Charly Jhoan Benavides Parra
Cod: 20092167005

CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO PARA DISTRIBUCIONES DE CARGA CONTINUA A PARTIR DE LA ECUACIÓN DE POISSON

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Matemáticas

August 9, 2017

A mis padres Nelcy Parra y Luis Benavides,
por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos,
por la motivación constante para seguir luchando, y el gran
esfuerzo que han hecho para que yo pueda llegar hasta aquí.

Mis más sinceros agradecimientos a Dios porque él siempre ha estado en los momentos más difíciles donde uno quiere detener el tren y bajarse pronto, a mis padres por su constante apoyo y esfuerzo incansable en incentivarme a cumplír mis metas, a mi director Milton Lesmes, quien con sus conocimientos sobre el tema, guió mi proceso desde el inicio hasta la culminación de este trabajo.

Contenidos

Parte I

Preliminares

1

PRELIMINARES

Siméon Denis Poisson:

(Pithiviers, Francia, 21 de junio de 1781 - Sceaux (Altos del Sena), Francia, 25 de abril de 1840) fue un físico y matemático francés al que se le conoce por sus diferentes trabajos en el campo de la electricidad y por sus publicaciones acerca de la geometría diferencial y la teoría de probabilidades.

Poisson nació en Pithiviers, Loiret, hijo de Siméon Poisson. Su padre sirvió como soldado raso en las guerras de Hanover, pero disgustado por el trato abusivo que recibió de los oficiales nobles, desertó. Cuando nació su hijo, ocupaba diversos cargos administrativos, y al parecer estuvo a la cabeza del gobierno local durante el período revolucionario.

Siméon Denis fue enviado primero con su tío, un cirujano de Fontainebleau, y comenzó a aprender el oficio, pero hizo pocos progresos. Tras mostrar los primeros signos de su talento como matemático, fue enviado a la Escuela Central de Fontainebleau, donde tuvo la oportunidad de tener una clase con un profesor receptivo, M. Billy, que se dio cuenta rápidamente de que era superado por su alumno, le alentó a aprender las ramas más difíciles de las matemáticas, y predijo su futura fama recordando unas líneas del famoso fabulista Jean de La Fontaine.

En 1798, ingresó en la École Polytechnique en Paris como primero de su promoción, y de inmediato comenzó a atraer la atención de los profesores de la escuela, quienes le dejaron libertad para tomar sus propias decisiones en cuanto a lo que iba a estudiar. En 1800, menos de dos años después de su ingreso, publicó dos libros de memorias, uno sobre el método de eliminación de Étienne Bézout, y el otro sobre el número de integrales de una ecuación en diferencias finitas. Este último fue examinado por Sylvestre Franois Lacroix y por Adrien-Marie Legendre, quien recomendó que se publicará en el "Recueil des savants étrangers" (Informe de científicos extranjeros), un honor sin precedentes para un joven de dieciocho años. Este éxito introdujo a Poisson en los más distinguidos círculos cientfícos. Joseph Louis Lagrange, a cuyas conferencias sobre la teoría de funciones asistió en la école Polytechnique, reconoció su talento desde el principio, y se convirtió en su amigo (el Mathematics Genealogy Project identifica a Lagrange como su asesor, pero esto puede ser una mera simplificación); mientras que Pierre-Simon Laplace, que estaba atento a los pasos de Poisson, lo consideraba casi como su hijo. El resto de su carrera, hasta su muerte en Sceaux cerca de París, casi fue ocupado totalmente por la composición y publicación de sus numerosas obras y en el cumplimiento de los deberes de los numerosos puestos educativos para los que fue nombrado sucesivamente.

Inmediatamente después de terminar sus estudios en la École Polytechnique, fue nombrado répétiteur (asistente de enseñanza) en la propia escuela, cargo que había ocupado sin remuneración cuando todavía era un estudiante en la escuela; sus compañeros de clase habitualmente le visitaban en su habitación después de alguna clase especialmente difícil para oírle repetirla y explicarla. Fue nombrado profesor adjunto (professeur suppléant) en 1802, y en 1806 profesor títular tras la marcha de Jean Baptiste Joseph Fourier, a quien Napoleón había enviado a Grenoble. En 1808 se convirtió en astrónomo del Bureau des Longitudes; y cuando la Faculté des sciences de Paris fue instituida en 1809, fue nombrado profesor de mecánica racional (professeur de mécanique rationelle). Posteriormente pasó a ser miembro del Instituto en 1812, examinador en la escuela militar (École Militaire) de Saint-Cyr en 1815, examinador de graduación en la Escuela Politécnica en 1816, consejero de la universidad en 1820, y geómetra del Bureau des Longitudes sucediendo a Pierre-Simon Laplace en 1827.

En 1817, se casó con Nancy de Bardi y con ella tuvo cuatro hijos. Su padre, cuyas experiencias tempranas le habían llevado a odiar a los aristócratas, le educó en los principios de la Primera República. A lo largo de la Revolución, el Imperio, y la siguiente restauración, Poisson no estuvo interesado en la política, concentrándose en las matemáticas. Durante el Primer Imperio se mantuvo leal a la República, negándose a jurar lealtad a Napoleón.

