# Formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesor en clase de Geometría Analítica de grado 10°

**Armando Alex Aroca Araújo**

**Doctorado Interinstitucional en Educación**
**Facultad de Ciencias y Educación**
**Universidad Distrital Francisco José de Caldas Bogotá**

**Junio de 2022**

# Formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesor en clase de Geometría Analítica de grado 10°


**Armando Alex Aroca Araújo**

**Directora de tesis: Dra. Dora Inés Calderón**
**Codirector de tesis: Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe**

**Doctorado Interinstitucional en Educación**
**Facultad de Ciencias y Educación**
**Universidad Distrital Francisco José de Caldas Bogotá**


**Junio de 2022**

***Dedicatoria***

*Como siempre a mi familia, a mi esposa Lina por todo su apoyo y a mis hijos Ana Karina y Esteban. Hacer una buena tesis doctoral roba tiempo familiar.*

***Agradecimientos***

*A los profesores Dora Inés Calderón y Carlos Eduardo Vasco Uribe por enseñarme otros mundos posibles.*
*A la profesora Clara Insignares por toda su colaboración en la recolección de la información.*
*A María Mejía Pérez, alumna de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Atlántico, quien está para grandes cosas.*
*A Mônica Mesquita por permitirme una pasantía internacional que contribuyó a cambiar mundos.*

# Lista de Contenidos

## Lista de Figuras

# Lista de Tablas

# Lista de Anexos

## Resumen

*El problema de investigación consistió en estudiar los modelos mentales y sus formas de expresión de alumnos y profesores cuando en conjunto resuelven actividades de Geometría Analítica. El objetivo general fue caracterizar, determinar y establecer y comparar algunos rasgos de los modelos mentales [cronotópicos] y de sus formas de expresión de alumnos y una profesora con las actividades matemáticas planteadas en aula de clase, en el desarrollo de actividades de Geometría Analítica del Grado 10°. Se emplearon metodologías derivadas del Programa Cronotopía, cuyo énfasis se dio en las subdisciplinas de la Topía o lo Topo*, es decir, de la Topografía, Topología, Topometría y Toponomía. Para la recolección de la información se procedió a hacer el registro audiovisual de 14 clases durante el semestre 2017-2, se hizo observación no participante. La metodología combinó momentos etnográficos con otro tipo de investigación. La fase etnográfica permitió la recolección de datos que permitieron estudiar manifestaciones de modelos mentales. Por lo anterior, se hizo necesario distinguir momentos etnográficos de otros como el de estudio desde la teoría fundamentada. Para el análisis de la información se empleó la metodología de la teoría fundamentada, bajo las categorías del Programa Cronotopía. Para la sistematización de los datos se empleó el ATLAS.ti8. El marco teórico hizo énfasis en tres componentes teóricos por ello se denominó el Ψridente* Teórico: *Modelos Mentales, Semiótica y el Programa Cronotopía. Se destacan en dicho marco teórico los elementos que permitieron identificar modelos mentales [cronotópicos]. Entre los resultados del análisis se pueden destacar algunos de ellos: 1. Una caracterización y una metodología de identificación de las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesor de grado 10° cuando desarrollan actividades de Geometría Analítica en el plano. 2. Una interpretación de las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos]de alumnos y su profesor en el contexto descrito. 3. La generación de un conjunto de elementos relacionados con los modelos mentales [cronotópicos] que requieren ser considerados en la didáctica de la geometría analítica. Entre las recomendaciones se propone el desarrollo de futuras investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica y en particular sobre el reconocimiento de otras formas de expresión matemáticas que coexisten en el aula de clase.*

# Capítulo 1. El campo de investigación sobre modelos mentales [cronotópicos]

Este capítulo presenta un análisis histórico de la enseñanza de la geometría en la educación media, donde se incluye una revisión literaria de corte histórico del contexto nacional e internacional. El interés del capítulo es conformar una base para la investigación de los modelos mentales [cronotópicos] en la educación matemática. Por ello, se sitúa un campo de la formación matemática relacionada, que es la geometría analítica y desde ahí se propone el problema de la investigación de la tesis. El planteamiento del problema de desglosa en tres componentes que describen la problemática general, las preguntas y problemas actuales del campo de investigación; de lo cual se deriva el problema principal de investigación y en consecuencia la pregunta central. Luego se proponen los objetivos de investigación y por último la justificación del proyecto. Pero antes todo lo anterior, se presenta un breve relato sobre el desarrollo histórico del informe de la tesis.

## 1.1. Un breve relato sobre el desarrollo histórico del informe de tesis

Hace más de diez (10) años, el autor de este informe de tesis ha transitado por el interés de lo diverso de las culturas en tanto saber y conocimientos matemáticos, es decir, por el Programa Etnomatemáticas. En los últimos siete (7) años ha buscado comprender algunos procesos de enseñanza y aprendizaje en un aula de clases de geometría de la educación colombiana a partir de un enfoque que en principio se denominó etnomatemático. Así, se trazaron inicialmente unas preguntas, un problema y unos objetivos en la relación témporo-espacial y su importancia que iba desde la educación preescolar hasta la educación media colombiana, pero con el pasar de los años era poco lo que se avanzaba en estos análisis desde dicho enfoque. Se concluyó que el Programa Etnomatemáticas se ha diseñado para analizar procesos de la vida cotidiana, en el hogar, en el trabajo, en las prácticas sociales, artesanales o culturales, y no tanto para la vida escolar, donde aún son tempranas las investigaciones para analizar procesos educativos en aula de matemáticas, en tanto procesos de organización de enseñanza y aprendizaje y más aún en niveles escolares de la educación media (con alumnos cuyo rango de edad oscile en 15 años), y que permita identificar qué tipo de matemáticas desarrolla un alumno y en particular, en el caso de la Geometría Analítica, comprender los modelos mentales sobre concepciones témporo-espaciales y el papel que ellos pueden jugar en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas. Así que hubo la necesidad de buscar un marco teórico que nos ayudará para dicho propósito; y en la búsqueda realizada, esas expectativas las cumplía el Programa Cronotopía, que en el Capítulo 2 se analizará con más profundidad. Al asumir el Programa Cronotopía, este centró nuestra atención en un grado escolar donde el ambiente de aprendizaje tuviese mayor relación con lo témporo-espacial; fue así como centramos la investigación en el curso de Geometría Analítica que se desarrolla en el grado décimo de Colombia. En este grado escolar se estudian actividades relacionadas con el análisis de distancias entre puntos, movimientos de proyectiles, sistemas de navegación (Riaño, 2017a, 2017b), entre otros temas que potencialmente implican relaciones témporo-espaciales que en los cursos precedentes no se trabaja.

