LA INTEGRAL DE BOCHNER

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CÁLDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

JUAN DAVID LEAL CAMPUZANO

Bogotá D. C.
2017

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CÁLDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

LA INTEGRAL DE BOCHNER

JUAN DAVID LEAL CAMPUZANO

Trabajo de Grado presentado como parte de
los requisitos para la obtención del título
de Matemático por la Universidad Distrital
Francisco José de Cáldas.

Director:
MILTON DEL CASTILLO LESMES ACOSTA

Bogota, D.C
2017

Índice general

Introducción

En la historia yace la necesidad del uso del símbolo de la integral como un operador antiderivada con Newton y Leibniz, los cuales introducen los infinitesimos con sus respectivos usos en en el cálculo, continuamente la necesidad de medir longitudes, áreas y volúmenes dieron paso a la integral de Riemann, las cuales con algunas falencias tuvieron algunos avances hasta encontrar funciones las cuales la integral de Riemann no podía medir, en a necesidad de querer medir aquellas funciones y con ayuda de Emille Borel, se da paso a la integral de Lebesgue y con el a la teoría de la medida que actualmente se ve y se estudia, en 1933 Von Neumann y Salomón Bochner escriben basados en la teoría de Lebesgue, un artículo acerca de medidas vectoriales a través de integrales sobre espacios vectoriales, con el fin de caracterizar funciones a través de sus del análisis de Fourier como una forma de medir las funciones sobre espacios más complejos.
El presente trabajo está basado en la obra de Jan Mikusinski del libro Bochner integral. En el primer capítulo se retomara la teoría de la integral de Lebesgue con su respectivos teoremas, en el segundo capítulo se dará a conocer la definición formal de la integral de Bochner con distintas propiedades que la caracterizan y para terminar en el capítulo 3 se mostrarán unos ejemplos para entender mejor como funciona la integral de Bochner.

Justificación

El fin es entender a cabalidad la integral de Lebesgue como una medida en $\mathbb{R}^n$ y observar la ampliación de la teoría hacia una forma de medir en espacios vectoriales y más aun espacios de Banach a través de la integral de Bochner.

Objetivos

0.1. Objetivo general

Identificar la integral de Bochner como una generalización de la integral de Lebesgue y analizar sus propiedades.

0.2. Objetivos específicos

1.) Definir la integral de Bochner como una medida vectorial sobre un espacio de Banach

2.) Comparar las propiedades de la integral de Bochner con las propiedades del a integral de Lebesgue

3.) Ejemplificar funciones medibles sobre espacios de Banach desde la integral de Bochner

Capítulo 1

Integral de Lebesgue

1.1. Historia

Hacia finales del siglo XIX, el matemático alemán Bernhard Riemann instauró una noción de integral que acogía funciones altamente discontinuas. Sin embargo, la noción de integral de Riemann llevaba a contradicciones. Justamente, el matemático Camille Jordan intentó una salida a los problemas de la integral de Riemann a través de la noción de contenido. A pesar de ser una salida bastante sutil, encaminaba el problema en la dirección de una teoría abstracta de la medida,que empieza a ventilarse con los trabajos de Émile Borel. Ese es justamente el punto de partida de Lebesgue.En su tesis doctoral de 1902 Integral, Longitud, Área. Lebesgue se da cuenta que para establecer una noción rigurosa de integral debía volver a los fundamentos primigenios de la geometría de los antiguos; concretamente debía convertir el concepto de medida relativa, implícito en la geometría euclidiana,en una noción de medida absoluta. En este sentido Lebesgue entiende que una fundamentación rigurosa de la noción de integral se da como proyección de los fundamentos sobre los que reposa la geometría.Para Lebesgue, el problema de la medida consiste en asignarle a cada conjunto acotado un número mayor o igual a cero, que se denomina su medida, bajo las siguientes premisas:

1. Existe un conjunto cuya medida es diferente de cero.

2. La medida es invariante bajo traslaciones.

3. La medida de la unión de un número finito o numerable de conjuntos, disjuntos dos a dos, es la suma de las medidas de los conjuntos.

Para Lebesgue, estas tres propiedades sintetizan el desarrollo histórico de la actividad de medir.

1.2. Definición, propiedades y ejemplos

Definición 1. *Sea X un conjunto arbitrario, entonces la familia $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X se llama una $\sigma-$ álgebra si solo si cumple las siguientes propiedades:*

- *$\emptyset$ y X estan en $\mathcal{X}$.*
- *si $A \in \mathcal{X}$ entonces $A^c \in \mathcal{X}$.*
- *Para una sucesión de conjuntos E_n en $\mathcal{X}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ pertenece a $\mathcal{X}$*

Definición 2. *Sea un conjunto X y sea $\mathcal{X}$ una $\sigma-$ álgebra sobre X, se define μ una medida como una función de $\mathcal{X}$ en $\mathbb{R}^+$ que cumple lo siguiente:*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A) \geq 0$ *para todo $A \in \mathcal{X}$.*
- *La función es contablemente aditiva, es decir para un sucesión de elementos E_n de $\mathcal{X}$,*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

A la tripla $(X, \mathcal{X}, \mu)$ se le llama un espacio de medida.

Definición 3. *Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$ y sea $A \subseteq X$ y $A \in \mathcal{X}$, se dice que A tiene medida σ- finita si es unión contable de elementos de la sigma álgebra y tiene medida finita.*

Definición 4. *Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$ y sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, dada una función arbitraria $f : X \to \Omega$, decimos que f es una función simple si $f(X)$ es numerable y $f^{-1}(\{x\})$ es $\mathcal{X}-$ medible para todo $x \in X$.*

En las definiciones anterior se puede tomar a X como un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y a μ como la medida de Lebesgue con su respectiva $\sigma-$álgebra; como particularidad, la medida de Lebesgue tiene la propiedad de invarianza bajo traslaciones, eso quiere decir que dado un conjunto $A \in \mathcal{X}$ y una $n-$tupla r de $\mathbb{R}^n$ se define

$$A + r = \{y \in \mathbb{R}^n; y = x + r, x \in A\}$$

. la invarianza se caracteriza por $\mu(A) = \mu(A + r)$.
A continuación se trabajará con funciones del tipo $f : I \to J$ donde I, J son intervalos de la recta real, y con la medida de Lebesgue denotada por μ con su respectiva

σ-álgebra para el caso de la integral de Lebesgue. Los conceptos más necesarios se refieren a funciones simples y medibilidad fuerte entre otros, con el uso de los teoremas de convergencia monótona y convergencia dominada usados en la teoría de la medida [1, pag. 31, pag. 44].

Para entender la definición formal de una función Lebesgue medible. Definase la función característica de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & a < x < b \\ 0 & E.O.C. \end{cases}$$

Para comodidad de notación se utilizará $\chi_{(a,b)}(x)$ como $\chi(a,b)$; Utilizando la medida de Lebesgue sobre los reales, así se tiene que $\mathcal{L}(\chi(a,b)) = b-a$. EL siguiente ejemplo mostrará como funciona la integral de Lebesgue sobre el espacio de los reales.

Ejemplo 1. *Sea la función triángulo, simétrica en el intervalo* $[-1,1]$*:*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & E.O.C. \end{cases} \tag{1.1}$$

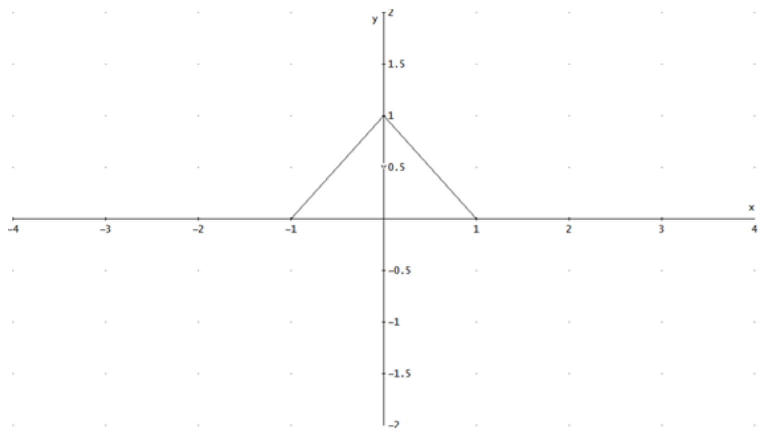


Figura 1.1: Función triángulo simétrica en el intervalo

veamos que es Lebesgue integrable.

