

CLASIFICACIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS CON UN ENFOQUE EN EL LEMA MORSE Y EL LEMA DE SEPARACIÓN

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

Autores
Dairon Manuel Alonso Herrera
David Fernando Velasquez Riaño

Tutor
Martín Barajas Sichacá

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Matemáticas
Bogotá, Colombia
2024

Resumen

En esta monografía se exploran las formas cuadráticas con un enfoque aplicado a un campo escalar, analizando su clasificación y propiedades fundamentales. Se inician los desarrollos con conceptos preliminares esenciales para el estudio, seguido de una discusión detallada sobre las formas cuadráticas y su clasificación mediante transformaciones lineales. Posteriormente, se aborda el Lema de Morse, destacando su demostración y utilidad en la caracterización de puntos críticos no degenerados, y el Lema de Separación, que permite descomponer una función cuadrática en componentes degenerados y no degenerados, simplificando el análisis local de puntos críticos. Ejemplos ilustrativos demuestran la aplicabilidad de estos lemas en contextos matemáticos y prácticos. Finalmente, se discuten las conclusiones sobre la relevancia de estos conceptos para la comprensión y clasificación de formas cuadráticas, destacando su impacto en la topología diferencial y su utilidad en diversas aplicaciones matemáticas.

Palabras Clave

Formas cuadráticas, Singularidad, Geometría algebraica, Lema de separación, Lema de Morse, Jet, Puntos Críticos.

Agradecimientos

En primer lugar, deseamos expresar nuestra gratitud a Dios por brindarnos la fe y la fortaleza necesarias para completar esta monografía. En segundo lugar, agradecemos profundamente al profesor Martín Barajas Sichacá por su dedicación, paciencia y constante apoyo durante la realización de este proyecto, a la planta docente que nos formó no solo como matemáticos sino como profesionales con un enfoque social. De manera particular yo Dairon Alonso quiero agradecer a mi madre que desde el cielo me acompaño en cada paso, a mi padre me ha brindado su apoyo incondicional, a mi pareja cuyo ánimo y aliento fueron mi sostén en momentos de debilidad y a toda mi familia que estuvieron en cada paso. Finalmente, yo David quiero agradecer a mis padres y amigos por el apoyo y creer siempre en mí.

1. Introducción

Las formas cuadráticas son objetos matemáticos fundamentales que han intrigado a matemáticos durante siglos. Estas funciones polinómicas de segundo grado han encontrado su aplicación en una amplia gama de disciplinas, desde la física y la ingeniería hasta la economía y la informática. Su estudio no solo ha revelado propiedades inherentes a las estructuras algebraicas, sino que también ha permitido abordar problemas prácticos con elegancia y precisión. En esta monografía, exploramos en profundidad las formas cuadráticas y su clasificación a través de dos herramientas poderosas: el Lema de Morse y el Lema de Separación. Estos lemas, aunque aparentemente abstractos, proporcionan una perspectiva reveladora sobre la naturaleza de las formas cuadráticas y cómo se comportan en diferentes contextos. La monografía comienza con una revisión exhaustiva de las formas cuadráticas, desde sus definiciones básicas hasta sus propiedades más avanzadas. Luego, nos sumergimos en el fascinante mundo del Lema de Morse, un resultado que establece una conexión profunda entre la topología y la teoría de formas cuadráticas. Exploraremos cómo este lema nos permite comprender la estructura de las variedades definidas por formas cuadráticas y cómo podemos utilizarlo para clasificarlas de manera efectiva. Posteriormente, nos adentramos en el Lema de Separación, otro resultado crucial que arroja luz sobre la relación entre las formas cuadráticas y los conjuntos en el espacio euclidiano. Este lema nos proporciona herramientas para distinguir entre diferentes formas cuadráticas y comprender su comportamiento en términos de conjuntos convexos. A lo largo de esta monografía, no solo nos enfocamos en la teoría abstracta, sino que también exploramos aplicaciones concretas y ejemplos ilustrativos que demuestran la relevancia y la versatilidad de estos conceptos.

2. Preliminares

En este capítulo, se presenta una breve contextualización de los conceptos fundamentales necesarios para comprender la formas cuadráticas.

Definición 1 (**Forma cuadrática** [1])**.** Una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}$ es una aplicación $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que a cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ le hace corresponder un número real dado por:

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2b_{ij} x_i x_j,$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$, y que corresponde a un polinomio homogéneo de segundo grado en las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Esta expresión polinómica puede expresarse como

una expresión matricial de la forma:

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \Lambda \mathbf{x}.$$

donde la matriz Λ asociada a la forma cuadrática, es una matriz simétrica de orden n cuyos elementos de la diagonal principal son los coeficientes de los términos cuadráticos de la expresión polinómica, y los restantes elementos de la matriz son la mitad de los coeficientes de los términos no cuadráticos de dicha expresión.

