciones de las fichas en el tablero y por tanto el rastro de las estrategias formuladas por el usuario. De las grabaciones se puede transcribir la ubicación de las fichas movimiento a movimiento, las cuales serán representadas en el grafo dirigido que modela el juego. Las partidas en el grafo dirigido pueden ser evaluadas usando los índices de Buclicidad y de Ramificación formuladas en el proyecto, además de poderse extraer datos generales de las partidas como lo son: la cantidad de

movimientos, la cantidad de bucles con la cantidad de movimientos realizados dentro del mismo y la cantidad de movimientos mínimos restantes para resolver el juego. Tal información es usada para realizar el análisis cuantitativo de las partidas. De manera análoga se realiza una transcripción de la expresiones verbales y no verbales de los sujetos para cada partida generando los llamados protocolos verbales. Tal información es usada para realizar el análisis cualitativo de las partidas. Finalmente se realiza el análisis correlacional de los análisis cuantitativos y cualitativos. Las cartas de consentimiento de uso de imagenes y video, la tablas de observador y videos de las partidas realizadas, se puede encontrar en el siguiente enlace:
`https://drive.google.com/drive/folders/1xkFXasug4-S_9f_c8bdFWFrS_uDso8Kd?usp=sharing`

5.5. Métricas y Análisis

5.5.1. Rendimiento de la Tarea

Los índices de Buclicidad y Ramificación se pueden contrastar con la información proporcionada en los datos generales; debido a que los índices están en función de tales datos. A continuación, se pretende mostrar un análisis de cada una de partidas realizadas por los sujetos, basado en los valores de los índices y los datos generales. Una grafica con todas las partidas en la cual el color rojo representa la primera partida y la de color amarillo la última, los matices de color rojo hasta el amarillo representan las partidas intermedias. Las graficas de cada partida por separado, además de una foto del participante.

Sujeto 1

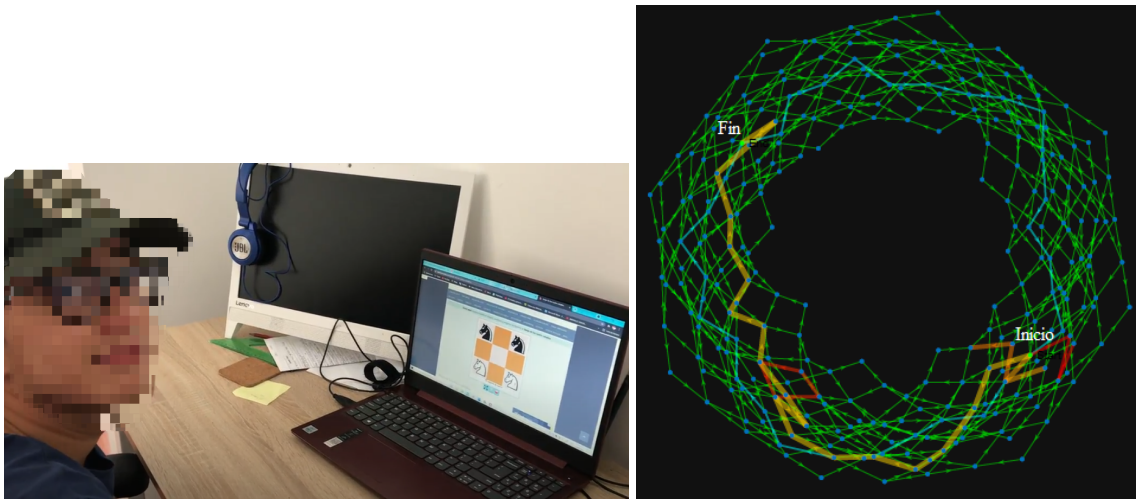


Figura 5.3: Sujeto 1 consolidado de partidas.

El sujeto 1 es de género masculino, tiene 12 años de edad, realiza la actividad en un computador en la casa que habita tardando 3 minutos y medio. Usa una página web que le permite generar los movimientos deseados e iniciar nuevamente de manera automática. El sujeto realizó seis partidas, donde las primeras de color rojo y las intermedias de color naranja muestran que realizó pocos movimientos en comparación con la última de color amarillo resolviendo el problema Figura 5.3; por tanto, el sujeto realiza un proceso de matematización, visible dado que los primeros movimientos fueron necesarios para conseguir abstraer del juego las características necesarias para entenderlo y llegar a resolverlo (Freudenthal, 1968).

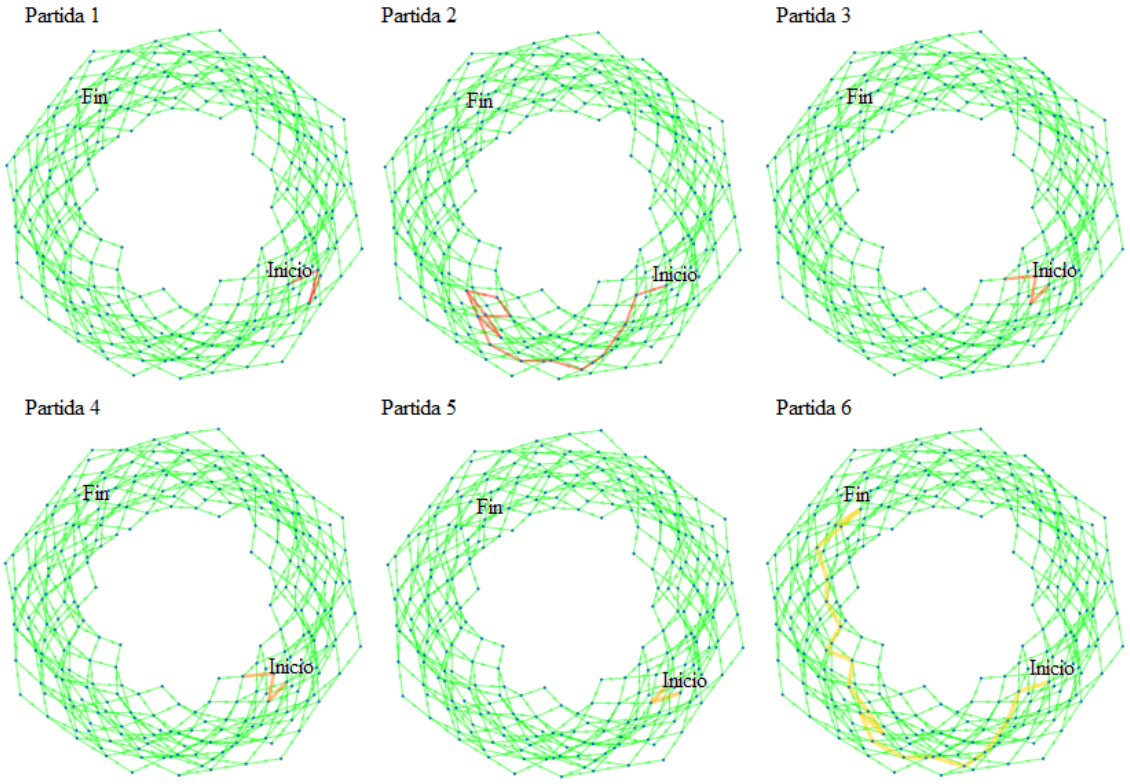


Figura 5.4: Sujeto 1 partidas.

Las partidas realizadas por el sujeto 1 representadas en el grafo dirigido asociado al juego, muestra en la partida 1 el aprendizaje de las reglas del juego al ser pocos movimientos, en la partida 2 se infiere que el sujeto realiza un proceso de abstracción al explorar las particularidades del juego sin llegar a resolverlo, en las partidas 4, 5 y 6 evidencia que el sujeto intenta una estrategia al notarse que los caminos son similares, finalmente en la partida 6 soluciona el juego usando más de los 16 movimientos mínimos necesarios; por tanto la partida también requirió de un proceso de exploración. Se puede notar un proceso de práctica deliberada al identificarse en las sucesivas partidas el aprendizaje de las particularidades del juego y mejoramiento continuo (Anderson y Schunn, 2000).

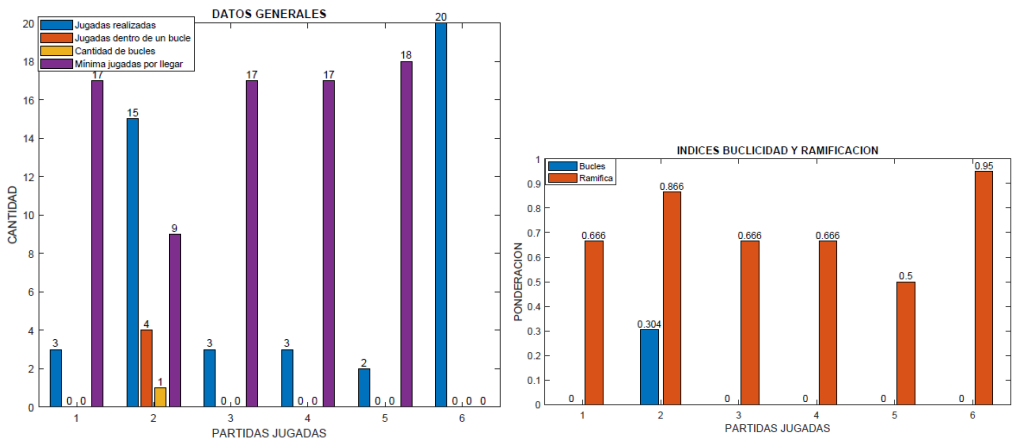


Figura 5.5: Sujeto 1 datos generales.

En la Figura 5.5 se evidencia información útil al transcurrir las partidas sobre la evolución de las decisiones tomas por el sujeto. A continuación, se realizará un análisis de cada partida contrastando los datos generales con los índices de Buclicidad y Ramificación, una descripción de las expresiones verbales y no verbales del sujeto, además se clasificarán de acuerdo a las categorías propuestas por la autora Ellis (2007):

Categoría de relación:

- Partida 1: el índice de buclicidad es cero dado que el sujeto no ingresó a un bucle. Los 3 movimientos realizados alejaron al jugador de resolver el problema; dado que se necesitaría mínimo de 17 movimientos para resolverlo de los 16 mínimos necesarios, por tanto, afectó el índice de Ramificación ponderándolo por debajo de la mejor calificación de 1.

  Expresiones verbales: el sujeto después de realizar 3 movimientos dice “no” al terminar la partida.

  Expresiones no verbales: el sujeto se mantiene concentrado y sonríe al terminar la partida.

Promedio de los índices de las partidas de relación:

Promedio de índice de Ramificación: 0.666

Promedio de índice de Buclicidad: 0

El sujeto en la categoría de relación muestra un índice de ramificación inferior al de las siguientes categorías, mostrando que se encuentra familiarizándose con el juego, además de ser corroborado con la expresión no verbal de decir “no” al percatarse que hay ocasiones en la que no es posible realizar más movimientos.

Categoría de búsqueda:

- Partida 2: aunque de los 15 movimientos realizados, menos de la mitad han estado dentro de un bucle de 4 movimientos, el índice de Buclicidad da un valor menor a 0.5; dado que faltó más de la mitad de los movimientos para resolver el problema en comparación de los 16 mínimos. El índice de Ramificación es inferior a 1, dado que el ingresar a un bucle es producto de la realización de movimientos erróneos.
  Expresiones verbales: no realiza.
  Expresiones no verbales: el sujeto se mantiene tranquilo, cuando llega a una posición de los caballos del mismo color en los lados del tablero respira profundo, al final de la partida se reclina hacia atrás y se toca la boca con la mano cuando selecciona una ficha que no tiene posibles movimientos y decide reanimar el juego.

- Partida 3 y 4: muestra los mismos valores numéricos de las dos partidas mostrando que su estrategia fue similar.
  Expresiones verbales: no realiza.
  Expresiones no verbales partida 2: realiza 3 movimientos llevándose la mano a la cabeza, reclinándose a la izquierda levemente y sonriendo al tomar la decisión de reiniciar el juego.
  Expresiones no verbales partida 3: no realiza.

- Partida 5: el índice de buclicidad es cero dado que el sujeto no ingresó a un bucle. El sujeto realizó 2 movimientos el primero nunca es erróneo, fue erróneo el segundo dado que el índice de ramificación muestra que la mitad de los movimientos lo son.
  Expresiones verbales: no realiza.

Expresiones no verbales: busca ubicar los caballos en los centros de los laterales del tablero, decide reiniciar al tratar de mover una ficha blanca que no tiene posibles movimientos.

Promedio de los índices de las partidas de búsqueda:
Promedio de índice de Ramificación: 0.675
Promedio de índice de Buclicidad: 0.076
El índice de ramificación aumenta en comparación al de la categoría de relación, mostrando que realiza más movimientos acertados, el sujeto se encuentra validando una posición en particular de los caballos corroborado al tratar de ubicarlos en los centros de los lados del tablero, corroborado por las expresiones que realiza al encontrar tal posición.

Categoría de extensión:

- Partida 6: el índice de buclicidad es cero dado que el sujeto no ingresó a un bucle. Dado que la cantidad mínima es 16 pero se resolvió en 20, se infiere que se realizó algún movimiento erróneo produciendo un índice es menor de 1. Aun así, se resolvió el problema.
  Expresiones verbales: al terminar la partida dice “listo”.
  Expresiones no verbales: el sujeto arruga la boca al percatarse que solo le falta mover una ficha blanca, pero por la alternancia de color no lo puede realizar. Finalmente puede resolver el problema y mira hacia la cámara.

Promedio de los índices de las partidas de extensión:
Promedio de índice de Ramificación: 0.95
Promedio de índice de Buclicidad: 0
El índice de ramificación es el más alto, mostrando una notaría mejoría en los movimientos realizados. Aunque el índice no llega a su valor más alto dado que realizó más de los 16 mínimos necesarios. Finalmente logra resolver el juego al usar la estrategia de ubicación de los caballos como lo pretendía hacer en las dos categorías anteriores.

Análisis del sujeto 1:

El primer sujeto realizó 6 partidas resolviendo el juego con 4 movimientos de más e ingresó a un bucle de 4 movimientos en la partida 2. Es posible evidenciar de la categorización propuesta por Ellis (2007) que el sujeto realiza un proceso de generalización, evidenciado por la creciente ponderación del índice de ramificación, además de las expresiones verbales que muestran la búsqueda de patrones en el juego al poner las fichas en varias partidas en una posición en concreto. La práctica deliberada se evidencia al realizar diferentes partidas que mejoran tanto en lo acertado de los movimientos (aumento en el índice de Ramificación) y en la evolución de las expresiones al frustrarse o alegrase dependiendo de lo bien o mal de las acciones tomadas (Anderson y Schunn, 2000). El sujeto logra abstraer particularidades en la posición de las fichas, alistando una ubicación en concreto, evidenciando un proceso de matematización lo suficientemente útil para resolver el juego (Freudenthal, 1968). La carta de consentimiento de uso de imágenes y video, la tabla de observador y video de las partidas realizadas, se puede encontrar en el siguiente enlace: `https://drive.google.com/drive/folders/1Kxhy0GfKA6e_72V42QVe4ldZU6laNnbJ?usp=sharing`

Sujeto 2

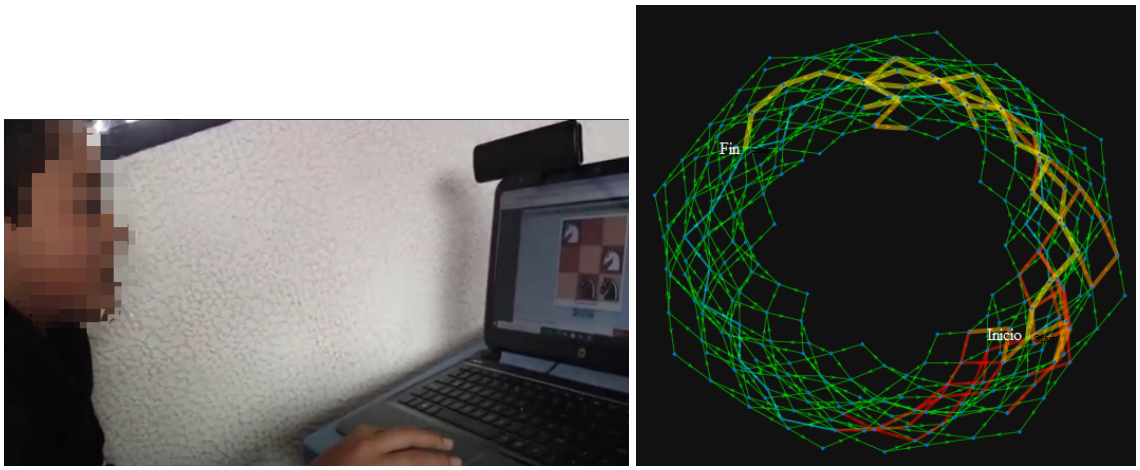


Figura 5.6: Sujeto 2 consolidado de partidas.

El sujeto 2 es de género masculino, tiene 13 años de edad, la actividad planteada la realiza en 20 minutos utilizando un computador y una página web que le permite gestionar los movimientos y las partidas. El sujeto realizó 18 intentos, siendo el que más cantidad de partidas usó en comparación con los demás sujetos. De la Figura 5.6, las partidas realizadas inicialmente de color rojo se encuentran a la izquierda del inicio en sentido horario, mostrando que exploró el juego realizando pocos movimientos similares, las partidas intermedias de color naranja se encuentran a la derecha del inicio en sentido antihorario evidenciando que optó por cambiar los movimientos realizados al inicio pero sin realizar los 16 mínimos necesarios, las últimas partidas de color amarillo muestran que siguió movimientos similares a las partidas intermedias pero con más movimientos resolviendo finalmente el juego. El proceso de matematización del sujeto presenta un creciente uso de movimientos a medida que realiza las apartidas, además de un cambio en las decisiones de los movimientos; los procesos de abstracción realizados por el sujeto lo llevaron a lograr resolver el juego (Freudenthal, 1993).

