UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

FACTORIZACIÓN $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ EN CONSTRUCTOS

TRABAJO DE GRADO

PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

MARTÍNEZ BENÍTEZ JOHAN SEBÁSTIAN

DIRECTOR:
OCHOA CASTILLO CARLOS ORLANDO

Bogotá D.C. Febrero 2017

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá D.C., 9 de febrero de 2017

Redacción y edición del documento

con LaTeX.

A Dios, mis padres y demás familiares, quienes me han brindado apoyo y amor incondicional. Además de inculcarme el amor por el estudio y el saber.

Las matemáticas pueden ser definidas como aquel tema del cual no sabemos nunca lo que decimos ni si lo que decimos es verdadero.

Bertrand Russell

Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.

Hipatía

Las estructuras son las armas del matemático.

Nicolás Bourbaki

Agradecimientos

Agradezco al Proyecto Curricular de Matemáticas, a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, que me han mostrado el camino de la academia y me han brindado un apoyo enorme en el desarrollo de mis trabajos.

Agradezco a mi familia ya que siempre he contado y sé que siempre contaré con su apoyo, así mismo a todos los profesores que han estado y me han guiado en el camino del conocimiento, siempre he sabido que aún tengo mucho por aprender.

Índice general

Planteamiento del problema

La caracterización y axiomatización de objetos, conjuntos y estructuras es una ayuda importante en el ámbito matemático ya que permite distinguir los «elementos» en estudio respecto a alguna característica. La teoría de categorías permite realizar dicha axiomatización sin llegar a hacer uso de términos como elementos o relaciones de pertenencia y contenencia. Los constructos son aquellas categorías que comunmente se utilizan en nuestros primeros estudios de matemáticas y por tanto es importante lograr establecer el comportamiento de manera general entre dichos constructos, por ejemplo el primer teorema de isomorfismo en grupos o el comportamiento de los homomorfismos en los espacios topológicos. En categorías estas cuestiones se solventan mediante la factorización $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$; de esta manera el tema a tratar es **¿Cómo es la factorización $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ en diferentes constructos?**

Justificación

En matemáticas, siempre es de gran interés conocer, entender y describir las características de los objetos en estudio. El álgebra y la topoloía permiten el estudio y descripción del comportamiento de estructuras matemáticas como grupos, anillos, campos y espacios topológicos mediante morfismos. Por medio del presente trabajo se pretende analizar el comportamiento de la factorización $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ en diferentes constructos, así mismo, ver de qué manera se comporta en estructuras que no sean constructos.

Al realizar el estudio específico es posible hablar de una investigación formativa ya que por medio de este trabajo se busca identificar y conseguir una caracterización en particular, además, es de gran utilidad realizar un trabajo de este tipo, para fomentar el estudio de esta área en el país, como lo es la teoría de categorías.

Objetivos

Objetivo General

Estudiar la factorización $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ en contructos.

Objetivos Específicos

1. Estudiar e identificar la noción de de constructo.
2. Describir las propiedades que tienen los epimorfismos y monomorfismos en las categorías.
3. Analizar y caracterizar la factorización $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ en diferentes constructos.

Estado del arte

- **Maria Manuel Clementino:** Docente de matemáticas en el Centro de Matemáticas de la Universidad de Coimbra en Portugal e investigadora en Category Theory Research Group. Su investigación se ha basado principalmente en la Teoría de Categorías, el Álgebra y la Topología. Sus proyectos más recientes son *Fundamental Methods and Techniques in Mathematics* y *Métodos Categoriais em Álgebra Não Abeliana*.

  Entre sus obras y publicaciones más importantes se encuentran: *Hausdorff separation in categories* (ver [3]), *Weakly hereditary regular closure operators* (ver [4]), *On connectedness and disconnectedness* (ver [5]), *Tychonoff's Theorem in a Category* (ver [6]) y *Theory and Applications of Categories* (ver [7]).

- **Roberto Vásquez García** Es doctor de la Universidad Nacional Autónoma de México. Realizó estudios de doctorado en la Universidad de Princeton. En su investigación se encuentran temas de Topología Algebráica con diversos artículos sobre el álgebra de Steenrod, sucesiones espectrales para fibraciones, entre otros. Entre las publicaciones relacionadas con nuestro trabajo se encuentra: *Categorías Concretas Topológicas* (ver [12]).

Metodología

Con el fin de obtener un óptimo desarrollo del trabajo, el completo cumplimiento de los objetivos, se trabaja con la metodología que sigue, no sin antes recordar que nuestro método de trabajo es el deductivo.

1. **Recopilación Bibliográfica:** Se indagan las diferentes fuentes bibliográficas referentes al tema y se escogen las más apropiadas para la comprensión del mismo.

2. **Estudio de la Bibliográfia:** Según la previa selección del material, se estudian en profundidad los conceptos que el tema contiene. Con ellos se profundiza en el mismo y se reescriben algunos de sus temas de tal forma que se complementen procedimientos que el autor abarcó de manera breve.

3. **Redacción del Trabajo:** Una vez este comprendido por completo este tópico, se procede a la recostrucción de este por medio del proyecto según los objetivos y lineamientos del paso anterior.