La función triángulo simétrica se puede escribir como la suma de dos funciones de la siguiente manera:

$$f(x) = (x+1)\chi[-1,0] + (-x+1)\chi(0,1]$$

tómese $f_1(x) = (x+1)\chi[-1,0]$ y $f_2(x) = (-x+1)\chi(0,1]$ así $f = f_1 + f_2$, tomando 2^i particiones del intervalo $[-1,1]$ para cada función f_1 y f_2 se puede tomar una sucesión de funciones simples tal que f_{n1} y f_{n2} converjan a f_1 y f_2 respectivamente. Las funciones son:

$$f_{n1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{i+1}} \sum_{k=0}^{2^i-1} \chi\left(\frac{-2^{i+1}+2k+1}{2^{i+1}}, \frac{-2^{i+1}+2k+2}{2^{i+1}}\right) \tag{1.2}$$

$$f_{n2}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{i+1}} \sum_{k=0}^{2^i-1} \chi\left(\frac{2k}{2^{i+1}}, \frac{2k+1}{2^{i+1}}\right) \tag{1.3}$$

como cada sucesión de funciones es una suma de funciones características entonces se puede definir f_n como la suma de f_{n1} y f_{n2}, así f_n converge a la función triangulo. Algunas imágenes de las gráficas para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ se muestran a continuación

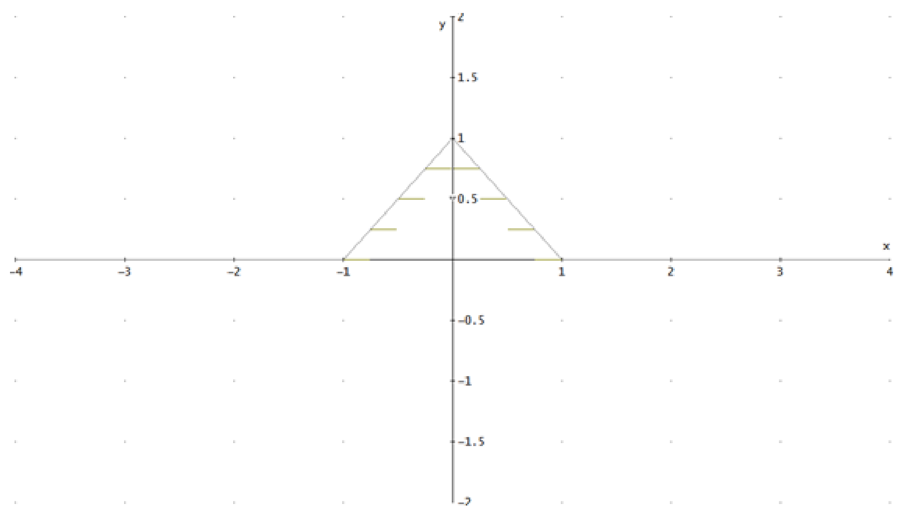


fig 1 Función para $n = 1$

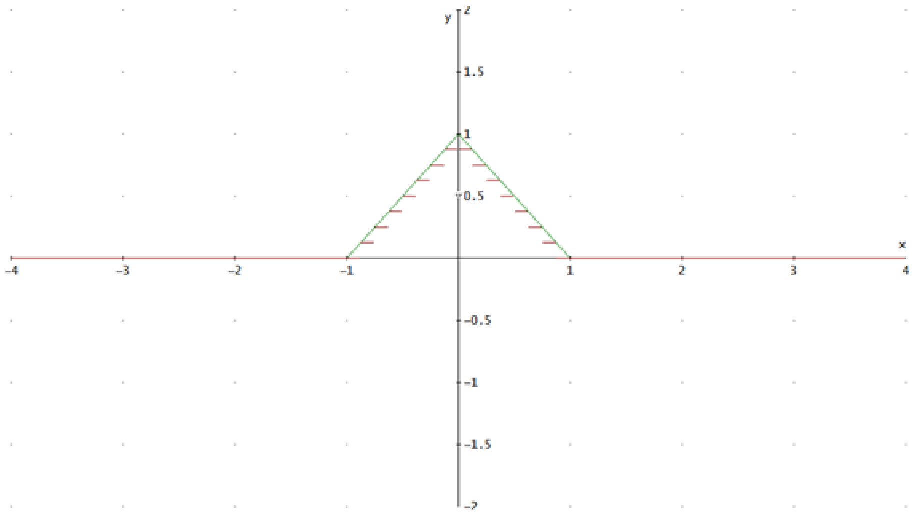


fig. 2 Función para $n = 2$

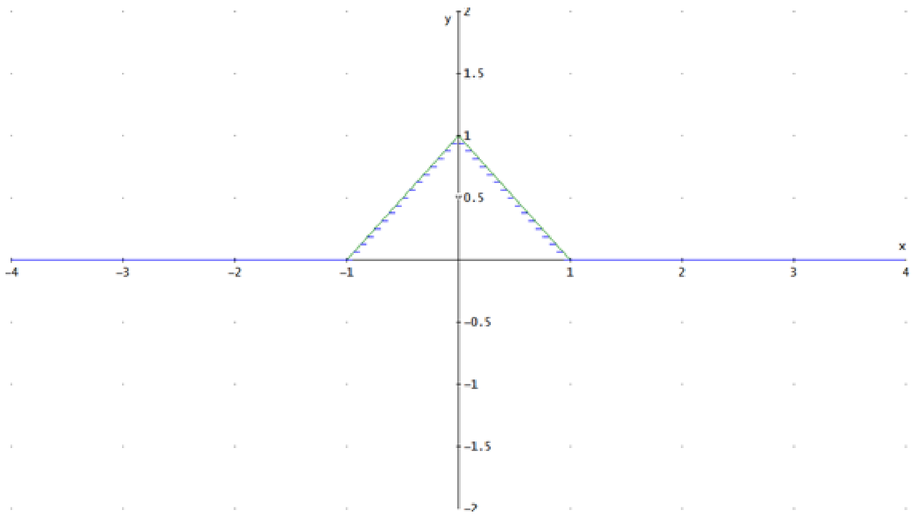


fig. 3 Función para $n = 3$

Así la función es Lebesgue integrable ya que por el teorema de convergencia monótona, como $f_n \to f$ y f_n medible para cada n entonces f Lebesgue medible y

$$\int f d\mu = \text{lím} \int f_n d\mu = 1$$

Las anteriores gráficas muestran como se comporta la sucesión de funciones simples al acercarse a la función original pero no necesariamente la sucesión de funciones es única, se puede acercar tanto por ″abajo″ como por ″arriba″ y de otras varias maneras, sin interferir en el resultado final, este hecho lo enuncia el siguiente lema mostrado en [1, pag. 13], el cual tiene una gran importancia.

Lema 1. *Sea f una función $\mu-$medible, entonces existe una sucesión ϕ_n de funciones simples $\mu-$medibles tal que $\phi_n \to f$ en casi todo punto y además $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. [1, pag. 13] □

Los dos siguiente ejemplos se dan gracias a Johann Peter Lejeune Dirichlet,el primer ejemplo es una función la cual no era Riemman integrable, llamada la función de Dirichlet precisamente llamada así por quien la formuló.

Ejemplo 2. *Sea f como*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \\ 1 & si \;\; x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

se desea hallar la integral de Lebesgue de la función en el intervalo cerrado $[0,1]$.

Sea $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, dado que es numerable entonces se puede definir a $Q = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ donde $a_i < a_j$ para $i < j$; tómese el intervalo (a_i, a_{i+1}) y sea una sucesión b_{i_n} tal que $b_{i_n} \to a_i$, además que $b_{i_1} = a_{i+1}$ y que $b_{i_{k+1}} > b_{i_k}$ para todo $i, k \in \mathbb{N}$. Se tiene que $|a_i - b_{i_1}| < 2^{-i}$ por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
Ahora tómese la sucesión de funciones

$$f_n(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \chi([b_{i_k}, b_{i_{k+1}})$$

Entonces $f_n(x) \to f(x)$

Ahora dado que $b_{i_n} \to a_i$ para todo $\epsilon > 0$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_i$ entonces

$$|b_{i_n} - a_i| < \epsilon 2^{-i}$$

para todo i natural; así tómese $N = max_i \{N_i\}$ y si $n \geq N$ entonces

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^1 |1 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \chi([b_{i_k}, b_{i_{k+1}})| d\mu - \int_0^1 f d\mu \right| &= \left| \int_0^1 |\sum_{i=1}^{\infty} \chi((b_{i_n}, a_i)| d\mu \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i - b_{i_n} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_{i_n}| \\
&< \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

por lo tanto es integrable Lebesgue y $\int_0^1 f d\mu = 0$.