La riqueza del Programa Cronotopía está en que reconoce la existencia de los modelos mentales de alumnos y profesores que confluyen al aula de clases y aporta herramientas analíticas para estudiarlos. Para evitar malas interpretaciones del isomorfismo del trasfondo, es conveniente precisar que el Programa Cronotopía respeta las diferencias personales y culturales entre individuos y entre grupos, trata de buscar lo que es común, semejante o parecido en las redes de relaciones entre esos individuos y grupos diferentes. El Programa Cronotopía hace el reconocimiento expreso de que existen bases internas comunes en los aprendizajes de todas las culturas debido al carácter neurobiológico implicado en los aprendizajes o en las experiencias matemáticas en cualquier humano. De lo contrario, no podríamos comunicarnos entre grupos sociales, culturales, físicamente, diferenciados. No importa que no hablemos el mismo idioma, siempre habrá algo en común que permita comunicarnos, así sea progresivamente. El Programa Cronotopía intenta detectar y describir isomorfismos estructurales entre modelos mentales de personas provenientes de distintas edades, familias, culturas, etnias y países diferentes. No se trata de instalar una relación entre lo cultural local y lo hegemónico, sino de comprender las bases del aprendizaje humano, en nuestro caso en un ambiente de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar.

Con el anterior planteamiento no se pretende desconocer la riqueza y diversidad cultural de los pueblos, sus saberes y sus idiomas; se trata más bien de encontrar los aspectos comunes en los aprendizajes que pueden explicar la complejidad de los mismos, cuando se manifiestan en prácticas culturales y en sistemas de comunicación. Tan solo pensemos en un aula multicultural o multiétnica, donde confluyen campesinos, indígenas y afrodescendientes: ¿cómo podemos determinar qué matemáticas están desarrollando los alumnos con las actividades que propone el profesor si no tenemos algo en común que nos permita comunicarnos? Si existe algo que nos permite comunicarnos solo por el hecho de ser humanos, queríamos acercarnos a esa comprensión de lo que puede ser invariante en los aprendizajes, sobre las relaciones implicadas en planos más cognitivos y sistémicos en una clase de geometría analítica.

Al principio de esta investigación, a mediados del año 2014, cuando se escribió el primer proyecto de investigación al Consejo Académico del Doctorado, el nodo problemático partía de la manera en que las imágenes visuales y el discurso mismo de los profesores de matemáticas representan o les dan significado a las nociones espaciales. Se tenía como objetivo general determinar los aportes a la Educación Matemática que tienen las concepciones espaciales de diversos grupos culturales. Así que la delimitación del problema de investigación y el objetivo general actuales de esta investigación mantuvieron la problemática sobre la enseñanza y aprendizaje de lo espacial en un ambiente escolar. Pero como el enfoque inicial iba cambiando a medida que se recogía la información, en el periodo 2017-2 se vio la necesidad de incluir otros enfoques teóricos que aportaran a comprender algunos procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así se incluyó la semiótica y en particular el Enfoque Noético-Semiótico de Raymond Duval, al análisis de las representaciones semióticas desde el punto de vista de los registros semióticos y de los dos tipos de transformaciones, los tratamientos y las conversiones. Entonces, nuestro interés se iba centrando en las formas de expresión de los modelos mentales de alumnos y la profesora del grupo de estudio. No obstante, la tensión que establece el Programa Cronotopía sobre la ausencia de lo témporo-espacial en las aulas de matemáticas, en particular en el décimo grado colombiano, se reflejaba en las percepciones que teníamos sobre la ausencia en la enseñanza del paso de dos a tres dimensiones y viceversa en el estudio de fenómenos involucrados en la vida real y en la física. Se trataba de una gran distancia que hay entre la geometría de décimo grado y la vida real de los alumnos, profesores, taxistas, artesanos, campesinos u otros oficios y profesiones. Ello implicaba, una consiguiente necesidad de pasar a una comprensión más profunda de los modelos mentales, sus externalizaciones y su posible utilización en el aula de clases. Era una tensión que justificaba más aún vincular el Programa Cronotopía.

Justamente en esas percepciones que teníamos sobre la ausencia en la enseñanza del paso de dos a tres dimensiones y viceversa en el estudio de fenómenos involucrados en la vida real y en la física en el curso de Geometría Analítica de grado décimo, quisimos comprender por qué se había instalado esta forma de enseñar en dicho curso en Colombia. Se concluyó que solo a través de una revisión histórica podríamos comprender lo que se había constituido en el presente. Este componente histórico de la investigación se presenta para comprender el hecho de la ausencia de aspectos témporo-espaciales en la formación matemática en educación media. Fue así como se hizo una revisión de literatura de corte histórico, la cual nos arrojó un panorama de problemáticas que actualmente se evidencian en la enseñanza de la geometría analítica en la educación media. En esa problemática se pudo identificar algunos problemas que, de forma directa, y otros de forma indirecta, nos permitieron delimitar el problema de investigación.