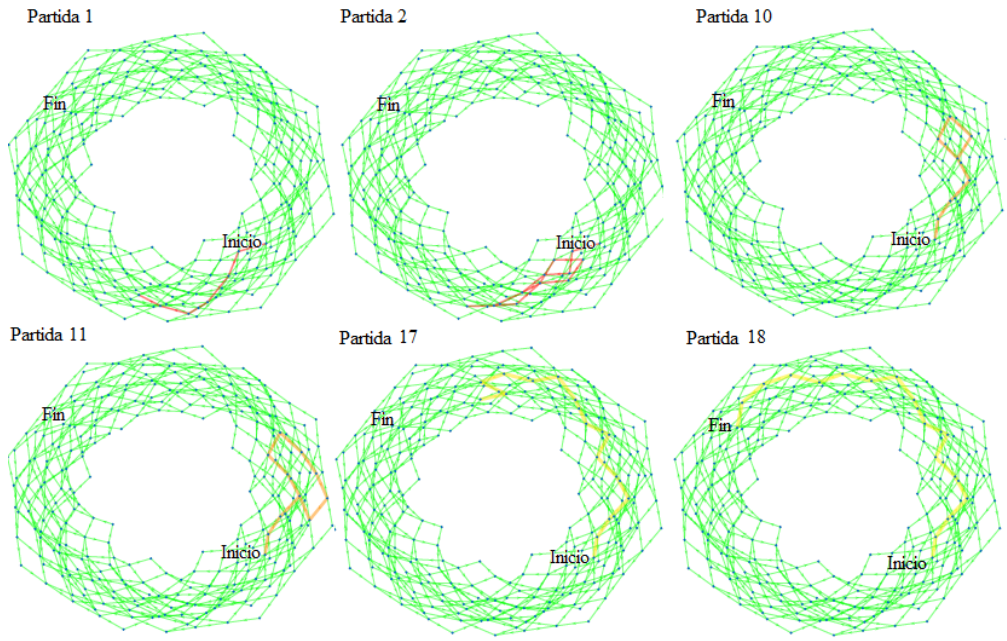


Figura 5.7: Sujeto 2 partidas 1 a 12.

Las partidas representadas en la Figura 5.7 son algunas de las realizadas por el sujeto. La práctica deliberada realizada partida a partida muestra un proceso de reconocimiento como se evidencia en las partidas 1 y 2; caracterizadas por pocos movimientos y la aparición de bucles. Las partidas 10 y 11 evidencia un cambio en la decisión de los movimientos y nuevamente la aparición de bucles, pero como se muestra en la partida 17 y 18 tal cambio tiene efecto al lograr resolver el problema. La mejora continua a medida que transcurre el juego es evidencia de que la práctica deliberada genera aprendizaje (Mayer, 2014).

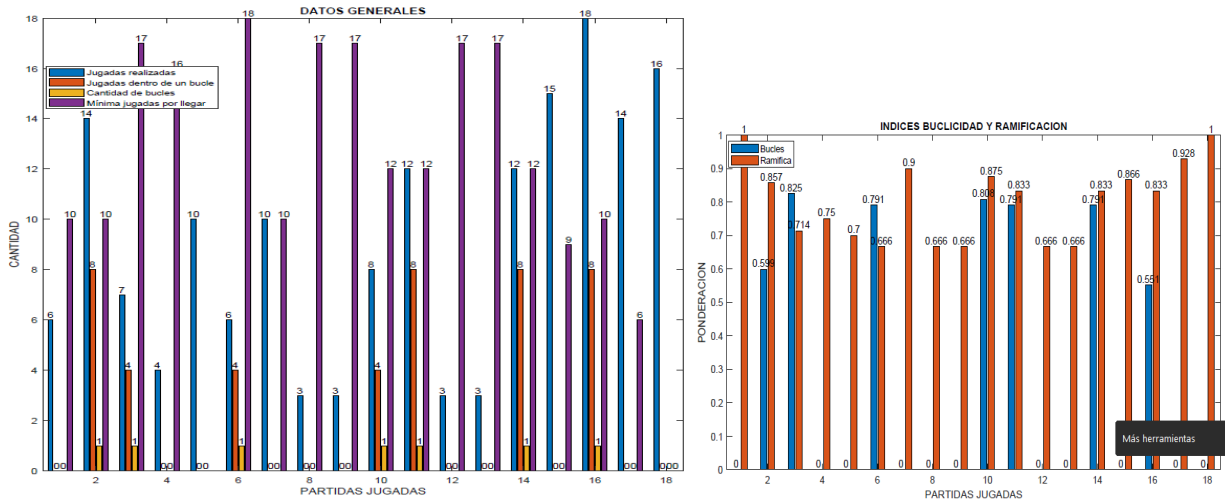


Figura 5.8: Sujeto 2 datos generales.

En la Figura 5.5 se representa la evolución de las partidas realizadas por el sujeto, de la información es posible inferir tanto los errores como los aciertos de las decisiones tomadas. a continuación, se analiza las partidas contrastando los datos generales con los índices de Buclicidad, Ramificación y expresiones tanto verbales como no verbales siguiendo las categorías propuestas por la autora Ellis (2007).

Categoría de relación:

- Partida 1: El índice de buclicidad es cero dado que el sujeto no ingresó a un bucle, realizó 6 movimientos faltando 10, dado que la suma es 16 significa que no cometió errores por tanto el índice de Ramificación es 1.

  Expresiones verbales: Dice al final de la partida “qué pasó” al darse cuenta que en la página web se pueden comer las fichas.

  Expresiones no verbales: sonríe y estira la boca cuando se detiene a pensar un movimiento.

- Partida 2: La mitad de los 14 movimientos realizados más 1 se realizaron dentro de un bucle, además falta más de la mitad de movimientos por resolver el problema; por tanto, el índice es mayor a 0.5. Al ingresar a un bucle y faltarle 10 pasos por llegar después de haber

dado 14, supera los 16 mínimo; el índice de Ramificación no llega al mejor valor de 1.

Expresiones verbales: no realiza.

Expresiones no verbales: no realiza.

- Partida 3: El sujeto ingresó a un bucle donde más de la mitad se encuentran dentro de un bucle y la cantidad de pasos por llegar es superior a los 16 mínimos; por tanto, el índice de buclicidad es el más alto en comparación a las demás partidas. El índice de ramificación también es alto dado que ingresó a un bucle y se alejó bastante de la solución.

  Expresiones verbales: continuamente repite las palabras “este acá”, “este lo ponemos acá”, “volvimos a empezar”, al final de la partida dice “no, otra vez”.

  Expresiones no verbales: Se mantiene concentrado en la pantalla.

- Partida 4: No ingreso a un bucle, solo realizó 4 movimientos, el índice de ramificación es menor a 1 mostrando que realizó movimientos erróneos.

  Expresiones verbales: busca mover una ficha negra y dice “y ya no se pueden hacer más movimientos”.

  Expresiones no verbales: se lleva las manos a la boca y se reclina a la izquierda.

- Partida 5: No ingreso a un bucle, solo realizó 5 movimientos, el índice de ramificación es menor a 1 mostrando que realizó movimientos erróneos. No aparece dato de movimientos mínimos para resolver el problema dado que llegó a una posición del tablero donde no se puede hacer movimientos.

  Expresiones verbales: genera un sonido sin abrir la boca similar a “jujurujuju” al tratar de mover una ficha negra, dice “y ahora como lo muevo” al percatarse que se cerró el juego.

  Expresiones no verbales: Se lleva la mano a la boca cuando se percata que se cerró el juego.

- Partida 6: El sujeto ingresó a un bucle donde más de la mitad se encuentran dentro de un bucle y la cantidad de pasos por llegar es de 18, siendo superior a los 16 mínimo; por tanto, el índice de buclicidad es el más alto en comparación a las demás partidas. El índice de ramificación también es alto dado que ingresó a un bucle y se alejó bastante de la solución.

Expresiones verbales: Al empezar el juego dice reiteradamente “comencemos” y luego “esta”, cuando se come una de las fichas dice “Nooo”.

Expresiones no verbales: cuando se come una de las fichas se lleva la mano a la boca.

Promedio de los índices de las partidas de relación:

Promedio de índice de Ramificación: 0.762

Promedio de índice de Buclicidad: 0.369

En la categoría de relación el sujeto se encuentra en proceso de entender el juego, por tanto, realiza pocos movimientos. El sujeto logra identificar particularidades como que es posible realizar bucles, evidenciado en la partida 3 cuando dice “volvimos a empezar” y en la partida 5 cuando se percata que el juego se puede cerrar, evidenciado por la frase que dice “y ahora como lo muevo”

Categoría de búsqueda:

- Partida 7: No ingreso a un bucle, realizó y le faltaron por realizar 10 movimientos que al sumarse son 20 siendo superiores a los 16 mínimos; por tanto, algún movimiento no fue acertado y el índice de Ramificación es menor a 1.

  Expresiones verbales: el sujeto ubica las fichas en la mitad de los lados del tablero y dice “listo”.

  Expresiones no verbales: se propone ubicar las fichas en las esquinas del tablero y al darse cuenta que no es posible dice “No” de manera prolongada y luego dice “no se puede hacer ningún movimiento”.

- Partida 8 y 9: No ingreso a un bucle. Solo realizó 3 movimientos con algunos erróneos.

  Expresiones verbales: dice “algo así”.

  Expresiones no verbales: se reclina hacia atrás cuando no consigue ubicar las fichas en la posición deseada.

- Partida 10: Ingresó a un bucle donde la mitad de los movimientos se realizaron dentro de un

bucle y faltaron 12 movimientos por resolver el juego por tal motivo el índice de buclicidad es alto. Realizó 8 movimientos y le faltaron 12 que al sumarse son 20, siendo superiores a los 16 mínimos; por tanto, algún movimiento no fue acertado y el índice de Ramificación es menor a 1.

Expresiones verbales: dice “Listo” al ubicar las fichas en los centros de los lados del tablero, reiteradamente dice “este se puede acá”, la apersona que lo acompaña le pregunta “qué estás haciendo” él responde “no sé, lo mismo” al ingresar a un bucle

Expresiones no verbales: se reclina constantemente hacia atrás.

- Partida 11: Más de la mitad de los pasos se realizaron dentro de un bucle faltándole 12 pasos por resolver el problema, por tanto, el índice de Buclicidad es alto. De 12 movimientos realizados le faltaron igualmente 12, por tanto, se realizaron movimientos erróneos dado que la suma de los movimientos es 24.

  Expresiones verbales: dice “ahí quedamos” al ubicar las fichas en los centros de los lados del tablero y luego dice “entonces ahí llevamos cuatro”, cuando realiza un bucle dice “otra vez”.

  Expresiones no verbales: al realizar un bucle toca repetidamente y rápidamente la mesa donde está ubicado el computador.

- Partida 12 y 13: El índice de buclicidad es cero dado que el sujeto no ingresó a un bucle. solo realizó 3 movimientos, el índice de ramificación es menor a 1 mostrando que realizó movimientos erróneos.

  Expresiones verbales: el sujeto dice “y otra vez me quede” al terminar la partida 13.

  Expresiones no verbales: el sujeto finaliza la partida 13 reclinándose a la hacia la izquierda.

- Partida 14: Más de la mitad de los pasos se realizaron dentro de un bucle faltándole 12 pasos por resolver el problema por tanto el índice de Buclicidad es alto. De 12 movimientos realizados le faltaron igualmente 12, por tanto, se realizaron movimientos erróneos dado que la suma de los movimientos es 24.

Expresiones verbales: dice “Listo” al ubicar las fichas en los centros de los lados del tablero, dice “otra vez” al realizar un bucle.

Expresiones no verbales: se encuentra concentrado en el juego.

- Partida 15: El índice de buclicidad es cero dado que el sujeto no ingresó a un bucle. De los 15 movimientos realizados se alejó de la solución al faltarle 9, por tanto, el índice de Ramificación es inferior a 1.

  Expresiones verbales: dice repetidamente “no” rápidamente al finalizar la partida.

  Expresiones no verbales: se inclina hacia delante en dirección al monitor cuando termina la partida.

Promedio de los índices de las partidas de búsqueda:
Promedio de índice de Ramificación: 0.774
Promedio de índice de Buclicidad: 0.265
En la categoría de búsqueda se puede encontrar que el sujeto opta por la estrategia de ubicar las fichas en la mitad de los lados del tablero, lo cual hace de manera reiterada buscando la manera de ubicar las fichas en otra posición conveniente. El sujeto logra identificar el momento en el cual realiza un bucle, aun así es posible identificar que el índice de buclicidad es inferior y el de ramificación es mayor, mostrando así que el sujeto está mejorando.

Categoría de extensión:

- Partida 16: Menos de la mitad de los movimientos totales se realizaron dentro de un bucle haciendo que falten 10 movimientos mínimos por resolver el juego, por tanto, el índice de buclicidad es cercano a 0.5. Es la partida con mayor cantidad de movimientos superando los 16 mínimos para resolver el juego, por tanto, se debieron realizar movimientos erróneos generando 10 movimientos de más por resolver el juego.

  Expresiones verbales: el sujeto cuenta los movimientos realizados, además de estar repetidamente diciendo “este acá”, al finalizar la partida dice “está muy confuso”.

Expresiones no verbales: el sujeto se lleva la mano a la boca al finalizar la partida.

- Partida 17: Realizó 14 movimientos sin generar un bucle, aun así, le faltaron 6 movimientos por resolver el juego lo que generó un valor numérico menor a 1 en el índice de Ramificación.
  Expresiones verbales: el sujeto cuenta los movimientos realizados, además de estar repetidamente diciendo “este acá”, al finalizar dice “moví una mal”.
  Expresiones no verbales: se mantiene concentra viendo la pantalla.

- Partida 18: Logró resolver el juego en la cantidad de movimientos mínimo.
  Expresiones verbales: el sujeto cuenta los movimientos realizados, además de estar repetidamente diciendo “este acá”, al resolver el juego se inclina hacia atrás sonriendo.
  Expresiones no verbales: continuamente aprieta los labios hacia atrás.

Promedio de los índices de las partidas de extensión:
Promedio de índice de Ramificación: 0,920
Promedio de índice de Buclicidad: 0.187
En la categoría de extensión se evidencia como el sujeto logró encontrar diferentes posiciones de las fichas en el tablero, los cuales le fueron de utilidad para lograr trazar un trayecto que culminó en la solución del juego. El sujeto consigue lograr valores altos de ramificación en comparación con las anteriores categorías, además de disminuir el índice de buclicidad mostrado mejoría en la toma de decisiones.

Análisis del sujeto 2:

El segundo sujeto realizó 18 partidas logrando resolver el juego sin movimientos de más e ingresó a 7 bucles en las partidas 2, 3, 6, 10, 11, 14 y 16. De las categorías propuestas por la autora Ellis (2007), se puede identificar que el sujeto paulatinamente mejoró en el proceso de resolver el juego al evidenciarse un aumento de los valores del índice de Ramificación, además, el sujeto consigue disminuir el valor del índice de buclicidad lo que produce que tenga movimientos cada vez más

acertados. La práctica deliberada es visible al momento de buscar organizar las fichas en un patrón en el tablero que le sea más beneficioso, lo cual lo consigue a medida que van pasando las partidas (Mayer, 2014). El sujeto logra percatarse de la repetición de la ubicación de las fichas en el tablero, por tanto, es capaz de generar un modelo mental del juego al abstraer particularidades que le sean de beneficio (Freudenthal, 1993).

La carta de consentimiento de uso de imágenes y video, la tabla de observador y video de las partidas realizadas, se puede encontrar en el siguiente enlace:

`https://drive.google.com/drive/folders/1GfyHfdB1AF38X_n2igBe3f-9eu430roa?usp=sharing`

Sujeto 3

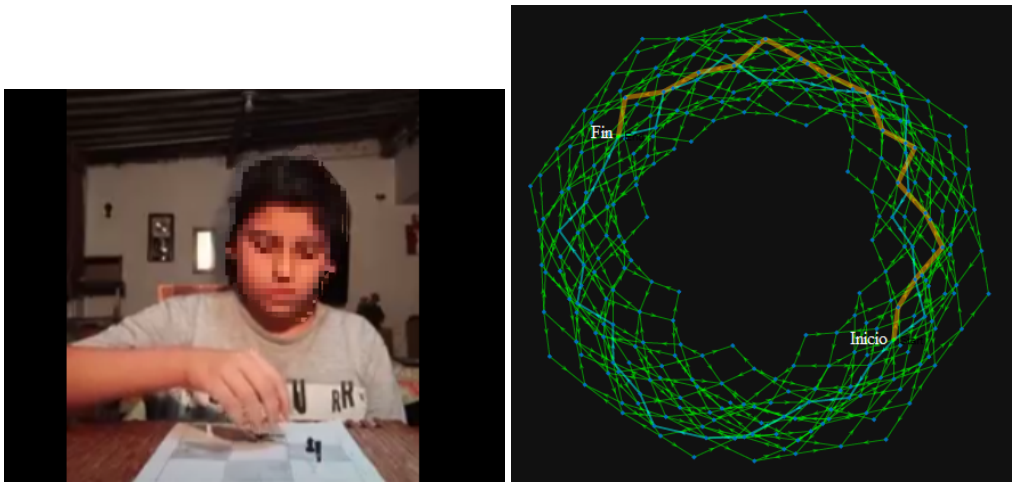


Figura 5.9: Sujeto 3 consolidado de partidas.

El sujeto 3 es de género masculino, tiene 11 años de edad, utiliza un tablero realizado en una hoja de papel y fichas de un juego de ajedrez, la actividad la realiza en la casa que habita y dura 5 minutos con 40 segundos. El sujeto realizó tres partidas, en la Figura 5.9se evidencia un camino amarillo que representa la solución del juego, la partida inicial de color rojo y la intermedia de color naranja no aparecen en la figura debido a que el sujeto realizó los mismo movimientos iniciales. El sujeto optó por la estrategia de ir construyendo la respuesta a medida que transcurren las partidas, matematiza el juego evidenciando que es posible intentar reiteradamente los mismos movimientos (Freudenthal, 1968).

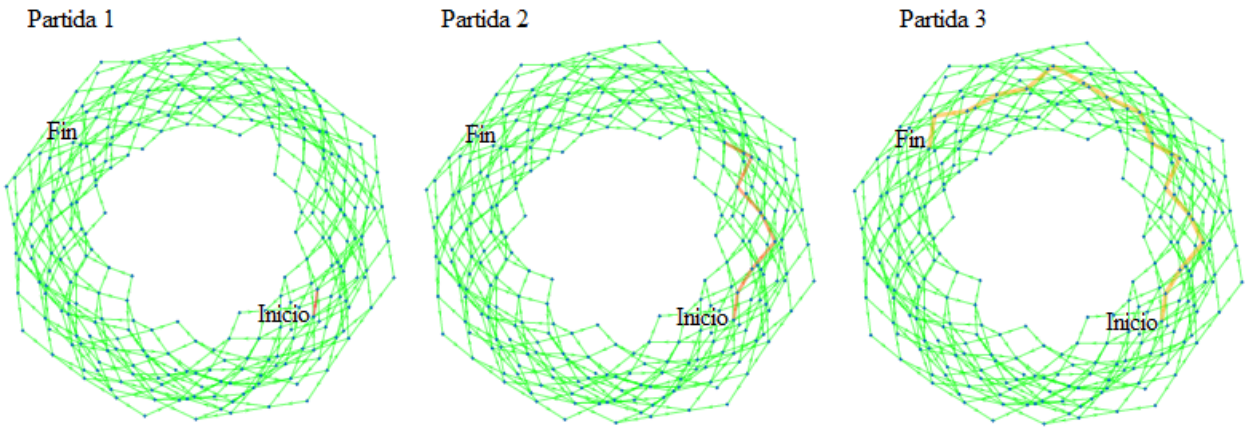


Figura 5.10: Sujeto 3 partidas.