Fue nombrado barón en 1821; pero no obtuvo el diploma ni usó el título. En marzo de 1818, fue elegido Miembro de la Royal Society1 y en 1823 miembro extranjero de la Real Academia Sueca de Ciencias. La Revolución de 1830 pudo suponer la pérdida de todos sus honores; pero este desdoro para el gobierno de Luis Felipe de Orleans fue hábilmente evitado por Franois Arago: mientras que la "revocación" de los cargos de Poisson estaba siendo tratada por el Consejo de Ministros, Arago le facilitó una invitación a cenar en el Palacio Real, donde fue abierta y efusivamente recibido por el rey ciudadano, que "se acordó" de él. Después de esto, por supuesto, su degradación fue imposible, y siete años más tarde fue nombrado Par de Francia, no por razones políticas, sino como representante cientfico.

Convertido en un partidario acérrimo de la monarquía, es conocida su aversión al físico y matemático Louis Poinsot, con el que mantuvo enconadas discusiones científicas durante años, que adquirieron tintes políticos y acabaron con la destitución de Poinsot de sus cargos académicos cuando Poisson fue nombrado responsable de educación del nuevo gobierno monárquico en 1830. Como profesor de matemáticas se dice de Poisson que tuvo un éxito extraordinario, como era de esperar tras su temprano desempeño como répétiteur en la École Polytechnique. Como trabajador científico, su productividad es prácticamente insuperable. A pesar de sus muchos deberes oficiales, encontró tiempo para publicar áás de trescientas obras, varias de ellas extensos tratados; y muchas otras memorias dedicadas a tratar las ramas más abstrusas de la matemática pura, de la matemática aplicada, de la física matemática y de la mecánica racional.

UNO DE SUS TRABAJOS

Es conocida la corrección de Poisson de la ecuación diferencial de segundo orden de Laplace para el potencial:

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho$$

Hoy lleva su nombre (Ecuación de Poisson) o la ecuación de la teoría del potencial, publicada por primera vez en el Boletín de la Société Philomatique de Paris (1813). Si la función en un punto dado es $\rho = 0$, entonces se obtiene la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\phi = 0$$

Ecuación de Poisson:

En matemática y física, la ecuación de Poisson es una ecuación en derivadas parciales con un amplio uso en electrostática, ingeniería mecánica y física teórica. Se debe al matemático, geómetra y físico francés Siméon-Denis Poisson.

La ecuación de Poisson se define como:

$$\Delta\varphi = f$$

donde Δ es el operador laplaciano, y f y φ son funciones reales o complejas. En un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, toma la forma:

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\varphi(x,y,z) = f(x,y,z).$$

Si $f = 0$, la ecuación se convierte en la ecuación de Laplace.

$$\Delta\varphi = 0$$

La ecuación de Poisson junto con las condiciones de contorno homogéneas, constituye uno de los tres problemas clásicos relacionados con el operador laplaciano que se detallan a continuación. Concretamente el problema de Poisson es el problema de encontrar una función φ definida sobre el dominio Ω que satisfaga:

$$\Delta\varphi(x) = -c_n\rho(x) \text{ si } x \in \Omega \subset R^n$$
$$\varphi(\bar{x}) = 0 \text{ si } \bar{x} \in \partial\Omega.$$

Este tipo de problema puede ser resuelto de manera sencilla, mediante el método de la función de Green, para $n > 2$:

$$\varphi(x) = \frac{-c_n}{4\pi}\int \frac{\rho(\bar{x})d^n\bar{x}}{||x-\bar{x}||^{n-2}}$$

Carga eléctrica:

Es una propiedad física intrínseca de algunas partículas subatómicas que se manifiesta mediante fuerzas de atracción y repulsión entre ellas por la mediación de campos electromagnéticos. La materia cargada eléctricamente es influida por los campos electromagnéticos, siendo a su vez, generadora de ellos. La denominada interacción electromagnética entre carga y campo eléctrico es una de las cuatro interacciones fundamentales de la física.

Una de las principales características de la carga eléctrica es que, en cualquier proceso físico, la carga total de un sistema aislado siempre se conserva. Es decir, la suma algebraica de las cargas positivas y negativas no varía en el tiempo.

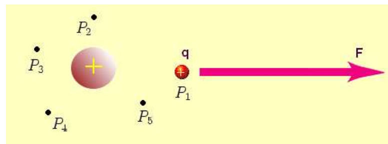
CAMPO ELECTROSTÁTICO

Las cargas eléctricas no precisan de ningún medio material para influir entre ellas y por ello las fuerzas eléctricas son consideradas fuerzas de acción a distancia. En virtud de ello se recurre al concepto de campo electrostático para facilitar la descripción, en términos físicos, de la influencia que una o más cargas ejercen sobre el espacio que las rodea.

Interacciones entre dos cargas Q y q
Considérese una carga **Q** fija en una determinada posición (ver figura). Si se coloca otra carga **q** en un punto P_1 a cierta distancia de **Q**, aparecerá una fuerza eléctrica actuando sobre **q**.