Capítulo 1

Categorías

En el transcurso del proceso realizado ya durante cinco años, se han construido ciertos pilares mediante la abstracción y construcción de estructuras algebráicas todo desde la teoría de conjuntos, por ende, se considera necesario llegar a otro nivel de abstracción, uno en el cual la teoría conjuntista esté desprendida, un nivel desde el cual sea posible caracterizar algunas de las estructuras ya conocidas de manera general.
Así, considérese una estructura nueva la cual tendrá dos clases que la describirán, la primera se llama la clase objetos y la otra la clase de flechas. La clase de objetos se puede considerar de manera intuitiva como los conjuntos con cierta estructura algebráica como los grupos, monoides, espacios topológicos y las flechas se toman como las funciones que actúan entre dichos objetos como los homomorfismos de grupos, las funciones continuas en los espacios topológicos o las transformaciones lineales en los espacios vectoriales. De esta manera, la nueva estructura permitirá estudiar propiedades de sus objetos sin la necesidad de tomarlos de manera específica.

Se comienza entonces dando el pilar para dicha teoría.
Un *grafo dirigido* (ver [9]) es una clase Ob de objetos, un conjunto $hom(A, B)$ de flechas entre los objetos A y B, y dos funciones

$$hom \rightrightarrows_{cod}^{dom} Ob.$$

Ya teniendo la noción de un grafo dirigido es posible definir la nueva estructura de la siguiente manera, una *Categoría* $\mathcal{C}$ (ver [9]) es una grafo con dos funciones adicionales

$$\begin{aligned} Id : Ob &\longrightarrow hom \\ A &\longmapsto Id_A \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \circ :\ hom(A,B) \times_{Ob} hom(B,C) &\longrightarrow hom(A,C) \\ < g, f > &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

llamadas la función identidad y composición respectivamente donde

$$hom(A,B) \times_{Ob} hom(B,C) = \{< g, f > | g, f \in hom \text{ y } domg = codf\}$$

es el conjunto de parejas componibles. Las funciones descritas anteriormente satisfacen que

- $dom(id_A) = A = cod(id_A)$,
- $dom(g \circ f) = domf$,
- $cod(g \circ f) = codg$

para todo $A \in Ob$ y toda pareja $(f, g) \in hom$ componible.

Existen dos tipos importantes de caterorías, las grandes y las pequeñas. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *pequeña* (ver [2]) si su clase de objetos $Ob(\mathcal{C})$ es un conjunto. De otra manera se dirá que es *grande*.

Nótese que si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña entonces

- $hom(\mathcal{C}) = \bigcup\{hom(A,B)|(A,B) \in Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{C})\}$ es un conjunto.
- $hom(\mathcal{C}) : Ob(\mathcal{C}) \times Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(hom(\mathcal{C}))$[1] es un conjunto.
- $\circ \subseteq hom(\mathcal{C}) \times hom(\mathcal{C}) \times hom(\mathcal{C})$ es un conjunto.
- $\mathcal{C}$ es un conjunto.

Otro concepto importante es el de Ab-categorías, se dice que una *Ab-categoría* es una categoría $\mathcal{C}$ en la cual cada conjunto $hom(A,B)$ es un grupo aditivo y

[1] $\mathcal{P}$ hace referencia al conjunto de partes de un conjunto.

la composición es bilineal, es decir, para cualesquiera flechas $f, f' : A \to B$ y $g, g' : B \to C$ en $\mathcal{C}$ se cumple que

$$(g + g') \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' + g' \circ f + g' \circ f'$$

Como ejemplo de categoría pequeña podemos tener la categoría **Ab** de los grupos abelianos (pequeños), cuyos objetos son todos los grupos abelianos aditivos pequeños y sus flechas son todos los homomorfismos de grupos abelianos. Además la categoría **Ab** es a la vez una Ab-categoría.
Se mostrará primero entonces que **Ab** es un grupo abeliano aditivo. Nótese que para ϕ, ψ en $hom(G, G')$ y x, y en G se tiene que

$$\begin{aligned}(\phi + \psi)(x + y) &= \phi(x + y) + \psi(x + y)\\ &= \phi(x) + \phi(y) + \psi(x) + \psi(y)\\ &= \phi(x + y) + \psi(x + y)\end{aligned}$$

de esta manera $\phi + \psi$ está en $hom(G, G')$. El elemento neutro de este grupo abeliano será el homomorfismo

$$\begin{aligned}k_{e_{G'}} : G &\to G'\\ a &\longmapsto e_{G'}\end{aligned}$$

ya que para toda flecha f en $hom(G, G')$ se tiene que

$$(f \circ k_{e_{G'}})(a) = f(a) + e_{G'} = f(a).$$

Así mismo, debido a que G' es abeliano entonces para cada f en $hom(G, G')$ existe $(f(a))^{-1}$ tal que $f(a) + (f(a))^{-1} = e_{G'}$, por lo tanto existe

$$\begin{aligned}f* : G &\to G'\\ a &\longmapsto (f(a))^{-1}\end{aligned}$$

donde $(f \circ f*)(a) = f(a) + f*(a) = e_{G'}$ y de esta manera $hom(G, G')$ es un grupo abeliano aditivo. Luego para G, G', G'' objetos de **Ab**, $f, f' : G \to G'$ y $g, g' : G' \to G''$ flechas entonces

$$\begin{aligned}[(g + g') \circ (f + f')](a) &= (g + g')[(f + f')(a)]\\ &= (g + g')[f(a) *' f'(a)]\\ &= (g + g')[f(a)] *'' (g + g')[f'(a)]\\ &= [g(f(a)) *'' g'(f(a))] *'' [g(f'(a)) *'' g'(f'(a))]\\ &= (g \circ f)(a) *'' (g' \circ f)(a) *'' (g \circ f')(a) *'' (g' \circ f')(a)\\ &= [(g \circ f) + (g' \circ f) + (g \circ f') + (g' \circ f')](a).\end{aligned}$$

Así la composición en **Ab** es bilineal y **Ab** es una Ab-categoría.