### 1.2. Enfoques de la geometría analítica en la educación media

Con el ánimo de tener una aproximación de la constitución de lo que es hoy día el curso de Geometría Analítica en la educación media colombiana, nos dimos a la tarea de hacer una revisión de literatura de corte histórico en el contexto internacional y nacional, en esta última haciendo énfasis en la construcción de referentes legislativos y curriculares en Colombia. Esta revisión es la que se presenta a continuación.

#### 1.2.1. La formación en geometría analítica vista desde el contexto internacional

La revisión de literatura parte desde finales del siglo XIX. La razón de ello es que, desde esta época, con base en el Programa de Erlangen de Klein de 1872, se establecía el cese de las disputas entre las geometrías sintética y analítica, pues desde este punto de vista una «geometría» vendría a ser el conjunto de propiedades invariantes a partir de las transformaciones del grupo correspondiente (Bourbaki, 1969). A finales del siglo XIX, la matemática alemana tenía una tendencia a unificar "todo el saber matemático sobre una base única, abstracta, que se apartaba de la 'intuición'" (Cocho, 1985). Esta tendencia todavía domina las matemáticas más avanzadas, como la geometría algebraica y la geometría como álgebra lineal sin figuras que propuso Bourbaki y sigue vigente en Francia y en algunos países. Sin embargo, la separación de la geometría y la intuición hay que analizarla más de cerca. Por ejemplo, según Jones & Tzekaki (2016), la geometría comprende aquellas ramas de las matemáticas que explotan la intuición visual (la más dominante de nuestros sentidos), lo que sería un gran campo de investigación que no está en los objetivos de esta investigación, pero al cual puede hacer valiosos aportes por tratarse en la Geometría Analítica de la educación media de dominar un cierto tipo de representaciones de rectas y curvas en el plano, lo que permitiría disponer de un modelo público bidimensional que les permite a profesores y alumnos expresar externamente algunas imágenes y modelos mentales tridimensionales.

La UNESCO (1986) publicó una compilación de varias investigaciones sobre la enseñanza de la geometría en varias regiones del mundo. Aquí, Lluis (1986) hizo un análisis de la enseñanza de la geometría en América Latina. Este autor considera que la principal característica de su enseñanza es la duda sobre lo que se debe enseñar, en el sentido de la conformación de currículos de geometría para los distintos niveles y grados. Concluye que, desde principios del siglo XX hasta la década del 60, se enseñaron los mismos temas de geometría, tanto en el nivel primario como en la secundaria. Este reporte manifiesta que para 1960 la enseñanza de la geometría en secundaria alcanzó su más bajo nivel en la calidad de la enseñanza. Por ello en esta década se dieron muchos cambios, lo cual generaría un problema que se hizo notar varios años después (Howson, 1973): durante la década de 1960, los recursos pedagógicos, especialmente los textos escolares, fueron traducidos y transferidos entre los países, pero con insuficiente atención prestada a las diferencias sociales, educativas y culturales. Desde la década del 60, el desarrollo histórico de la enseñanza de la Geometría ha tenido la incertidumbre de qué, cómo y para qué enseñar Geometría en América Latina (Unesco, 1986). Así que es importante investigar y dar respuestas a estas preguntas, consideramos que con esta investigación avanzamos en proporcionar elementos para ello.

En la década del 70, con el prólogo del libro *Álgebra lineal y geometría elemental* (Dieudonné, 1964), el autor rechazó la separación de lo que denomina pseudociencias (e.g., la geometría sintética, la geometría analítica y la trigonometría, etc.) en la enseñanza tradicional. En la década de los sesenta, algunos autores planteaban que era necesario discutir el tipo de geometría que se debía enseñar en la educación secundaria, entre ellos matemáticos franceses como Choquet, Dieudonné, Godement y Artin (Austriaco), Freudenthal (neerlandés-alemán), Santaló (español), entre otros, (Piaget *et al*. 1978). Para esta década del 70, como lo advierte Gascón (2001), había una controversia del tipo de geometría que debería estar presente en la formación matemática básica de todo ciudadano, discusión se dio en Colombia en la renovación curricular de 1976 a 1993 y en el año 2016 parece retomarse con la aparición de los Derechos Básicos de Aprendizaje, DBA, MEN (2016b), que más adelante se describirán. Así, plantea Gascón (ibid.), que:

> …la discusión se polarizó entre los partidarios de una geometría sintética, propia del modelo "euclidiano", basada en una axiomática más o menos explícita, y los partidarios de una geometría analítica, propia del modelo "cartesiano", cuya práctica se sustenta en las técnicas del álgebra lineal y cuya axiomática suele quedar más implícita. (p.2)

La importancia de la anterior discusión para la presente investigación es que en Colombia se instaló la enseñanza de la Geometría Analítica tomando como referente el modelo "cartesiano", lo que interpretamos como el aplanamiento de la imaginación.

En el caso de la geometría en la secundaria, Santaló (1980) se refirió a la urgencia de establecer nuevos currículos, considerando las capacidades de aprendizaje de los alumnos. Esta consideración se había hecho desde los años 60, con los programas curriculares elaborados con los objetivos de Bloom, también llamada la Taxonomía de Bloom (Bloom y Krathwohl, 1956), los cuales se graduaban para cada edad en casi todos los países latinoamericanos. En Colombia, para el año 1984, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1984), publicó los marcos generales de los programas curriculares y el Capítulo VI fue dedicado a la *geometría y medición* para la educación secundaria. En parte de la Introducción de este capítulo se planteó lo siguiente:

> Lo más importante de la geometría para la Secundaria es la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación y las maneras de representar objetos sólidos ubicados en ese espacio.
>
> Continuado con este propósito a través de esta unidad, los alumnos lograrán plasmar el espacio en modelos tridimensionales y en dibujos bidimensionales, habilitados así para expresar su creatividad y ejercitar su imaginación. (p. 199)

Destacamos de esta introducción la importancia que le atribuye el MEN a la exploración del espacio tridimensional en la realidad externa, es decir, en la vida cotidiana de los alumnos y profesores. También destacamos el reconocimiento de “modelos tridimensionales” y “dibujos bidimensionales” pues de manera implícita se muestra una relación del paso de 3D a 2D en las actividades matemáticas a realizar.