El segundo ejemplo es por decirlo así el complemento de la función de Dirichlet, es decir

Ejemplo 3. *Sea f como*

$$
f(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \\ 0 & si \;\; x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}
$$

se desea hallar la integral de Lebesgue de la función en el intervalo cerrado $[0,1]$.

Sea $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, dado que es numerable entonces se puede definir a $Q = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ donde $a_i < a_j$ para $i < j$; se puede notar que $a_n \to 1$ si $n \to \infty$. Por otro lado sea la sucesión de funciones $f_n(x)$ definidas de la siguiente manera:

$$
f_n(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in (a_n, a_{n+1}) \\ 0 & si \;\; E.O.C. \end{cases}
$$

Así definida $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \to f(x)$ si $n \to \infty$. Ahora observe que $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f(x) - f_n(x)| = 0$. En efecto dado que $a_n \to 1$, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|1 - a_n| < \epsilon$; ahora

$$\begin{aligned}
\left|\int |f - f_n| d\mu\right| &= \left|\int |f - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)| d\mu\right| \\
&= \left|\int |\sum_{i=n}^{\infty} f_i(x)| d\mu\right| \\
&= \left|1 - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right| \\
&= |1 - a_n| \\
&< \epsilon \qquad si \;\; n \geq N
\end{aligned}$$

Así $f(x)$ es Lebesgue integrable y $\int f(x)d\mu = 1$ Los dos ejemplos anteriores esclarecen aún un poco más como funciona la integral de Lebesgue. Se puede observar que las integrales de las estas funciones nos definen la medida de los conjuntos donde están definidas las funciones; el ejemplo 1 define la medida de Lebesgue de los racionales en el intervalo $[0, 1]$ y el ejemplo 2 define la medida de Lebesgue de los irracionales en el mismo intervalo intervalo.

Definición 5 (Continuidad absoluta)**.** *Sea un espacio de medida* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *y sea una medida* $v : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*, se dice que* v *es absolutamente continua con respecto a* μ *si para todo* $A \in \mathcal{X}$ *tal que* $v(A) = 0$ *implica que* $\mu(A) = 0$

Capítulo 2

Integral de Bochner

2.1. Definición de la integral de Bochner

Esta sección está dedicada al examen de la integral de Bochner. Algunos la conocen como "integral de Dunford y Schwart" y otros como "Primera integral de Dunford". La integral de Bochner es una abstracción directa de la integral de Lebesgue, dicha integral fue introducida por Salomon Bochner en 1933. Se podría decir que la integral de Bochner es solamente la integral de Lebesgue donde el valor absoluto ha sido reemplazado por la norma en el espacio de Banach. Aunque esto ocurre frecuentemente, tal comentario constituye una valoración errónea de la integral de Bochner. De hecho, la falla del Teorema de Radon-Nikodym para la integral de Bochner es la base de algunos de los resultados más sorprendentes en la teoría de medidas vectoriales y en la teoría de estructura de espacios de Banach. Por lo pronto se dará su definición y algunas propiedades que obtiene y otras que hereda de la integral de Lebesgue.

Definición 6. *Sea un función $f : X \to E$ donde X es un espacio de medida σ-finito $(X, \mathcal{X}, \mu)$ y E es un espacio de Banach, entonces f es fuertemente μ-medible si existe una sucesión de funciones simples $f_n : X \to E$ que converge a f en casi todo punto.*

La definición de medibilidad fuerte da la concepción de lo que es la integral de Bochner de una función de un espacio de medida σ- finito a un espacio de Banach.

Definición 7 (Integral de Bochner)**.** *Sea un función $f : I \to E$ de un intervalo I de $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue, y E un espacio de Banach, entonces f es Bochner medible o Bochner integrable si es fuertemente medible y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \| f_n - f \|_E \, d\mu = 0 \tag{2.1}$$

En ese caso se define la integral de f como

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n d\mu \tag{2.2}$$

En general Las funciones Lebesgue medibles son funciones también Bochner medibles, los ejemplos 2 y 3 son ejemplos de ella y, aún más las funciones Riemann son Bochner integrables. Para el ejemplo 1 se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f(x) - f_n(x)| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \\ &=0\end{aligned}$$

y por lo tanto también es Bochner medible. Al conjunto de las funciones Bochner integrables se denotará como $\mathcal{B}(f_I)$.

Proposición 1. *Sea f una función simple, entonces f es Bochner integrable y*

$$\int_I f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i \cap I) x_i$$

Donde $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $j \neq i$ y además $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = I$

Demostración. Dado que f es simple entonces $f(I) = \{x_i\}_{i=1}^{n}$, así f se puede definir como

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{(B_i \cap I)} x_i$$

por lo tanto como es una sumatoria finita se tiene que

$$\int_I f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int \chi_{(B_i \cap I)} d\mu x_i$$

$$\int_I f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i \cap I) x_i$$

□

Ejemplo 4. *Sea $g : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue medible, y $b \in E$, entonces la función $F(x) = g(x)b$ es fuertemente medible dado que existe una sucesión g_n de funciones simples que converge a g, por lo tanto definida la sucesión $F_n(x) = g_n(x)b$, se da que $F_n(x)$ converge a $F(x)$.*

2.2. Propiedades de la integral de Bochner

Algunas propiedades importantes de la integral de Bochner son su linealidad, la desigualdad triangular entre otras.
En primer lugar si una función f es Bochner integrable entonces existe una sucesión de funciones simples tal que $f = f_1 + f_2 + f_3 + ...$ y por lo tanto

$$\int f = \int f_1 + \int f_2 + \int f_3 + ... < \infty$$

De lo anterior se puede deducir el siguiente lema

Lema 2. *Dadas dos funciones f y g con integral de Bochner finita y α un número real entonces*

$$\int f + g = \int f + \int g < \infty \qquad \alpha \int f = \int \alpha \cdot f < \infty \tag{2.3}$$

Demostración. Tomando a a f y g como $f = f_1 + f_2 + f_3 + ...$ y $g = g_1 + g_2 + g_3 + ...$ entonces $f + g = (f + g)_1 + (f + g)_2 + (f + g)_3 + ...$ y así: $\int f + g = \int (f + g)_1 + \int (f + g)_2 + \int (f + g)_3 + ... < \infty$ y $\alpha \int f = \int \alpha f_1 + \int \alpha f_2 + \int \alpha f_3 + ... < \infty$ y así por las propiedades de las funciones simples $\int f + g = \int f + \int g$ y $\alpha \int f = \int \alpha \cdot f$ □

Lema 3. *Dadas dos funciones Bochner integrables f, g y α un número real, entonces $f + g(x)$ y $\alpha f(x)$ es Bochner integrable*

Demostración. Dado que f y g son Bochner integrables existen f_n y g_n tal que $f_n \to f$ y $g_n \to g$, por lo tanto si se toma $h_n = f_n + g_n$ entonces $h_n \to (f + g)(x)$ y si se toma $l_n(x) = \alpha f_n$ entonces $l_n(x) \to \alpha f(x)$.
Ahora veamos que $\int \| f + g - (f_n + g_n) \|_E = 0$ y que $\int \| \alpha f - \alpha f_n \|_E = 0$

- Sea $\epsilon > 0$, para f_n y g_n existen N_1 y N_2 tal que

$$\int \| f - f_n \|_E < \epsilon/2 \quad y \qquad \int \| g - g_n \|_E < \epsilon/2 \quad si\ n > N_1\ y\ n > N_2\ resp.$$

  Así tomando $N = max\{N_1, N_2\}$:

$$\begin{aligned} \int \| f + g - (f_n + g_n) \|_E &\leq \int \| f - f_n \|_E + \| g - g_n \|_E \\ &\leq \int \| f - f_n \|_E + \int \| g - g_n \|_E \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

- Sea $\epsilon > 0$, para f_n existe N tal que

  $$\int \| f - f_n \|_E < \epsilon/|\alpha| \quad si\ n > N$$

  Así

  $$\begin{aligned} \int \| \alpha f - \alpha f_n \|_E &= \int |\alpha| \, \| f - f_n \|_E \\ &= |\alpha| \int \| f - f_n \|_E \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

□

Teorema 1. *El espacio de las funciones Bochner integrables $\mathcal{B}(f)$ es un espacio vectorial.*

Demostración. Sabiendo que el espacio de las funciones es un espacio vectorial entonces por los Lemas 1 y 2 queda mostrado □

Para el el espacio de las funciones Bochner integrables se define la norma $\mathcal{L}_1$,

Teorema 2. *El par $(\mathcal{B}(f_I), \mathcal{L}_1)$ donde $\mu(I) < \infty$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Ya se tiene que $\mathcal{L}_1$ es un norma, solamente falta ver que es completo, sea $f_n \in \mathcal{B}(f)$ un sucesión de cauchy y sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$\int \| f_n - f_m \|_E \, d\mu < \epsilon/2$$

Por otro lado como E es un espacio de Banach entonces existe $f : I \to E$ tal que $f_n \to f$ por ser completo, por lo tanto existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\| f_n - f_m \|_E < \epsilon/2\mu(I)$$

Tomese $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, entonces si $n \geq N$

$$\begin{aligned} \int \| f_n - f \|_E \, d\mu &\leq \int \| f_n - f_m \|_E \, d\mu + \int \| f - f_m \|_E \, d\mu \\ &\leq \epsilon/2 + \frac{\epsilon \int_I d\mu}{2\mu(I)} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{B}(f_I)$, así $(\mathcal{B}(f_I), \mathcal{L}_1)$ es completo y por ende un espacio de Banach.