De aquí en adelante el tratamiento se hace sólo en categorías pequeñas. De esta manera, en este nuevo universo de objetos y flechas es posible situarse en diferentes categorías con ciertas condiciones, unas de estas son las categorías concretas o constructos donde un *constructo o categoría concreta de conjuntos con estructura* $\mathfrak{G}$ (ver [1],[2]) está dada por los siguientes axiomas:

Cons 1 Para cada conjunto X, está definida una clase $\mathfrak{G}[X]$, sus elementos $\mathfrak{G}$-estructuras sobre X; una $\mathfrak{G}$-estructura es entonces un par $\mathbb{X} = (X, \alpha)$ donde X es un conjunto y α es una estructura sobre X, es decir, α está en $\mathfrak{G}[X]$. Estos pares consituyen $Ob(\mathfrak{G})$.

Cons 2 Para cada par de objetos $\mathbb{X} = (X, \alpha)$ y $\mathbb{Y} = (Y, \beta)$ existe un conjunto $A_{\mathfrak{G}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset Y^X$; el conjunto $A_{\mathfrak{G}}$ es el conjunto de flechas o morfismos en la categoría.

En otras palabras, un constructo es una categoría de conjuntos estructurados y flechas que preservan dicha estructura. Es útil familiarizarse con estos conceptos, para ello se consideran algunos ejemplos: Uno de los acercamientos en conjuntos con estructura fue mediante el álgebra abstracta, principalmente la teoría de grupos la cual se basa en los conceptos de grupo y homomorfismo de grupo. Un *grupo* (ver [10]) es un conjunto G con una operación binaria $*$, denotado por $(G, *)$ tal que se cumplen los siguientes axiomas:

G1 Para todo $a, b, c \in G$ se tiene que

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

es decir $*$ es asociativa.

G2 Existe un elemento e en G tal que para todo $x \in G$,

$$e * x = x * e = x$$

donde a e se le llama el elemento identidad para $*$.

G3 Para todo $a \in G$ existe un elemento $a' \in G$ tal que

$$a * a' = a' * a = e$$

es decir a' es el inverso de a;

además, $(G, *)$ se dice que es abeliano si $*$ conmuta, es decir,

G4 Para todo $a, b \in G$ se cumple que $a * b = b * a$.

Así, dados dos grupos $(G, *), (G', *')$ una función $f : G \to G'$ es un *homomorfismo* si respeta la estructura, es decir, para todo $a, b \in G$

$$f(a * b) = f(a) *' f(b).$$

Los homomorfismos satisfacen las siguientes propiedades:

- Si $f : (G, *) \to (G', *')$ y $g : (G', *') \to (\hat{G}, \hat{*})$ son homomorfismos entonces $g \circ f : (G, *) \to (\hat{G}, \hat{*})$ es un homomorfismo.
- Para cada grupo $(G, *)$ la función idéntica $1_G : (G, *) \to (G, *)$ es un homomorfismo.

Con esto se define el constructo **Grp** de la siguiente manera: Para cada conjunto X, **Grp**$[X]$ es el conjunto de todas las operaciones $*$ que definen estructura de grupo sobre X. Además, para $\mathbb{G} = (G, *), \hat{\mathbb{G}} = (\hat{G}, \hat{*}) \in Ob($**Grp**$)$ se tendrá que $A_{(\mathbb{G}, \hat{\mathbb{G}})}$ es el conjunto de homomorfismos entre $\mathbb{G}$ y $\hat{\mathbb{G}}$.

Al igual que con los grupos, recordemos que un *espacio vectorial sobre un campo* $\mathbb{K}$ (ver [**?**]) es una pareja $\mathbb{X} = (X, \mathbb{K})$ donde X es un conjunto no vacío de elementos $x, y, \ldots$ llamados vectores que junto a dos operaciones algebráicas $+, \cdot$ llamadas suma vectorial y producto por escalar cumple las siguientes condiciones:

- $(X, +)$ es un grupo abeliano.
- Si 1 es la unidad de $\mathbb{K}$, entonces $1x = x$ para todo $x \in X$
- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x \in X$ entonces $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
- Se cumplen las leyes distributivas, es decir, para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

  $$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

  y

  $$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

Ahora, dados $(X, \mathbb{K}), (Y, \mathbb{K})$ dos espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$ se dice que $f : X \to Y$ es una transformación lineal si para todo $x_1, x_2 \in X$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se cumple

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Por tanto, se definen los objetos del constructo $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ como los espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$ y los morfismos son las transformaciones lineales entre dichos objetos. Nótese que si X, Y, Z son espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{K}$ y $T_1 : X \to Y, T_2 : Y \to Z$ son transformaciones lineales entonces $T_2 \circ T_1$ es lineal, además la transformación identidad I_X es un morfismo.

De manera similar a los ejemplos anteriores realizados con grupos y espacios vectoriales, se puede trabajar con los espacios topológicos denotados por (X, τ) (ver [11]), estos espacios constan de un conjunto X el cual se ha dotado de una topología τ, dicha topología es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

ET1 $\emptyset$ y X están en τ

ET2 La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ.

ET3 La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ.

Para los espacios topológicos las funciones que preservan la estructura son las funciones continuas, con lo cual definimos el constructo **Top** como aquel cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyas flechas sean las funciones continuas entre dichos objetos.