Los objetivos generales que se plantearon en este capítulo para *Geometría y Medición* fueron los siguientes:

> - Efectuar representaciones planas de sólidos a través de axometrías, perspectiva cónica y vistas múltiples.
> - Ejercitar la imaginación tridimensional mediante cortes imaginarios de sólidos y sus representaciones gráficas.
> - Reconocer que las representaciones gráficas tienen una serie de convenciones que nos permiten representar los objetos de la manera más próxima a la realidad, e interpretar correctamente dichas convenciones.
> - Visualizar el paso de $R^3$ a $R^2$ y viceversa a través de proyecciones paralelas y de proyecciones puntuales.
> - Encontrar procedimientos para calcular el área lateral, el área total y el volumen de algunos sólidos geométricos.
> - Emplear unidades de volumen y de capacidad en diferentes sistemas y convertirlas de unos a otros.

> - Estimar los valores aproximados de área, volúmenes y capacidades en las unidades del sistema métrico decimal y en otros utilizados localmente. (p. 199)

Estos objetivos generales que estableció el MEN para la enseñanza de la Geometría y su relación con la medición, son importantes porque se reconoce la importancia de visualizar el paso de $R^3$ a $R^2$ y viceversa, cuestión que hoy día no se hace, regularmente, en las aulas de clases.

A lo largo de este Capítulo VI, dedicado a la enseñanza de la Geometría, se van desarrollando los objetivos específicos, los contenidos y las sugerencias metodológicas. Hoy día en Colombia, la enseñanza de la Geometría Analítica en la educación media adolece de los cuatro primeros objetivos generales, salvo el intento clásico de tomar un cono, en diversas representaciones, y hacer cortes para obtener las secciones cónicas.

Retomando el hilo histórico, Gascón (2002) propuso, a través de cierto tipo de problemas, una forma de conectar el enfoque sintético con el analítico a fin de poner de manifiesto su complementariedad. Según este autor, aún hay una discusión abierta sobre el tipo de geometría por enseñar en la educación secundaria.

Para la década del 2000 emergieron los principios y estándares de la NCTM (2000). Los principios, según Marín & Lupiáñez (2005), son los siguientes:

> *Igualdad*: La buena educación matemática requiere igualdad, es decir, altas expectativas y una base potente para todos los alumnos.
> *Curriculum*: Un currículo es más que una colección de actividades: debe ser coherente, centrado en matemáticas importantes, y bien articulado en grados. El énfasis en seleccionar matemáticas importantes o relevantes para los objetivos marcados es muy notable. Por ejemplo, dentro del campo numérico, cita la proporcionalidad y las razones; cita las destrezas de razonar y deducir, la capacidad de predicción a través de las matemáticas o incrementar conocimientos en recursión, iteración, comparación de algoritmos.
> *Enseñanza*: La enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender que los alumnos saben y necesitan aprender y, entonces, retándolos y desafiándolos aprenderán bien.

> *Aprendizaje*: Los alumnos deben aprender matemáticas, comprendiéndolas, construyendo activamente nuevo conocimiento desde la experiencia y el conocimiento previo.
> *Evaluación*: La evaluación debería apoyar el aprendizaje de las matemáticas importantes y aprovechar esta información poderosa para ambos, alumnos y profesores.
> *Tecnología*: La tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y refuerza el aprendizaje de los alumnos. (p. 107).

Los estándares que se establecieron fueron basados en contenidos y procesos, que Marín & Lupiáñez (2005), describen así:

> Los cinco estándares de contenidos se organizan sobre la base de áreas de contenido matemático, y son: Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y Probabilidad. Los otros cinco estándares son de procesos y mediante ellos se presentan modos destacados de adquirir y usar el conocimiento: Resolución de Problemas, Razonamiento y Demostración, Comunicación, Conexiones y Representación. (p. 108).

Son varias las investigaciones que se han hecho sobre el impacto de los principios y estándares para la educación matemática estadounidenses establecidos por la NCTM (2000); sin embargo, sería prudente indagar qué tanto impacto tuvo en países latinoamericanos estas reformas, a pesar de que no fueron pensados para ellos, lo cual también escapa de los objetivos de esta investigación. En cuanto a la Geometría, el NCTM (2000), plantea que desde el grado *pre-kindergarten* hasta el grado 12, los programas de enseñanza deberían construir las condiciones para que cada alumno sea capaz de:

> • Analizar características y propiedades de formas geométricas bidimensionales y tridimensionales y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas
> • Especificar ubicaciones y describir relaciones espaciales utilizando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación.
> • Aplicar transformaciones y usar simetría para analizar situaciones matemáticas.
> • Usar visualización, razonamiento espacial y modelado geométrico para resolver problemas.

El NCTM organizó sus expectativas por rangos de grados, que van desde *pre-kindergarten* hasta el grado 2 (o 2°), de 3° hasta 5°, de 6° hasta 8°, de 9° hasta 12°. Para esta investigación el interés se centra en los grados que van desde 9° hasta 12°, especialmente en 10°.

La Tabla 1, muestra las expectativas que el NCTM tiene con respecto al aprendizaje de la geometría de los alumnos de los grados que van desde 9° hasta 12°.