Las partidas realizadas por el sujeto 3 Figura 5.4, muestran que el sujeto realizó un reconocimiento del juego en las dos primeras partidas, en las que realizó una cantidad de movimientos inferior a los 16 necesarios. El hecho de haber usado los primeros movimientos iniciales de manera similar es seña de iniciar el juego con una estrategia meditada antes de realizar los movimientos. La partida final muestra que realizó los movimientos siguiendo la trayectoria indicada, por tanto, le fue de utilidad los movimientos planteados en las primeras partidas. El proceso de práctica deliberada se genera mediante la reflexión de los movimientos a realizar y no tanto en la prueba y error de los mismos (Mayer, 2014).

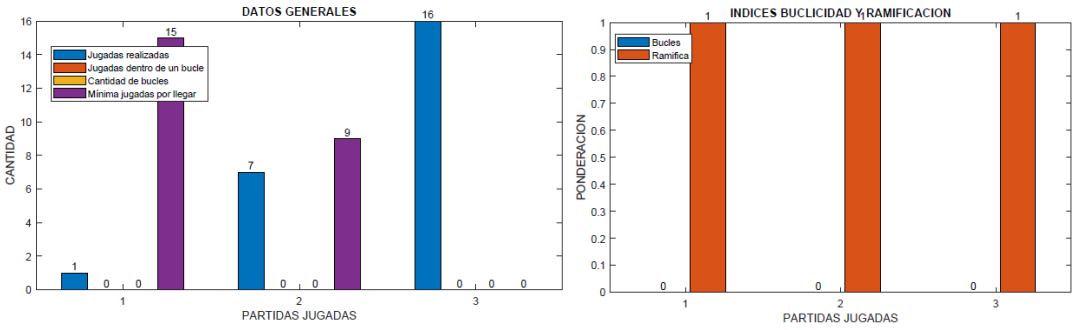


Figura 5.11: Sujeto 3 datos generales.

En Figura 5.5 se evidencia información de la evolución de las partidas y lo acertado de las decisiones tomadas por el sujeto. Se pretende realizar un análisis en base a las categorías plateadas por la autora Ellis (2007) contrastando los datos generales con los índices de Buclicidad y Ramificación, además de la descripción de las expresiones verbales y no verbales de los sujetos:

Categoría de relación:

- Partida 1: Solo se realizó un movimiento, del cual no es suficiente para entrar en un bucle o generarse un mal movimiento, debido a que el primer movimiento siempre es acertado.
  Expresiones verbales: no realiza.
  Expresiones no verbales: el sujeto se muestra sereno y concentrado en el tablero y los movimientos propuestos.

La partida se puede interpretar como un proceso necesario para entender el juego, meditar sobre el mismo se considera un proceso de interiorización y generación de un modelo mental del juego.
Promedio de los índices de las partidas de relación:
Promedio de índice de Ramificación: 1
Promedio de índice de Buclicidad: 0

Categoría de búsqueda:

- Partida 2: Se realizan 7 movimientos acertados sin ingresar a un bucle, por tanto, el índice de buclicidad es cero y al ser la suma de los 7 movimientos con los 9 restantes para resolver el juego igual a 16, muestra que no se realizaron movimientos erróneos.
  Expresiones verbales: no realiza.
  Expresiones no verbales: el sujeto gira levemente la boca hacia el lado izquierdo del rostro y en ocasiones con la mano respaldada sobre la mesa toca con el dedo rápidamente y de manera repetida el tablero.

Promedio de los índices de las partidas de relación:
Promedio de índice de Ramificación: 1
Promedio de índice de Buclicidad: 0
El sujeto en esta categoría en repetidas ocasiones reflexiona sobre los movimientos a realizar y lo expresa de manera no verbal al realizar una acción de meditación. El tratar de interiorizar y meditar representa una búsqueda de generar modelos mentales que matematizan el juego y permiten generar pronósticos sobre las mejores jugadas. El sujeto logra una ponderación de 1 en el índice de Ramificación y cero en Buclicidad sin llegar a resolver el juego, por tanto, la estrategia de meditar los movimientos le resulta útil.

Categoría de extensión:

- Partida 3: Resuelve el juego en la cantidad de movimientos mínimo.
  Expresiones verbales: al finalizar el juego dice “terminé”.
  Expresiones no verbales: el sujeto toca las fichas de manera prolongada y frecuentemente lleva las manos a la cara.

Promedio de los índices de las partidas de relación:
Promedio de índice de Ramificación: 1
Promedio de índice de Buclicidad: 0

En la última categoría el sujeto como en las anteriores realiza los movimientos con valores de 1 en ramificación y de 0 en buclicidad, que se consideran valores perfectos. En esta ocasión el sujeto se arriesga a realizar más movimientos en comparación a las anteriores partidas. La decisión del sujeto de ser reflexivo y pronosticar los mejores movimientos le resulta útil.

Análisis del sujeto 3:

El tercer sujeto realizó 3 partidas logrando resolver el juego sin movimientos de más. En ninguna de las partidas ingreso a un bucle. El sujeto muestra que la estrategia plateada le permite no repetir estados dentro del tablero, además de evidenciarse una mejora creciente al cada vez usarse más movimientos convergiendo en la solución correcta del juego. A partir de las categorías propuestas por la autora Ellis (2007), se puede resaltar que el proceso de generalización se produce gracias a la reflexión realizada por el sujeto en algunos movimientos; esto se evidencia en las expresiones no verbales del sujeto en las cuales predecir los movimientos es prioritario. La matematización del juego es el proceso de abstracción que realiza el sujeto y por tanto un resultado de la práctica deliberada que no solo se presenta cuando el sujeto realiza los movimientos, sino cuando este genera un modelo mental que le permite tomar decisiones acertadas como lo corrobora el índice de Ramificación (Freudenthal, 1968)(Mayer, 2014).
La carta de consentimiento de uso de imágenes y video, la tabla de observador y video de las partidas realizadas, se puede encontrar en el siguiente enlace:
`https://drive.google.com/drive/folders/11S1FyBWTt1LiEXXPEwiFMgcurBUj_f5m?usp=sharing`

Sujeto 4

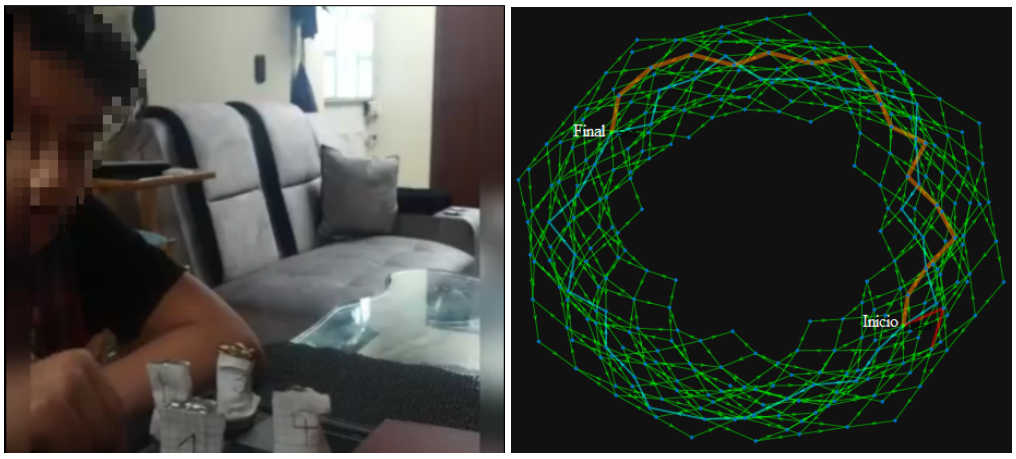


Figura 5.12: Sujeto 4 consolidado de partidas.

El sujeto 4 es de género masculino, tiene 9 años de edad, realiza la actividad en la casa que habita utilizando un tablero de ajedrez al que se le ha dejado visible un tablero de 3x3, además se utilizan los caballos los cuales han sido numerados. El sujeto realizó 2 partidas como se puede ver en la Figura 5.12; la primera de color rojo se considera una partida de práctica o de conocimiento del juego, generalmente el sujeto medita por tiempo prolongado construyendo un modelo mental que sea útil para generar una estrategia, la siguiente partida de color amarillo y también la final muestra que el sujeto genera un proceso de matematización del juego. El proceso de abstracción que realiza el jugador es suficiente para hacerse una idea de las características relevantes del juego y por tanto generar un modelo del mismo (Freudenthal, 1968).

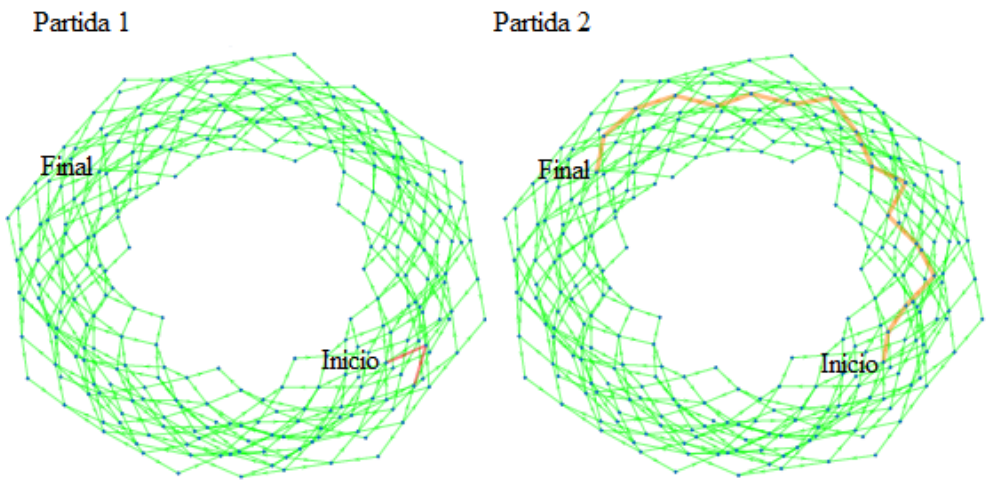


Figura 5.13: Sujeto 4 partidas.

La práctica deliberada en el sujeto genera el conocimiento suficiente para resolver el juego. La primera partida muestra 2 movimientos, el primero siempre es acertado y en el segundo el sujeto se aleja de la solución al evidenciarse una forma de “V”. La segunda partida muestra que el sujeto resuelve el problema en la cantidad mínima de movimientos al generarse una trayectoria de color amarillo en dirección contraria a las manecillas del reloj. La práctica genera en el sujeto la necesidad de reflexionar y de pensar en posibles movimientos evaluados de manera mental, los cuales son útiles al predecir cuáles serán los mejores movimientos (Anderson y Schunn, 2000).

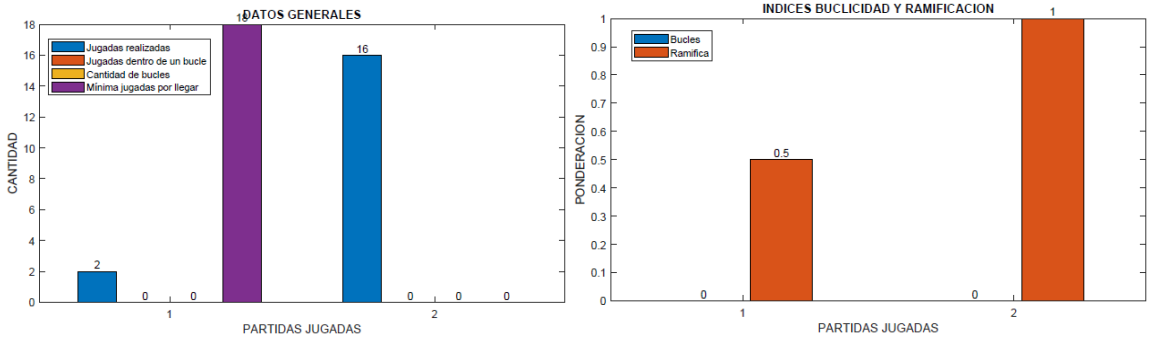


Figura 5.14: Sujeto 4 datos generales.

La información de la Figura 5.14 es útil en la inferencia de aspectos claves en el proceso de razonamiento del sujeto. Además de la relación con instancias particulares en el análisis del video que plasma los sucesivos movimientos realizados. A continuación, se realizará un análisis de cada partida contrastando los datos generales con los índices de Buclicidad y Ramificación, una descripción de las expresiones verbales y no verbales del sujeto, además se clasificarán de acuerdo a las categorías propuestas por la autora Ellis (2007):

Categoría de relación:

- Partida 1: El índice de buclicidad es cero dado que el sujeto no ingresó a un bucle. El índice de ramificación es de 0.5 mostrando que realizó un movimiento acertado y otro no.
  Expresiones verbales: al percatarse de que realizó un mal movimiento dice “puedo volver a empezar”.
  Expresiones no verbales: El sujeto toca de manera prolongada las fichas y medita las jugadas.

Promedio de los índices de las partidas de relación:
Promedio de índice de Ramificación: 0.5
Promedio de índice de Buclicidad: 0
La categoría de relación es visible en cuanto el sujeto realiza proyecciones mentales de las mejores jugadas a futuro. Lo anterior es visible al mostrarse reflexivo y dispuesto a entender el juego.

Categoría de búsqueda y extensión:

- Partida 2: Logro resolver el juego en la cantidad de movimientos mínimo.
  Expresiones verbales: no realiza.
  Expresiones no verbales: El sujeto se muestra confiado al realizar los movimientos.

Promedio de los índices de las partidas de búsqueda y extensión:

Promedio de índice de Ramificación: 1

Promedio de índice de Buclicidad: 0

En esta partida el jugador logra resolver el juego, mostrando que el sujeto fue lo suficientemente hábil para abstraer del juego aquellas características relevantes. Las categorías de búsqueda y extensión se evidencian en la reflexión y modelos mentales del juego.

Análisis del sujeto 4:

El cuarto sujeto realizó 2 partidas logrando resolver el juego sin movimientos de más. En ninguna de las partidas ingreso a un bucle. De las categorías propuestas por la autora Ellis (2007), es posible encontrar que el proceso de generalización se basa en un proceso de reflexión y de un modelo mental del juego, esto es evidenciado cuando el sujeto toca una ficha de manera prolongada mirando fijamente el tablero. La práctica deliberada se evidencia en el aumento del valor del índice de ramificación (Anderson y Schunn, 2000). El proceso de matematización que el sujeto logra desarrollar del juego consiste la abstracción de particularidades del juego en base a la meditación de los movimientos (Freudenthal, 1993).

La carta de consentimiento de uso de imágenes y video, la tabla de observador y video de las partidas realizadas, se puede encontrar en el siguiente enlace:

`https://drive.google.com/drive/folders/1LCNVYft6b_rNJKNuDpicqt0r9AyKMe2j?usp=sharing`

Sujeto 5

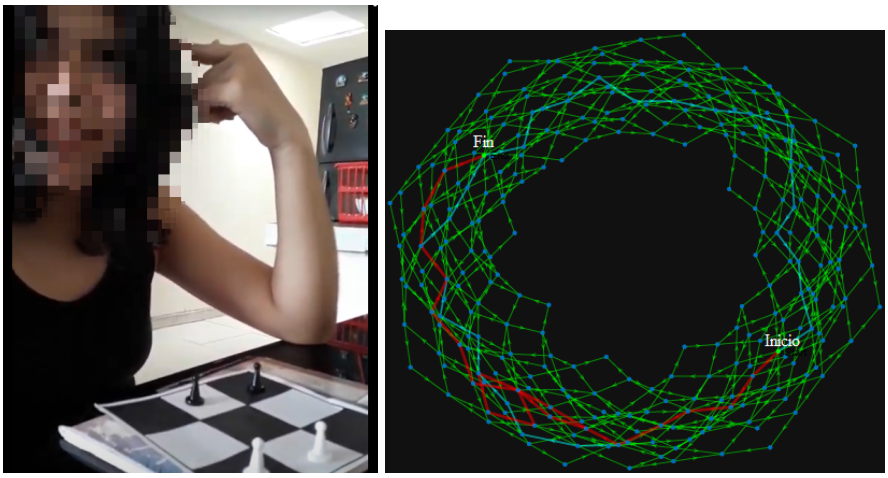


Figura 5.15: Sujeto 5 consolidado de partidas.

El sujeto 5 es de género femenino, tiene 12 años de edad, utiliza un tablero impreso en una hoja de papel y fichas de un juego de ajedrez, la actividad la realiza en la casa que habita y dura 4 minutos con 23 segundos. El sujeto realizó una partida, en la Figura 5.15 se evidencia que el sujeto generó un trayecto con los primeros 8 movimientos de manera adecuada y replanteó las decisiones tomadas al mover las fichas. El hecho de que halla resuelto el problema, significa que a mitad del juego en la parte que muestra la figura como enredada; el sujeto tomó un momento de reflexión al encontrar alguna situación que no le permite resolver el problema. El proceso de matematización del juego realizado por el sujeto y el haberlo resuelto en una partida, es muestra de que le fue posible generar un modelo mental adecuado del juego (Freudenthal, 1968).

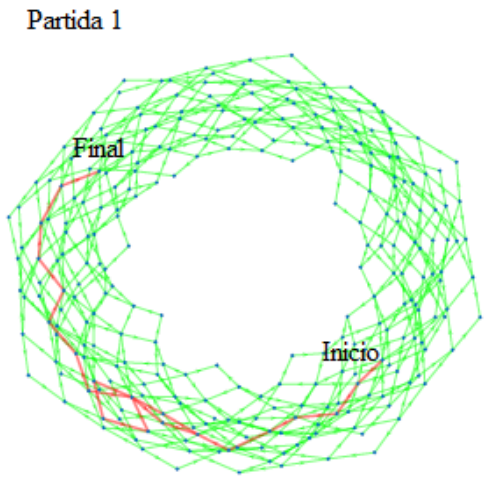


Figura 5.16: Sujeto 5 partidas.