Definición 2 (**Puntos Críticos** [1])**.** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un mapeo suave. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto critico de f si

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} = ... = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} = 0.$$

De esto tenemos que existen dos tipos de puntos críticos, los primeros, los puntos criticos no degenerados, definidos así:

Definición 3 (**Puntos Críticos No Degenerados** [1])**.** Se dice que $x_0 \in f$ es un punto critico no degenerado cuando $D^2 f \mid_{x_0}$ es una forma cuadrática no degenerada, es decir, su rango es igual al número de variables n, esto es equivalente a decir que la matriz Hessiana $Hf \mid_{x_0} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{x_0}$ sea no singular, es decir, el determinante de la matriz Hessiana es distinto de cero.

Para definir el tipo de **Puntos Críticos Degenerados**, diremos que es el caso contrario a este, lo que quiere decir que la matriz Hessiana $Hf \mid_{x_0}$ es singular, por tanto, el determinante de dicha matriz es igual a cero.

Definición 4 (**Ley de Inercia de Sylvester** [2])**.** Sea una forma cuadrática $q(x)$ definida sobre el espacio vectorial E sobre K, entonces todas las matrices diagonales asociadas a dicha forma cuadrática, tienen el mismo número de elementos positivos y negativos. A este par de números se les llama SIGNATURA. La signatura es pues un invariante de la forma cuadrática.

Definición 5 (**Punto crítico de Morse** [3])**.** Un *punto crítico de Morse* es un punto p en el dominio de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(p) = 0$ y la matriz Hessiana $H_f(p)$ es no degenerada (es decir, $\det(H_f(p)) \neq 0$).

Definición 6 (**Módulo degenerado** [4])**.** Un *módulo degenerado* es una función diferenciable que, en un entorno de un punto crítico degenerado p (donde $\nabla f(p) = 0$ y $H_f(p)$ es singular), no puede ser expresada como una forma cuadrática.

Definición 7 (**Módulo de Morse** [3])**.** Una *módulo de Morse* es una función diferénciale $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que, en un entorno de un punto crítico p (donde $\nabla f(p) = 0$ y la matriz Hessiana $H_f(p)$ es no degenerada).

Definición 8 (**Jet** [5])**.** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función suave y $p \in \mathbb{R}^n$ un punto. El *k-jet* de f en p, denotado $j^k_p(f)$, es la clase de equivalencia de funciones que coinciden con f en p en todas las derivadas parciales hasta el orden k. Es decir, dos funciones f y g tienen el mismo *k-jet* en p si:

$$f(p) = g(p), \quad \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(p) = \frac{\partial^\alpha g}{\partial x^\alpha}(p) \quad \text{para todo multi-índice } |\alpha| \leq k.$$

Definición 9 (**Jet suficiente** [5])**.** Un *k-jet suficiente* es un *k-jet* que describe completamente el comportamiento cualitativo local de una función alrededor de un punto. Si el *k-jet* es suficiente, las derivadas de orden superior a k no son necesarias para determinar la estructura local de la función.

Teorema 1 (Teorema de la función inversa). Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable en un conjunto abierto que contiene a, y que $\det Df(a) \neq 0$. Entonces existe un conjunto abierto V que contiene a y un conjunto abierto W que contiene a $f(a)$ tal que $f : V \to W$ tiene una inversa continua $f^{-1} : W \to V$, la cual es diferenciable y, para todo $y \in W$, se satisface:

$$Df^{-1}(y) = \left[Df(f^{-1}(y))\right]^{-1}.$$

Este teorema se aborda en el curso de Análisis Vectorial, y su demostración se encuentra en el libro *Calculus on Manifolds* [6] de Michael Spivak.

Lema 1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un mapeo suave, es decir f es diferenciable infinitamente en una vecindad de 0 con $f(0) = 0$. Entonces en una vecindad posiblemente más pequeña existen funciones $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f = \sum_{i=1}^n x_i g_i$ donde cada g_i es suave y $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid_0$.

Demostración:
Tenemos que $f(x_1, ..., x_n)$ un mapeo y lo vamos a expresar así:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(f(tx_1, \ldots, tx_n)\right) \, dt.$$

Aquí, $f(tx_1, \ldots, tx_n)$ depende de t a través de las variables $tx_1, \ldots, tx_n$.
La derivada total de $f(tx_1, \ldots, tx_n)$ con respecto a t se calcula usando la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(f(tx_1, \ldots, tx_n)\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(tx_i).$$

Sabemos que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(tx_i) = x_i$. Haciendo uso del **Teorema Fundamental del Cálculo**.

Sustituyendo esto, obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(tx_1,\ldots,tx_n)\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_n)\cdot x_i.$$

Sustituimos esta expresión en la integral de la primera fórmula:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_n)\cdot x_i\,dt.$$

Así pues, tenemos la siguiente expresión

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{(tx_1,\ldots,tx_n)}\cdot x_i\,dt.$$

$$f(x_1,...,x_n)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(tx_1,...,tx_n))dt.$$

$$f(x_1,...,x_n)=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mid_{(tx_1,...,tx_n)}\cdot x_i dt.$$

Por lo tanto, definamos ahora
$g:[0,1]\to\mathbb{R}$. Un mapeo suave, tal que:

$$g_i(x_1,...,x_n)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}\mid_{(tx_1,...,tx_n)}dt.$$