Así, con la definición de constructo se nota que todo constructo es una categoría, sin embargo el recíproco no es cierto. Para ver esto se puede considera la categoría **Mat** que tiene como objetos todos los números naturales, para los cuales las flechas entre dos números m, n constarán del conjunto de todas las matrices $m \times n$ reales; la identidad $id_n : n \to n$ es la matríz diagonal unitaria $n \times n$, y la composición de matrices está definida como $A \circ B = BA$ donde BA denota la multiplicación usual de matrices.

Capítulo 2

Morfismos

En la teoría de categorías una gran parte de los resultados se dan analizando las flechas en las categorías, así que es posible definir las categorías sólo en términos de sus flechas. Por tanto es indispensable clasificar y caracterizar las flechas que actúan en las categorías, para ello se tienen las siguientes definiciones:

Una flecha $e : A \to B$ es *invertible* (ver [9]) en $\mathcal{C}$ si existe una flecha $e' : B \to A$ en $\mathcal{C}$ con $e' \circ e = 1_A$ y $e \circ e' = 1_B$. Es fácil ver que si e' existe, es única; en efecto, si existen $e'_1, e'_2 : B \to A$ en $\mathcal{C}$ tales que $e'_1 \circ e = e'_2 \circ e = 1_A$ entonces $e'_2 \circ (e \circ e'_1) = 1_A \circ e'_1$ por tanto $e'_2 = e'_1$. De manera análoga se tiene cuando $e \circ e'_1 = e \circ e'_2 = 1_B$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] & B \\ B \arrow[u, "e^{-1}"] \arrow[ur, "Id_B = e \circ e^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "e^{-1}"] & A \\ A \arrow[u, "e"] \arrow[ur, "Id_A = e^{-1} \circ e"'] & \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, si nos situamos en **Set** y tomamos los objetos P el conjunto de todos los números pares, I el conjunto de los números impares y $f : P \to I$ la flecha que a cada número n en P le asigna $n - 1$ en I. Consideremos ahora la flecha $g : I \to P$ en **Set** la cual a cada m en I le asigna el valor $m + 1$ en P. Luego $f \circ g = 1_P$ y $g \circ f = 1_I$, de esta manera $g = f^{-1}$ y f es invertible en **Set**.

A partir de esto, se dice que dos objetos A y B son *isomorfos* (ver [9]) en la categoría $\mathcal{C}$ si existe una flecha invertible $e : A \to B$, y escribimos $A \cong B$.

Proposición 1 *La relación de isomorfismo de objetos es reflexiva, simétrica y transitiva (relación de equivalencia).*

Prueba:

- *Reflexiva:* Sea A un objeto de $\mathcal{C}$ y $Id_A : A \to A$, luego $Id_A \circ Id_A = Id_A$, por tanto $Id_A^{-1} = Id_A$, así Id_A es invertible y $A \cong A$.
- *Simétrica:* Sean A, B objetos de $\mathcal{C}$ y $f : A \to B$ un isomorfismo, es decir, existe $f^{-1} : B \to A$ tal que $f \circ f^{-1} = Id_B$ y $f^{-1} \circ f = Id_A$. Luego para la flecha $f^{-1} : B \to A$ existe $(f^{-1})^{-1} = f : A \to B$ tal que $f \circ f^{-1} = Id_B$ y $f^{-1} \circ f = Id_A$, por tanto f^{-1} es invertible y $B \cong A$.
- *Transitiva:* Sean A, B, C objetos de $\mathcal{C}$, $f : A \to B$, $g : B \to C$ isomorfismos y $f \circ g : A \to C$, entonces ya que f y g son invertibles en $\mathcal{C}$ se tiene que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} : C \to A$. Luego $A \cong C$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Una flecha $m : A \to B$ es un *monomorfismo* (ver [9]) en $\mathcal{C}$ si para cualesquiera dos flechas paralelas $f_1, f_2 : D \to A$ la igualdad $m \circ f_1 = m \circ f_2$ implica que $f_1 = f_2$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "m"] & & B \\
D \arrow[u, bend left, "f_1"] \arrow[u, bend right, "f_2"'] \arrow[urr, "m\circ f_1=m\circ f_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Observe algunos ejemplos de esta definición.

Considere la categoría **Set**. Sean A, B objetos de **Set** y $f : A \to B$ una función inyectiva, esto es, si $f(x_1) = f(x_2)$ en B entonces $x_1 = x_2$ en A. Se notará a continuación que f es un monomorfismo. Sean $f_1, f_2 : D \to A$ dos flechas paralelas tales que $f \circ f_1 = f \circ f_2$, esto es $f(f_1(x)) = f(f_2(x))$, pero como f es inyectiva entonces $f_1(x) = f_2(x)$. De esta manera f es monomorfismo.

De esta manera se obtiene que en **Set** todas las funciones inyectivas son monomorfismos. Con un procedimiento análogo se tiene que también en **Grp** los homomorfismos inyectivos corresponden con los monomorfismos.

En consecuencia existe un primer resultado acerca de la composición de monomorfismos.