La práctica deliberada planteada por el autor Mayer (2014) se evidencia en el sujeto al generarse dos bucles y aun así lograr resolver el juego. El proceso de aprendizaje a través de la práctica toma lugar a medida que el juego se desarrolla. De la imagen 5.16 se puede interpretar que los primeros movimientos son acertados, pero a mitad del mismo surge alguna situación que fue remediada. La Figura 5.17 se encuentra información en general de los movimientos realizados

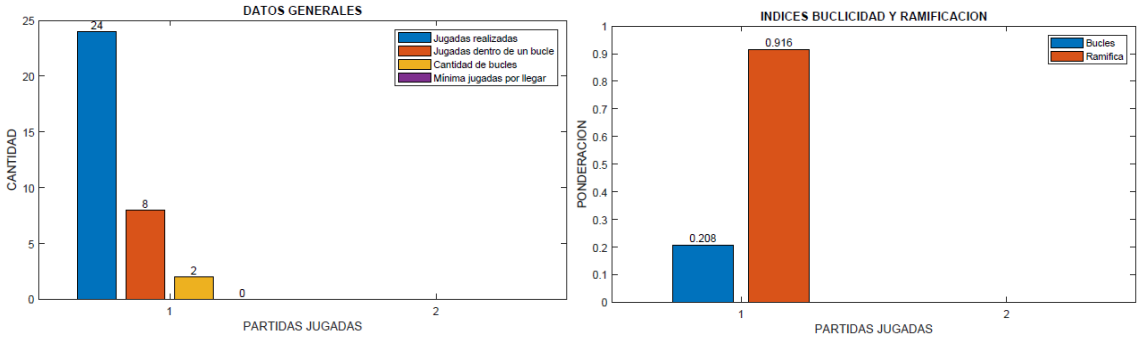


Figura 5.17: Sujeto 5 datos generales.

durante la única partida. Se pretende realizar un análisis en base a las categorías plateadas por la autora Ellis (2007) contrastando los datos generales con los índices de Buclicidad y Ramificación, además de la descripción de las expresiones verbales y no verbales de los sujetos:

Categoría de relación, búsqueda y extensión:

- Partida 1: El sujeto ingresó a 2 bucles con 8 movimientos, los cuales representan menos de la mitad de los movimientos y dado que logró resolver el ejercicio el índice de Buclicidad es de 0.2 menos de la mitad. Por tanto, el haber repetido estados en el tablero incidió poco en la solución del juego. El hecho de haber ingresado a dos bucles significa que realizó movimientos erróneos los cuales se ven reflejados en el índice de ramificación levemente menor a 1.

  Expresiones verbales: el sujeto realiza expresiones verbales a lo largo de la solución de la partida, para recordar la alternancia en el color de las fichas continuamente menciona la frase “sigue el blanco” o “sigue el negro”, es de resaltar que el sujeto dice “voy a tratar de realizarlo así a ver si de pronto”, también identifica que realizó un bucle al decir “me toco volver a cuadrarlo todo”, al finalizar el juego dice “a ya”.

  Expresiones no verbales: usa de manera continua el dedo índice para proyectar la siguiente jugada, es de resaltar que hace visible la estrategia de girar las fichas en sentido antihorario, además de decir esta continuamente “esta aquí y esta aquí”.

Promedio de los índices de las partidas de relación, búsqueda y extensión:
Promedio de índice de Ramificación: 0.916
Promedio de índice de Buclicidad: 0.208
El sujeto realiza los procesos de categorización en una partida, los movimientos iniciales los realiza con tranquilidad, para luego encontrarse con una situación adversa que le obliga a meditar el juego y por tanto culminar un proceso de relación y extensión. Después de percatarse que ingresa a un bucle, el sujeto genera una estrategia al realizar con la mano un movimiento en circulo y dar a entender que va a girar las fichas en sentido antihorario. Los índices corroboran el hecho de haber ingresado al bucle y la afectación que este tiene en el índice de Ramificación al ser inferior a 1.

Análisis del sujeto 5:

El quinto sujeto realizó 1 partida logrando resolver el juego usando 8 movimientos más, adicionalmente ingresó a 2 bucles. A partir del proceso de categorización propuesto por la autora Ellis (2007), el sujeto consigue resolver el juego mostrando que realiza el proceso de generalización en base a proyectar mentalmente las jugadas siguientes y proponer la estrategia de solución; lo anterior se sustenta en el hecho que las expresiones tanto verbales como no verbales lo evidencian. La práctica deliberada y el proceso de matematización el sujeto la obtiene a medida que se desarrolla la partida, el sujeto logra abstraer características del juego que le permiten aprender del mismo y generar un modelo mental (Freudenthal, 1993) (Anderson y Schunn, 2000). La carta de consentimiento de uso de imágenes y video, la tabla de observador y video de las partidas realizadas, se puede encontrar en el siguiente enlace:

`https://drive.google.com/drive/folders/`
`1zVOghrk8y2eHNeOIzbOe50KK5lp9IlPg?usp=sharing`

Sujeto 6

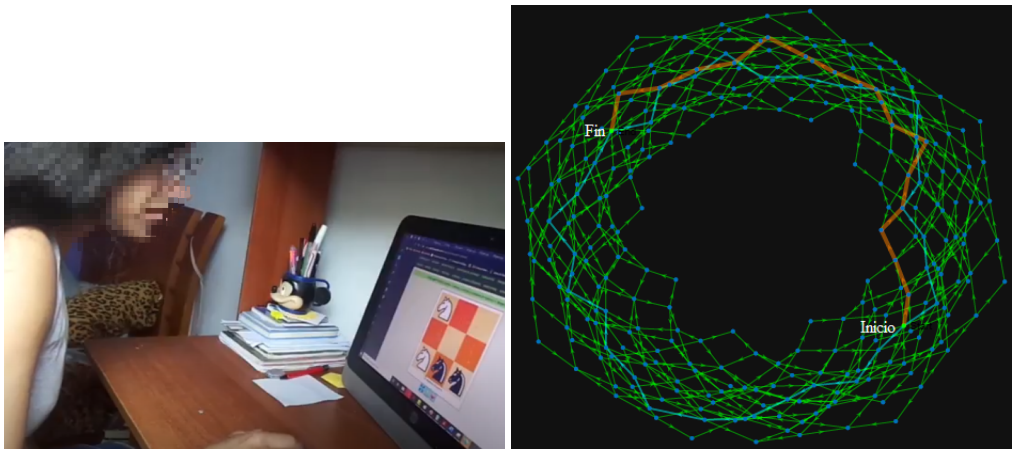


Figura 5.18: Sujeto 6 consolidado de partidas.

El sujeto 6 es de género femenino, tiene 13 años de edad, realiza la actividad en un computador en la casa que habita tardando 4 minutos y medio. Usa una página web que le permite generar los movimientos deseados e iniciar nuevamente de manera automática. El sujeto realizó dos partidas como se puede apreciar en la Figura 5.18, además es posible encontrar un solo recorrido debido a que los dos realizados son iguales; lo que muestra que el sujeto resolvió una vez el juego y constató el haber entendido el problema resolviéndolo nuevamente. La matematización del problema se construye a medida se realizan los movimientos, el haber resuelto el problema dos veces muestra la efectividad del modelo mental construido (Freudenthal, 1968).

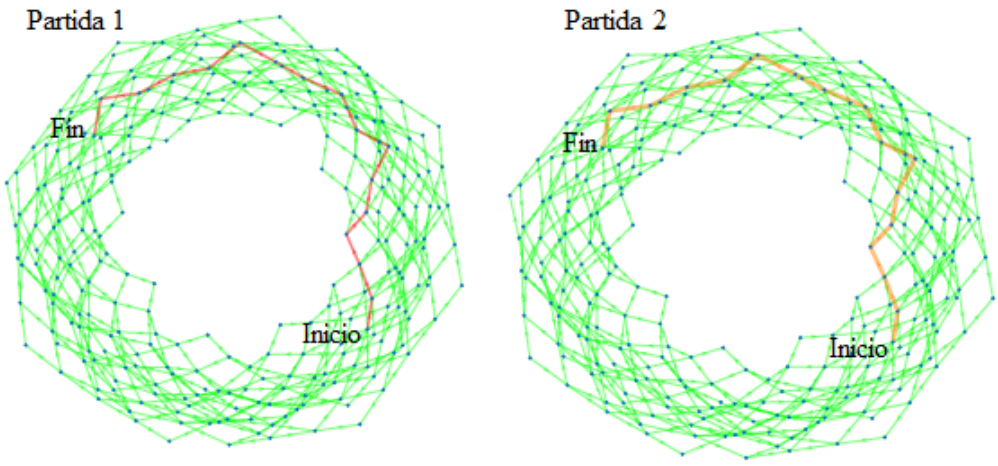


Figura 5.19: Sujeto 6 partidas.

La práctica deliberada es construida a partir de los movimientos, no de las partidas ya que el problema es resuelto en la primera partida. La práctica deliberada realizada por el sujeto se basa en la meditación de los posibles movimientos a realizar, por tanto, el plantearse modelos mentales es una fuente de práctica y generadora de aprendizaje. La partida 2 representa el éxito que tiene la estrategia planteada por el sujeto y la prueba de su posible replica; ya que es difícil que el sujeto halla memorizado los movimientos de una partida otra de manera consecutiva (Mayer, 2014). La

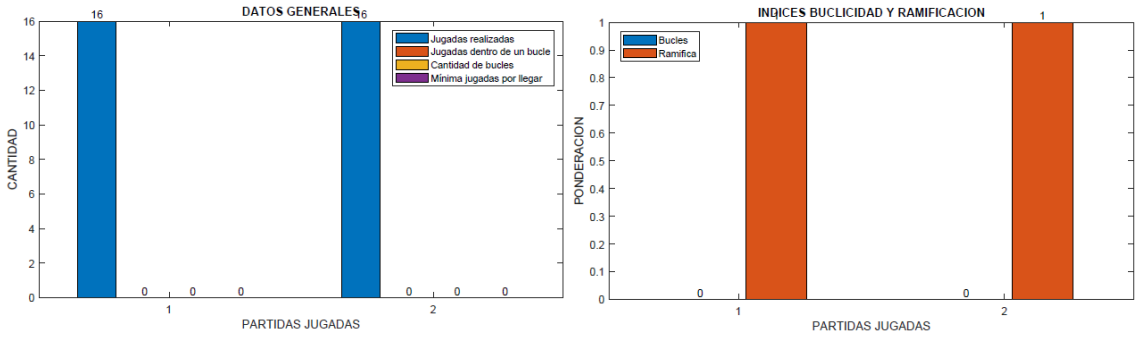


Figura 5.20: Sujeto 6 datos generales.

información de la Figura **??** es necesaria en la inferencia de aspectos claves en el proceso de razonamiento del sujeto. Además de la relación con aspectos particulares en el análisis del video.

A continuación, se realizará un análisis de las dos partidas contrastando los datos generales con los índices de Buclicidad y Ramificación, una descripción de las expresiones verbales y no verbales del sujeto, además se clasificarán de acuerdo a las categorías propuestas por la autora Ellis (2007):

Categoría de relación, búsqueda y extensión:

- Partida 1 y 2: El sujeto no ingreso a algún bucle por tanto el índice de buclicidad es nulo. Todos los movimientos se realizaron de manera adecuada por tanto el índice de Ramificación es de 1.
  Expresiones verbales partida 1: el sujeto constantemente dice “lo pongo acá”, sonríe y mira la persona quien lo graba, al finalizar la partida dice “Ay sí”.
  Expresiones no verbales partida 1: Realiza constantemente gestos con la boca.
  Expresiones verbales partida 2: el sujeto constantemente dice “lo pongo acá”, cuando recuerda lo que realizó en la primera partida dice “ahí ya estaba antes”, también hace descripciones de las posiciones de las fichas diciendo “ya recuerdo, queda, así como en cruz y ya los puedo acomodar”.
  Expresiones no verbales partida 2: Realiza constantemente gestos con la boca.

Promedio de los índices de las partidas de relación, búsqueda y extensión:
Promedio de índice de Ramificación: 1
Promedio de índice de Buclicidad: 0
Las dos partidas realizadas se muestran exactamente igual, las categorías se evidencian al realizarse los movimientos. En el caso de las expresiones realizadas por el sujeto es posible dilucidar las decisiones tomadas, ya que algunas las narra; el sujeto busca posiciones particulares y ventajosas que le permitan proyectarse a futuro.

Análisis del sujeto 6:

El sexto sujeto realizó 2 partidas logrando resolver el juego sin movimientos de más. El sujeto no ingresó a algún bucle. Es posible evidenciar de la categorización propuesta por Ellis (2007) que el reconocimiento se realiza superficialmente, no le es difícil identificar las variables relevantes en el juego. En el caso de las categorías de búsqueda y extensión es posible evidenciarlas en la ubicación de los caballos al medio de los bordes del tablero, lo cual le funciona y resuelve dos veces el problema. El proceso de matematización y de práctica deliberada realizado por el sujeto se evidencia al percatarse de la ventaja que se tiene al ubicar las fichas en una posición conveniente (Anderson y Schunn, 2000)(Mayer, 2014).

La carta de consentimiento de uso de imágenes y video, la tabla de observador y video de las partidas realizadas, se puede encontrar en el siguiente enlace:

`https://drive.google.com/drive/folders/1tVlJT_yaeZhBGCRrMaXtk9ILlypvzyu6?usp=sharing`

Sujeto 7

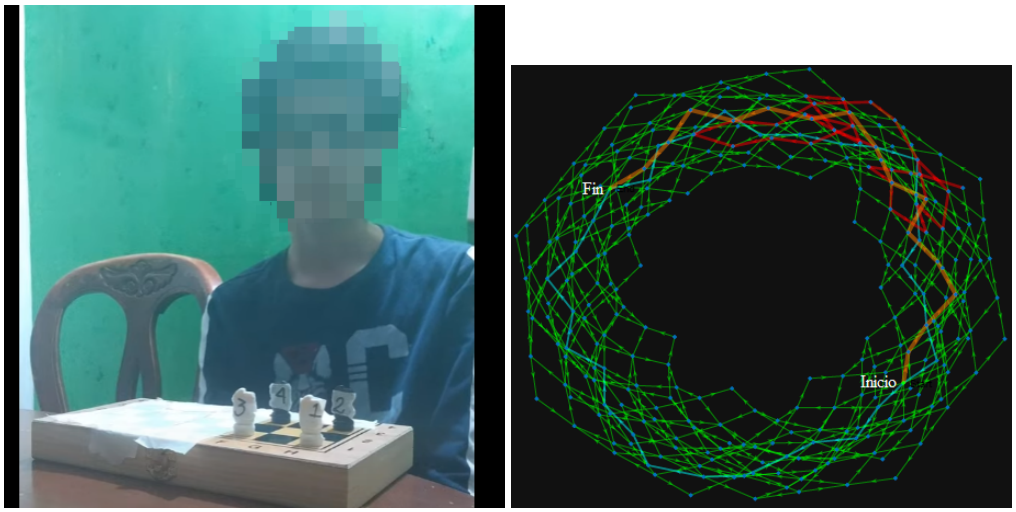


Figura 5.21: Sujeto 7 consolidado de partidas.

El sujeto 4 es de género masculino, tiene 13 años de edad, realiza la actividad en 11 minutos y medio en la casa que habita utilizando un tablero de ajedrez al que se le ha dejado visible un tablero de 3x3, además se utilizan los caballos los cuales han sido numerados. El sujeto realizó 2 partidas como se puede ver en la Figura 5.21; La primera partida de color rojo muestra un enrevesado trazado que se interpreta como una partida de reconocimiento y de planteamiento de estrategias, la segunda partida de color amarillo muestra que el sujeto logró aprender de la primera partida y generar una estrategia de solución del juego efectiva. El proceso de abstracción que realiza el sujeto es suficiente para inferir el mejor camino de solución del juego (Freudenthal, 1968).

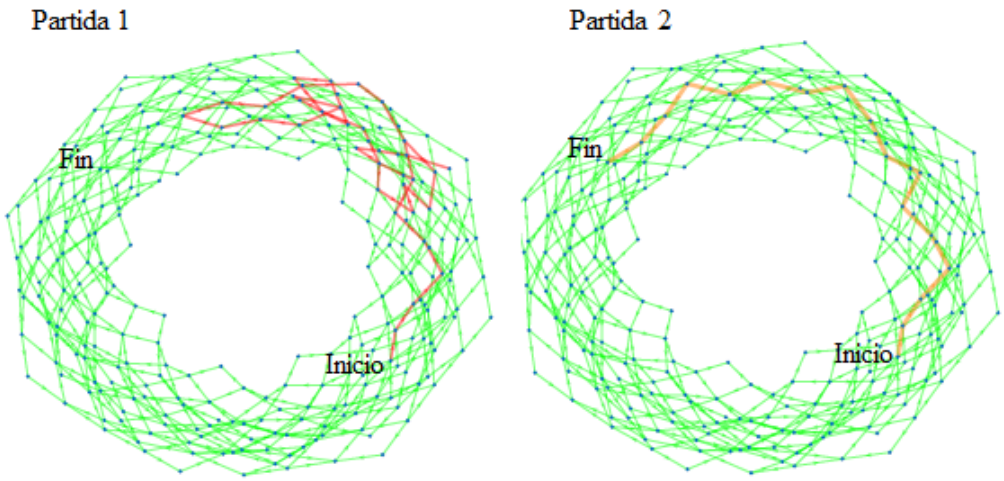


Figura 5.22: Sujeto 7 partidas.