Si diferenciamos parcialmente con respecto a x_i.
Esto lo podemos hacer ya que $f(tx_1,\ldots,tx_n)$ es suave (continuamente diferenciable) en t y $\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_n)\cdot x_i$ es integrable en $[0,1]$.
De este modo, vamos a obtener que:

$$g_i(0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}\mid_0 .$$

Así queda demostrado el lema. ■

Teorema 2 (Teorema de la Función Implícita)

Supongamos que $F(x,y)$ es continuamente diferénciale en una vencidad de un punto $(a,b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ y que $F(a,b)=0$. Supongamos que $F_y(a,b)\neq 0$. Entonces existen $\delta>0$ y $\epsilon>0$ y una caja $B=\{(x,y):\|x-a\|<\delta,|y-b|<\epsilon\}$ tal que:

1. Para cada x tal que $\|x-a\|<\delta$, existe un único y tal que $|y-b|<\epsilon$ para el cual $F(x,y)=0$. Esta correspondencia define una función $f(x)$ en $\{\|x-a\|<\delta\}$ tal que
$$F(x,y)=0\Leftrightarrow y=f(x)\text{ para }(x,y)\in B.$$

2. f es continua.

3. f es continuamente diferenciable y

$$Df(x) = -\frac{D_x F(x, f(x))}{F_y(x, f(x))},$$

da la derivada de la función $f(x)$, que está implícitamente definida por $F(x, y) = 0$.Donde $Df = [f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}]$ y $D_x F = [F_{x_1}, \ldots, F_{x_n}]$.

Este teorema se aborda en el curso de Análisis Vectorial, y su demostración se encuentra en el libro *Calculus on Manifolds* [6] de Michael Spivak.

3. Formas cuadráticas

En está sección vamos a abordar algunas propiedades de las forma cuadraticas, enfocandonos en su definición, expresión matricial, rango, firma y sus clasificaciones.
Recordando la **Definición 1**, vamos a llamar $\Lambda = (\lambda_{ij})$ a la matriz de la forma cuadrática, por tanto, $q(x) = x\Lambda x^T$. Si reemplazamos Λ por$\frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^T) = M$, podemos ver que la forma cuadrática permanece sin cambios, es decir, M es simétrica, así pues, $M = M^T$. De esto podemos concluir que cada forma cuadrática puede escribirse como $q(x) = xMx^T$ para M simétrica y asumiremos dicho caso. Todas las formas cuadráticas pueden simplificarse (se refiere a la posibilidad de reescribir la forma cuadrática en una forma más manejable que facilita el análisis. Al hacerlo, es más fácil ver las propiedades de la forma cuadrática, como su positividad, negatividad y otras características relevantes) mediante una transformación lineal no singular de las n variables así: $d_1 y_1^2 + ... + d_n y_n^2$. Para esto, se tienen varios pasos, el primero es alcanzar una forma con $\lambda_{11} \neq 0$ si existe algún termino $\lambda_{ii} \neq 0$ entonces la transformación lineal que intercambia x_1 y x_i logra hacerlo. Si todos los términos diagonales son cero, entonces algún termino fuera de la diagonal $\lambda_{ij} (i \neq j)$ es diferente de cero y por simetría $\lambda_{ji} \neq 0$, por tanto la forma sería la siguiente: $q(x) = 2\lambda_{ij} x_i x_j + A$. Siendo A los términos que involucran otras variables. Ahora, si $y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_j)$, $y_j = \frac{1}{2}(x_i - x_j)$ y el resto de los x_k sin cambio alguno, así $(y_k = x_k)$, se obtiene el termino $2\lambda_{ij} y_i^2 - 2\lambda_{ij} y_j^2$, donde se tiene que los coeficientes diagonales son distintos de cero y por tanto el argumento anterior se aplica. Después de esto, podemos retomar la notación que veniamos manejando y asumiremos que $\lambda_{11} \neq 0$, luego

$$q(x) = \lambda_{11} \left(\sum_{i,j} \mu_{ij} x_i x_j \right)$$

con $\mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{11}}$.

Los términos en los cuales x_1 ocurre, son los siguientes:

$$x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} \mu_{1j} x_1 x_j = \left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \mu_{1j} x_j \right)^2 - \left(\sum_{j=2}^{n} \mu_{1j x_j} \right)^2 .$$

Luego de esto, diremos que:

$$y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \mu_{1j} x_j,$$

con $y_i = x_i$ para $i > 1$. Aplicando la transformación lineal no singular, tenemos que:

$$q(y) = \lambda_{11} y_1^2 + \tilde{q}(y_2, ..., y_n),$$

donde $\tilde{q}$ es una forma cuadrática en variables $y_2, \ldots, y_n$, que al repetir dicho proceso las veces que se necesite, se llegará al resultado. Si tomamos el cambio de x_i por $z_i = \frac{x_i}{\sqrt{|d_i|}}$, con $|d_i| \neq 0$, nos lleva a una expresión similar pero solo con coeficientes $-1, 1, 0$. Si cambiamos este orden para obtener los 1 primero, luego los -1 y descartando los 0, obtenemos que cualquier forma cuadrática en n variables, aplicando una transformación lineal no singular de sus variables, puede escribirse de la siguiente manera:

$$z_1^2 + \ldots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \ldots - z_s^2,$$

con $s \leq n$. En esta expresión, r representa el número de términos con coeficientes positivos, mientras que s es el total de términos en la forma cuadrática transformada. Se demuestra que el número s se conoce como el rango de la forma cuadrática y es igual al rango de su matriz asociada, lo que significa que no depende de la transformación lineal elegida. El rango s se puede calcular mediante la reducción a forma escalonada. La ley de inercia de Sylvester afirma que el valor de r también es independiente de la elección de la transformación lineal.