Si la carga **q** se ubica en otros puntos cualesquiera, tales como P_2, P_3, etc., en cada uno de ellos también estaría actuando sobre **q** una fuerza eléctrica producida por Q. Para describir este hecho, se dice que en cualquier punto del espacio en torno a **Q** existe un campo eléctrico originado por esta carga.

Obsérvese en la figura que el campo eléctrico en los puntos P_1, P_2, P_3, etc., está originado por **Q**, la cual podrá ser tanto positiva (la de la figura) como negativa. La carga **q** que es trasladada de un punto a otro para verificar si en ellos existe o no un campo eléctrico, se denomina carga de prueba.



El campo eléctrico puede representarse, en cada punto del espacio, por un vector, usualmente simbolizado por $\overrightarrow{E}$ y que se denomina vector campo eléctrico.

El módulo del vector en un punto dado se denomina intensidad del campo eléctrico en ese punto. Para definir este módulo, considérese la carga Q de la figura, generando un campo eléctrico en el espacio que la rodea. Colocando una carga de prueba q en un punto $P_1 P_1$, se verá que sobre ella actúa una fuerza eléctrica. La intensidad del campo eléctrico enP_1 estará dada, por definición, por la expresión:

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{F}}{q}$$

La expresión anterior permite determinar la intensidad del campo eléctrico en cualquier otro punto, tales como P_2, P_3, etc. El valor de E será diferente para cada uno de ellos.
De $\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{F}}{q}$ obtenemos $\overrightarrow{E} * q = \overrightarrow{F}$, lo cual significa que si se conoce la intensidad del campo eléctrico en un punto, es posible calcular, usando la expresión anterior, el módulo de la fuerza que actúa sobre una carga cualquiera ubicada en aquél punto.

Campo eléctrico creado por una carga puntual
El campo que crea una carga puntual **Q** se deduce a partir de la ley de Coulomb. Considérese una carga de prueba Q_0, colocada a una distancia r de una carga punto **Q**. La fuerza entre ambas cargas, medida por un observador en reposo respecto a la carga **Q** estará dada por:

$$F = \frac{Q_0 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{u_r}$$

La intensidad del campo eléctrico en el sitio en que se coloca la carga de prueba está dada por:

$$E = \frac{F}{Q_0}$$

y por lo tanto resulta:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{u_r} = K\frac{Q}{r^2}\mathbf{u_r}$$

Donde $\mathbf{u_r}$ es un vector unitario en la dirección radial, $\epsilon_0 = 8,85$ x $10^{-12}C^2/Nm^2$ es la llamada permitividad del vacío y K es la constante de Coulomb cuyo valor es $8,98$ x $10^9 Nm^2/C^2$.
Donde se tienen las equivalencias:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$
$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi K}$$

respectivamente. La unidad de intensidad de campo eléctrico es [N/C](Newton por Culombio) o [V/m] (Voltio por metro).

Principio de Superposición

La influencia del campo producido por una carga aislada se puede generalizar al caso de un sistema formado por más de una carga y luego extenderse al estudio de un cuerpo cargado. Experimentalmente se verifica que las influencias de las cargas aisladas que constituyen un sistema son aditivas, o en otras palabras, se suman o superponen vectorialmente. Así, la intensidad de campo E en un punto cualquiera del espacio que rodea a varias cargas será la suma vectorial de las intensidades de los campos debidos a cada una de las cargas individualmente consideradas. Matemáticamente se puede considerar la siguiente ecuación:

$$\overrightarrow{E} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{E_i} = K\sum_{i=1}^{n}, \frac{q_i}{||\overrightarrow{r}||^2}\hat{r}$$

Donde K es la constante arbitraria; n es la cantidad de cargas tenidas en cuenta; $||\overrightarrow{r}||$ es la magnitud del vector distancia entre el punto donde se quiere hallar el campo eléctrico total y la carga i; $\hat{r}$ es el vector unitario formado de la misma manera. Más adelante se trabajará mejor esta ecuación.

Representación gráfica de un campo eléctrico

Una forma muy útil de esquematizar gráficamente un campo es trazar líneas que vayan en la misma dirección que dicho campo en varios puntos. Esto se realiza a través de las líneas de campo eléctrico, que son unas líneas imaginarias que describen, si los hubiere, los cambios en dirección del campo eléctrico al pasar de un punto a otro, de tal modo que dichas líneas son tangentes, en cada punto del espacio donde está definido el campo eléctrico, a la dirección del campo eléctrico en ese punto.

Según la primera ley de Newton, la fuerza que actúa sobre una partícula produce un cambio en su velocidad; por lo tanto, el movimiento de una partícula cargada en una región dependerá de las fuerzas que actúen sobre ella en cada punto de dicha región.

Ahora considérese una carga **q**, situada en un punto sobre la que actúa una fuerza $\overrightarrow{F}$ que es tangente a la línea de campo eléctrico en dicho punto. En vista de que las líneas del campo eléctrico varían en su densidad (están más o menos juntas) y dirección, podemos concluir que la fuerza que experimenta una carga tiende a apartarla de la línea de campo eléctrico sobre la que se encuentra en cada instante.