□

Proposición 2. *Sea $b \in E$ y una sucesión b_m tal que $b_m \to b$ y sea $f(x)$ una función Lebesgue integrable acotada, entonces lo siguiente se cumple:*

- *$f(x)b_m$ es Bochner integrable para todo $m \in \mathbb{N}$*
- *$f(x)b_m \to f(x)b$*
- *$f(x)b$ es Bochner integrable.*

Demostración. *i*)Sea $\epsilon > 0$ como $b_m \to b$ entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces

$$\| b_m - b \|_E < \epsilon$$

, como $f(x)$ Lebesgue integrable entonces por el lema 1 existe una sucesión $f_n(x) \to f(x)$ creciente tal que para $\epsilon > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ y se cumple que

$$\int |f_n(x) - f(x)| d\mu < \epsilon / \|b_m\|_E$$

para cada $m \in \mathbb{N}$ fijo y para $n \geq N_2$. Así $f_n(x)b_m \to f(x)b_m$ para un m fijo y además

$$\begin{aligned} \int_I \| f_n(x)b_m - f(x)b_m \|_E &= \|b_m\|_E \int_I |f_n(x) - f(x)| \\ &< \|b_m\|_E \epsilon / \|b_m\|_E = \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x)b_m$ es Bochner integrable para todo m.
ii) Sea $\epsilon > 0$ dado que f acotada existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f| \leq K$, $b_m \to b$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\| b_m - b \|_E < \epsilon / K$$

, así

$$\begin{aligned} \int_I \| f(x)b_m - f(x)b \|_E &= |f(x)| \int_I |b_m - b| \\ &< \|f(x)\| \epsilon / K \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

iii) Por el lema 1 existe una sucesión $f_n(x) \to f(x)$ creciente y existe $b_m \to b$. definase la sucesión de funciones

$$g_n(x) = b_n f_n(x)$$

Sea $\epsilon > 0$ existe N_1 tal que si $n \geq N_1$ entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(\epsilon + ||b||_E)}$$

y existe N_2 tal que si $n \geq N_2$ entonces

$$||b_n - b||_E < \epsilon/2|K|$$

Ahora tómese $N = max\{N_1, N_2\}$ entonces:

$$\begin{aligned} || f_n(x)b_n - f(x)b ||_E &\leq ||b_n||_E|f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \; || b_n - b ||_E \\ &< (\epsilon + ||b||_E)\frac{\epsilon}{2(\epsilon + ||b||_E)} + |K|\frac{\epsilon}{2|K|} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_n(x)$ converge a $f(x)b$, además

$$\begin{aligned} \int_I || f_n(x)b_n - f(x)b ||_E \, d\mu &\leq ||b_n||_E \int_I |f_n(x) - f(x)| d\mu + || b_n - b ||_E \int_I |f(x)| d\mu \; || b_n - b ||_E \\ &< (\epsilon + ||b||_E)\frac{\epsilon}{2(\epsilon + ||b||_E)} + |K|\mu(I)\frac{\epsilon}{2|K|\mu(I)} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x)b$ es Bochner integrable □

La propiedad de expresar una función Bochner integrable como una serie de funciones simples permite tener la propiedad

$$\left\| \int f \right\| \leq \int ||f||_E d\mu \tag{2.4}$$

Proposición 3. *Una $f : I \to E$ función es Bochner integrable si solo si $||f||_E : I \to \mathbb{R}^+$ es Lebesgue integrable.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sea f Bochner integrable entonces existe una sucesión de funciones f_n simples tal que $f_n \to f$, definase la sucesión $||f_n||_E$, entonces $||f_n||_E$ a $||f||_E$ por la desigualdad:

$$||f_n|| - ||f||_E \leq ||f_n - f||_E$$

Además dado que f_n es integrable para cada n, entonces $\int ||f_n||_E d\mu = \sum_{i=1}^{k_n} \mu(B_i \cap I)||x_i||_E$ para B_i subconjuntos de I con intersección vacía 2 a 2 por lo tanto $||f_n||_E$ son Lebesgue integrables y por el teorema de convergencia monótona se tiene que $||f||_E$ es integrable Lebesgue. $\Leftarrow$ Sea f una función tal que $||f||_E$ es integrable Lebesgue, Sea f_n una sucesión de funciones simples que convergen a f en casi todo punto, definase $g_n(x) = f_n(x)$ si y sólo si $||f_n(x)||_E \leq 2||f(x)||_E$ y $g_n(x)$ igual a 0 en otro caso. Entonces, puesto que $||g_n||_E \leq 2||f||_E$, se sigue que $||g_n||$ es integrable y por la proposición 1 g_n es una sucesión de funciones simples Bochner-integrables y además converge a f. Finalmente por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}||f - g_n||_E + ||g_n||_E &\leq ||g_n - f||_E + ||f||_E \\ ||f - g_n||_E &\leq ||g_n - f||_E - ||g_n||_E + ||f||_E \\ &\leq ||g_n - f - g_n||_E + ||f||_E \\ &\leq 3||f||_E\end{aligned}$$

Como por hipótesis $||f||_E$ es integrable podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y deducir que:

$$\lim_{n\to\infty} || \int_I g_n - f d\mu \, ||= 0$$

Lo cuál quiere decir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I g_n d\mu = \int f d\mu$$

Por lo tanto f es Bochner integrable. □

Corolario 1. *Dada una función f Bochner integrable, se tiene que la integral de Bochner es una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, es decir,*

$$\lim_{\mu(M)\to 0} \int_M f d\mu = 0 \tag{2.5}$$

Para algún $M \in \mathcal{X}$

Demostración. Dado que f es Bochner integrable se tiene que $||f||_E$ es Lebesgue integrable y por ende $\lim_{\mu(M)\to 0} \int_M ||f||_E d\mu = 0$ por el teorema anterior, y de la desigualdad triangular $\left\| \int_M f \right\| \leq \int_M ||f||_E d\mu$ se obtiene lo deseado. □

La siguiente condición nos da una condición clave para reconocer una función Bochner integrable Se conoce el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y su gran importancia, a continuación se dará una versión para la medida de Bochner

Teorema 3 (Convergencia Dominada)**.** *Sea una sucesión $f_n : I \to E$ de funciones que convergen a $f : I \to E$ en casi todo punto de I. Si existe una función $g : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrable tal que $\|f_n\|_E \leq |g|$ para todo n natural entonces f es Bochner integrable y*

$$\int_I f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Demostración. Dado que $f : n \to f$ entonces $\|f_n\|_E \to \|f\|_E$ y como $\|f_n\|_E \leq |g|$, para cada n $\|f_n\|_E$ es integrable y por teorema anterior es Bochner integrable, así por el teorema de Convergencia Dominada e Lebesgue ||f|| es Lebesgue integrable y de nuevo por el teorema anterior f es Bochner integrable.

Para ver que $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n d\mu = \int f d\mu$, en efecto dado que $f_n \to f$ para todo $\epsilon > 0$ existe N natural tal que si $n \geq N$ entonces

$$\|f_n - f\|_E < \epsilon/\mu(I)$$

así tomese ese N, y si $n \geq N$ entonces por desigualdad triangular

$$\begin{aligned} \| \int_I f_n d\mu - \int_I f d\mu \|_E &\leq \int_I \| f_n - fd \|_E \; \mu \\ &< \epsilon/\mu(I) \int_I d\mu \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Así

$$\int_I f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n d\mu$$

□

El siguiente teorema exhibe una propiedad fuerte de la teoría de la integral de Bochner que no tiene análogo no trivial en la teoría de integración de Lebesgue.