$$2r - s = r - (s - r) = \sum_{i=1}^{r} a_i - \sum_{j=1}^{s-r} b_j$$

describe la relación entre estos términos, donde a_i son las contribuciones de los términos con coeficiente positivo ($z_1^2, z_2^2, \ldots, z_r^2$, con $a_i = 1$) y b_j son las contribuciones de los términos con coeficiente negativo ($z_{r+1}^2, z_{r+2}^2, \ldots, z_s^2$, con $b_j = 1$). Nos permite cuantificar la relación entre el número de términos en la forma cuadrática, su rango y la naturaleza de los coeficientes (positivos o negativos). Esto es útil para entender la geometría subyacente de la forma cuadrática y su comportamiento bajo transformaciones lineales. La firma de la forma cuadrática, describe las propiedades geométricas de la forma, como su naturaleza (definida positiva, negativa o indefinida) y se mantiene invariante bajo transformaciones lineales, $q(x)$ se refiere a ciertas características particulares de esa forma. Básicamente, nos dice cómo se comporta la forma cuadrática cuando aplicamos transformaciones lineales a sus variables. Cualquier forma cuadrática se puede

describir de manera única según su rango (el número máximo de variables linealmente independientes) y su firma (que es una forma de describir la geometría subyacente de la forma). Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ requiere $\frac{1}{2}n(n+1)$ números para especificarla (es decir, 55 números cuando $n = 10$). Pero, en realidad, podemos describirla de manera mucho más simple usando solo n números, cada uno de los cuales es ± 1 o 0, que son los coeficientes de la expresión anterior. De hecho, también podemos describirla con solo dos números, r y s, que son su rango y firma respectivamente. Podemos visualizar la clasificación por rango y firma de una forma cuadrática real de dos variables de manera geométrica: $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Las diferentes posibilidades son:

(i)	$u^2 + v^2$	(rango 2, firma 2)
(ii)	$u^2 - v^2$	(rango 2, firma 0)
(iii)	$-u^2 - v^2$	(rango 2, firma -2)
(iv)	u^2	(rango 1, firma 1)
(v)	$-u^2$	(rango 1, firma -1)
(vi)	0	(rango 0, firma 0)

Esta clasificación puede encontrarse en el libro *Catastrophe Theory and its Applications* [1] de Tim Poston and Ian Stewart, en la página 22.

Ahora bien, el caso (iv) ocurre precisamente cuando q es un cuadrado perfecto, digamos $(px+vy)^2$. Pero la ecuación $q = 0$ se puede resolver utilizando la fórmula habitual para cuadráticas, que nos da: $x = [\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}]y$. Sin embargo, las soluciones de $(px+vy)^2 = 0$ se dan por: $x = -\frac{v}{p}y$, y la única manera en que estas soluciones pueden coincidir es si $b^2 - ac = 0$, de modo que las dos soluciones se reduzcan a una, repetida dos veces. Por otro lado, si $b^2 - ac = 0$, entonces:

$$\left[x\sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{a}}y\right]^2 = ax^2 + 2bxy + \frac{b^2}{a}y^2 = q(x, y).$$

Así, $q(x)$ se puede reducir a u^2 exactamente cuando $b^2 = ac$, y cuando a y c son positivos. Parece ser $-u^2$ cuando $b^2 = ac$ y a y c son negativos. En el caso (vi), por supuesto, tenemos que $a = b = c = 0$, por lo tanto, $b^2 = ac$ trivialmente. Así, los casos (iv) , (v), (vi) se distinguen por la condición $b^2 = ac$, y entre ellos distinguimos aún más por el signo (+ , 0, -) de a (o c). Se refiere a cómo el signo de estos coeficientes afecta la naturaleza de la forma cuadrática : **Signo positivo (+)**, cuando $a > 0$ y $c > 0$, la forma cuadrática $q(x, y)$ puede representar una superficie elíptica, lo que significa que toma valores positivos (caso (iv)). **Cero (0)**, en el caso $a = 0$ o $c = 0$, se llega a una forma degenerada que no tiene una superficie bien definida (caso (vi)). **Signo negativo (−)**, cuando $a < 0$ y $c < 0$, la forma cuadrática $q(x, y)$ puede ser similar a un hiperboloide, donde la mayoría de los valores son negativos (caso (v)). Si consideramos que (a, b, c)

son las coordenadas de un punto en $\mathbb{R}^3$ y trazamos el conjunto S de tales puntos para los cuales $b^2 = ac$, vemos que es un doble cono, con el vértice en el origen, en el que ambos ejes a y c yacen; además, separa los tres casos restantes como se muestra en la **Figura 1**. Así que q es del tipo (ii) cuando $b^2 > ac$, es decir, el 'exterior' del cono; tipo (i) cuando $b^2 < ac$ y a es positivo, es decir, el interior de la mitad positiva del cono; tipo (iii) cuando $b^2 < ac$ y a es negativo, es decir, el interior de la mitad negativa del cono. En vista de estos resultados, llamaremos a una forma cuadrática degenerada si su rango r es menor que el número n de variables. La diferencia $n - r$ es la corango y mide el número de direcciones independientes en las que es degenerada, como es especialmente claro en la forma diagonalizada. La degeneración ocurre si y solo si el determinante de su matriz es cero. Así, la matriz de la forma de dos variables anterior es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

y su determinante es $ac - b^2$. Este determinante se conoce como el discriminante de la forma cuadrática. Llamamos a S, definido como anteriormente, el cono discriminante.