Tabla 1. Expectativas en el aprendizaje de la geometría por parte de los alumnos en los grados 9 hasta 12 según el NCTM (2000).

| **Estándares** | **Expectativa** |
|---|---|
| Analizar características y propiedades de formas geométricas bidimensionales y tridimensionales y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas | • Analizar propiedades y determinar atributos de objetos bidimensionales y tridimensionales;<br>• Explorar las relaciones (incluidas la congruencia y similitud) entre clases de objetos geométricos bidimensionales y tridimensionales, hacer y probar conjeturas sobre ellos y resolver problemas que los involucren;<br>• Establecer la validez de las conjeturas geométricas mediante la deducción, probar teoremas y criticar los argumentos de otros;<br>• Usar relaciones trigonométricas para determinar longitudes y medidas de ángulos. |
| Especificar ubicaciones y describir relaciones espaciales utilizando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación. | • Utilizar coordenadas cartesianas y otros sistemas de coordenadas, como sistemas de navegación, polares o esféricos, para analizar situaciones geométricas;<br>• Investigarán conjeturas y resolverán problemas que involucren objetos bidimensionales y tridimensionales representados con coordenadas cartesianas. |
| Aplicar transformaciones y usar simetría para analizar situaciones matemáticas. | • Comprender y representar traslaciones, reflejos, rotaciones y dilataciones de objetos en el plano mediante el uso de dibujos, coordenadas, vectores, notación de funciones y matrices;<br>• Usar varias representaciones para ayudar a comprender los efectos de transformaciones simples y sus composiciones. |

| | |
|---|---|
| Usar visualización, razonamiento espacial y modelado geométrico para resolver problemas. | • Dibujar y construir representaciones de objetos geométricos bidimensionales y tridimensionales utilizando una variedad de herramientas;<br>• Visualizar objetos y espacios tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones transversales;<br>• Usar gráficos de borde de vértice para modelar y resolver problemas;<br>• Utilizar modelos geométricos para comprender y responder preguntas en otras áreas de las matemáticas;<br>• Utilizar ideas geométricas para resolver problemas y obtener conocimientos sobre otras disciplinas y otras áreas de interés como el arte y la arquitectura. |

Al comparar los contenidos y los procesos del decreto 1002 de 1984 expedido por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1984) con los estándares propuestos por el NCTM (NCTM, 2000), se podría plantear que mientras el MEN (1984) le apostó a representaciones planas, a la imaginación tridimensional, a representaciones de gráficas relacionadas con la realidad, al análisis del paso de $R^3$ a $R^2$ al cálculo de áreas y volúmenes, a la relación entre volúmenes y capacidad y al análisis del sistema métrico decimal y otros usados localmente, el NCTM (2000) le apostó al análisis de las formas bidimensionales y tridimensionales, a la geometría de coordenadas y otros sistemas de representación, a las transformaciones y simetrías y a la visualización, razonamiento espacial y al modelado geométrico. Destacamos que en ambos casos se encuentra la importancia sobre las relaciones de las representaciones bidimensionales y tridimensionales y su estudio, más la importancia de vincular estas representaciones con la vida o realidad de los alumnos y profesores, lo que es muy valioso para el espíritu de esta investigación, en particular con el problema de investigación, que más adelante se planteará, pues consideramos que las formas de expresión de los modelos mentales se manifiestan más aún en ese pasó de $R^3$ a $R^2$ o viceversa.

Volvamos al sendero de la revisión de corte histórico. Así como en muchos senderos encontramos letreros que nos guían, ahora nos topamos con Alan Bishop. Bishop (2005) plantea que existen ciertos obstáculos para aprender acerca del espacio en las aulas escolares, entre ellos el énfasis en la aritmética y la poca conexión de las actividades curriculares de enseñanza con el mundo espacial fuera del aula. Sobre lo anterior, Bishop complementa diciendo que, desde el punto de vista cultural, debemos reconocer que, para muchos alumnos en el mundo, las ideas geométricas que se les está enseñando en la escuela son consecuencia de una forma de ver el mundo espacial que es completamente distinta de la forma como se ve esa realidad en su "cultura familiar". Puede haber niños pertenecientes a familias que se han trasladado recientemente a otro país, o que pueden pertenecer a una población cuya cultura queda eclipsada por un grupo cultural más dominante dentro de aquel país. El trabajo realizado por Harrís (1984) con aborígenes australianos y el de Pinxten *et al.* (1983) con los indígenas navajos en los Estados Unidos de América, presentan claramente algunos de estos problemas. Esta postura de Bishop se complementa con diversos trabajos de Paulus Gerdes, entre ellos, Gerdes (1996, 1999, 2014), y otras investigaciones en las que él mostró la relación entre geometría y contexto, diversidad y diferencia cultural; entre la cestería, el papel de la mujer y la geometría; el análisis de los entrecruces que se hacen con cuerdas, los diseños que se hacen en la arena, entre otros. El conjunto de estas investigaciones advierte sobre el problema de enseñar una geometría impuesta de otros contextos y dejar de lado las representaciones sobre espacio y tiempo y sobre los fenómenos de la cotidianidad y del mundo cultural de los alumnos y profesores.

Lo anterior se enlaza con la revisión documental que hicieron Jones & Tzekaki (2016) sobre los trabajos que se presentaron en las conferencias anuales de PME (The International Group for the Psychology of Mathematics Education) durante el período 2005–2015. De la extensa revisión de artículos que hicieron, se pudo verificar que la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje en Geometría Analítica/Coordenadas es limitada en la educación básica y media, como también en geometría vectorial.

### 1.2.2. La propuesta de formación en geometría analítica desde los referentes legislativos en Colombia

A continuación, se presentarán diversos decretos, leyes o reformas, cuyo conocimiento detallado es importante porque poco a poco fueron dando forma a lo que hoy día es el curso de Geometría Analítica de la educación media en Colombia. Para principios del siglo XX, el Ministerio de Instrucción Pública, MIP (1904), publicó el Decreto 491 de 1904 y en su artículo 115, referido a la enseñanza en las Escuelas Normales, en su Inciso 15, y en el artículo 120[1], consideró que se debía contemplar la enseñanza de la Geometría plana y del espacio, y en el caso de las Escuelas Normales de varones solamente debían

[1] En este decreto 491 de 1904 se estableció que la instrucción secundaria clásica comprendería todas las enseñanzas de Letras y Filosofía, para el efecto de cursar en las Facultades universitarias, mediante el diploma de Bachiller en Filosofía y Letras.