En otras palabras, una carga bajo los efectos de un campo eléctrico no seguirá el camino de la línea de fuerza sobre la que se encontraba originalmente.

La relación entre las líneas de campo eléctrico(imaginarias) y el vector intensidad de campo, es la siguiente:

(1) La tangente a una línea de fuerza en un punto cualquiera da la dirección de E en ese punto.

(2) El número de líneas de campo eléctrico por unidad de área de sección transversal es proporcional a la magnitud de E. Cuanto más cercanas estén las líneas, mayor será la magnitud de E.

No es obvio que sea posible dibujar un conjunto continuo de líneas que cumplan estos requisitos. De hecho, se encuentra que si la ley de Coulomb no fuera cierta, no sería posible hacerlo.

Si un elemento de superficie de área $\varDelta$ A es atravesado por $\varDelta$ N líneas y si la intensidad del campo eléctrico en el centro del elemento de superficie es E, se tiene que:

$$\frac{\varDelta N}{\varDelta A_n} \propto E$$

El subíndice n indica que $\varDelta$ A es normal a E. Para convertir esta proporcionalidad en ecuación se elige ϵ_0 como constante de proporcionalidad. Así, se espacian arbitrariamente las líneas de campo eléctrico de modo que, en cualquier punto, el número de líneas por unidad de superficie y la intensidad del campo eléctrico esté ligado por la relación:

$$\frac{\varDelta N}{\varDelta A_n} \epsilon_0 E$$

Considérense, ahora, las líneas de campo eléctrico que salen de una carga puntual positiva q y una esfera de radio r arbitrario rodeando la carga y de modo que ésta se encuentre en el centro. La intensidad del campo eléctrico en todos los puntos de la superficie de esta esfera es:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

En consecuencia, el número de líneas por unidad de superficie es el mismo en todos los puntos de la superficie y está dado por:

$$\epsilon_0 E = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}$$

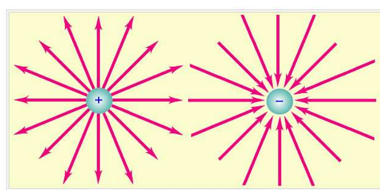
Las líneas de campo eléctrico atraviesan la superficie perpendicularmente puesto que E tiene una dirección radial. El área de la esfera es $4\pi r^2$,lo que implica que el número de líneas que atraviesan la superficie es:

$$N = \epsilon_0 AE = q$$

Esto demuestra que si el valor del exponente de r, en la ley de Coulomb, no fuera 2, el número de líneas de campo eléctrico no solo no estaría dado por el valor de q, también sería inversamente proporcional a alguna potencia de r y por ello seria imposible dibujar un conjunto continuo de líneas que cumplan los requisitos indicados más arriba.

Para la construcción de líneas de campo eléctrico se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Por convención, las líneas deben partir de cargas positivas y terminar en cargas negativas y en ausencia de unas u otras deben partir o terminar en el infinito.



Representación de campos eléctricos creados por cargas puntuales positiva y negativa.

Una carga puntual positiva dará lugar a un mapa de líneas de campo eléctrico radiales, pues las fuerzas eléctricas actúan siempre en la dirección de la línea que une a las cargas interactuantes, y dirigidas hacia fuera porque una carga de prueba positiva se desplazaría en esa dirección. En el caso del campo debido a una carga puntual negativa el mapa de líneas de campo eléctrico sería análogo, pero dirigidas hacia ella ya que ése sería la dirección en que se desplazaría la carga positiva de prueba. Como consecuencia de lo anterior, en el caso de los campos debidos a varias cargas, las líneas de campo eléctrico nacen siempre de las cargas positivas y por ello son denominadas manantiales y mueren en las negativas por lo que se les llama sumideros.

- Las líneas de campo eléctrico jamás pueden cruzarse

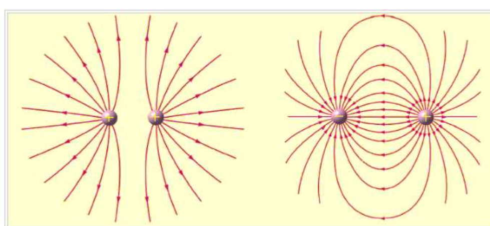
Las líneas de campo eléctrico o de campo salen de una carga positiva o entran a una negativa. De lo anterior se desprende que de cada punto de la superficie de una esfera, suponiendo forma esférica para una carga, puede salir o entrar solo una línea de fuerza, en consecuencia entre dos cargas que interactúan solo puede relacionarse un punto de su superficie con solo un punto de la otra superficie, y ello es a través de una línea, y esa línea es la línea de fuerza.

Si se admitiera que dos líneas de campo eléctrico se intersequen, entonces se podría extender la superficie de la otra carga hacia el lugar donde se intersecan ambas líneas y se podrá concluir que dos líneas entran o salen de una superficie de una carga eléctrica. Con esto se está contradiciendo lo postulado inicialmente. En consecuencia, es imposible que dos líneas de campo eléctrico se intersequen.