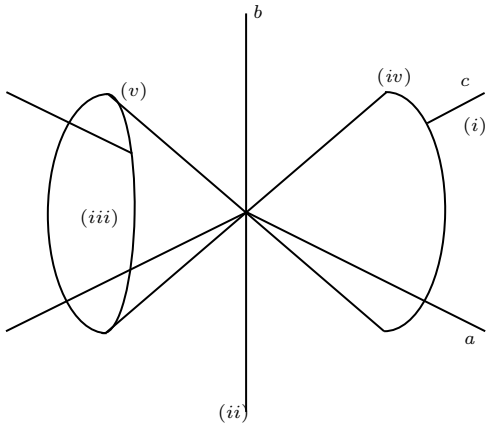


Figura 1: Exterior del cono discriminante

Las regiones del cono discriminante, según los casos numerados, se pueden describir de la siguiente manera: (i),representa el interior de la mitad positiva del cono, donde $b^2 < ac$ y $a > 0$. La forma cuadrática es elíptica, tomando valores positivos.(ii), Corresponde al exterior del cono, donde $b^2 > ac$. La forma cuadrática es hiperbólica.(iii), indica el interior de la mitad negativa del cono, donde $b^2 < ac$ y $a < 0$. La forma cuadrática toma valores negativos.(iv), se presenta cuando $q(x, y)$ se reduce a u^2 bajo la condición $b^2 = ac$ con $a > 0$ y $c > 0$, representando una superficie elíptica.(v), similar al caso (iv), pero con signo negativo, donde $b^2 = ac$ y $a < 0$, indicando una forma cuadrática similar a un hiperboloide.

4. Lema de Morse

Para la finalidad de este trabajo, enunciar y demostrar el lema de Morse es indispensable, por ello, tendremos que hacer uso de las formas cuadráticas, el teorema de la función inversa y un lema necesarios para llegar a dicha demostración, por tanto, lo vamos a presentar ahora.

Lema 2. (Lema de Morse) Sea u un punto crítico no degenerado del mapeo suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces, existe un sistema de coordenadas local $y_1, ..., y_n$ en una vecindad U de u con $y_i(u) = 0$ para todo i, tal que:

$$f = f(u) - y_1^2 - ... - y_t^2 + y_{t+1}^2 + ... + y_n^2.$$

Demostración:
Trasladamos el origen al punto u, de modo que asumimos que $u = 0$ y que $f(u) = f(0) = 0$. Por el **Lema 1**, podemos escribir $f(x)$ en una vecindad de 0 como:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j g_j(x),$$

donde 0 es un punto crítico, lo que implica que $g_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_0$. Aplicando el **Lema 1** sobre cada g_j, existen funciones suaves h_{ij} tales que

$$g_i(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i h_{ij}(x).$$

Así, se puede expresar $f(x)$ como:

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x). \qquad \textbf{(1)}$$

Reemplazando h_{ij} por $H_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, donde H_{ij} es simétrica, y diferenciando parcialmente dos veces en **(1)**, obtenemos que:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_0 = 2H_{ij}(0).$$

Esto nos da la matriz

$$[H_{ij}(0)] = \left[\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_0\right],$$

la cual es no singular, ya que 0 es un punto crítico no degenerado. Para continuar, usamos un argumento inductivo. Supongamos que existen coordenadas locales $u_1, ..., u_n$ en una vecindad U_1 de 0 tales que:

$$f = \pm u_1^2 \pm ... \pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}(u_1, ..., u_n). \qquad \textbf{(2)}$$

Aquí, $H_{ij} = H_{ji}$ es una matriz simétrica que describe las interacciones entre las coordenadas u_i y u_j para $i, j \geq r$. Para simplificar aún más, realizamos un cambio lineal en las coordenadas (como en la reducción de formas cuadráticas), suponiendo que $H_{rr}(0) \neq 0$. Definimos entonces

$$g(u_1, \ldots, u_n) = \sqrt{|H_{rr}(u_1, \ldots, u_n)|}.$$

Aplicamos el **teorema de la función inversa** aquí porque queremos asegurar que g sea una función suave en una vecindad de 0, lo cual es esencial para garantizar que los cambios de coordenadas que vamos a introducir mantengan la suavidad de la función en esta vecindad. De esta manera, podemos trabajar con g en una vecindad $U_2 \subset U_1$ de 0. Introducimos un cambio de coordenadas a $(v_1, \ldots, v_n)$, definido por:

$$v_i = u_i \quad (i \neq r), \quad v_r = g(u_1, ..., u_n)\left(u_r + \sum_{i>r} \frac{u_i H_{ir}(u_1, ..., u_n)}{H_{rr}(u_1, ..., u_n)}\right). \qquad \textbf{(3)}$$