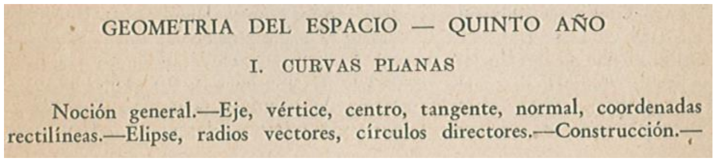
realizarse ejercicios prácticos de Agrimensura. De Geometría Analítica se hablaba solo en las carreras de Ingeniería y de Matemáticas, como lo establece el Capítulo III. Los contenidos de este curso siguen siendo, por lo general, los que hoy día conocemos. Esto último ratificado por Torres-Sánchez & Salazar-Hurtado (2002), en la reconstrucción que hicieron de la historia de la ingeniería y de la educación en Colombia.

A la primera mitad del siglo XX le da la mano el inicio de reformas educativas para el sistema escolar de Colombia. Desde 1951 hasta el 2017 han existido decretos o reformas que han tenido relación directa o indirectamente con la enseñanza de la Geometría Analítica en la educación media. Los decretos o reformas que hacen parte de este proceso histórico se describen así:

Con el Decreto 0075 de 1951, MEN (1951a), se derogan los Decretos marcados con los números 2087 de 1945 y 3645 de 1947 (los cuales, a la fecha de terminado este artículo, no estaban disponibles en el repositorio del MEN), y las demás disposiciones contrarias a las contenidas en el presente Decreto. Con el decreto 0075 se adopta el Plan de Estudios para la enseñanza secundaria y se dictan otras disposiciones al respecto, exige un curso de Geometría para el quinto año de bachillerato, correspondiente al actual décimo grado, pero sin contenidos ni objetivos específicos. En el Decreto 2550 de 1951, MEN (1951b), aparece también un curso de Geometría y Trigonometría para el año quinto de bachillerato; este decreto solo promulga los programas específicos anunciados en el Decreto 0075 del mismo año. Al año siguiente, el 22 de febrero, y en cumplimiento del artículo 8 del decreto 0075 de 1951, se adoptó el Programa de Matemáticas para Bachillerato, así el Ministerio de Educación Nacional, MEN (1952), expide la resolución

349 de 1952, cuyo contenido para el grado Quinto de Bachillerato, llamado así para ese entonces. La figura 1, muestra los contenidos de este decreto.

Figura 1. Contenidos de Geometría del espacio para el Quinto de Bachillerato.



GEOMETRIA DEL ESPACIO — QUINTO AÑO

I. CURVAS PLANAS

Noción general.—Eje, vértice, centro, tangente, normal, coordenadas rectilíneas.—Elipse, radios vectores, círculos directores.—Construcción.—

Area de la elipse.—Parábola, generalidades y construcción.—Hipérbola, generalidades y construcción.

II. PLANOS

Plano.—Determinación y generación del plano.—Objeto de la Geometría del Espacio.—Teoremas fundamentales: recta perpendicular a un plano; plano perpendicular a una recta; rectas y planos perpendiculares; rectas y planos paralelos; ángulos situados en diferentes planos.

III. ANGULOS DIEDROS Y PLANOS PERPENDICULARES

Angulo diedro y sus clases.—Angulo plano.—Teoremas fundamentales: rectas trazadas en dos planos perpendiculares; proyecciones sobre un plano; de un punto, de una línea cualquiera, de un ángulo, de una figura.—Angulo de una recta y un plano y pendiente de una recta.

IV. ANGULOS POLIEDROS

Angulo poliedro.—Triedro.—Teorema del triedro.—Teorema del ángulo sólido convexo.—Ejercicios numéricos.

V. POLIEDROS

Poliedro o sólido geométrico.—Caras, aristas, vértices, ángulos sólidos, ángulos diedros, diagonales.—Clases de poliedros.—Desarrollo de los poliedros regulares.—Prisma, clases de prisma; bases, altura, sección recta, superficie lateral, superficie total.—Unidad de volumen.—Teoremas fundamentales: Igualdad de las caras opuestas de un paralelepípedo; cuadrado de la diagonal; prismas de igual base y altura; sección de un prisma paralelo a la base; áreas lateral y total; volumen del paralelepípedo; volumen de un prisma cualquiera; volumen del cubo.—Pirámide, clases de pirámides, troncos de pirámide.—Teoremas fundamentales: Pirámide cortada por un plano paralelo a la base; área lateral y total de la pirámide; desarrollos de las áreas lateral y total de la pirámide y del tronco; cálculos; equivalencia de dos tetraedros; descomposición de un prisma triangular en tres pirámides equivalentes; descomposición del tronco de pirámide de bases paralelas; volumen de la pirámide y del tronco de pirámide de bases paralelas; problemas y ejercicios; aplicación de los teoremas anteriores; poliedros semejantes y los teoremas de semejanza.—Volumen del tetraedro regular en función de la arista.—Problemas.

VI. CUERPOS REDONDOS

Sólidos de revolución, superficie de revolución, cilindro de revolución.—Tronco de cilindro.—Teoremas sobre: áreas lateral y total; volumen del cilindro; problemas numéricos y aplicación de las fórmulas deducidas.—Cono de revolución, tronco de cono; teoremas sobre: áreas lateral y total; volumen del cono; problemas de aplicación y desarrollo.—Superficie esférica, esfera; círculo máximo y mínimo; polos; huso esférico, triángulo esférico, casquete esférico, zona esférica.—Posiciones relativas de un plano y una esfera.—Area de la esfera obtenida por una recta que gira alrededor de un eje situado en un mismo plano; deducciones del área de la zona, del casquete, del huso.—Volumen de la esfera deducido por la demostración de un triángulo que gira alrededor de un eje situado en un mismo plano, y deducciones de los volúmenes del sector esférico, de la cuña, del segmento esférico.—Teorema de Arquimedes.—Problemas de aplicación y numerosos ejercicios y desarrollos.