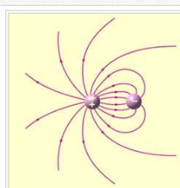
Por otra parte, si las líneas de campo eléctrico se cortaran, significaría que en dicho punto **E** poseería dos direcciones distintas, lo que contradice la definición de que a cada punto sólo le corresponde un valor único de intensidad de campo.

- El número de líneas de campo eléctrico que parten de una carga positiva o llegan a una carga negativa es proporcional a la cantidad de carga respectiva.
- Las líneas de campo eléctrico deben ser perpendiculares a las superficies de los objetos en los lugares donde conectan con ellas.

Esto se debe a que en las superficies de cualquier objeto, sin importar la forma, nunca se encuentran componentes de la fuerza eléctrica que sean paralelas a la superficie del mismo. Si fuera de otra manera, cualquier exceso de carga residente en la superficie comenzaría a acelerar. Esto conduciría a la aparición de un flujo de carga en el objeto, lo cual nunca se observa en la electricidad estática.



Representación del campo eléctrico creado por dos cargas positivas de igual magnitud y por un dipolo eléctrico.



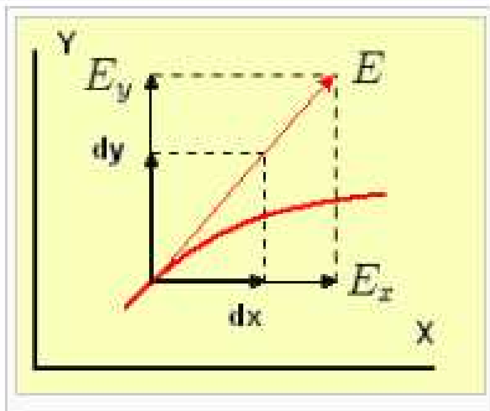
Representación del campo eléctrico creado por dos cargas de diferente magnitud y signos opuestos.

Las representaciones anteriores reflejan el principio de superposición. Ya sea que las cargas ostenten el mismo signo o signo opuesto, las líneas de campo eléctrico se verán distorsionadas respecto de la forma radial que tendrían si las cargas estuvieran aisladas, de forma tal, que la distorsión es máxima en la zona central, o sea, en la región más cercana a ambas. Si las cargas tienen la misma magnitud, la representación resulta simétrica respecto de la línea media que las separa. En el caso opuesto, predominará la influencia de una de ellas dando lugar a una distribución asimétrica de líneas de campo eléctrico .

Ecuación de las líneas de campo eléctrico

Ecuación de las líneas de campo eléctrico

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$



Ejemplo: Si tenemos una sola carga puntual, todas las líneas de campo son rectas que parten radialmente de la carga en las tres direcciones del espacio. Si nos limitamos a las líneas de campo contenidas en el plano cartesiano XY, el problema se simplifica y nos queda la razón entre $\frac{E_y}{E_x}$ es $\frac{y}{x}$ de modo que:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \longrightarrow ln(y) = ln(x) + C$$

siendo C la constante de integración. Este resultado se puede escribir como:

$$y = C'x \text{ (C'=} exp(C))$$

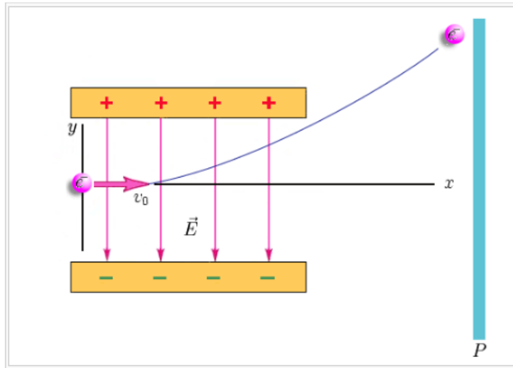
que es la ecuación de una recta que pasa por el origen, como era de esperar.

Comportamiento de una carga punto en un campo eléctrico uniforme

Un campo eléctrico ejerce sobre una partícula cargada una fuerza $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{E}q$. Esta fuerza produce una aceleración $\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{F}}{m}$ siendo m la masa de la partícula.

Partícula moviéndose paralelamente al campo

Considérese una partícula de masa m y carga q que se suelta a partir del reposo en un campo entre dos placas paralelas cargadas tal como se muestra en la figura



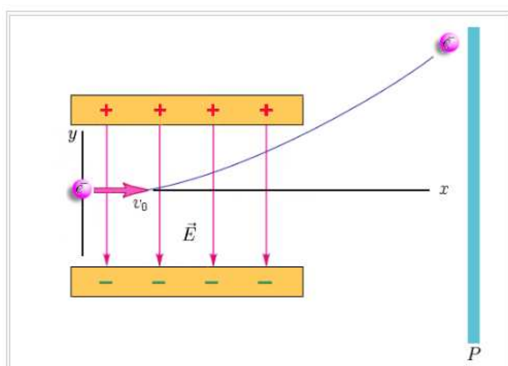
El movimiento es similar al de un cuerpo que cae en el campo gravitacional terrestre.