Teorema 4. *Sean $f : I \to E$ Bochner integrable y F un espacio de Banach sea el operador lineal acotado $T : E \to F$, entonces $T \circ f : I \to F$ es Bochner integrable y*

$$\int_I T \circ f = T(\int_I f)$$

Demostración. Si f es simple entonces

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i} x_i$$

con $x_i \in E$, así como T es lineal, se define

$$T(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i \cap I} T(x_i)$$

y por lo tanto

$$\int T(f(x))d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)T(x_i)$$

y por la linealidad de T se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)T(x_i) &= T(\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)x_i) \\ &= T(\int f d\mu)\end{aligned}$$

Ahora suponga que f Bochner integrable, entonces existe sucesión de funciones simples f_n tales que $f_n \to f$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int \| f_n - f \|_E \, d\mu = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Sea $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\| T \int_I f d\mu - T \int_I f_n d\mu \|_F &= \| T(\int_I f d\mu \int_I f_n d\mu) \|_F \\ &\leq \| T \| \| \int_I f d\mu \int_I f_n d\mu) \|_E \\ &\leq \| T \| \int_I \| f - f_n \|_E \, d\mu\end{aligned}$$

y dado que $\int_I \| f - f_n \| \, d\mu \to 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\int_I \| f - f_n \|_E \, d\mu < \epsilon/\|T\|_F$$

entonces

$$\| T \int_I f d\mu - T \int_I f_n d\mu \|_F < \epsilon$$

así

$$T\int_I f_n d\mu \to T\int_I f d\mu$$

Además

$$\begin{aligned} T\int_I f d\mu &= T \lim_{n\to\infty}\int_I f_n d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_I T(f_n) d\mu \\ &= \int_I T(f) d\mu \end{aligned}$$

Así $\int T \circ f d\mu$ es Bochner integrable. □

2.2.1. Teorema de medibilidad de Pettis

En la teoría de integración sobre espacios de Banach y por sobretodo espacios vectoriales el matemático Billy James Pettis hizo fuertes contribuciones sobre la medibilidad de funciones definidas partiendo desde teorías ya establecidas por Dimitri Egorov y Carlo Severini los cuales mostraban las condiciones suficientes para la convergencia puntual y uniforme de una función sobre espacios de Banach y sobre espacios vectoriales normados, el siguiente teorema que se debe a él y muestra la propiedad de Pettis acerca de las consecuencias de que una función definida de un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ a un espacio de Banach sea medible y además integrable; los conceptos necesarios ya se han venido usando, como lo son la medida de Lebesgue, la medibilidad fuerte, lo que es una función simple, etc. así enuncia el teorema de medibilidad de Pettis

Teorema 5 (Teorema de medibilidad de Pettis)**.** *Sea una función $f : I \to E$ es Lebsegue medible o fuertemente medible entonces existe $M \in \mathcal{X}$ con $\mu(M) = 0$ y tal que $f(I/M)$ es un subconjunto separable de E*

Demostración. Suponga que f es Lebesgue medible, por lo tanto existe una sucesión de funciónes simples f_k tal que

$$\lim_{k\to\infty} \| f_k - f \|_E = 0 \tag{2.6}$$

en casi todo I. Definase para n, m naturales el conjunto

$$E_{n\ m} = \bigcup_{k=n}^{\infty}\{x \in I;\ \ \| f_k(x) - f(x) \|_E > 1/m\} \tag{2.7}$$

Como f_k y f son medibles entonces $\| f_k(x) - f(x) \|_E$ es medible por proposición 3 y así $E_{n\ m}$ es medible para cada $m, n \in \mathbb{N}$; además la sucesión de conjuntos $E_{n\ m}$ es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $E_{n+1\ m} \subset E_{n\ m}$ para todo n y dado que $f_k(x) \to f(x)$ en casi todo I, existe M tal que $\mu(M) = 0$ y además $M \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n\ m}) = \emptyset$. Dado que $\mu(I) < \infty$ entonces

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n\ m}) = 0$$

Ahora sea $\delta > 0$ y tómese para cada $m \in \mathbb{N}$ un k_m tal que

$$\mu(E_{k_m\ m}) < \delta/2^m$$

y defínase $E_\delta = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k_m\ m}$, también se tiene que E_δ es Lebesgue medible y además

$$\begin{aligned} \mu(E_\delta) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_{k_m\ m}) \\ &< \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} \\ &= \delta \end{aligned}$$

Así si $x \notin E_\delta$ entonces no pertenece a $E_{n\ m}$ para cada m y n, por lo tanto

$$\| f_k(x) - f(x) \|_E < 1/m$$

para $k \geq k_m$, de lo anterior se da que $f_k(x)$ converge uniformemente en I/E_δ y así queda demostrado (2.6)
Ahora dado que $f_k(x)$ es simple para cada $k \in \mathbb{N}$ entonces la imagen de I por f_k tiene dimensión finita y por lo tanto es un conjunto acotado es decir $f_k(I) = \langle x_1, x_2, ...x_{r_k} \rangle$, como la dimensión del rango para cada k natural es finita entonces la dimensión de $f_k(I/E_n)$ es de dimensión finita para todo $n, k \in \mathbb{N}$. Sea $z = f(w) \in f(I/E_n)$ y $\epsilon > 0$ como $f_k(w)$ converge uniformemente a $f(w)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$

$$\| f(w) - f_k(w) \|_E < \epsilon$$

entonces tómese $x_{r_k} = f_k(w) \in f_j(I/E_n)$ con $j \geq k$, así

$$\| z - x_{r_k} \|_E < \epsilon$$

$f(I/E_n)$ es separable y por ende $f\left(I/\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$. Es separable quedando demostrado el teorema. □

2.3. Ejemplos

El siguiente ejemplo nos dará una noción de integrabilidad de Bochner a funciones discontinuas en conjuntos relativamente grandes

Ejemplo 5. *Sea el subespacio de l_∞, c_0 el conjunto de todas las sucesiones que convergen a 0 el cual es cerrado sobre l_∞ y por lo tanto completo, con la norma del sup es un espacio de Banach, sea el conjunto $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ el cual es contable; $Q = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\}$, definase la función:*

$$f(x) = \begin{cases} e_k & x = \alpha_k, \alpha_k \in Q \\ 0 & E.O.C. \end{cases} \tag{2.8}$$

Para solucionar este ejemplo se necesita entender que es una función característica en general dada una función entre dos espacios vectoriales, A y B. Sea $M \subseteq A$ y sea $\beta \in B$, entonces

$$f(x) = \begin{cases} \beta & x \in M \\ 0 & E.O.C. \end{cases}$$

Y se denotará como $f(x) = \beta\chi(M)$.

Al tener esto, para $\alpha \in c_o$ y $a \in [0,1]$ definase la función $f_\alpha : [0,1] \to c_0$ como

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha & x = a \\ 0 & E.O.C. \end{cases} \tag{2.9}$$

veamos que f_α es Bochner integrable y que su integral es $\int_0^1 f = 0$. En efecto, sea una sucesión decreciente a_n de números reales que converja a a tal que el $sup_{n\in\mathbb{N}} \{|a_n - a|\} \leq 1$ y definase $f_{\alpha_n} : [0,1] \to c_0$ como

$$f_{\alpha_n}(x) = \alpha\chi([a_{n+1}, a_n])$$

Así la serie de funciones queda de la siguiente manera:

$$f_{\alpha_1} - \sum_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}$$

Esta serie converge a la función 2.9. Por otro lado, si $a_n \to a$ entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$|a_{n+1} - a| < \epsilon/||\alpha||$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\| \alpha\chi([a,a_1]) - \sum_{k=1}^{n} \alpha\chi([a_{n+1},a_n]) - f_\alpha \right\| d\mu &= \int_0^1 \|\alpha\| \left| (\chi([a,a_1]) - \sum_{k=1}^{n} \chi([a_{n+1},a_n])) \right| d\mu \\
&= \|\alpha\| \int_0^1 \left| \chi([a,a_1]) - \sum_{k=1}^{n} \chi([a_{n+1},a_n]) \right| d\mu \\
&\leq \|\alpha\| |a_{n+1} - a| \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto es Bochner integrable y su integral es $0 \in c_0$.
Ahora para continuar en el ejemplo (2.8), dado que el conjunto Q es contable, sea para cada $\alpha_i \in Q$ la función

$$f_{e_i}(x) = \begin{cases} e_i & x = \alpha_i \\ 0 & E.O.C. \end{cases}$$

y sea una sucesión decreciente $\alpha_{i_n} \in E$ tal que $\alpha_{i_n} \to \alpha_i$ y que además $\alpha_{i_1} - \alpha_i < 2^{-i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$; y definase