En el Decreto 45 de 1962 aparecen en el año quinto de bachillerato los cursos de Trigonometría y Elementos de Geometría Analítica. En este decreto se anunció lo siguiente: "Que el Gobierno Nacional, para mejorar la calidad de la educación media y atender a su mayor demanda, ha venido estudiando un plan de estudios fundamental mínimo, en consonancia con las modernas tendencias educativas y las necesidades del país". Pero el anuncio carece de listados de contenidos u objetivos para cada año.

Con el Decreto 080 de 1974, MEN (1974), conocido como la *reforma de la educación media*, se deroga el Decreto 45 de 1962 y se producen seis folletos cortos en papel periódico con los programas de cada año de bachillerato (que todavía no se llamaban "grados" ni tenían la numeración actual de sexto a undécimo grado). No se pudieron encontrar ejemplares de esos folletos de quinto y sexto bachillerato en el repositorio del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, pero estos fueron escaneados por el profesor Carlos Vasco y enviados al autor. El 4 de febrero de 1975, mediante la resolución 277, el Ministerio de Educación Nacional, MEN (1975), adapta los Programas de Matemáticas de lo que hoy se denomina sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo y undécimo. A continuación, se presenta el Curso V denominado Geometría Analítica y Trigonometría.

Figura 2. Programa de matemáticas del Curso V: Geometría Analítica y Trigonometría

# CURSO V
# GEOMETRIA ANALITICA Y TRIGONOMETRIA

**Unidad N° 1** - Leyes de Composición Interna

*1.1. Objetivos Especificos:*

1.1.1. Identificar las propiedades de una ley de composición interna.

1.1.2. Definir una ley de composición interna en un conjunto y deducir sus propiedades.

1.1.3. Verificar cuando una aplicación define un homomorfismo

1.1.4. Resolver ejercicios sobre leyes de composición interna

*1.2. Contenido:*

1.2.1. Concepto de ley de composición interna
1.2.2. Tablas
1.2.3. Conmutatividad y Asociatividad
1.2.4. Elemento Neutro y Elementos Simétricos
1.2.5. Homomorfismos
1.2.6. Ejercicios

**Unidad N° 2** - Estructuras Algebraicas

*2.1. Objetivos Especificos.*

2.1.1. Identificar correctamente la estructura de un conjunto, dados sus elementos y una ley de composición

2.1.2. Resolver ejercicios referentes a cada una de las estructuras aquí estudiadas

2.1.3. Leer, escribir e interpretar correctamente, enunciados sobre estructuras algebraicas.

*2.2. Contenido:*

2.2.1. Concepto de estructura algebraica
2.2.2. Repaso de la estructura de grupo. Ejemplos
2.2.3. Estructuras de Anillo. Anillo de los enteros (Z+,·)
2.2.4. Estructuras de Cuerpo. El cuerpo de los reales. (R, +,·). El cuerpo de los racionales. (Q,+,·).
2.2.5. Ecuaciones que tienen solución en cada estructura

**Unidad N° 3** - Leyes de Composición Externa

*3.1. Objetivos Especificos:*

3.1.1. Identificar la ley de composición externa, definida por una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos

3.1.2. Distinguir propiedades de una ley externa, con respecto a una ley interna

3.1.3. Resolver ejercicios sobre leyes de composición externa

*3.2. Contenido:*

3.2.1. Concepto de ley de composición externa
3.2.2. Relaciones entre leyes de composición
3.2.3. Ejercicios

**Unidad N° 4** - Espacio Vectorial

*4.1. Objetivos Especificos.*

4.1.1. Identificar la estructura de un conjunto, dados sus elementos y las leyes de composición interna y externa en él definidas.

4.1.2. Interpretar correctamente las propiedades de un espacio vectorial de dos dimensiones y sus consecuencias

4.1.3. Identificar correctamente las propiedades afines y métricas del plano euclídeo

4.1.4. Explicar las propiedades del espacie euclidiano de tres dimensiones y sus consecuencias

4.1.5. Explicar los conceptos fundamentales sobre el plano, con base en las propiedades del espacio vectorial de dos dimensiones

4.1.6. Identificar conjuntos convexos

*4.2. Contenido:*

4.2.1. Espacio Vectorial de dos dimensiones
- Concepto y propiedades
- El plano afín y sus propiedades
- Espacios Vectoriales Euclidianos
- Bases Ortogonales

4-2-2- El Plano Euclídeo
- Concepto y propiedades
- La Recta: propiedades afines
- La Recta: propiedades métricas

4.2.3. El Espacio Euclídeo de tres dimensiones
- Concepto y propiedades
- El Plano

4.2.4. Conjuntos Convexos: concepto y propiedades

**Unidad N° 5** - Conjunto de Vectores Libres

*5.1 - Objetivos Especificos*

5.1.1. Identificar los elementos y propiedades de los vectores

5.1.2. Descomponer correctamente un vector en el plano

5.1.3. Leer, escribir e interpretar enunciados matemáticos sobre vectores

5.1.4. Resolver correctamente problemas de suma y diferencia de vectores

5.1.5. Elaborar gráficamente suma y diferencia de vectores

*5.2. Contenido:*

5.2.1. Concepto de vector y sus propiedades
5.2.2. Vector Libre y sus propiedades
5.2.3. Operaciones y sus propiedades:
- Suma y diferencia de vectores.
- Producto de un número real por un vector