Proposición 2 *La composición de monomorfismos es un monomorfismo.*

Prueba: Sean $\mathcal{C}$ una categoría, A, B, C objetos en $\mathcal{C}$ y $h_1 : A \to B$, $h_2 : B \to C$ monomorfismos en $\mathcal{C}$. Se consideran $h_2 \circ h_1 : A \to C$ en $\mathcal{C}$ y cualesquiera dos flechas paralelas $j_1, j_2 : D \to A$ tales que $(h_2 \circ h_1) \circ j_1 = (h_2 \circ h_1) \circ j_2$. Ya que la composición de flechas es asociativa se sigue que $h_2 \circ (h_1 \circ j_1) = h_2 \circ (h_1 \circ j_2)$, luego, como h_2 es monomorfismo entonces $h_1 \circ j_1 = h_1 \circ j_2$ de nuevo, como h_1 es también monomorfismo se concluye que $j_1 = j_2$. De esta manera $h_2 \circ h_1$ es monomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h_1"] & B \arrow[r, "h_2"] & C \\
D \arrow[u, bend left, "j_1"] \arrow[u, bend right, "j_2"'] \arrow[urr, "(h_2\circ h_1)\circ j_1=(h_2\circ h_1)\circ j_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Se introduce ahora un nuevo concepto. Se dice que una flecha $h : A \to B$ es un *epimorfismo* (ver [9]) en una categoría $\mathcal{C}$ si para cualesquiera dos flechas $g_1, g_2 : B \to C$ la igualdad $g_1 \circ h = g_2 \circ h$ implica que $g_1 = g_2$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g_1\circ h=g_2\circ h"'] & B \arrow[d, bend right, "g_2"'] \arrow[d, bend left, "g_1"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

Al igual que con los monomorfismos, en las categorías **Set** y **Grp** los epimorfismos coinciden con las funciones sobreyectivas. No obstante, aunque es común creer que todos los epimorfismos son funciones sobreyectivas en realidad no es así. Por ejemplo, considere en la categoría de anillos y sus respectivos homomorfismos **Ani** la inclusión $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, la cual es un homomorfismo no sobreyectivo, sin embargo, para un anillo dado C y dos flechas $g_1, g_2 : \mathbb{Q} \to C$ tales que $g_1 \circ i = g_2 \circ i$ se debe tener que $g_1 = g_2$ para que así i sea un epimorfismo. Para mostrar esto nótese que dado $\left(\frac{p}{q}\right)$ un racional se cumple:

$$
\begin{aligned}
g_1\left(\frac{p}{q}\right) &= g_1(p) \cdot g_1(q)^{-1} \\
&= g_1(i(p)) \cdot g_1(i(q))^{-1} \\
&= g_2(i(p)) \cdot g_2(i(q))^{-1} \\
&= g_2\left(\frac{p}{q}\right)
\end{aligned}
$$

Con lo cual $g_1 = g_2$.

Con los epimorfismos se da el siguiente resultado análogo al de los monomorfismos.

Proposición 3 *La composición de epimorfismos es un epimorfismo.*

Prueba: Sean $\mathcal{C}$ una categoría, E, D, A objetos en $\mathcal{C}$ y $g_1 : D \to A$, $g_2 : E \to D$ epimorfismos en $\mathcal{C}$. Considere $g_1 \circ g_2 : E \to A$ en $\mathcal{C}$, y cualesquiera dos flechas paralelas $f_1, f_2 : A \to B$ tales que $f_1 \circ (g_1 \circ g_2) = f_2 \circ (g_1 \circ g_2)$. Como la composición de flechas es asociativa tenemos entonces que $(f_1 \circ g_1) \circ g_2 = (f_2 \circ g_1) \circ g_2$, luego, al ser g_2 epimorfismo se tiene que $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_1$, análogamente teniendo que g_1 también es epimorfismo se obtiene $f_1 = f_2$. De esta manera $g_1 \circ g_2$ es epimorfismo.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "g_2"] \arrow[drr, "(h_2\circ h_1)\circ j_1=(h_2\circ h_1)\circ j_2"'] & D \arrow[r, "g_1"] & A \arrow[d, shift right, "f_2"'] \arrow[d, shift left, "f_1"] \\
 & & B
\end{tikzcd}
$$

Sin embargo no sólo es importante tener en cuenta algunas caracterizaciones de las flechas en las categorías sino también de los objetos. Por esta razón se dan las siguientes definiciones:

Un objeto T es *terminal* en $\mathcal{C}$ (ver [9]) si para cada objeto A en $\mathcal{C}$ existe exactamente una flecha $A \xrightarrow{\text{única}} T$. De manera dual, un objeto S es inicial en $\mathcal{C}$ (ver [9]) si para cada objeto A en $\mathcal{C}$ existe exactamente una flecha $S \xrightarrow{\text{única}} A$. Fusionando los dos anteriores, un objeto Z que sea tanto inicial como terminal se denomina *objeto cero* (ver [9]).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{única}"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & Z \arrow[r, "\text{única}"] & B \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, en la categoría **Set** cada objeto unitario $\{a\}$ es terminal ya que existe la flecha $f : A \to \{a\}$ para todo objeto A de **Set**; así mismo $\emptyset$ es un objeto inicial en **Set** ya que existe la flecha inclusión $i : \emptyset \to A$ para todo objeto A. En los constructos con frecuencia existe una única estructura sobre el conjunto unitario $\{0\}$, en estos casos el objeto correspondiente es un objeto terminal, en el caso de **Grp** se tiene con el objeto $\{e\}$. Nótese también que **Set** y **Top** no tienen objetos cero, sin embargo en **Grp** y **Vec** si ya que todo objeto de un elemento es un objeto inicial.

Proposición 4 *Los objetos iniciales y terminales son escencialmente únicos, es decir*

i) Si A y B son objetos iniciales (terminales), entonces A y B son isomorfos.

ii) Si A es un objeto inicial (terminal) entonces también lo es todo objeto isomorfo a A.