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i\chi([\alpha_i, \alpha_{i_1}]) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_i\chi([\alpha_{i_{k+1}}, \alpha_{i_k}])$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i\chi[\alpha_i,\alpha_{i_1}] - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_i\chi[\alpha_{i_{k+1}},\alpha_{i_k}] - f(x) \right\| &= \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i\chi(\alpha_i,\alpha_{i_1}] - \sum_{k=1}^{n} e_i\chi[\alpha_{i_{k+1}},\alpha_{i_k}] \right\| d\mu \\
&\leq \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \left\| e_i\chi(\alpha_i,\alpha_{i_1}] - \sum_{k=1}^{n} e_i\chi[\alpha_{i_{k+1}},\alpha_{i_k}] \right\| d\mu \\
&\leq \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \|e_i\| \left| \chi(\alpha_i,\alpha_{i_1}] - \sum_{k=1}^{n} \chi[\alpha_{i_{k+1}},\alpha_{i_k}] \right| d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left| \chi(\alpha_i,\alpha_{i_1}] - \sum_{k=1}^{n} \chi[\alpha_{i_{k+1}},\alpha_{i_k}] \right| d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{i_{n+1}} - \alpha| \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

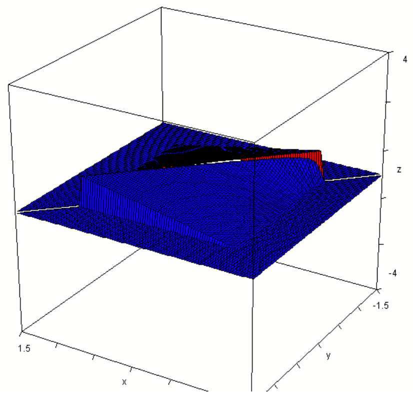
Dado que $\alpha_{i_1} - \alpha_i < 2^{-i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces f(x) es Bochner integrable y además $\int_0^1 f d\mu = 0$.
En el ejemplo anterior no se pudo denotar muy bien el teorema de medibilidad de Pettis dado que el rango era un conjunto numerable dada las circunstancias en las que se define la función, en el siguiente ejemplo se podrá observar mejor.

Ejemplo 6. *Sea el intervalo* $I = [-1, 1]$ *y el espacio de Banach de las funciones acotadas definidas en* I *con la norma del sup* $B([-1, 1])$ *y sea la función* $f : I \to B([-1, 1])$ *como*

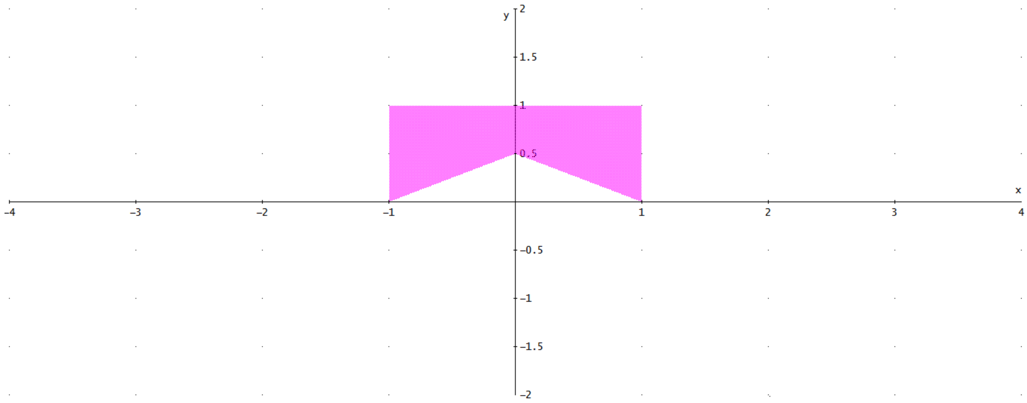
$$f(k) = \frac{x+1}{1+k}\chi[-1, k) + \frac{1-x}{1-k}\chi[k, 1) \tag{2.10}$$

Ver que es Bochner integrable y encontrar su integral

La anterior función describe una familia de triángulos cuyos vértices se encuentran en los puntos $(-1, 0)$, $(k, 1)$, $(1, 0)$ cuyas áreas siempre son 1. Como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ genera la superficie mostrada en la siguiente figura si se fuera a medir con una integral esta superficie, se trabajaría con el volumen bajo la superficie es decir una integral de volumen o se trabajaría con la medida de la superficie con una integral de superficie a lo cual esta integral nos arrojaría un numero real definiendo la medida sea cual sea el caso;



Lo interesante de esta teoría es que al integrar la función descrita (2.10) la medida de lo que nos arroja su integral ya no es un elemento de los reales, sino que es un elemento del espacio imagen como subconjunto del espacio de Banach de llegada, en este caso $B([-1, 1])$, y este caso la imagen serán una familia de funciones que describirán un área en el plano $\mathbb{R}^2$



Veamos que la función descrita es fuertemente medible, tómese la siguiente sucesión de conjuntos $S_n = \{k \in [-1,1]; k = -1 + (2m+1)2^n, m \in \mathbb{N}\ y\ 0 \le m < 2^n\}$ y $S_{-1} = \{-1, 1\}$ los cuales son finitos para cada n natural, definase la siguiente sucesión recursiva de funciones

$$g_1(k) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2}\chi[-1,1] & si\ k = -1 \\ \dfrac{1-x}{2}\chi[-1,1] & si\ k = 1 \\ 0 & E.O.C. \end{cases} \qquad g_2(k) = \begin{cases} g_1(k) & si\ k \in \{-1,1\} \\ (x+1)\chi[-1,0) + (1-x)\chi(0,1] & si\ k \in S_0 \\ 0 & E.O.C. \end{cases}$$

$$g_n(k) = \begin{cases} g_{n-1}(k) \quad k \in S_{n-3} & n \ge 2 \\ \frac{x+1}{m2^{-n+2}}\chi[-1,-1+m2^{-n+2}) \ + \ \frac{1-x}{2-m2^{-n+2}}\chi[m2^{-n+2},1] & donde\ m = 2r+1\ y\ 0 \le r \le 2^{n-2} \\ ; si\ k \in S_{n-2} \end{cases} \tag{2.11}$$

En principio veamos que g_n es medible para cada n natural, en efecto se procederá por inducción, para $n = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} g_1(k)d\mu &= \begin{cases} \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{2}d\mu \\ \int_{-1}^{1} \frac{1-x}{2}d\mu \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left.\frac{x^2/2+x}{2}\right|_{-1}^{1} \\ \left.\frac{x-x^2/2}{2}\right|_{-1}^{1} \end{cases} \\ &= 1 \qquad k \in S_{-1} \end{aligned}$$

Para n=2 se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} g_2(k)d\mu &= \begin{cases} \int_{-1}^{1} g_1(k)d\mu \\ \int_{-1}^{1} (x+1)\chi[-1,0) + (1-x)\chi[0,1]d\mu \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 \quad k \in S_{-1} \\ (x^2/2+x)\Big|_{-1}^{0} (x-x^2/2)\Big|_{0}^{1} \end{cases} \\
&= 1 \quad k \in S_{-1} \cup S_0
\end{aligned}$$