La aceleración está dada por $a = \frac{F}{m}$
Como $F = qE$, se cumple que $a = \frac{qE}{m}$
Aplicando las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado, como $v_0 = 0$, se tiene que:

$$v = at = \frac{qEt}{m}$$
$$\text{y}= \text{at}^2\frac{1}{2} = \frac{aEt^2}{2m}$$
$$\text{v}^2 = 2ay = \frac{2qEy}{m}$$

La energía cinética adquirida luego de recorrer una distancia y será;

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\frac{2qEy}{m}) = qEy$$



La figura muestra un electrón de masa m y carga e que es disparado con una velocidad v_0 perpendicularmente a un campo uniforme $\overrightarrow{E}$.
El movimiento es similar al de un proyectil disparado horizontalmente en el campo gravitacional terrestre. En consecuencia el movimiento horizontal x y el vertical y están dados por las expresiones:

$$x = tv_0 y = y_0 + \frac{1}{2}at^2 = y_0 + \frac{eE}{2m}t^2$$

Sustituyendo a t se obtiene:

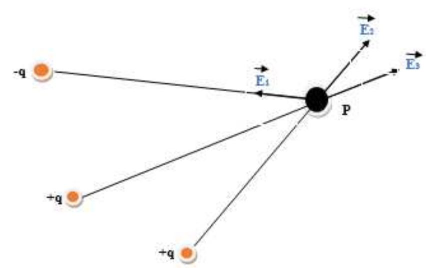
$$x = tv_0 y = y_0 + \frac{eE}{2mv_o^2}x^2$$

que es la ecuación de la trayectoria.
Cuando el electrón sale de entre las placas, lo hace en una trayectoria recta tangente a la parábola en el punto de salida y puede hacerse llegar a una pantalla fluorescente P colocada a cierta distancia más allá de las placas.

CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO

CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO PARA DISTRIBUCIONES DE CARGA CONTINUA

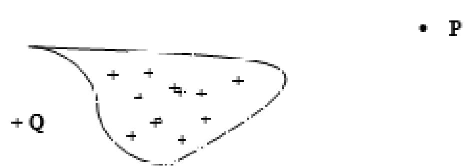
Recordando lo sucedido con el campo eléctrico para una distribución de carga discreta.



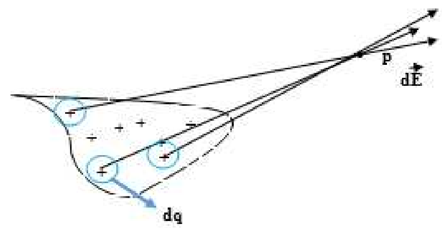
Donde se obtiene que el campo eléctrico ma n cargas es:

$$\overrightarrow{E_p} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{E_i}$$

Ahora supongamos la superficie con carga $*Q$.



En cuanto a cargas continuamente distribuidas, evaluar el campo eléctrico para un punto p, implica tener en cuenta los diferenciales de carga dq.



Por el principio de superposición $\overrightarrow{E_p} = \int d\overrightarrow{E}$, escribiremos:

$$d\overrightarrow{E} = \frac{kdq}{r^2}\hat{r} \text{ (K constante)}$$

Por lo tanto

$$\overrightarrow{E_p} = \int \frac{kdq}{r^2}\hat{r}$$

Hay tres tipos de distribuciones de interés:

- **Lineal:** Se define una densidad lineal de carga "λ" como:

$$\lambda = \frac{dq}{dl}(C/m)$$

- **Superficial:** Se define una densidad superficial de carga "σ" como:

$$\sigma = \frac{dq}{ds}(C/m^2)$$

- **Volumétrica:** Se define una densidad volumétrica de carga "ρ" como:

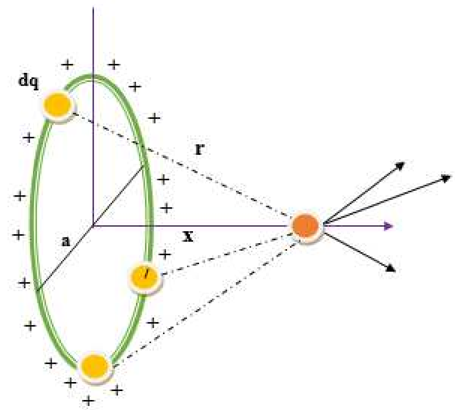
$$\rho = \frac{dq}{dv}(C/m^3)$$

De lo anterior se tiene que:

$$dq = \lambda dl \text{ (Si la distribución es lineal)}$$
$$dq = \sigma ds \text{ (Si la distribución es superficial)}$$
$$dq = \rho dv \text{ (Si la distribución es volumétrica)}$$

Ejemplo:

Calcule el campo eléctrico debido a un anillo sobre el eje "x" a una distancia x, el anillo posee un radio a y una carga uniformenente distribuida q.