Prueba: Nótese que los objetos iniciales son escencialmente únicos, la demostración para los objetos terminales es análoga.

i) Sean A, B objetos iniciales. Por definición existen flechas $i.A \to B$, $j : B \to A$. Además $i \circ j = Id_B$ y $j \circ i = Id_A$, luego como Id_A y Id_B son las únicas flechas de A a A y de B a B entonces i es un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "Id_A = j\circ i"] \arrow[r, shift left, "i"] & B \arrow[l, shift left, "j"] \arrow[loop right, "Id_B = i\circ j"] \end{tikzcd}$$

ii) Sea $k : A' \to A$ un isomomorfismo. Como A es inicial entonces para cada objeto B existe una flecha $f : A \to B$. Entonces $f \circ k : A' \to B$ es una flecha en $\mathcal{C}$. Notemos que esta flecha es única ya que si existe

$g : A' \to B$ otra flecha entonces $g \circ k^{-1} : A \to B$, así $g \circ k^{-1}$ debe ser f, esto es g debe ser $f \circ k$.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, shift left, "k"] \arrow[rr, bend right, "g=f\circ k"'] & A \arrow[l, shift left, "k^{-1}"] \arrow[r, "f=g\circ k^{-1}"] & B \end{tikzcd}$$

Con esto se tiene el siguiente resultado inmediato.

Corolario 1 *El objeto cero en $\mathcal{C}$ es único salvo isomorfismo.*

Suponga que $\mathcal{C}$ tiene objeto cero Z, entonces para cualesquiera dos objetos A, B de $\mathcal{C}$ existe una única flecha $A \to Z \to B$ llamada *flecha cero* (ver [9]) de A a B.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{única}"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & Z \arrow[r, "\text{única}"] & B \end{tikzcd}$$

Sean $f, g : A \to B$ dos flechas paralelas. Un morfismo $e : E \to A$ se llama un *ecualizador* (ver [2]) de f y g siempre que las siguientes condiciones se tengan:

i) $f \circ e = g \circ e$

ii) Para cualquier morfismo $e' : E' \to A$ con $f \circ e' = g \circ e'$ un único morfismo $\bar{e} : E' \to E$ tal que $e' = e \circ \bar{e}$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ E' \arrow[u, "\bar{e}"] \arrow[ur, "e'=e\circ\bar{e}"'] & & \end{tikzcd}$$

Proposición 5 *Los ecualizadores son esencialmente únicos, es decir, dados $f, g : A \to B$ en una categoría, entonces se cumple lo siguiente:*

i) Si $e : E \to A$ y $e' : E' \to A$ son ecualizadores de f y g entonces existe un isomomorfismo $k : E' \to E$ con $e' = e \circ k$.

ii) Si $e : E \to A$ es un ecualizador de f y g, y si $k : E' \to E$ es un isomorfismo entonces $e \circ k : E' \to A$ también es un ecualizador de f y g.

Prueba:

i) Por definición de ecualizador se tiene que $f \circ e' = g \circ e'$, además, existe un único morfismo $k : E' \to E$ tal que $e' = e \circ k$. De manera análoga, como e' es ecualizador se tiene que $f \circ e = g \circ e$, además, existe un único $h : E \to E'$ tal que $e = e' \circ h$. Ahora, por la asociatividad en la composición de morfismos se tiene:

$$
\begin{aligned}
e \circ Id &= e \\
&= e' \circ h \\
&= (e \circ k) \circ h \\
&= e \circ (k \circ h)
\end{aligned}
$$

De esta manera, por la definición de ecualizador se tiene que $Id = k \circ h$. De manera similar $h \circ k = Id$. Así k es un isomorfismo.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "e=e'\circ h"] \arrow[dd, shift left, "h"] & & \\
& A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
\bar{E} \arrow[ur, "e'=e\circ k"'] \arrow[uu, shift left, "k"] & &
\end{tikzcd}
$$

ii) Se mostrará que $e \circ k$ es un ecualizador de f y g. Nótese que $f \circ (e \circ k) = g \circ (e \circ k)$. Además, para que sea ecualizador si $\bar{e} : \bar{E} \to A$ satisface $f \circ \bar{e} = g \circ \bar{e}$ entonces debe existir un único morfismo $\hat{e} : \bar{E} \to E'$ tal que $\bar{e} = (e \circ k) \circ \hat{e}$, en particular si para $e : E \to A$ se tiene que existe $e' : E \to E'$ y $e = e \circ k \circ e'$. Note que como k es invertible y e' es único entonces $e' = k^{-1}$, luego $e \circ k$ es un ecualizador.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d, shift left, "e'"] \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, "f\circ e=g\circ e"] & & \\
E' \arrow[u, shift left, "k"] \arrow[r, "e\circ k"] & A \arrow[r, shift left, bend left, "f"] \arrow[r, shift right, bend right, "g"'] & B \\
\bar{E} \arrow[u, "\hat{e}"] \arrow[ur, "\bar{e}"] \arrow[urr, "f\circ\bar{e}=g\circ\bar{e}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Para observar algunos ejemplos de ecualizadores consideremos $\mathcal{C}$ un constructo. Si $f, g : A \to B$ son flechas en $\mathcal{C}$ y si se define E como el conjunto $E = \{a \in A | f(a) = g(a)\}$ considerado como un subobjeto de A entonces la inclusión de E en A es un ecualizador de f y g. En efecto, nótese que para $i : E \to A$ se cumple que $f \circ i = g \circ i$, además, para cualquier flecha $i' : E' \to A$ tal que $f \circ i' = g \circ i'$ existe $\bar{i} : E' \to E$ donde $\bar{i}$ es la restricción al codominio de i', de esta manera $i' = i \circ \bar{i}$.