Las partidas realizadas por el sujeto 7 representadas en los grafos dirigidos Figura 5.22, evidencia la práctica realizada por el sujeto la cual es útil para lograr entender las particularidades del juego, además de lograr inferir situaciones que sean ventajosas en el planteamiento de estrategias de solución. En la segunda partida se evidencia que el aprendizaje obtenido de la práctica realizada en la primera partida es suficiente para resolver el juego usando la menor cantidad de movimientos necesarios. La práctica deliberada que ofrece el juego y la pericia del jugador, evidencia el proceso de aprendizaje en el sujeto (Anderson y Schunn, 2000). En la Figura 5.23 se

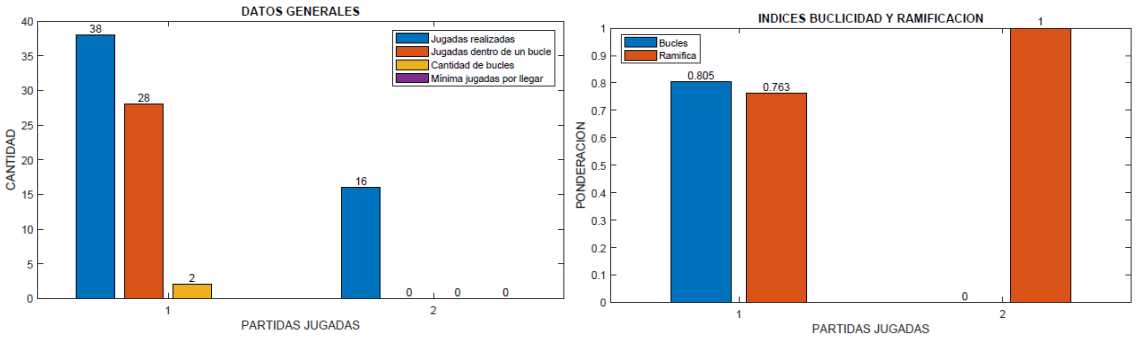


Figura 5.23: Sujeto 7 datos generales.

evidencia información útil al transcurrir las partidas sobre la evolución de las decisiones tomas

por el sujeto. A continuación, se realizará un análisis de cada partida contrastando los datos generales con los índices de Buclicidad y Ramificación, una descripción de las expresiones verbales y no verbales del sujeto, además se clasificarán de acuerdo a las categorías propuestas por la autora Ellis (2007):

Categoría de relación, búsqueda:

- Partida 1: Se realizaron 38 movimientos donde la mayoría se encuentran dentro de uno de dos bucles, además el sujeto no realizó más movimientos dado que el juego no lo permitía. Por tanto, el índice de buclicidad es cercano a 1 evidenciando que el ingreso a los bucles tuvo una alta incidencia en la solución del juego. El ingreso a bucles es muestra que se realizaron movimientos erróneos, esto se evidencia en el índice de ramificación el cual es menor a 1.

  Expresiones verbales: el sujeto continuamente dice “acá”, “este acá”, “el blanco acá”, “el negro acá” o el “caballito aquí”, el sujeto solicita retroceder una jugada, el sujeto dice “se me hace como conocido este movimiento”.

  Expresiones no verbales: el sujeto mantiene llevándose las manos al cabello y a la boca, además se frota las manos.

Promedio de los índices de las partidas de relación y búsqueda:
Promedio de índice de Ramificación: 0.763
Promedio de índice de Buclicidad: 0.805
Es de mencionar en esta partida que el sujeto logra identificar el momento en el cual ingresa a un bucle, las categorías de relación y de búsqueda se evidencia cuando el sujeto pronuncia frases alusivas al juego en cuanto a sus errores y posición de las fichas en el tablero.

Categoría de extensión:

- Partida 2: El sujeto logró resolver el juego con la cantidad mínima de movimientos.

Expresiones verbales: el sujeto continuamente dice “acá”, “este acá”, “el blanco acá”, “el negro acá” o el “caballito aquí”, el sujeto dice “la otra vez me metí por acá y no me fue muy bien, me voy a ir por otra ruta”, el sujeto dice “creo que lo conseguí” al final de la partida. Expresiones no verbales: el sujeto mantiene llevándose las manos al cabello y a la boca, además se frota las manos, al final de la partida se frota las manos.

Promedio de los índices de las partidas de extensión:

Promedio de índice de Ramificación: 1

Promedio de índice de Buclicidad: 0

Es de resaltar de la partida que el jugador identifica posiciones dentro del tablero y logra predecir lo que va a suceder. Los índices de buclicidad son los óptimos, evidenciando el aprendizaje a través de los movimientos realizados.

Análisis del sujeto 7:

El séptimo sujeto realizó 2 partidas logrando resolver el juego sin movimientos de más. El sujeto ingresó a dos bucles de 28 movimientos. Es posible evidenciar de la categorización propuesta por Ellis (2007) que el sujeto utiliza una partida de 38 movimientos; siendo una cantidad considerable en comparación de las 16 mínimas necesarias, las categorías de relación y búsqueda se realiza en la primera partida donde el sujeto conoce el juego y en este caso particular se hace visible el aprendizaje de las posiciones del mismo. En la segunda partida el sujeto se encuentra en la categoría de extensión, el jugador hace referencia constantemente del aprendizaje de la primera partida. El sujeto realiza un proceso de matematización y de práctica deliberada, evidenciada por la primera partida y encuentra su resultado en la segunda, lo anterior es resultado del proceso de abstracción realizado por el sujeto y el aprendizaje generado (Freudenthal, 1968) (Anderson y Schunn, 2000). La carta de consentimiento de uso de imágenes y video, la tabla de observador y video de las partidas realizadas, se puede encontrar en el siguiente enlace:

`https://drive.google.com/drive/folders/`

`1Hw62kOqjCsRe0517kFsrFkZRpEm38KLe?usp=sharing`

Sujeto 8

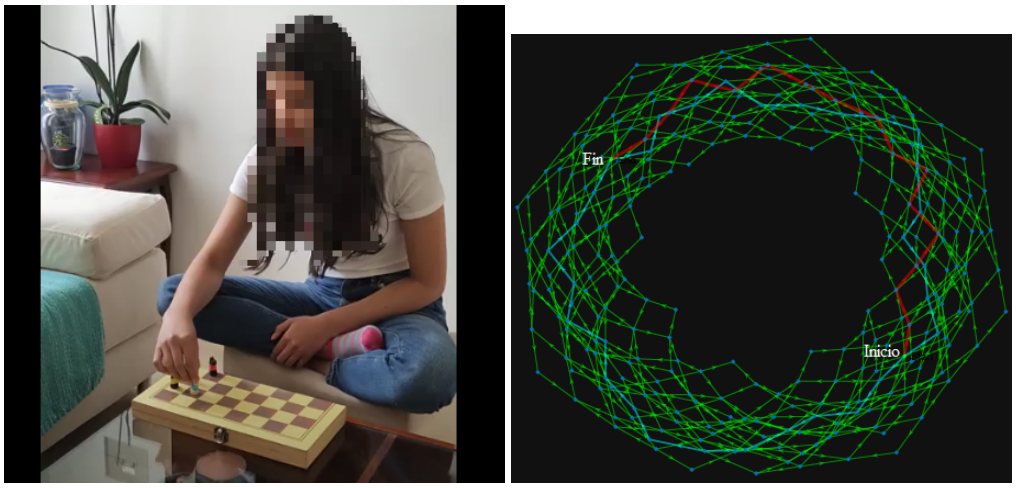


Figura 5.24: Sujeto 8 consolidado de partidas.

El sujeto 8 es de género femenino, tiene 12 años de edad, utiliza un tablero y fichas de ajedrez, la actividad la realiza en la casa que habita y dura 1 minuto con 40 segundos. El sujeto realizó una partida, en la Figura 5.24se evidencia un camino con una respuesta realizada con la cantidad mínima de movimientos, el proceso de abstracción es reflexiva, sin acudir tanto a los movimientos y más a la introspección. El sujeto optó por la estrategia de ir construyendo la respuesta a medida que transcurren los movimientos, matematiza el juego evidenciando que es posible el aprendizaje vía reflexión (Freudenthal, 1968).

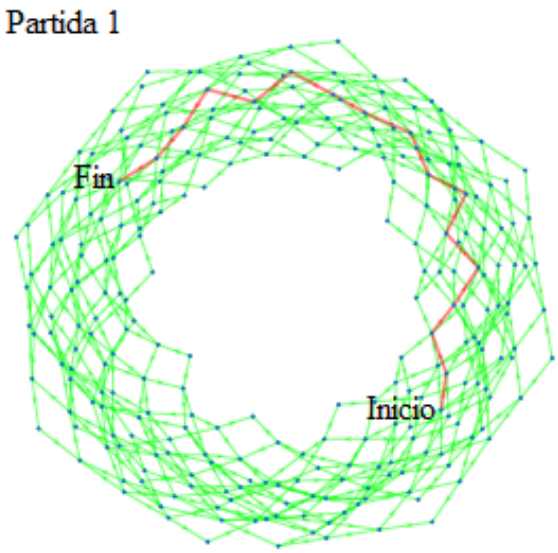


Figura 5.25: Sujeto 8 partidas.

La práctica deliberada es construida a partir de los movimientos realizados por el sujeto, no de las partidas dado su limitado número. La práctica deliberada desarrollada por el sujeto se basa en la reflexión de los posibles movimientos a realizar, por tanto, el plantearse modelos mentales es una fuente de práctica y generadora de aprendizaje (Anderson y Schunn, 2000). En la Figura 5.25 se

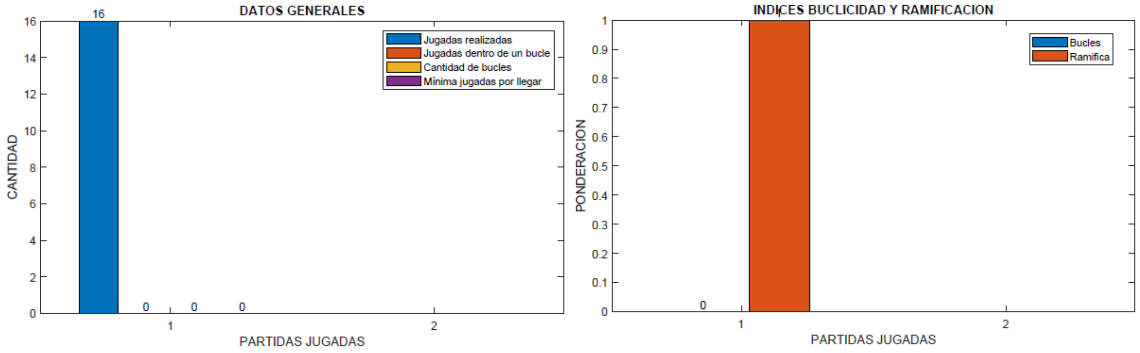


Figura 5.26: Sujeto 8 datos generales.

evidencia información útil al transcurrir las partidas sobre la evolución de las decisiones tomas por el sujeto. A continuación, se realizará un análisis de cada partida contrastando los datos

generales con los índices de Buclicidad y Ramificación, una descripción de las expresiones verbales y no verbales del sujeto, además se clasificarán de acuerdo a las categorías propuestas por la autora Ellis (2007):

Categoría de relación, búsqueda y extensión:

- Partida 1: El sujeto no ingreso a algún bucle por tanto el índice de buclicidad es nulo. Todos los movimientos se realizaron de manera adecuada por tanto el índice de Ramificación es de 1. Expresiones verbales: el sujeto realiza una descripción narrando los movimientos, no menciona nada sobre las estrategias que utiliza.
  Expresiones no verbales: se muestra tranquilo y seguro de cada movimiento.

Promedio de los índices de las partidas de extensión:
Promedio de índice de Ramificación: 1
Promedio de índice de Buclicidad: 0
Los índices muestran que la partida fue correctamente realizada, lo cual se evidencia en las expresiones verbales donde los movimientos se muestran tranquilos y seguros.

Análisis del sujeto 8:

El octavo sujeto realizó 1 partida resolviendo el juego sin movimientos de más, el sujeto no ingresó a ningún bucle. Es posible evidenciar de la categorización propuesta por Ellis (2007) que el sujeto realiza un proceso de generalización, resuelve el juego de manera óptima. El proceso de matematización del juego y de práctica deliberada se logra al resolver el juego en una partida con los mejores índices de Ramificación y de Buclicidad, lo anterior se evidencia en las expresiones tanto verbales como no verbales del sujeto (Freudenthal, 1968) (Anderson y Schunn, 2000).
La carta de consentimiento de uso de imágenes y video, la tabla de observador y video de las partidas realizadas, se puede encontrar en el siguiente enlace:
`https://drive.google.com/drive/folders/`
`1TwwPwd1Ibw75LMbEZoGr2XGC2iCT5-BP?usp=sharing`

Sujeto 9

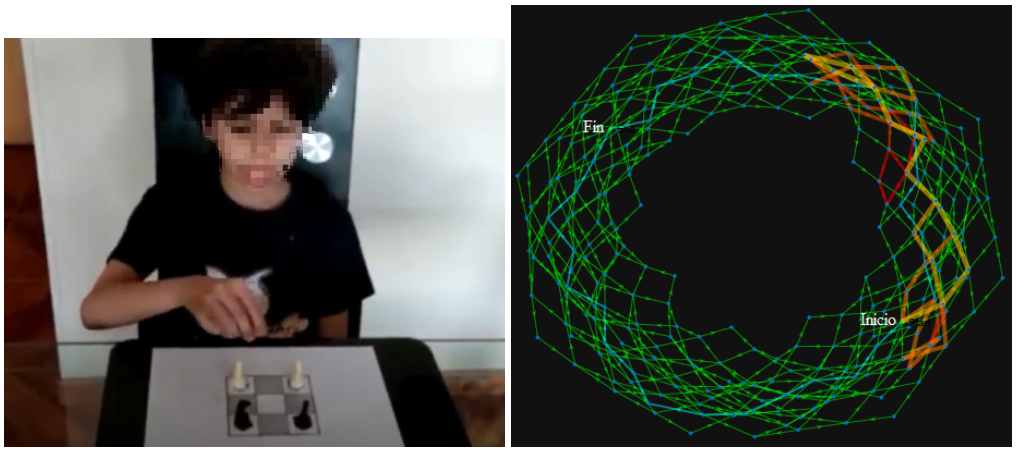


Figura 5.27: Sujeto 9 consolidado de partidas.

El sujeto 9 es de género masculino, tiene 9 años de edad, realiza la actividad en un tablero impreso en una hoja, no logra resolver el juego el cual lo intenta por 19 minutos. El sujeto realizó seis partidas, en la Figura 5.27 se puede evidenciar que el sujeto recorrió el tablero ampliamente en donde las primeras partidas de color rojo debido a ensayo y error estuvo cerca de resolver el problema, en las partidas intermedias de color naranja el sujeto realiza la mayor cantidad de movimientos en comparación con las demás partidas y en las de color amarillo o finales el sujeto es más asertivo con los movimientos pero no logra resolver el juego, por tanto, el sujeto realiza un proceso de matematización, pero prevalece la aleatoriedad de los movimientos y por tanto movimientos faltos de una estrategia concreta (Freudenthal, 1968).

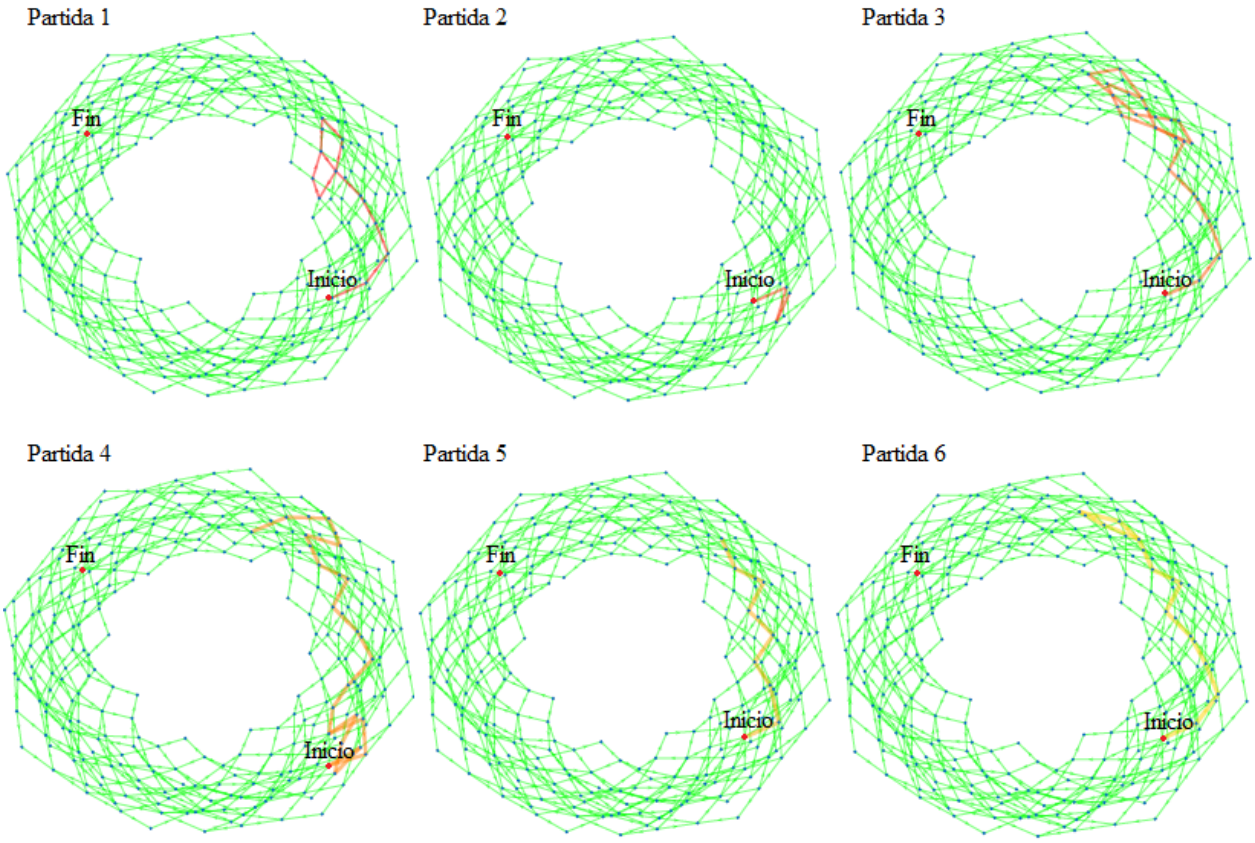


Figura 5.28: Sujeto 9 partidas.

Las partidas realizadas por el sujeto 9 representadas en el grafo dirigido Figura 5.28, muestra en la partida 1 y 2 el aprendizaje de las reglas del juego al ser pocos movimientos y una exploración del tablero, en las partidas 3 y 4 se encuentra que el sujeto explora las particularidades del juego sin llegar a resolverlo, en las partidas 5 y 6 evidencia movimientos más asertivos, pero no llega a la solución. Se encuentra un proceso de práctica deliberada al identificarse en las sucesivas partidas el aprendizaje de las particularidades del juego y mejoramiento continuo, pero no lo suficiente para resolverlo (Anderson y Schunn, 2000).