Supongase cierto para $k = n-1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} g_n(k)d\mu &= \begin{cases} \int_{-1}^{1} g_{n-1}(k)d\mu \\ \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{m2^{-n+2}}\chi[-1,-1+m2^{-n+2}) \ + \ \frac{1-x}{2-m2^{-n+2}}\chi[m2^{-n+2},1]d\mu \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 \quad k \in \bigcup_{i=-1}^{n-3} S_i \quad \text{Por hipótesis de inducción} \\ \int_{-1}^{-1+m2^{-n+2}} \frac{x+1}{m2^{-n+2}}\chi[-1,-1+m2^{-n+2})d\mu \ + \ \int_{-1+m2^{-n+2}}^{1} \frac{1-x}{2-m2^{-n+2}}\chi[m2^{-n+2},1]d\mu \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 \quad k \in \bigcup_{i=-1}^{n-3} S_i \\ \frac{(x^2/2+x)}{m2^{-n+2}}\Big|_{-1}^{-1+m2^{-n+2}} \quad + \quad \frac{(x-x^2/2)}{2-m2^{-n+2}}\Big|_{-1+m2^{-n+2}}^{1} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 \quad k \in \bigcup_{i=-1}^{n-3} S_i \\ \left(\frac{\frac{(-1+m2^{-n+2})^2}{2}+(-1+m2^{-n+2})}{m2^{-n+2}} + \frac{1/2}{m2^{-n+2}}\right) + \left(\frac{1/2}{(2-m2^{-n+2})} + \frac{(-1+m2^{-n+2})-\frac{(-1+m2^{-n+2})^2}{2}}{(2-m2^{-n+2})}\right) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 \quad k \in \bigcup_{i=-1}^{n-3} S_i \\ \left(\frac{m2^{-2n+3}}{m2^{-n+2}}\right) + \left(\frac{2-m2^{-n+2}}{2-m2^{-n+2}} + \frac{m2^{-n+2}-m2^{-2n+3}}{2-m2^{-n+2}}\right) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 \quad k \in \bigcup_{i=-1}^{n-3} S_i \\ m2^{-n+1} + 1 - m2^{-n+1}\left(\frac{2-m2^{-n+2}}{2-m2^{-n+2}}\right) \end{cases} \\
&= 1 \quad k \in \bigcup_{i=-1}^{n-2} S_i
\end{aligned}$$

Entonces se cumple para todo n así $\int_{-1}^{1} g_n(k)d\mu = 1$ para todo $k \in \bigcup_{i=-1}^{n-2} S_i$, para poder entender mejor la sucesión recursiva, en las siguientes imágenes se gráfica hasta $n = 10$, en donde se puede observar como la región que debería estar coloreada se rellena a partir de esas funciones:

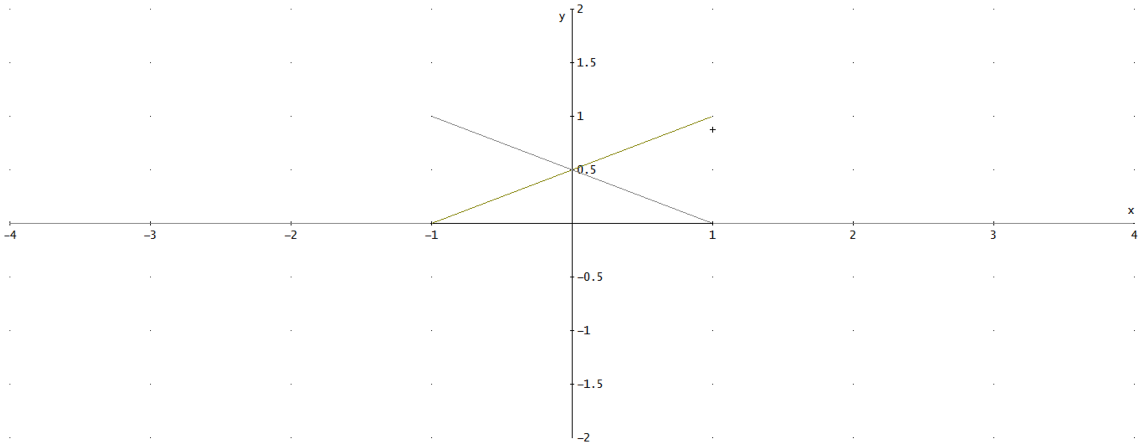


Fig 1: n=1

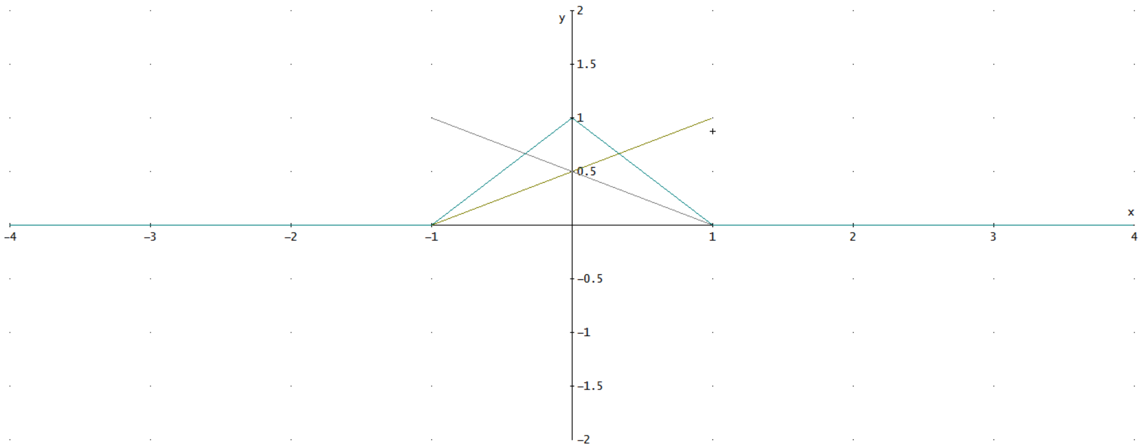


Fig 2: n=2

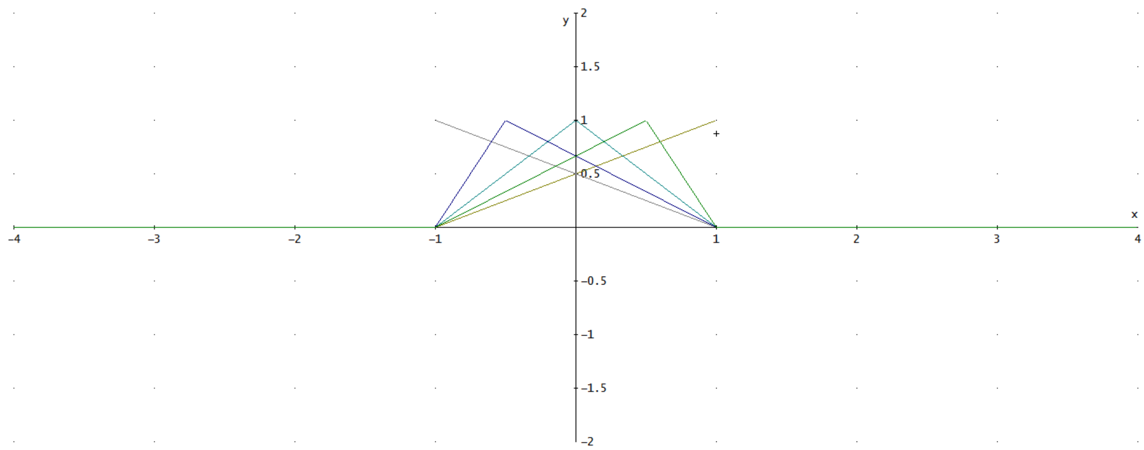


Fig 3: n=3

Se puede observar que el area se va rellenanado apartir de finitas funciones

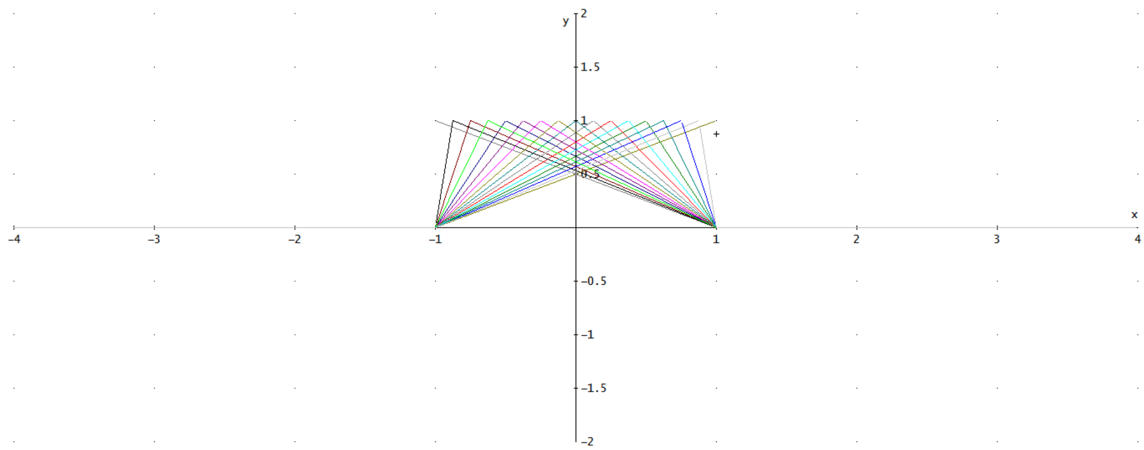


Fig 4: n=5

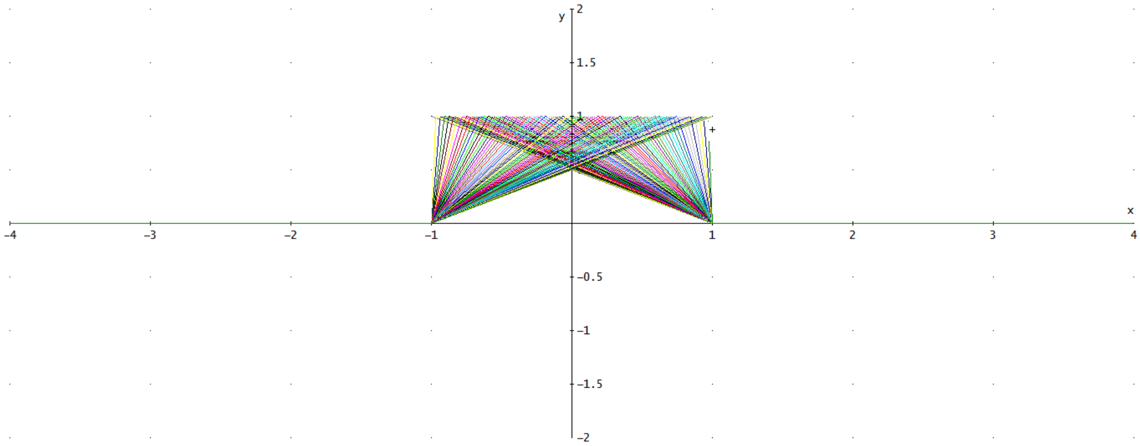


Fig 5: n=7

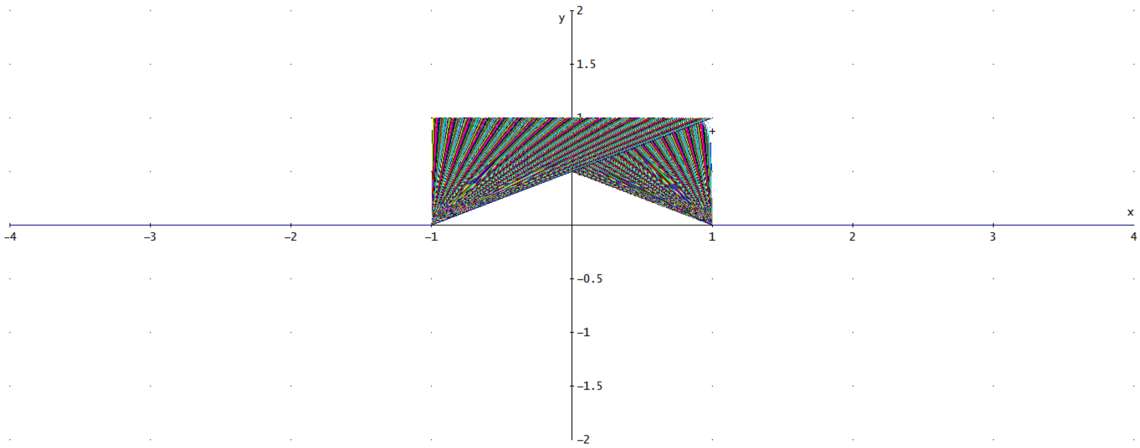
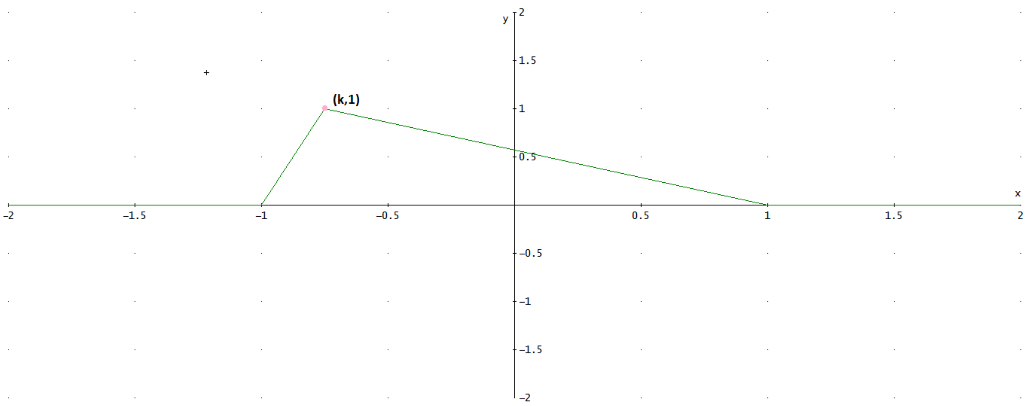


Fig 6: n=10

Y usando el programa DERIVE se obtuvo la ultima imagen **(Fig. 6)**
Ahora veamos que $g_n(k) \to f(k)$, en efecto sea $\epsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-N} < \epsilon$, así, si $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned} \| f(k) - g_n(k) \|_E &= sup_{x\in[-1,1]}|f(k) - g_n(k)| \\ &\leq 2^{-N} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

En la anterior sucesión de funciones se puede observar que para cada n, $g_n(k)$ es Bochner integrable , veamos entonces que la función es Bochner integrable, en



efecto:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} \| g_n(k)-1 \| \, d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} sup_x \left\{|g_n(k)-1|\right\} d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} d\mu \\ &= 0\end{aligned}$$

Así se tiene una convergencia uniforme y dado que el intervalo sobre el cual están todas la funciones es de medida finita, entonces la función es Bochner integrable y $\int_{-1}^{1} f(k)d\mu = 1$.

Para observar y hacer evidente el teorema de medibilidad de Pettis hay que ver que dado que la función es Bochner integrable o Bochner medible debe existir un conjunto de medida 0, para no complicar las cosas tomese $\emptyset$ como conjunto de medida nula y veamos que $f([-1,1])$ es separable, en efecto, sea $k \in [-1,1]$, y definase a $f_k(x)$, la función de la figura (2.3)

Por la densidad de los racionales sobre $\mathbb{R}$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $|k-q| < \frac{\epsilon|1-k^2||1-q^2|}{2(|1-q||1-k|+|1+k||1+q|)}$, así para la función $f_q(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\| f_k(x) - f_q(x) \|_E &= sup_{x\in[-1,1]}|f_k(x) - f_q(x)| \\
&= sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{x+1}{1+k}\chi[-1,k) + \frac{1-x}{1-k}\chi(k,1] - \frac{x+1}{1+q}\chi[-1,q) + \frac{1-x}{1-q}\chi(q,1]\right| \\
&\leq sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{x+1}{1+k}\chi[-1,k) - \frac{x+1}{1+q}\chi[-1,q)\right| + \left|\frac{1-x}{1-k}\chi(k,1] - \frac{1-x}{1-q}\chi(q,1]\right| \\
&\leq sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{(x+1)(k-q)}{(1+q)(1+k)}\right| + sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{(1-x)(q-k)}{(1-q)(1-k)}\right| \\
&\leq sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{|k-q|}{|1+q||1+k|}\right| + sup_{x\in[-1,1]}\,||1-x||\,\frac{|q-k|}{|1-q||1-k|} \\
&< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}$$

Conclusiones

1. La primera conclusión y en mi la más representativa se refiere al la importancia del uso de la integral de Lebesgue para generalizar un medida sobre espacios normados mediante la integral de Bochner, la cual generaliza bastantemente bien a sabiendas que depende de que si los conjuntos son o no Lebesgue medibles, además muchas de las propiedades de la integral de Lebesgue son prácticamente heredadas por la integral de Bochner a excepción de algunas.

2. La teoría de medibilidad de Bochner y el teorema de medibilidad de Pettis permite ver la clase de convergencia que hay en el espacio y además si el espacio imagen de la función dada es separable o no, por medio de un la existencia o no de una integral, además si se tiene un espacio que no es separable, por el teorema de Pettis se podría inferir que no existe la función Bochner integrable que como imagen recaiga en ese espacio.

Bibliografía

[1] Bartle Robert G., *The elemnt of integration and de Lebesgue measure*, Jhon Wiley y Sons, 1995.

[2] Forket Dominik L., *The Banach space-valued integrals of Riemann, McShane,Henstock-Kurzweil y Bochner*, Viena university, 2012.

[3] Jan Mikusinski L., *The Bochner Integral*,Academic Press Birkhäuser, 1978.

[4] Yoshida Kôsaku, *Funcional analysis*, Springer-Verlang, 1980, pag. 132-135.