Se observa que $r = \sqrt{a^2 + x^2}$.
Dada la simetría que hay desde el anillo hacia el punto (ya que la carga está uniformemente distribuida), se obtiene por la cancelación de componentes en y, que

$$dE_p = 2dE_x = 2(dE)cos\theta = 2\frac{kdq}{r^2}cos\theta$$

donde

$$cos\theta = \frac{x}{r}$$

entonces

$$dE_p = \frac{2k(dq)}{a^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{2k(dq)x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

ahora calculando el campo eléctrico

$$E_p = \int \frac{2kx(dq)}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{2kx}{(x^2+a^2)^{3/2}} \int_0^{q/2} dq$$

Dado que se ha tenido en cuenta la simetría del anillo y necesitamos evaluar el campo desde la carga cero hasta la carga "q", elegimos el limite superior de integración como "$q/2$".

entonces

$$E_p = \frac{2kx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\frac{q}{2} = \frac{kxq}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

TEORÍA DEL CAMPO ELÉCTRICO Y EL POTENCIAL ELÉCTRICO

1.1 POTENCIAL ELÉCTRICO

En esta sección observarémos como obtener el campo eléctrico a partir del potencial eléctrico.

El potencial eléctrico depende de las variables x,y,z, es decir $V(x,y,z)$ y su diferencial:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = (\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z})(dx, dy, dz) = \nabla V * d\overrightarrow{r}$$

Integrando se obtiene

$$\Delta V = \int \nabla V d\overrightarrow{r}$$

Comparando con la definición de diferencia de potencial:

$$\Delta V = \int -\overrightarrow{E} d\overrightarrow{r}$$

Se llega a que

$$-E = \nabla V$$

trabajando en una dimensión se tiene

$$\overrightarrow{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

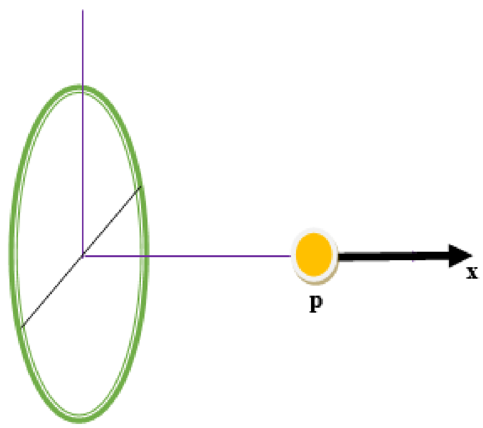
En coordenadas esfericas

$$\overrightarrow{E} = -(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{rsen(\theta)}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi})$$

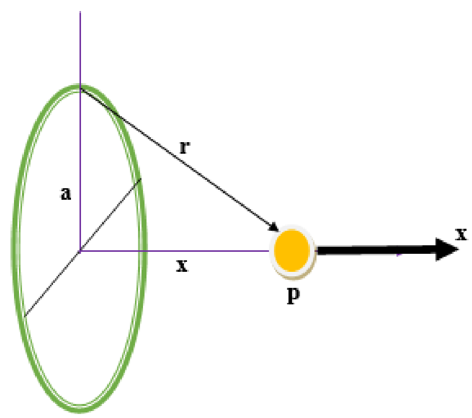
Ejemplo:

Ya se ha calculado que el campo eléctrico debido a un anillo es:

$$E_x = \frac{kxq}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$



Calculemos el potencial eléctrico debido a este anillo.



$$V = \int \frac{kdq}{r}$$

vemos que $r = \sqrt{a^2 + x^2}$, así pués

$$V = \frac{k}{(x^2+a^2)^{1/2}} \int dq = \frac{kq}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Ahora calculemos el campo eléctrico conociendo su potencial, dado que estamos sobre el eje ”x” y

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Por lo tanto

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{1}{2}kg(x^2+a^2)^{-3/2}2x = -kq(x^2+a^2)^{-3/2}x$$

Finalmente

$$E_x = -(-kq(x^2+a^2)^{-3/2}) = \frac{kqx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

que es el resultado esperado.

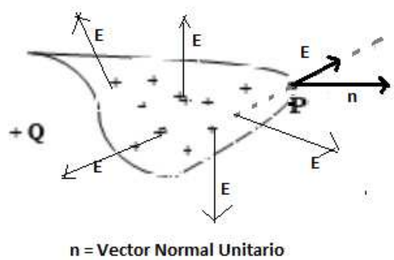
1.2 RELACIÓN CON LA EC. POISSON

Para observar la relación entre la Ecuación de Poisson y el cálculo del campo eléctrico, debemos tener en cuenta el Teorema de Gauss.