Aquí nuevamente usamos el **teorema de la función inversa** para garantizar que la matriz Jacobiana en 0 es no singular, lo cual implica que el cambio de coordenadas es un difeomorfismo local en una vecindad U_3 de 0. Así, $(v_1, \ldots, v_n)$ forma un sistema de coordenadas locales válidos. Consideramos ahora la siguiente expresión de f en términos de estas nuevas coordenadas $(v_1, \ldots, v_n)$:

$$u_r u_r H_{rr}(u_1, \ldots, u_n) + 2 \sum_{j=r+1}^{n} u_j u_r H_{jr}(u_1, \ldots, u_n). \qquad \textbf{(4)}$$

Esta expresión contiene los términos de **(2)** con $i \circ j = r$. Comparando las expresiones **(2)** y **(4)**, obtenemos:

$$\pm v_r^2 - \frac{1}{H_{rr}(u_1, \ldots, u_n)}\left(\sum_{i>r} u_i H_{ir}(u_1, \ldots, u_n)\right)^2.$$

El signo $\pm$ se elige de acuerdo con el signo de H_{rr}: $(+)$ si $H_{rr} > 0$ y $(-)$ si $H_{rr} < 0$. Así, la expresión en **(2)** se puede escribir de la forma:

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \pm v_1^2 \pm \cdots \pm v_r^2 + \sum_{i,j \geq r+1} v_i v_j H'_{ij}(v_1, \ldots, v_n),$$

donde H'_{ij} es una nueva matriz simétrica. Así, hemos avanzado inductivamente de r a $r+1$ en la expresión **(2)**. Por tanto, el proceso es cierto para $r = n$, completando la demostración del Lema de Morse. Con esto, hemos caracterizado los puntos críticos de f en términos de una forma cuadrática diagonalizada, finalizando la demostración. ■

Vamos a revisar un ejemplo donde veremos de una forma más ilustrada la funcionalidad del Lema de Morse y su ayuda para caracterizar los puntos criticos de una forma cuadratica.

Ejemplo

Consideremos la función cuadrática en $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 5.$$

Para encontrar los puntos críticos de la función, necesitamos calcular las derivadas parciales con respecto a x y y y luego igualarlas a cero. Primero hacemos derivadas parciales respecto a x e y: $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6y + 6$. Igualamos ambas derivadas a cero:

$$4x - 4 = 0 \implies 4x = 4 \implies x = 1, \quad \text{y} \quad 6y + 6 = 0 \implies 6y = -6 \implies y = -1,$$

Entonces, el punto crítico es $u = (1, -1)$. Para comprobar que el punto crítico es no degenerado, calculamos el Hessiano H de la función f. El Hessiano se forma a partir de las segundas derivadas.

$$H|_{(1,-1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Calculamos las segundas derivadas: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. Así, el Hessiano es:

$$H|_{(1,-1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante del Hessiano: $\det(H) = 4 \cdot 6 - 0 \cdot 0 = 24$. Dado que el determinante es positivo y ambos autovalores (4 y 6) son positivos, el Hessiano es positivo definido. Esto implica que el punto $u = (1, -1)$ es un punto crítico no degenerado. Utilizamos un cambio de coordenadas locales alrededor del punto crítico u. Definimos nuevas coordenadas: $y_1 = x - 1$ y $y_2 = y + 1$. De esta manera, entorno a

u, tenemos que: $y_1(u) = 1 - 1 = 0$ y $y_2(u) = -1 + 1 = 0$. Ahora, vamos a expresar f en términos y_1, y_2.Sustituyendo x e y, $x = y_1 + 1$ y $y = y_2 - 1$ en la forma f:

$$f(y_1, y_2) = 2(y_1 + 1)^2 + 3(y_2 - 1)^2 - 4(y_1 + 1) + 6(y_2 - 1) + 5,$$

Ahora, desarrollamos cada término:

$$2(y_1 + 1)^2 = 2(y_1^2 + 2y_1 + 1) = 2y_1^2 + 4y_1 + 2,$$

$$3(y_2 - 1)^2 = 3(y_2^2 - 2y_2 + 1) = 3y_2^2 - 6y_2 + 3,$$

$$-4(y_1 + 1) = -4y_1 - 4, \quad 6(y_2 - 1) = 6y_2 - 6.$$

Procedemos a sumar todos estos términos:

$$f(y_1, y_2) = (2y_1^2 + 4y_1 + 2) + (3y_2^2 - 6y_2 + 3) + (-4y_1 - 4) + (6y_2 - 6) + 5.$$

Agrupando los términos:

$$f(y_1, y_2) = 2y_1^2 + 3y_2^2 + (4y_1 - 4y_1) + (-6y_2 + 6y_2) + (2 + 3 - 4 - 6 + 5),$$

$$= 2y_1^2 + 3y_2^2 + 0 + 0 + 0.$$

De modo que la forma se simplifica a: $f(y_1, y_2) = 2y_1^2 + 3y_2^2$. La forma cuadrática $f(y_1, y_2) = 2y_1^2 + 3y_2^2$ es claramente no negativa y alcanza su mínimo en el origen $(y_1, y_2) = (0, 0)$. Esto significa que en el punto crítico $u = (1, -1)$, f alcanza un mínimo local. La forma cuadrática es convexa, ya que los coeficientes de y_1^2 y y_2^2 son positivos. El punto $u = (1, -1)$ es un mínimo local de la función $f(x, y)$. Además, la forma cuadrática se ha simplificado a una forma que revela su naturaleza (mínimo) fácilmente.