Un resultado importante para los ecualizadores es el siguiente

Proposición 6 *Si $e : E \to A$ es un ecualizador de $f, g : A \to B$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $f = g$.

ii) e *es un epimorfismo.*

iii) Id_A *es un ecualizador de* f *y* g.

Prueba: La equivalencia entre (i) y (ii) está dada por la definición de epimorfismo. Para ver de (iii) a (i) note que por ser Id_A un ecualizador entonces $f \circ Id_A = g \circ Id_A$ y para cualquier otra flecha $h : A' \to A$ tal que $f \circ h = g \circ h$ existe una única flecha $h' : A' \to A$ tal que $h = Id_A \circ h$, sin embargo Id_A es un epimorfismo y por tanto $f = g$.

Recíprocamente, ya que $f = g$ entonces se tiene que $f \circ Id_A = g \circ Id_A$, además para cualquier otra flecha $h : A' \to A$ con $f \circ h = g \circ h$ se tiene que $h = Id_A \circ h$, por tanto Id_A es un ecualizador de f y g.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, "Id_A"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
E' \arrow[u, "\bar{e}"] \arrow[ur, "e'=e\circ\bar{e}"'] & A' \arrow[u, "h"'] \arrow[ur, "h=Id_A\circ h"'] & &
\end{tikzcd}$$

De manera dual, dadas $f, g : A \to B$ dos flechas paralelas, se dice que una flecha $c : B \to C$ es un *coecualizador* (ver [2]) de f y g si

i) $c \circ f = c \circ g$.

ii) Para cualquier otra flecha $c' : B \to C'$ con $c' \circ f = c' \circ g$ existe un único morfismo $\bar{c} : C \to C'$ tal que $c' = \bar{c} \circ c$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "c'=\bar{c}\circ c"'] & C \arrow[d, "\bar{c}"] \\
& & C'
\end{tikzcd}$$

Considere los siguientes ejemplos de coecualizadores, primero, sean $f, g : A \to B$ en **Set**, $\sim$ la relación de equivalencia más pequeña sobre B tal que $f(a) \sim f(b)$ para todo $a \in A$, esta realción permite que tomando la transformación natural $q : B \to B/\sim$ la cual asigna a cada $b \in B$ en la clase de equivalencia a la que pertenece sea un coecualizador de f y g como se puede observar en el siguiente diagrama donde $\phi : B \to B/\approx$ es la transformación natural dada la partición de B bajo la relación de equivalencia $\approx$ y $i : B/\sim \to B/\approx$ es el morfismo inclusión.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\phi=i\circ q"'] & B/\sim \arrow[d, "i"] \\
& & B/\approx
\end{tikzcd}$$

Considere ahora las flechas $f, g : A \to B$ en **Top**, realizando un proceso análogo al ejemplo anterior se produce un coecualizador de f y g tal que a $B/\sim$ le sea asignada la topología más fina que hace a q continua.

Así como con los ecualizadores, se tienen los siguientes resultados duales para los coecualizadores

Proposición 7 *Los coecualizadores son escencialmente únicos*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "c=k\circ\bar{c}"] \arrow[dr, "\bar{c}=h\circ c"'] & C \arrow[d, shift left, "h"] \\
 & & C' \arrow[u, shift left, "k"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[d, "k"] \\
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[ur, "c"] \arrow[r, "k\circ c"] \arrow[dr, "\bar{c}=\hat{c}\circ k\circ c"'] & C' \arrow[d, "\hat{c}"] \\
 & & \bar{C}
\end{tikzcd}$$

Proposición 8 *Si $c : B \to C$ es un coecualizador de $f, g : A \to B$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $f = g$.

ii) c *es un monomorfismo.*

iii) Id_B *es un ecualizador de f y g.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "Id_B"] \arrow[dr, "k=Id_B\circ k"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "c'=\bar{c}\circ c"'] & C \arrow[d, "\hat{c}"] \\
 & & B' & C'
\end{tikzcd}$$

Supongase ahora que $\mathcal{C}$ tiene objeto cero. Un *kernel* (ver [9]) de una flecha $f : A \to B$ se define como un ecualizador de las flechas $0, f : A \to B$. Más directamente $k : S \to A$ se dice un kernel de f cuando $f \circ k = 0$ y toda

$h : S \to A$ con $f \circ h = 0$ se factoriza de manera única mediante k como $h = k \circ h'$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "0"'] & B \\
E' \arrow[u, "\bar{e}"] \arrow[ur, "e'=e\circ\bar{e}"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

En **Grp** el grupo de un solo elemento $\{e\}$ es un objeto cero, y para cualesquiera dos grupos la flecha $0 : G \to H$ es el único morfismo que envía a cada elemento de G en la identidad de H.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "0"'] & \{e\} \arrow[r] & H
\end{tikzcd}$$

El kernel de un morfismo arbitrario $f : G \to H$ está dado por la inclusión $i : N \to G$ donde N es el kernel usual, es decir $N = \{g \in G | f(g) = e_H\}$, en efecto, por la definición de N se tiene que $f \circ i = 0 \circ i$, además, para cualquier otra flecha $h : N' \to G$ tal que $f \circ h = 0 \circ h$ es necesario que $N' \subseteq N$, por tanto existe la inclusión i' de N' en N tal que $h = i \circ i'$ y de esta manera $i : N \to G$ es el kernel de f. Así en **Grp** un epimorfismo está determinado por su kernel salvo isomorfismos.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "i"] & G \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "0"'] & H \\
N' \arrow[u, "i'"] \arrow[ur, "h=i\circ i'"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

En cualquier categoría con todos sus ecualizadores y con un elemento cero tiene kernel para todas las flechas y el kernel $k : S \to A$ de f es único salvo isomorfismos de S. Para mostrar esto sea $\mathcal{C}_*$ una categoría que contiene todos sus ecualizadores y tiene un objeto cero, entonces para cualesquiera A, B objetos y $f : A \to B$ una flecha entre ellos, existe la flecha $0 : A \to B$ y el ecualizador k de f, de esta manera k es un kernel de f y ya que A, B y f son arbitrarios entonces se tiene para toda f en $\mathcal{C}_*$. Ahora como k es un kernel (y por ende un ecualizador) de f entonces es único.