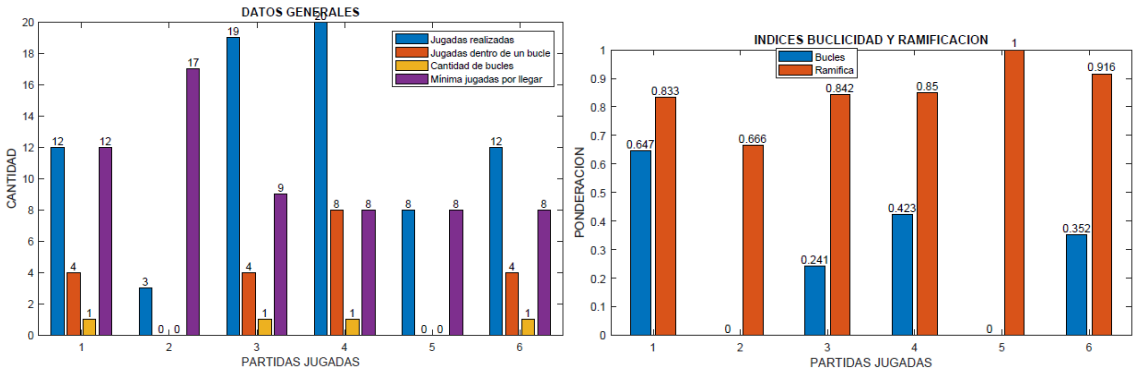


Figura 5.29: Sujeto 6 datos generales.

En la Figura 5.29 se evidencia información útil sobre las decisiones tomadas por el sujeto. A continuación, se realizará un análisis de cada partida contrastando los datos generales con los índices de Buclicidad y Ramificación, una descripción de las expresiones verbales y no verbales del sujeto, además se clasificarán de acuerdo a las categorías propuestas por la autora Ellis (2007):

Categoría de relación:

- Partida 1: El sujeto ingresó a un bucle de 4 movimientos que representa menos de la mitad de los movimientos totales. Aun así, para la cantidad de movimientos totales el sujeto se alejó de la respuesta dada la cantidad de movimientos de 12 para resolver el juego. Por tanto, el índice muestra una ponderación mayor al 0.5 dado que le bucle alejó al sujeto se la respuesta. El hecho de haber ingresado a un bucle implica que se realizó un movimiento erróneo lo que afecta al índice de Ramificación que es inferior a 1.

  Expresiones verbales: al finalizar la partida dice “acá se me cierra la jugada porque, acá no puedo correr, acá no puedo correr y acá no puedo correr”.

  Expresiones no verbales: se muestra tranquilo realizando las jugadas, además las realiza de manera pausada.

- Partida 2: El sujeto no ingresó a algún bucle, por tanto, el índice de buclicidad es nulo. El sujeto realizó 3 movimientos alejándose de la respuesta; ya que el juego se resuelve con 16

movimientos y aumento a 17, por tanto, se realizaron movimientos erróneos afectando al índice de Ramificación siendo menor a 1.

Expresiones verbales: no realiza.

Expresiones no verbales: antes de mover las fichas las toca repetida y rápidamente sobre el tablero.

Promedio de los índices de las partidas de extensión:

Promedio de índice de Ramificación: 0.749

Promedio de índice de Buclicidad: 0.323

En la categoría de relación, el sujeto se encuentra en proceso de reconocer las reglas y características del juego, el sujeto realiza una cantidad alta de movimientos ingresando a varios bucles.

Categoría de búsqueda:

- Partida 3: El sujeto ingresó a un bucle de 4 movimientos que representa menos de un cuarto de los movimientos totales 19, dejando a 9 movimientos mínimos de resolver el juego. Por tanto, el bucle pondera la Buclicidad con un valor bajo. La ramificación es inferior a 1, dado que, al ingresar a un bucle, se realizaron movimientos erróneos.

  Expresiones verbales: no realiza.

  Expresiones no verbales: el sujeto realiza varios movimientos de manera pausada y calmada.

- Partida 4: El sujeto ingresó a un bucle en el cual casi la mitad de los movimientos se realizaron dentro del mismo, dejando al sujeto a 8 movimientos de resolver el juego. Por tanto, el índice de Buclicidad es cercano a 0.5. El ingreso a un bucle implica el haber realizado un movimiento erróneo, por tanto, el índice de Ramificación es inferior a 1.

  Expresiones verbales: no realiza.

  Expresiones no verbales: el sujeto realiza varios movimientos de manera pausada y

calmada.

Promedio de los índices de las partidas de extensión:

Promedio de índice de Ramificación: 0.846

Promedio de índice de Buclicidad: 0.332

El sujeto utiliza la estrategia de ubicar los caballos en los centros de los lados del tablero y luego en las esquinas del tablero, cuando no lo consigue se pierde y realiza movimientos erráticos con la finalidad de corregir el error.

Categoría de extensión:

- Partida 5: El sujeto no ingresó a algún bucle por tanto el índice de buclicidad es nulo. El sujeto estaba resolviendo el juego de manera correcta lo cual se evidencia en el índice de Ramificación igual a 1, pero lo realizó hasta la mitad del juego por tanto le faltó resolver la otra mitad.

  Expresiones verbales: no realiza.

  Expresiones no verbales: el sujeto realiza varios movimientos de manera pausada y calmada.

- Partida 6: De los movimientos realizados un tercio fueron dentro de un bucle, dejando al sujeto a 8 movimientos de resolver el juego, dado que la cantidad de movimientos dentro de un bucle no es alta el índice de Buclicidad es inferior al 0.5.

  Expresiones verbales: no realiza.

  Expresiones no verbales: el sujeto realiza varios movimientos de manera pausada y calmada.

Promedio de los índices de las partidas de extensión:

Promedio de índice de Ramificación: 0.958

Promedio de índice de Buclicidad: 0.176

El sujeto en la categoría de extensión mejora la calificación de Ramificación evidenciando que los movimientos son cada vez mas acertados. Aun así, el sujeto no resuelve el problema evidenciando que no consigue crear un modelo mental adecuado para resolverlo.

Análisis del sujeto 9:

El noveno sujeto realizó 6 partidas logrando resolver el juego sin movimientos de más. El sujeto ingresó en 4 ocasiones a un bucle en las partidas 1, 3, 4 y 6. Es posible evidenciar de la categorización propuesta por Ellis (2007) que el sujeto realiza un proceso de generalización. El explorar el tablero realizando una cantidad considerable de movimientos en comparación con los 16 mínimos para resolver el juego produce el ingreso a varios bucles, además, se evidencia el uso de una estrategia al ubicar las fichas de manera simétrica en el tablero, mostrando que el sujeto alcanza exactamente las primeras dos categorías. El proceso de práctica deliberada y de matematización del juego no se logra debido a la falta de pericia de usar una estrategia que si funciona (Freudenthal, 1968) (Anderson y Schunn, 2000).
La carta de consentimiento de uso de imágenes y video, la tabla de observador y video de las partidas realizadas, se puede encontrar en el siguiente enlace:
`https://drive.google.com/drive/folders/1B4cMaYY6EpcegEhzOfeYFTZfXLf4gmzm?usp=sharing`

Sujeto 10

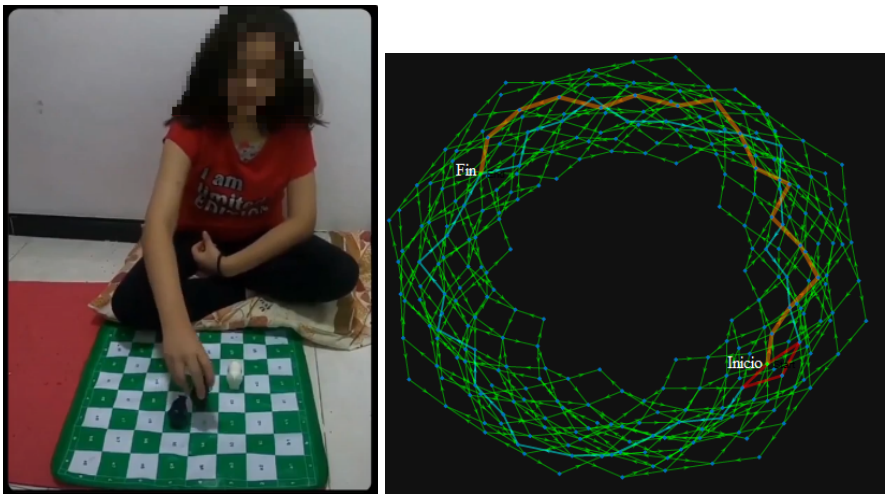


Figura 5.30: Sujeto 10 consolidado de partidas.

El sujeto 10 es de género femenino, tiene 12 años de edad, realiza la actividad en la casa que habita utilizando un tablero de ajedrez al que se le ha dejado visible un tablero de 3x3. El sujeto realizó 2 partidas como se puede ver en la Figura 5.30; la primera de color rojo se considera una partida de práctica o de conocimiento del juego, se puede apreciar que realiza un bucle, la siguiente partida de color amarillo y también la final la realiza de manera perfecta con los mejores índices posibles ya que resolvió en 16 movimientos. El proceso de matematización del sujeto lo realiza en pocas partidas, lo cual es seña de haber escogido una buena estrategia o de haber realizado un proceso de modelamiento al reflexionar de manera prolongada las jugadas (Freudenthal, 1968).

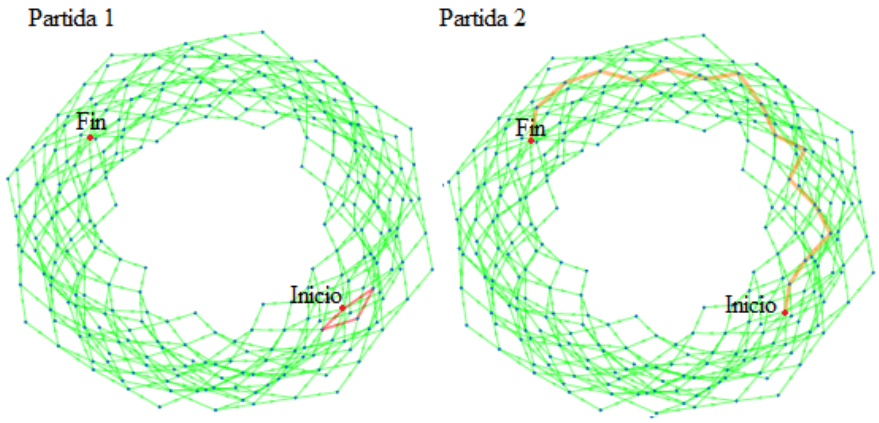


Figura 5.31: Sujeto 10 partidas.

La práctica deliberada proporcionada por el juego se realiza en pocas partidas 5.31, en la primera se muestra 4 movimientos en forma de bucle representando un proceso de exploración y de conocimiento del juego. La segunda partida muestra que el sujeto resuelve el problema con la cantidad mínima de movimientos posibles, lo que evidencia que el modelo mental y la proyección de las jugadas fue el adecuado. La práctica en el sujeto se basa en la abstracción de particularidades generadas en los movimientos y no tanto en las partidas (Anderson y Schunn, 2000).

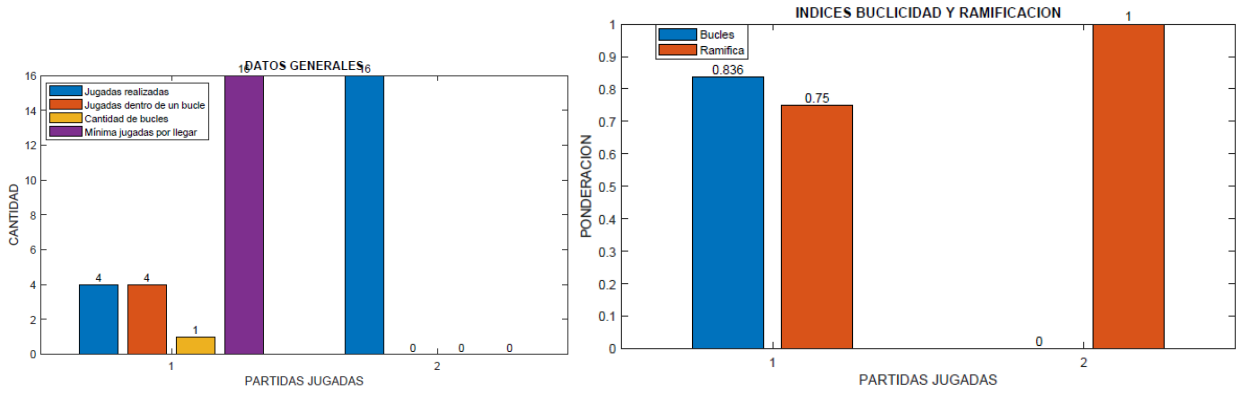


Figura 5.32: Sujeto 10 datos generales.

La información de la Figura 5.32 pretende cuantificar la capacidad de solución del juego en dos aspectos, la calidad de las decisiones tomadas a lo largo de las partidas y la afectación de la solución del juego al repetir estados del tablero. A continuación, se realiza un análisis de cada partida contrastando los datos generales con los índices de Buclicidad y Ramificación, una descripción de las expresiones verbales y no verbales del sujeto, además se clasificarán de acuerdo a las categorías propuestas por la autora Ellis (2007):

Categoría de relación:

- Partida 1: El sujeto ingresó a un bucle en el cual la totalidad de movimientos se realizaron en el mismo, afectando al sujeto dado que debe realizar nuevamente los 16 movimientos mínimos para resolver el juego. El índice de Buclicidad muestra que de los 4 movimientos 3 fueron acertados. Por tanto, el movimiento erróneo genero el bucle.
  Expresiones verbales: el sujeto al ingresar a un bucle dice “me equivoque”.
  Expresiones no verbales: durante la partida el sujeto permanece con la mano en la boca.

Promedio de los índices de las partidas de búsqueda y extensión:
Promedio de índice de Ramificación: 0.750
Promedio de índice de Buclicidad: 0.836
En esta categoría se hace visible la etapa de reconocimiento del juego al percatarse del error de haber realizado un bucle, lo cual se evidencia con la expresión verbal que realiza.

Categoría de búsqueda y extensión:

- Partida 2: El sujeto resolvió el juego en la cantidad mínima de movimientos.
  Expresiones verbales: al realizar los movimientos dice “luego sigue esta” y “luego sigue este a este”, cuando ubica las fichas en la mitad de los lados del tablero dice “entonces quedan todos iguales”.
  Expresiones no verbales: el sujeto realiza los movimientos de manera tranquila, al resolver el juego se mantiene concentrado en el tablero.

Promedio de los índices de las partidas de búsqueda y extensión:

Promedio de índice de Ramificación: 1

Promedio de índice de Buclicidad: 0

La categoría de búsqueda y extensión se encuentra en la estrategia que utiliza de ubicar las fichas de manera simétrica en el tablero, lo cual es evidenciado con los índices que muestra que todos los movimientos fueron acertados y el no ingreso a bucles.

Análisis del sujeto 10:

El décimo sujeto realiza 2 partidas logrando resolver el juego sin movimientos de más. El sujeto ingresó a un bucle en la primera partida. De las categorías propuestas por la autora Ellis (2007), es posible encontrar que el sujeto realizó un proceso de relación evidenciado por el índice de buclicidad y la expresión verbal que corrobora estar consciente de haber ingresado a un bucle. Además, el hecho de haber usado en la segunda partida una estrategia basada en ubicar las fichas de manera simétrica alrededor del tablero, evidencia que el sujeto infiere una regla del juego. El proceso de matematización del sujeto consiste en ubicar las fichas en posiciones que le sean de utilidad, ya que al realizar próximos movimientos se pueden interceptar las fichas y aumentar por tanto la cantidad de movimientos (Mayer, 2014).

La carta de consentimiento de uso de imágenes y video, la tabla de observador y video de las partidas realizadas, se puede encontrar en el siguiente enlace:

`https://drive.google.com/drive/folders/1TkeuBQCNtIGljntPzCkWEPkRFGTQIFx0?usp=sharing`

Sujeto 11

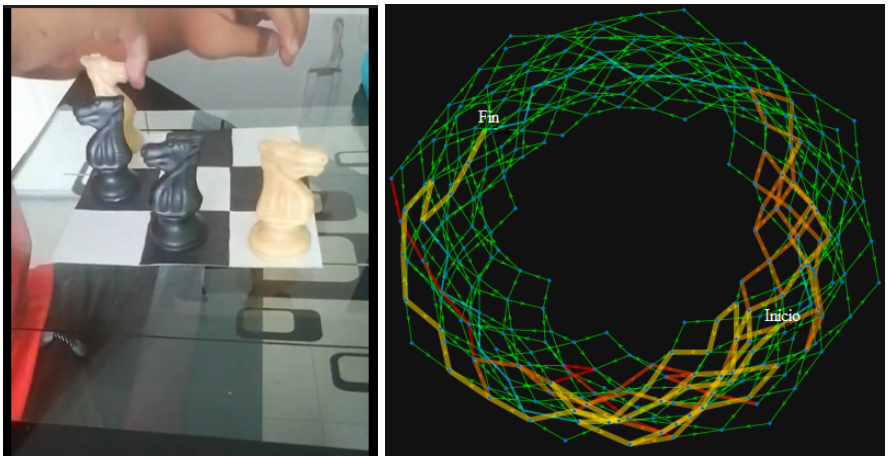


Figura 5.33: Sujeto 11 consolidado de partidas.

El sujeto 11 es de género masculino, tiene 11 años de edad, la actividad planteada la realiza en 17 minutos utilizando un tablero impreso y los caballos de un jugo de ajedrez. El sujeto realizó 8 intentos como se muestra en la Figura 5.33, las partidas iniciales de color rojo muestran que el sujeto exploró el tablero realizando movimientos similares al notarse líneas en el grafo dirigido en dirección horario, las partidas intermedias en color naranja muestran un cambio en la realización de los movimientos en comparación a las partidas iniciales evidenciado por los trayectos en dirección antihorario, la última partida es errática en los primeros movimientos no obstante resuelve el juego. El sujeto demuestra realizar cambios en las estrategias de solución a medida que transcurren las partidas, la cantidad total de movimientos es elevada evidenciando que el sujeto genera un modelo mental del juego en función de la exploración del juego (Freudenthal, 1993).