5. Lema de Separación

Si una función tiene un jet que puede garantizarse para describir su comportamiento cualitativo, en el sentido anterior, se dice que la función es determinada y el jet es suficiente. Cuando estamos ignorando la distinción técnica entre jets y funciones, también podemos llamar determinados a los jets.

Una versión más sofisticada del **Lema de Morse** nos permite ordenar, de alguna manera, un punto crítico degenerado, al 'Separar', la función en un módulo de Morse en un conjunto de variables que involucra un módulo degenerado en un conjunto diferente, cuyo número es igual al corango. Se está indicando que la parte degenerada de la función tiene una cantidad de variables que corresponde al corango del punto crítico en

cuestión. Esto significa que, al separar la función, se está creando una estructura más manejable al identificar el número de variables que influyen en la parte degenerada, y estas son las que están directamente relacionadas con el fenómeno de degeneración en ese punto crítico.

Formalmente, se enuncia así:

Lema 3. (Lema de Separación) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función suave, con $Df(0) = 0$ cuyo Hessiano en 0 tiene rango r (y corango $n-r$). Entonces, f puede ser vista a través de un sistema de coordenadas como una suma de funciones tales que:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_r^2 + \hat{f}(x_{r+1}, \ldots, x_n),$$

donde $\hat{f} : \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}$ es suave.

Demostración: Mediante un cambio de coordenadas lineales $u = u(x)$ podemos transformar el Hessiano de f en 0 en la forma

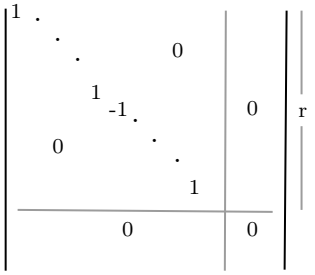


Figura 2: Hessiano de f en 0

El **Teorema de la Función Implícita** ahora nos permite expresar el conjunto de puntos donde las primeras r derivadas parciales de f se anulan, definido así:

$$\{u \mid \frac{\partial f}{\partial u_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial u_r} = 0\}$$

(localmente) como en el gráfico (Figura 2). Esta parametrización implica que los valores de las primeras r coordenadas, $u_1, \ldots, u_r$, pueden ser expresados en función de $u_{r+1}, \ldots, u_n$ a través de funciones suaves $g_1, \ldots, g_r$. Así, cada u_i (con $i \leq r$) depende suavemente de $u_{r+1}, \ldots, u_n$. Por tanto, nos resulta la expresión:

$$\{(g_1(u_{r+1}, \ldots, u_n), \ldots, g_r(u_{r+1}, \ldots, u_n), u_{r+1}, \ldots, u_n)\}$$

De una función suave

$$g : \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^r$$

Usamos g para convertir este gráfico en el eje $(u_{r+1}, \ldots, u_n)$, mediante un mapeo φ, que veremos como un difeomorfismo local, definido por

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = (u_1 + g_1(u_{r+1}, \ldots, u_n), \cdots, u_r + g_r(u_{r+1}, \ldots, u_n), u_{r+1}, \ldots, u_n)\,.$$

(Este paso es crucial para el argumento, como un paso inicial de ordenamiento para obtener el tipo correcto de dependencia en $u_{r+1}, \ldots, u_n$.). Sea $F = f \circ \varphi$. Localmente, cada función

$$F_{u_{r+1},\ldots,u_n} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$$

dada por

$$(u_1, \ldots, u_r) \mapsto F(u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)$$

tiene un punto crítico de Morse en el origen de $\mathbb{R}^r$, aunque no necesariamente tomando el valor 0 en ese punto. Escribimos

$$\hat{f}(u_{r+1}, \ldots, u_n) = F(0, \ldots, 0, u_{r+1}, \ldots, u_n).$$

Ahora, el argumento que aparece en la primera parte de la demostración del Lema de Morse puede ser utilizado (tras generalizar el Lema al caso en el que f se anula a lo largo de un multi-eje) para escribir

$$F(u) = \hat{f}\,(u_{r+1}, \cdots, u_n) + \sum_{k,m \le r} u_k u_m h_{km}^{(u_{r+1},\cdots,u_n)}\,(u_1, \cdots u_r)\,,$$

donde para cada elección de $u_{r+1}, \ldots, u_n$, la función, $h_{km}^{(u_{r+1},\cdots,u_n)} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ es suave. El resto de la demostración del Lema de Morse, aplicada de manera dependiente de $(u_{r+1}, \ldots, u_n)$ a esta expresión, reduce F a la forma