Así como para un ecualizador existe el término dual de coecualizador, para un kernel existe su dual que será el cokernel. Suponga que en $\mathcal{C}$ existe un objeto cero, entonces para cualesquiera dos objetos B, C de $\mathcal{C}$ existe la flecha cero $0 : B \to C$. El *cokernel* (ver [2]) de $f : A \to B$ es una flecha $u : B \to E$ tal que

i) $u \circ f = u \circ 0 = 0$

ii) Si existe $h : B \to C$ tal que $h \circ f = h \circ 0 = 0$ entonces existe una única flecha $h' : E \to C$ tal que $h = h' \circ u$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left=10, "f"] \arrow[r, bend right=10, "0"'] \arrow[rrd, "0"'] & B \arrow[r, "u"] \arrow[rd, "h=h'\circ u"] & E \arrow[d, "h'"] \\
& & C
\end{tikzcd}$$

Capítulo 3

Factorización $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$

En los primeros cursos de álgebra se nos muestra que algunas expresiones pueden verse de diferentes maneras dada alguna factorización, en nuestro caso ocurre algo similar. Diremos que en una categoría C, una flecha f admite la factorización $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ (ver [9]) si existen un epimorfismo e y un monomorfismo m tales que $f = m \circ e$.

Por ejemplo, consideremos la catogoría $\mathbf{Grp}$, con G, H objetos y $f : G \to H$ una flecha en $\mathbf{Grp}$. Sea N el kernel de f, entonces tenemos la proyección canónica $\varphi : G \to G/N$, definimos $\hat{f} : G/N \to H$ como $\hat{f}(aN) = f(a)$. Nótese que $ker\hat{f} = (ker f)/N = e$, luego $\hat{f}$ es un monomorfismo.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f=\hat{f}\circ\varphi"] \arrow[d, "\varphi"] & H \\ G/N \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Este resultado es muy importante en la teoría de grupos y se conoce como el teorema fundamental de homomorfismos.

Dados estos conceptos hay la sensación de afirmar que en todo constructo dada una flecha f arbitraria, dicha flecha puede ser vista como la composición de un epimorfismo e y un monomorfismo m, obteniendo el siguiente resultado

Proposición 9 *Toda flecha f en un constructo $\mathcal{C}$ es factorizable mediante un epimorfismo e y un monomorfismo m como $f = m \circ e$.*

Prueba: Sean A, B objetos de $\mathcal{C}$ y $f : A \to B$ una flecha en $\mathcal{C}$. Se define $\sim$ como la relación de equivalencia más pequeña sobre A tal que para $a_1, a_2 \in A$,

$a_1 \sim a_2$ si y solo si $f(a_1) \sim f(a_2)$ y que preserve la estructura de A para $A/\sim$. De esta manera se toma la proyección canónica $\phi : A \to A/\sim$ la cual es un epimorfismo. Con esto se define luego la flecha $\hat{f} : A/\sim \to B$ como $\hat{f}[x] = f(x)$ la cual es un monomorfismo. Así se tiene que $f = \hat{f} \circ \phi$, es decir es factorizable $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f=\hat{f}\circ\phi"] & B \\
A/\sim \arrow[u, "\phi"] \arrow[ur, "\hat{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Bibliografía

[1] Adamek Jiri, *Theory of mathematical structures*, Reidel Publishing Company, Prague, 1983.

[2] Adamek J, Herrlich H, Strecker G, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley & Zona, New York, 1990.

[3] Clementino M.M., *Hausdorff separation in categories*, Appl. Categ. Structures 1 (1993) 285-295.

[4] Clementino M.M., *On Connectedness and Disconnectedness.* In: Topology with Applications (Szekszard, Hungary, 1993), Math. Studies 4 (Bolyai Soc.), pgs. 71-82.

[5] Clementino M.M., *Weakly Hereditary Regular Closure Operators*. Topology Appl. 49 (1993) 129-139.

[6] Clementino M.M , W. Tholen, *Tychonoff's Theorem in a Category*. Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 3311-3314.

[7] Clementino M.M., George Janelidze, *Theory and Applications of Categories*, 21. (2008).

[8] Clementino M.M., E. Giuli and W. Tholen, *Topology in a Category: Compactness* "Portugaliae Mathematica", Vol. 53 Fasc. 4 - 1996.

[9] Mac Lane, Saunders, *Categories for the Working Mathematician*, Second Edition, Springer, 1998.

[10] Fraleigh, John B., *Álgebra abstracta*, 3 edición, Addison-Wesley, Wilmington, 1987.

[11] Munkres, James, *Topología general*, 2 edición, Prentice Hall, Madrid, 2002.

[12] Vazquez G., Roberto, *Categorías Concretas Topológicas*, Instituto de Matemáticas UNAM, 2012.