Teorema de Gauss

El flujo del campo eléctrico E determinado por ρ a través de la frontera de D es igual a Q/ϵ_0
$Q =$ Carga total contenida en D
$Q = \int_D \rho(x,y,z)dxdydz$

En otras palabras



El flujo será

$$\int_S (n*E)dA = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_D \rho(x,y,z)dxdydz$$

Recordemos que una función potencial V satisface que $E = -\nabla V$, por teorema de Stokes, si E es un campo Vectorial arbirario en D, entonces

$$\int_S (E*n)dA = \int div(E)dxdydz$$

donde $E = (E_1(x,y,z), E_2(x,y,z), E_3(x,y,z))$ y $div(E) = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$.
Así pués

$$\int (n*E)dA = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_D \rho(x,y,z)dxdydz$$

donde se obtiene que

$$\int_E div(E)dxdydz = \frac{1}{\epsilon_0}\int_D \rho(x,y,z)dxdydz$$

además

$$div(-\nabla V) = -div(\nabla V) = -\nabla^2 V = -(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2})$$

por lo tanto

$$\int_D -\nabla^2 V = \frac{1}{\epsilon_0}\int_D \rho(x,y,z) \longrightarrow -\nabla^2 V = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(x,y,z)$$

o también

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

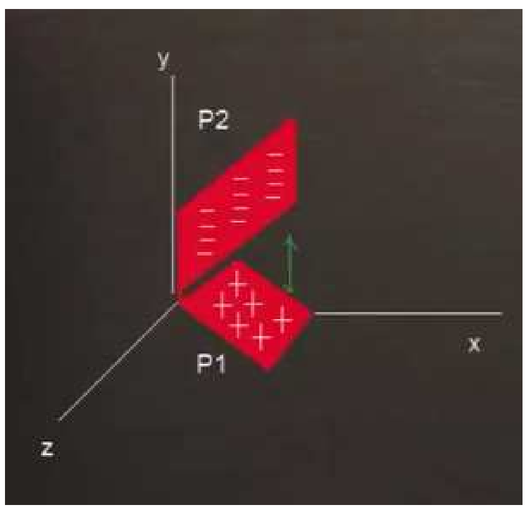
Esta última se llama **Ecuación de Poisson**, si $\rho = 0$ se llama ecuación de laplace.

Ejemplo

Sean las placas metalicas formando un angulo α, sobre el plano XY sin cargas eléctricas sobre el eje Z, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \text{función armónica (1).}$$

Calcular E por medio del potencial eléctrico V, empleando la ecuación de Poisson.



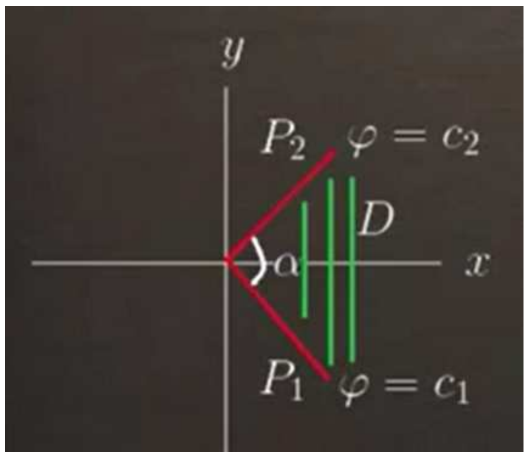
se debe encontrar V tal que satisfaga (1) con las condiciones $V(P_1) = c_1$ y $V(P_2) = c_2$

Solución

Sabemos que $log(z) = log|z| + \theta(z)$, $z = x + iy$, donde $\theta(z)$ es el argumento de z, también es holomorfa, además:

1) $ln|z| = ln(+\sqrt{x^2 + y^2})$, armonica por ser parte real de log(z).
2) $Q(z) = tg^{-1}(\frac{y}{x})$ es armónica, por ser la parte compleja de una función holomorfa.

Por lo tanto $\nabla^2\theta = 0$



$$(x, y, z) \in P_2 \text{ sii } \theta(x, y, z) = \alpha/2$$
$$(x, y, z) \in P_1 \text{ sii } \theta(x, y, z) = -\alpha/2$$

Definamos $V(x, y, z) = a + b\theta(x, y)$, con a,b constantes. Se puede notar facilmente que $V(x, y, z)$ es armónica.

$$V(x, y, z) = a - b * \frac{\alpha}{2} = c_1 \text{ para } (x, y, z) \in P_1$$
$$V(x, y, z) = a + b * \frac{\alpha}{2} = c_2 \text{ para } (x, y, z) \in P_2$$

donde obtenemos que

$$a = (c_1 + c_2)/2,\ b = (c_2 - c_1)/\alpha$$

En D, el potencial eléctrico

$$V = \frac{c_1+c_2}{2} + \frac{c_1-c_2}{\alpha} * tg^{-1}(\frac{y}{x})$$

Esta última es la ecuación del potencial eléctrico, hallar el Campo eléctrico es inmediato de acuerdo a anteriores anotaciones.

Referencia

1. $https://es.wikipedia.org/wiki/Campo - electrostatico.$
2. Hctor Barco Ros - Edilberto Rojas Caldern - Elisabeth Restrepo Parra (2012) Principios de Electricidad y Magnetismo – UNIVERSIDAD NACIONAL DF, COLOMBIA.
3. Sears - Zemansky (12ava Edicion - Vol2) Fisica Universitaria con Fisica Moderna.
4. https://es.wikibooks.org/wiki/Electricidad/Campo_el%C3%A9ctrico/Campo_el%C3%A9ctrico_generado_por_una_distribuci%C3%B3n_continua_volum%C3%A9trica_de_carga.
5. https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_en_derivadas_parciales.