$$\hat{f}(u_{r+1}, \ldots, u_n) \pm v_1^2 \pm \cdots \pm v_r^2$$

y queda demostrado el teorema. ■

En esencia, todo el proceso de reducción a una forma simplificada, utilizado para demostrar el Lema de Morse depende suavemente de $(u_{r+1}, \ldots, u_n)$, una vez que se ha realizado el ordenamiento inicial. Este teorema dice, en un sentido fuerte, que el comportamiento de una forma cerca de un punto crítico degenerado puede encontrarse estudiando una forma que involucra un número de variables igual al corango del Hessiano. Así, por ejemplo, un punto crítico de una forma de 2001 variables, con corango 3, requiere que estudiemos solo una forma de tres variables. Esta reducción a un pequeño

número de variables es lo que hace que el Lema de Separación sea tan útil y sorprendente. El corango del Hessiano es también el corango de la función en el punto crítico correspondiente. Para finalizar, veremos un ejemplo donde ilustraremos la "fuerza"que tiene el Lema de Separación para el análisis de puntos críticos de formas cuadráticas.

Ejemplo

Consideremos la función

$$f(x, y, z) = x^2 + xy^2 + z^3.$$

definida en $\mathbb{R}^3$. Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento de f cerca del origen aplicando el lema de separación, que nos permitirá entender la forma local de esta función alrededor de su punto crítico. Para comenzar, es necesario identificar el punto crítico de f. Esto lo logramos calculando las derivadas parciales de f respecto de cada una de sus variables:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2.$$

Evaluamos ahora estas derivadas en el punto $(0, 0, 0)$, lo que nos da

$$Df(0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

De este modo, vemos que el origen es un punto crítico de f, ya que todas las derivadas parciales se anulan en este punto. Luego, para estudiar la naturaleza del punto crítico, es necesario examinar la matriz Hessiana de f, que es la matriz de las segundas derivadas parciales. En este caso, calculamos cada elemento del Hessiano:

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2y & 0 \\ 2y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix}.$$

Al evaluar el Hessiano en el origen $(0, 0, 0)$, obtenemos:

$$H_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Evaluamos el Hessiano en el origen, donde observamos que su rango es 1, ya que solo el termino x^2 contribuye al rango. Lo cual también indica que el corango del Hessiano es $3 - 1 = 2$. Definimos el siguiente cambio de coordenadas $x = x - \frac{1}{2}y^2$, $y = y$ y $z = z$; entonces, en estas nuevas coordenadas, podemos reescribir f como:

$$f(x, y, z) = x^2 + z^3 + y^4,$$

Con esta información y gracias al Lema de Separación, podemos deducir que f es localmente equivalente a una función de la forma

$$f(x_1, x_2, x_3) = \pm x_1^2 + \hat{f}(x_2, x_3).$$

donde $\hat{f}(x_2, x_3)$ es una función suave que cuyo hessiano tiene rango 0 de dos variables.

6. Conclusiones

- **Clasificación de Formas Cuadráticas**: A través de los lemas presentados, se ha demostrado que todas las formas cuadráticas pueden reducirse a una forma estándar mediante transformaciones lineales, lo que simplifica el análisis de su comportamiento y propiedades. Esto es fundamental para aplicaciones en diversas ramas, como la física y la geometría diferencial.

- **Lema de Morse**: Este lema ha sido crucial para entender la relación entre la topología y la teoría de formas cuadráticas, proporcionando una caracterización precisa de los puntos críticos. Hemos mostrado cómo, bajo ciertas condiciones, las formas cuadráticas pueden reducirse a una combinación de términos que indican si un punto es de tipo máximo, mínimo o silla.

- **Lema de Separación**: Este resultado ha demostrado ser una herramienta poderosa para separar los componentes críticos de una forma cuadrática, facilitando el análisis de problemas complejos en varias dimensiones. El lema permite identificar los componentes degenerados y no degenerados, simplificando así el estudio de los puntos críticos.

- **Aplicaciones y Ejemplos**: A lo largo del trabajo se han presentado ejemplos prácticos que ilustran la aplicabilidad de estos lemas, demostrando cómo se pueden utilizar para simplificar y resolver problemas que involucran formas cuadráticas en espacios de distintas dimensiones.

En conclusión, este trabajo ha resaltado la relevancia de las formas cuadráticas y los lemas de Morse y Separación en la clasificación y análisis de estructuras algebraicas complejas. Estos conceptos no solo son útiles en el ámbito teórico, sino que también encuentran aplicaciones en campos como la física, la economía y la ingeniería, lo que subraya su importancia en el desarrollo de nuevas teorías y modelos matemáticos.

Referencias

[1] T. Poston e I. Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications*. London, San Francisco, Melbourne: Pitman, 1978.

[2] J. M. C. Villalba, *Introducción al álgebra lineal*. Madrid, España: ESIC Editorial, 2004, pág. 539.

[3] J. Milnor, *Morse Theory*, 2nd. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1963.

[4] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade y A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*. Birkhäuser, 1985, vol. 1.

[5] D. Saunders, *Jet Bundles and Differential Operators*. Ellis Horwood, 1989.

[6] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1965, pág. 35.