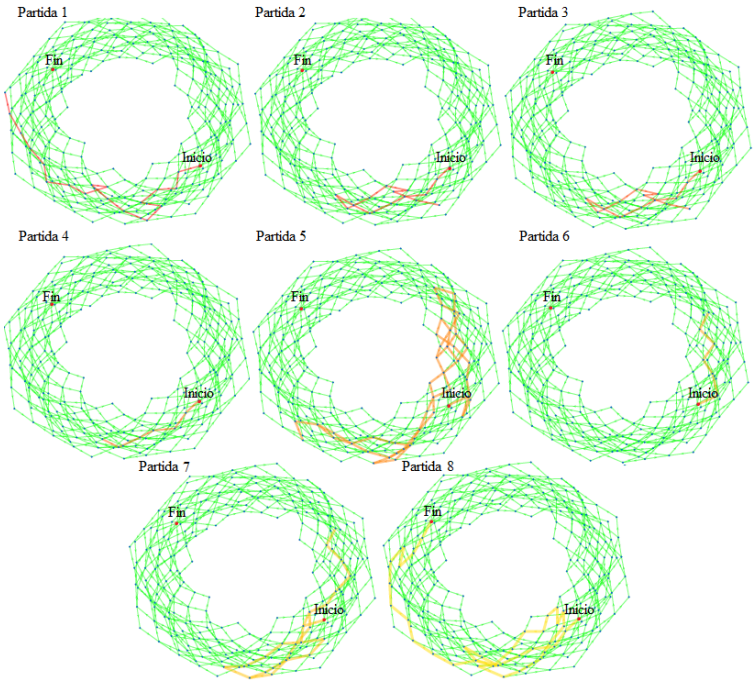


Figura 5.34: Sujeto 11 partidas.

El proceso de práctica deliberada es notable en la evolución que se evidencia de las partidas de la Figura 5.34, la práctica realizada muestra que se acerca a la solución en la primera partida, en la 2 y 3 intenta realizar la misma estrategias con movimientos iniciales similares en la partida 4. Por tanto, las primeras 4 partidas realiza un reconocimiento del tablero y verifica una posible estrategia al ser tan similares. En la partida 5 se aprecia una cantidad considerable de movimientos que exploran el tablero alrededor del inicio, se pude considerar que las decisiones fueron azarosas. Las partidas 6 y 7 muestran una situación similar a la 5 pero con menos movimientos. Finalmente, la partida 8 evidencia dificultades al inicio, pero logra encaminar las partidas a un mejor resultado; mostrando que la práctica deliberada proporcionada por el juego fue adecuada (Ericsson y cols., 2006)

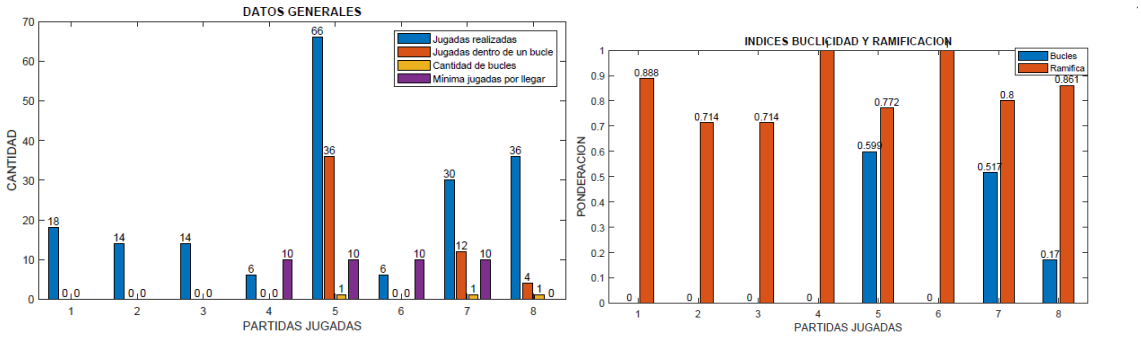


Figura 5.35: Sujeto 11 datos generales.

En la Figura 5.35 se puede realizar una lectura sobre las decisiones realizadas por el sujeto al resolver el juego tratado. A continuación, se realizará un análisis de cada partida contrastando los datos generales con los índices de Buclicidad y Ramificación, una descripción de las expresiones verbales y no verbales del sujeto, además se clasificarán de acuerdo a las categorías propuestas por la autora Ellis (2007):

Categoría de relación:

- Partida 1: El sujeto no ingresó a algún bucle por tanto el índice de buclicidad es nulo. Realizó más de los 16 movimientos mínimos sin resolver el problema, por tanto, alguno de estos fue erróneos produciendo que el índice de Ramificación sea inferior a 1. Además, el sujeto llegó a un estado del tablero que no le permite realizar más movimientos.
  Expresiones verbales: el sujeto continuamente dice “este acá”
  Expresiones no verbales: se muestra tranquilo hasta el final de la partida.

- Partida 2 y 3: El sujeto no ingresó a algún bucle por tanto el índice de buclicidad es nulo. En ambas partidas el sujeto llegó a un estado del tablero en el cual no se puede realizar más movimientos, además, el sujeto realizó varios movimientos erróneos como se puede evidenciar en el índice de Ramificación.
  Expresiones verbales: el sujeto continuamente dice “este acá”, al final de la partida dice

"otra vez".

Expresiones no verbales: se muestra tranquilo hasta el final de la partida.

- Partida 4: El sujeto no ingresó a algún bucle por tanto el índice de buclicidad es nulo. El sujeto realizó 6 movimientos acertados como se muestra en el índice de Ramificación igual a 1, pero decidió realizar un nuevo intento por tanto la cantidad de movimientos faltantes son 10.

  Expresiones verbales: el sujeto continuamente dice "este acá".

  Expresiones no verbales: se muestra tranquilo hasta el final de la partida.

Promedio de los índices de las partidas de búsqueda y extensión:
Promedio de índice de Ramificación: 0.829
Promedio de índice de Buclicidad: 0
El sujeto realiza un proceso de aprendizaje de las características del juego, se aprecia un intento temprano por verificar la estrategia de ubicar las fichas en la mitad de los lados del tablero. El sujeto no ingresó a bucles y según el índice de ramificación realizo movimientos erróneos que serán verificados en las demás categorías.

Categoría de búsqueda:

- Partida 5: El sujeto ingresó a un bucle que tiene poco más de la mitad de movimientos del total realizados, al sujeto le resto 10 movimientos por resolver el juego lo que representa poco más de la mitad mínima para resolver el juego, por tanto, el índice es superior al 0.5. Al realizar 66 movimientos de los 16 suficientes para resolver el juego se incurre en movimientos erróneos, además de haber ingresado a un bucle. Por tanto, el índice de Ramificación muestra un valor inferior a 1.

  Expresiones verbales: el sujeto continuamente dice "este acá".

  Expresiones no verbales: se muestra tranquilo durante la partida, pero al final suspira y reinicia la partida.

- Partida 6: El sujeto no ingresó a algún bucle por tanto el índice de buclicidad es nulo. El sujeto realizó 6 movimientos acertados por tanto le falta 10 por terminar, lo anterior se evidencia al tener un índice de Buclicidad igual a 1.
  Expresiones verbales: el sujeto continuamente dice “este acá”, al final de la partida dice “no, no puedo más”.
  Expresiones no verbales: se muestra tranquilo durante la partida.

- Partida 7: El sujeto ingresó a un bucle de menos de la mitad de los movimientos realizados, pero le faltan más de la mitad de movimientos por resolver el problema, dado que el índice es ponderado en 0.517, por tanto, muestra que el bucle afecta al alejar al jugador de la respuesta. El índice de Ramificación es inferior a 1, dado que se ingresó a un bucle, además de realizarse más de los 16 movimientos suficientes para resolver el juego.
  Expresiones verbales: el sujeto realiza un sonido parecido a “uju” durante la partida y en los movimientos finales dice “acá”, al final dice “otra vez”.
  Expresiones no verbales: se muestra tranquilo durante la partida.

Promedio de los índices de las partidas de búsqueda y extensión:
Promedio de índice de Ramificación: 0.857
Promedio de índice de Buclicidad: 0.370
El índice de ramificación aumenta levemente, mostrando el aumento de realización de movimientos acertados; aun así, el índice de Ramificación no se ve afectado por el de Buclicidad ya que en la anterior categoría no se realizaron bucles. El sujeto logra identificar posiciones del tablero que ya había realizado evidenciado por las expresiones verbales y el índice de Buclicidad.

Categoría de extensión:

- Partida 8: El sujeto logra resolver el juego con 20 movimientos de más, parte de los movimientos son de un bucle de 4 movimientos lo que genera un índice de Buclicidad pequeño.

Expresiones verbales: solo al final dice “listo” de manera efusiva.

Expresiones no verbales: se muestra tranquilo durante la partida.

Promedio de los índices de las partidas de búsqueda y extensión:

Promedio de índice de Ramificación: 0.861

Promedio de índice de Buclicidad: 0.170

El sujeto evidencia una mejora significativa en los dos índices, el sujeto disminuye el uso constante de palabras como “acá”. Se hace evidente que la estrategia inicial de usar la simetría de los movimientos le es de ayuda.

Análisis del sujeto 11:

El undécimo sujeto realizó 8 partidas logrando resolver el juego usando 20 movimientos de más. El sujeto ingresó a 3 bucles en la quinta, séptima y octava partida. Es posible evidenciar de la categorización propuesta por Ellis (2007) que el sujeto realiza un proceso de generalización, evidenciado por la creciente ponderación del índice de ramificación. Además del índice de Buclicidad se evidencia que el sujeto ingresa a algún bucle por la alta cantidad de movimientos realizados. La estrategia usada por el sujeto de organizar las fichas de manera simétrica le fue de ayuda para proyectar los siguientes movimientos. El sujeto realiza una alta cantidad de movimientos, por tanto el modelo mental del sujeto se basa en verificar lo útil de algunas posiciones de las fichas en el tablero generando así un proceso de matematización (Ericsson y cols., 2006) (Freudenthal, 1968).

La carta de consentimiento de uso de imágenes y video, la tabla de observador y video de las partidas realizadas, se puede encontrar en el siguiente enlace:

`https://drive.google.com/drive/folders/1q1zQ6CQAiXrw9NiP4tFbVIl0qrsyIMed?usp=sharing`

5.5.2. Análisis comportamiento índice de Ramificación

El índice de Ramificación propuesto en el proyecto pretende cuantificar la cantidad de movimientos acertados que realiza un jugador en un intervalo de 0 a 1, desde la más baja calificación a la mejor respectivamente; una particularidad del juego es que el primer movimiento nunca es errado, por tanto, el índice nunca llega a ser nulo, además la ponderación máxima de 1 no garantiza que se haya resuelto el juego. A continuación, se expone el consolidado del análisis realizado anteriormente a los 11 sujetos identificando características comunes que permitan dilucidar la utilidad del índice.

Análisis cualitativo: la realización de movimientos acertados está relacionado con la habilidad que tiene el jugador de anticipar la ubicación de las fichas a medida se desarrolla el juego, esto es, la formulación de estrategias en base a un reconocimiento previo. La estrategia que se destaca en los sujetos evaluados es la ubicación de las fichas en el centro de los lados del tablero, para luego ubicar las fichas en las esquinas. Lo anterior es evidenciado con expresiones como: llevarse una mano al rostro en el sujeto 1, decir "listo" en el sujeto 2 partida 7, "ya recuerdo, queda, así como en cruz y ya los puedo acomodar" por parte del sujeto 6 o los sujetos 9 y 11 evidenciado en los videos. Los ejemplos de las expresiones verbales anteriores se generan a partir de la práctica deliberada proporcionada por el juego, ya que el sujeto genera un modelo mental del juego fruto de la abstracción de característica aprendidas a medida se desarrolla el juego (Ericsson y cols., 2006) (Mayer, 2014). La matematización del juego se evidencia en instancias del desarrollo de solución, al percatarse el jugador de hechos claves que son fundamentales, como: darse cuenta que el juego se puede cerrar (no se pueden realizar más movimientos) al decir "y ahora como lo muevo" por el sujeto 2, "voy a tratar de realizarlo así, a ver si de pronto" identificando que las fichas pueden girar al borde del tablero por el sujeto 5, "la otra vez me metí por acá y no me fue muy bien, me voy a ir por otra ruta" al recordar un mal movimiento de una partida anterior.

Análisis cuantitativo: las categorías propuestas por la autora Ellis (2007), caracterizan a los sujetos de acuerdo a la evolución del conocimiento del juego. En la tabla 5.1 se consolida los promedios de las partidas asociadas a cada categoría; en el caso de los sujetos que realizaron

menos de tres partidas, se le asigna a una más de una categoría como se evidencia en los análisis de comportamiento por sujeto. La categoría de relación de los sujetos evaluados es mayor de 0.5, representando que en promedio cada sujeto realizó más de la mitad de los movimientos acertados; el proceso de reconocimiento del juego produce un aumento en la ponderación de Ramificación debido al aprendizaje en cada movimiento. En la categoría de búsqueda se evidencia que los valores aumentan en comparación con los de relación, el conocimiento alcanzado en las primeras partidas y la identificación de características del juego son suficientes para encontrar relaciones y verificar estrategias. Finalmente, la categoría de extensión donde el jugador concreta una estrategia que le permite solucionar el juego definitivamente; dada la identificación de variables en el juego, las relaciones y la inferencia de una solución es evidenciado en el creciente acierto de los movimientos. Las expresiones verbales y no verbales revelan que los sujetos encuentran

Promedios de Ramificación por categorías de generalización				
Sujeto	Relación	Búsqueda	Extensión	Total intentos
1	0.666	0.675	0.950	6
2	0.762	0.774	0.920	18
3	1	1	1	3
4	0.500	1	1	2
5	0.916	0.916	0.916	1
6	1	1	1	1
7	0.763	0.763	1	2
8	1	1	1	1
9	0.749	0.846	0.958	6
10	0.750	0.750	1	2
11	0.829	0.857	0.861	8
Promedio	0.812	0.871	0.946	4.54

Tabla 5.1: Promedios de Ramificación por categorías de generalización

favorable ubicar los caballos en los centros de los lados del tablero, para luego ubicarlos en las esquinas del mismo. La formulación de la estrategia es seguida por la confirmación de su utilidad, lo cual se ve reflejado por la creciente ponderación del índice de Ramificación en la tabla. Es así como el índice tiene el potencial de evidenciar que los movimientos son intencionados, esto es, existe el propósito de resolverlo (no hay aleatoriedad), además que se genera mejora continua.

5.5.3. Análisis comportamiento del índice Buclicidad

El índice de Buclicidad propuesto en el proyecto pretende cuantificar con un valor numérico entre 0 y 1, la incidencia que tiene en el jugador la realización de movimientos al repetir estados en el tablero (bucles) en la solución del juego; siendo 0 la más baja y 1 la más alta incidencia. El índice se basa en un algoritmo difuso que pondera la incidencia antes mencionada en función de la cantidad de movimientos al interior de un bucle y la cantidad de movimientos por llegar a la solución. A continuación, se expone el consolidado del análisis realizado anteriormente a los 11 sujetos identificando características comunes que permitan dilucidar la utilidad del índice.

Análisis cualitativo: en el desarrollo de las partidas se evidencia al ver los videos que los sujetos repetían estados del tablero, algunos logran darse cuenta del evento y darlo a conocer mediante expresiones, algunos ejemplos son los siguientes: en la tercera partida del sujeto 2 dice “volvimos a empezar”, en la partida 10 del mismo sujeto pronuncia “no sé, lo mismo”, el sujeto 5 dice “me toco volver a cuadrarlo todo”, sujeto 7 dice “se me hace como conocido este movimiento” o sujeto 10 quien dice “se me hace como conocido este movimiento”. Las expresiones anteriores coinciden con el final de un bucle, los cuales afectan la solución del juego; ya que el jugador se puede sentir desmotivado al percatarse que ha realizado movimientos más, evidenciar que alguna estrategia evaluada no consigue los resultados esperados, además, el ingreso a algún bucle se produce al realizar un movimiento que aleja al jugador de la respuesta afectando al índice de Ramificación. La práctica deliberada proporcionada por el juego produce una conciencia cada vez más elaborada de las posiciones de las fichas en el tablero, por tanto, el sujeto recuerda cada vez con más facilidad aquellos estados por los cuales ya había pasado (Ericsson y cols., 2006) (Mayer, 2014).

Análisis cuantitativo: las categorías propuestas por la autora Ellis (2007), determinan el grado de generalización de un sujeto al resolver un juego estructurado. En la tabla 5.2 se consolida los promedios de las partidas asociadas a cada categoría; en el caso de los sujetos que realizaron menos de tres partidas se les asigna más de una. En la categoría de extensión, 5 sujetos realizaron bucles; en esta etapa los sujetos se encuentran reconociendo la dinámica del juego realizando

pocos movimientos disminuyendo la posibilidad de un eventual bucle y su ponderación. En la categoría de Búsqueda, al incrementarse la cantidad de movimientos producto de la comprobación de alguna estrategia aumenta la cantidad de bucles, aun así, el valor del índice de Buclicidad disminuye. En la categoría de extensión, el índice y la cantidad de bucles disminuye; la habilidad del jugador mejora produciendo movimientos acertados.

Promedios de Buclicidad por categorías de generalización				
Sujeto	Relación	Búsqueda	Extensión	Total intentos
1	-	0.076	-	6
2	0.369	0.265	0.187	18
3	-	-	-	3
4	-	-	-	2
5	0.208	0.208	0.208	1
6	-	-	-	1
7	0.805	0.805	-	2
8	-	-	-	1
9	0.323	0.332	0.176	6
10	0.836	-	-	2
11	-	0.370	0.170	8
Promedio	0.508	0.342	0.185	4.54

Tabla 5.2: Promedios de Buclicidad por categorías de generalización

Los sujetos son conscientes de la realización de bucles en la medida que identifican estados iguales del tablero después de realizar varios movimientos, lo cual se ve reflejado cuando un sujeto realiza expresiones verbales y no verbales que lo confirman. La afectación de la realización de bucles en la solución del juego disminuye a medida que el juego se desarrolla, lo cual es confirmado con disminución paulatina del índice de Buclicidad. El índice está relacionado con el de Ramificación, ya que cuando aparece un bucle este es provocado por un mal movimiento.

Capítulo 6

Conclusiones

Conclusión del objetivo 1. El modelo computacional del juego denominado Cuatro Caballos es posible realizarlo usando grafos dirigidos permitiendo modelar mediante nodos las posiciones de las fichas en el tablero y con aristas el movimiento en "L" de los caballos. Además, es necesario que este sea dirigido debido a la alternancia de color de las fichas de un movimiento a otro. Se determina que son necesarios 272 nodos y 624 aristas, formando un grafo dirigido conexo. La herramienta computacional utilizada fue Matlab, dado que es un sistema de cómputo numérico que incluye comandos útiles en el modelamiento basado en la teoría de grafos. En el grafo dirigido, es posible resaltar tanto la posición de inicio de las fichas como el final, además de trazar trayectos de la solución en base al algoritmo Dijkstra del camino más corto, el cual es de 16 movimientos mínimos para resolver el juego.

Conclusión del objetivo 2.Se construyeron dos algoritmos denominados índice de Ramificación y Buclicidad, de los cuales se cuantifica la capacidad de solucionar un juego estructurado. El índice de Ramificación permite calcular el promedio de los movimientos acertados en una partida; su código se basa en comparar la cantidad mínima de estos de un estado con los del siguiente, determinando su validez ponderando con 0 un error y 1 un movimiento acertado, el proceso se realiza con cada uno de los movimientos de una partida excepto el último para al final promediar los resultados. El índice de Buclicidad permite calcular la incidencia que tiene en un

jugador los movimientos realizados al repetir un estado del tablero; su código se basa en calcular la proporción de estos realizados en el total de bucles y los totales de una partida, además, de la proporción de movimientos faltantes para resolver el problema con los 16 mínimos necesarios. Ambas proporciones son los valores de entrada de un algoritmo difuso que pondera de 0 a 1 la afectación del ingreso a un bucle en la solución del juego. Los índices propuestos son útiles en la compresión de trayectorias de aprendizaje al caracterizar a los estudiantes y por tanto servir de herramienta en la evaluación del conocimiento de ellos (Simon y Tzur, 2004).

Conclusión del objetivo 3.Se analizaron 11 sujetos, de los cuales se calcularon los índices de Ramificación y Buclicidad de cada partida, además de generarse las gráficas de cada uno de los trayectos realizados y el consolidado de los mismos. Fue posible contrastar la información anterior con las expresiones verbales y no verbales encontrando coincidencias entre ambos, esto es: para el caso del índice de Ramificación fue posible evidenciar el uso de estrategias y su validación, en el índice de Buclicidad los sujetos lograban recordar las posiciones de las fichas y ser conscientes de haber repetido alguna en concreto. Lo anterior es descrito haciendo uso de las categorías de generalización de la autora Ellis (2007), donde la primera denominada Relación los sujetos realizan pocos movimientos y exploran el tablero determinando características favorables de los mismos, en el caso de la categoría Búsqueda los sujetos encuentran relaciones de las características identificadas y generan estrategias de solución; se caracteriza por realizar varias partidas con los movimientos iniciales semejantes, finalmente en la categoría Extensión los sujetos constatan que alguna estrategia es el método definitivo de solución del juego. La práctica deliberada que ofrece el juego les permite a los sujetos mejorar paulatinamente, esto es evidenciado por el incremento de los valores numéricos del índice de Ramificación y la disminución en el índice de Buclicidad (Anderson y Schunn, 2000). El hecho de que los sujetos alcancen niveles de conocimiento del juego que les permite resolverlo, implica un proceso de matematización producto de la reflexión continua de las particularidades del mismo y la inferencia de patrones útiles (Freudenthal, 1968).

Conclusión General. La capacidad de abstraer información del entorno, ofrece la ventaja de

proyectar acciones útiles para un fin determinado. El proceso de llegar a concluir reglas que expliquen el comportamiento de varias variables se considera generalizar; partir de observaciones e identificación de variables, el cómo se relacionan para llegar a generar un modelo mental. La manera de producir un modelo general es el propósito del aprendizaje y para ello se recurre a la formulación de actividades planeadas que lleven al estudiante a consolidar un conocimiento sólido de aquello que se pretende entender, esto es, la práctica deliberada. Se concluye que las trayectorias de aprendizaje de los sujetos pueden ser diagnosticadas mediante el uso de los índices planteados, ya que en la validación de los mismos se producen relaciones entre las expresiones verbales y no verbales y las estadísticas dadas para cada sujeto. Es por tanto que el proceso de matematización es mesurable y susceptible a ser analizado.

6.1. Trabajos Futuros

Se debe considerar el uso de los índices planteados en otros juegos estructurados, en el cual se logre comparar su uso. Además, se sugiere el uso de una cantidad elevada de sujetos los cuales al calcular los índices sea posible hallar características en el tipo de jugador y destrezas que lo caractericen, ya que al estar sistematizado el juego se pueda dar uso de la facilidad y prontitud de generación de estadísticas.

Capítulo 7

Anexos

Anexo 1

En el anexo se encuentra información cargada en el portal Github, esta se halla en el siguiente enlace:
`https://github.com/WAGC8/IndicesCuatroCaballos`

- El archivo GrafoDirigidoJuegoCC.m genera el grafo dirigido mediante una matriz de adyacencia y lo muestra gráficamente.
- El archivo IndicesBuclicidadYRamifica.m calcula los índices de Buclicidad y de Ramificación de las diferentes partidas realizadas por un sujeto al intentar resolver el juego, información general de las partidas realizadas y las gráficas de cada una de las partidas sobre el grafo dirigido. Dado que el índice de Buclicidad usa un Toolbox de lógica difusa es necesario que se cuente con este para poder compilar adecuadamente el código `https://www.mathworks.com/products/fuzzy-logic.html`.
- Los archivos .txt contienen los movimientos de cada una de las partidas realizadas para un sujeto, los 9 números en las filas son los cuadros donde se ubican las fichas, donde los números 2 y 4 son los caballos blancos, 1 y 3 son los caballos negros y 0 la ausencia de

ficha. El juego se puede encontrar en la página web `http://ritaportal.udistrital.edu.co:10198/horses` . El .txt de cada sujeto es analizado con el código en el archivo IndicesBuclicidadYRamifica.m en la primera fila del código se direcciona cada archivo.

- En la carpeta ”Partidas realizadas sujetos”se almacenan las partidas, las gráficas y los índices de las partidas realizadas por cada sujeto evaluado. Nota: es necesario que todos los archivos se encuentren en la misma carpeta, ya que el código que se encuentra en archivo IndicesBuclicidadYRamifica.m tiene direccionado varios de ellos.

Anexo 2

En el anexo se encuentran documentos de cada uno de los 11 sujetos evaluados, estos son: consentimiento informado de uso de video e imagenes, tabla del observador donde se consolida los movimientos realizados junto con las expresiones verbales y no verbales y video de las partidas realizadas. La información se halla en el siguiente enlace:
`https://drive.google.com/drive/folders/1xkFXasug4-S_9f_c8bdFWFrS_uDso8Kd?usp=sharing`

Referencias

Aceituno, J. A., Marmolejos, M., Marte, E., Bolivar, P., y Aceituno, A. (2014). Algunas carencias detectadas en los estudiantes que ingresan a intec y reciben física general en sus carreras. consideraciones sobre el desarrollo y uso del video juego en la enseñanza de la física. *Ciencia y sociedad*, *39*(4), 731–758.

Anderson, J. R., y Schunn, C. (2000). Implications of the act-r learning theory: No magic bullets. *Advances in instructional psychology, Educational design and cognitive science*, 1–33.

Andrade, J. C. B., y Sotélo, J. A. L. (2012). Bio-route: un simulador para redes de sensores inalámbricos. *Revista Educación en ingeniería*, *7*(13), 23–31.

Azevedo, R., y Aleven, V. (2013). Metacognition and learning technologies: An overview of current interdisciplinary research. *International handbook of metacognition and learning technologies*, 1–16.

Bustamante, J. A. G. (2018). Robótica educativa como propuesta de innovación pedagógica. *Gestión Competitividad e Innovación*, *6*(2), 1–12.

Campillo, X. R. (2013). El pasado en tu sofá: juegos de simulación histórica en entornos computacionales portables. *Her&Mus. Heritage & Museography*, 55–62.

Clark, D. B., y Sengupta, P. (2020). Reconceptualizing games for integrating computational thinking and science as practice: Collaborative agent-based disciplinarily-integrated games. *Interactive Learning Environments*, *28*(3), 328–346.

Daniel, J., Cano, E. V., y Cervera, M. G. (2015). El futuro de los mooc:¿ aprendizaje adaptativo o modelo de negocio? *RUSC. Universities and Knowledge Society Journal*, *12*(1), 64–73.

Díaz, L. C., y Chautemps, N. A. (2016). Proyecto: Inteligencia artificial y desarrollo de simuladores hacia el diseño de cursos abiertos on line. En *Xviii workshop de investigadores en ciencias de la computación (wicc 2016, entre ríos, argentina).*

Díaz Córdova, J. F., Coba Molina, E., y Navarrete, P. (2017). Lógica difusa y el riesgo financiero. una propuesta de clasificación de riesgo financiero al sector cooperativo. *Contaduría y*

administración, *62*(SPE5), 1670–1686.

Di Muro, R. B., y Sandoval, A. (2017). Perfil metacognitivo en estudiantes universitarios. *Investigación y Postgrado*, *29*(1), 129–149.

Eduardo, C., De Vito, E. L., y cols. (2006). Introducción al razonamiento aproximado: lógica difusa. *Revista Americana de Medicina Respiratoria*, *6*(3), 126–136.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221–262.

Ericsson, K. A., y cols. (2006). The influence of experience and deliberate practice on the development of superior expert performance. *The Cambridge handbook of expertise and expert performance*, *38*(685-705), 2–2.

Fernández, M. O. G., Vázquez, J. J. B., y Cornejo, J. E. O. (2018). Promoción de la autogestión a través de objetos de aprendizaje adaptativos en alumnos de educación superior. *Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*(63), 15–28.

Foulds, L. R. (2012). *Graph theory applications*. Springer Science & Business Media.

Frana, P. L., y Misa, T. J. (2010). An interview with edsger w. dijkstra. *Communications of the ACM*, *53*(8), 41–47.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational studies in mathematics*, 3–8.

Freudenthal, H. (1993). Thoughts on teaching mechanics didactical phenomenology of the concept of force. En *The legacy of hans freudenthal* (pp. 71–87). Springer.

Gaviria, C. (2019). Pensar la historia con el deseo: Metacognición, motivación y comprensión histórica. *Revista Colombiana de Psicología*, *28*(1), 147–163.

Gil-Sánchez, L., Masot, R., y Alcañiz, M. (2014). Enseñanza de la electrónica a ingenieros aeronáuticos mediante el desarrollo de proyectos. *VAEP-Rev. Iberoamer. Tecnol. Aprendizaje*, *2*(4), 159–166.

Giráldez-Cru, J., Mesejo, P., Segura, J. Á., Fernández-Olivares, J., y González, A. (2021). Herramientas de gamificación para la enseñanza de técnicas de búsqueda heurística en

entornos dinámicos. *Actas de las Jenui*, *6*, 179–186.

Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*, *10*(1), 93–111.

González, M., Benchoff, D., Huapaya, C., y Remon, C. (2017). Aprendizaje adaptativo: un caso de evaluación personalizada. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*(19), 65–72.

Guerrero, M., Guamán, D. S., y Caiza, J. C. (2015). Revisión de herramientas de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de programación. *Revista Politécnica*, *35*(1), 84–84.

Herrera, A. M. M., y Mancilla, M. (1999). Simulación herramienta para el estudio de sistemas reales. *Ingeniería y Desarrollo*(6).

Herrera, B. M. (2017). Aplicación de juegos didácticos como metodología de enseñanza: Una revisión de la literatura. *Pensamiento Matemático*, *7*(1), 75–92.

Hwang, G.-J., y Wu, P.-H. (2012). Advancements and trends in digital game-based learning research: a review of publications in selected journals from 2001 to 2010. *British Journal of Educational Technology*, *43*(1), E6–E10.

Jerez Naranjo, Y. V., y Garófalo Hernández, A. A. (2012). Aprendizaje basado en tareas aplicado a la enseñanza de las telecomunicaciones. *Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones*, *33*(3), 1–7.

Jiménez Díaz, N. A., y cols. (2015). Una trayectoria de aprendizaje de subitización en niños y niñas de educación inicial.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas*. Pearson Educación.

León, O., Palomá, N. A., Jiménez, N., Guilombo, M., y González, S. P. (2018). Ambientes de aprendizaje de la forma y el número: diseños accesibles y trayectorias hipotéticas de aprendizaje. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *3*(2), 3–16.

León, O. L., Saiz, M. L., Rojas, N., y Márquez, H. A. (2014). *Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para la formación del profesorado de matemáticas en y para la diversidad*. Universidad Pedagógica Nacional de México.

Lerís, D., Sein-Echaluce, M. L., Hernández, M., y Fidalgo-Blanco, Á. (2016). Participantes

heterogéneos en mooc y sus necesidades de aprendizaje adaptativo= heterogeneous users in mooc and their adaptive learning needs. *Participantes heterogéneos en MOOC y sus necesidades de aprendizaje adaptativo= Heterogeneous Users in MOOC and their Adaptive Learning Needs*, 91–109.

López Reguera, J., Hernández Rivas, C., y Farran Leiva, Y. (2011). Una plataforma de evaluación automática con una metodología efectiva para la enseñanza/aprendizaje en programación de computadores. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, *19*(2), 265–277.

Lorenzo, C.-M., Sicilia, M. Á., y Sánchez, S. (2012). Studying the effectiveness of multi-user immersive environments for collaborative evaluation tasks. *Computers & Education*, *59*(4), 1361–1376.

Luna, J. A. G., Sánchez, R. E. A., y Pinzón, L. D. J. (2012). Búsqueda de la ruta óptima mediante los algoritmos: genético y dijkstra utilizando mapas de visibilidad. *Scientia et technica*, *17*(51), 107–112.

Makariye, N. (2017). Towards shortest path computation using dijkstra algorithm. En *2017 international conference on iot and application (iciot)* (pp. 1–3).

Mandow, L., Villalba, F., y Coego, J. (2010). Uso de animaciones para la enseñanza de algoritmos de búsqueda en inteligencia artificial. En *Xvi jornadas de enseñanza universitaria de la informática* (pp. 461–468).

Martínez, L. M., Colina, E. R., Ramírez, C. M., y cols. (2013). Toma de decisiones basadas en el algoritmo de dijkstra. *Redes de Ingeniería*, *4*(2), 35–42.

Martínez Cardenas, E. A., y cols. (2019). Juego y trayectorias de aprendizaje de la aritmética inicial en ambientes de aprendizaje que incluyen estudiantes en situación de discapacidad intelectual.

Mato-Vázquez, D., Espiñeira, E., y López-Chao, V. A. (2017). Impacto del uso de estrategias metacognitivas en la enseñanza de las matemáticas. *Perfiles educativos*, *39*(158), 91–111.

Mayer, R. E. (2014). *Aprendizaje e instrucción*. Alianza Editorial.

Mora-Torres, M., Laureano-Cruces, A. L., y Velasco-Santos, P. (2011). Estructura de las

emociones dentro de un proceso de enseñanza-aprendizaje. *Perfiles educativos*, *33*(131), 64–79.

Moreno, S. S., García, M., y Fuentes, A. (2016). Material didáctico para el aprendizaje de las redes neuronales. *Alfa Omega Grupo Editor*, 323–331.

Muggleton, S. (2014). Alan turing and the development of artificial intelligence. *AI communications*, *27*(1), 3–10.

Osorio Villa, P. A., Angel Franco, M. B., Franco Jaramillo, A., y cols. (2012). El uso de simuladores educativos para el desarrollo de competencias en la formación universitaria de pregrado.

Palomá Barrera, N. A., y cols. (2018). Una trayectoria real del juego la escalera vinculada a hipótesis que potencian el aprendizaje de las funciones desde poblaciones diversas.

Pantoja, C. T., Placencia, J. P. A., Castro, M. S., Mora, E. C., y Valenzuela, J. V. (2018). Diseño de un simulador de ficha clínica electrónica para estudiantes de nutrición y dietética. *Educación Médica*, *19*, 238–245.

Pitarch, R. C. (2018). Integrando el uso de los smartphone en la enseñanza de lenguas extranjeras a través de videojuegos serios en educación universitaria. *Revista académica liLETRAd,(4)*, 135–144.

Polya, G., Zugazagoitia, J., y cols. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (Inf. Téc.). Trillas México.

Rodríguez Molina, L. F., y cols. (2016). Trayectoria hipotética de aprendizaje: Aprendizaje de las operaciones suma y resta en aulas inclusivas con incorporación tecnológica.

Roncancio-Ortiz, A. P., Ortiz-Carrera, M. F., Llano-Ruiz, H., Malpica-López, M. J., y Bocanegra-García, J. J. (2017). El uso de los videojuegos como herramienta didáctica para mejorar la enseñanza-aprendizaje: una revisión del estado del tema. *Ingeniería Investigación y Desarrollo*, *17*(2), 36–46.

Ross, T. J. (2017). *Fuzzy logic with engineering applications*. John Wiley & Sons.

Rozo, J. M. K. (2011). Creatividad y videojuegos: nuevos paradigmas en la generación de

aprendizaje autónomo. *Revista Repertorio de Medicina y cirugía*, *20*(1), 45–50.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, 114–145.

Simon, M. A., y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 91–104.

Simon, M. A., y Tzur, R. (2012). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. En *Hypothetical learning trajectories* (pp. 91–104). Routledge.

Suárez-Fernández-Miranda, S., Aguayo-González, F., y Lama-Ruiz, J. R. (2019). Sistemas cognitivos asociados al proceso de aprendizaje-enseñanza del ingeniero mecánico: machine learning. *V jornada de investigación y postgrado de la Escuela Politécnica Superior de la Universidad de Sevilla (2019), p 253-264*.

Trisca, J. (2012). Los efectos del estilo de diseño web y el tipo de tutoría en la regulación metacognitiva autopercibida del aprendizaje, en los cursos en línea. *Praxis Investigativa ReDIE: revista electrónica de la Red Durango de Investigadores Educativos*, *4*(6), 33–41.

Truong, H. M. (2016). Integrating learning styles and adaptive e-learning system: Current developments, problems and opportunities. *Computers in human behavior*, *55*, 1185–1193.

Uzcátegui, M., Dávila, J., y Tucci, K. (2011). Galatea: una historia de modelado y simulación. *Ciencia e Ingeniería*, *32*(2), 85–94.

Wang, H., Yu, Y., y Yuan, Q. (2011). Application of dijkstra algorithm in robot path-planning. En *2011 second international conference on mechanic automation and control engineering* (pp. 1067–1069).

Yang, T.-C., Hwang, G.-J., y Yang, S. J.-H. (2013). Development of an adaptive learning system with multiple perspectives based on students' learning styles and cognitive styles. *Journal of Educational Technology & Society*, *16*(4), 185–200.