5.2.4. Problemas en donde se aplique la suma y la diferencia de vectores

5.2.5. Solución gráfica de la suma y la diferencia de vectores

-11-

**Unidad Nº 6 - Funciones Polinómicas**

*6.1. Objetivos Específicos:*

6.1.1. Analizar correctamente una función polinómica
6.1.2. Aplicar el teorema del residuo y del factor en la solución de problemas con polinomios y números enteros
6.1.3. Hallar correctamente los ceros de una función polinómica
6.1.4. Utilizar adecuadamente el simbolismo matemático en los enunciados sobre funciones polinómicas
6.1.5. Trazar correctamente gráficas de funciones polinómicas

*6.2. Contenido:*

6.2.1. Operaciones entre las funciones polinómicas y sus propiedades
6.2.2. Teorema del Residuo y del Factor
6.2.3. Determinación de los ceros de las funciones polinómicas
6.2.4. Ceros Racionales
6.2.5. Número de ceros
6.2.6. Ceros Complejos
6.2.7. Factorización de un polinomio
6.2.8. Gráficas de funciones polinómicas

**Unidad Nº 7 - Funciones Trigonométricas**

*7-1. Objetivos Específicos:*

7.1.1. Hacer la discusión analítica de las funciones trigonométricas
7.1.2. Interpretarlas gráficamente
7.1.3. Solucionar correctamente problemas sobre triángulos
7.1.4. Utilizar adecuadamente las tablas trigonométricas
7.1.5. Graficar correctamente las funciones trigonométricas
7.1.6. Autoevaluar el trabajo individual

*7.2. Contenido*

7.2.1. Seno, tangente y secante definidas sobre R. Representaciones Gráficas
7.2.2. Teorema del Seno
7.2.3. Teorema del Coseno
7.2.4. Manejo de las tablas de funciones Trigonométricas
7.2.5. Identidades trigonométricas fundamentales
7.2.6. Ecuaciones trigonométricas sencillas

**Unidad Nº 8 - Matrices** √

*8.1. Objetivos Específicos:*

8.1.1. Identificar las propiedades de las matrices
8.1.2. Realizar con exactitud operaciones de suma y multiplicación de matrices
8.1.3. Utilizar natural y correctamente el lenguaje matemático relativo a matrices y determinantes
8.1.4. Resolver sistemas de ecuaciones de tres variables utilizando determinantes de orden tres
8.1.5. Resolver problemas sencillos sobre programación lineal
8.1.6. Resolver gráficamente sistemas de ecuaciones lineales

*8.2. Contenido:*

8.2.1. Operaciones con Matrices:
- Igualdad de Matrices
- Adición de Matrices
- Multiplicación de Matrices y sus propiedades
- Multiplicación de Matrices y sus propiedades

8.2.2. Algebra de Matrices 2 x 2
- Estructura de Anillo del conjunto de Matrices 2 x 2
- Grupos de Matrices
- La función Determinante
- Determinantes de orden tres

8-2-3- Matrices y sistemas lineales
- Sistemas equivalentes
- Sistemas lineales de ecuaciones con tres variables Solución Gráfica
- Problemas que den lugar a sistemas de ecuaciones de este tipo
- Problemas sencillos sobre programación lineal

**Unidad No. 9 - Funciones y Transformaciones**

*9.1. Objetivos Específicos:*

9.1.1. Efectuar correctamente dilataciones, contracciones, rotaciones, simetrías y cizallamientos, aplicando los conceptos estudiados sobre vectores y Matrices
9.1.2. Hacer un correcto análisis de las transformaciones lineales estudiadas

*9.2. Contenido:*

9.2.1. Funciones y transformaciones geométricas:
- Factor de dilatación
- Traslación
- Simetrías
- Rotación
- Cizallamiento

9.2.2. Transformaciones Lineales: multiplicación o composición de dos transformaciones
9.2.3. Interpretación gráfica de las transformaciones lineales en el plano

**Unidad Nº 10 - Ecuación General del Segundo Grado con dos Variables**

*10.1 Objetivos Específicos:*

10.1.1. Identificar la ecuación de cada una de las cónicas.
10.1.2. Verificar las propiedades de cada una de las secciones cónicas
10.1.3. Usar con propiedad y corrección el lenguaje matemático relativo a las cónicas
10.1.4. Graficar correctamente la elipse, la hipérbola y la parábola

*10.2. Contenido:*

10.2.1. Curva de género elíptico. Propiedades. Gráfica de la elipse
10.2.2. Curva de género hiperbólico. Propiedades. Gráfica de la hipérbola
10.2.3. Curva de género parabólico. Propiedades. Gráfica de la Parábola

**Unidad Nº 11 - Probabilidades (Optativa)**

*11.1. Objetivos Específicos:*

11.1.1. Ampliar el concepto de función al de función de probabilidad
11.1.2. Solucionar problemas de probabilidad compuesta y total
11.1.3. Dar ejemplos de funciones de conjunto
11.1.4. Calcular probabilidades de variable discreta utilizando el modelo de la Distribución Binomial

*11.2. Contenido:*

11.2.1. Funciones de conjunto para familias de partes de un conjunto:
- Función Probabilística. Concepto y propiedades
- Espacio Muestral y Suceso Aleatorio
- Frecuencias Relativas y Probabilidades
- Imposibilidad y Certidumbre
- Probabilidad Complementaria
- Probabilidad Condicional: Eventos dependientes e independientes
- Probabilidad Total
- Probabilidad y Método Combinatorio
- Variables Aleatorias
- Distribución Binomial

El 5 de junio de 1996 el Ministerio de Educación Nacional, MEN (1996), expidió la Resolución número 2343 con la “cual se adopta un diseño de lineamientos generales de los procesos curriculares del servicio público educativo, y se establecen los indicadores de logros curriculares para la educación formal”. La figura 3 muestra los indicadores de logro curriculares comunes para los grados de Décimo y Undécimo de la educación media.

**7. MATEMATICAS**

- Da razones del porqué de los números reales y explica por qué unos son racionales y otros irracionales.
- Utiliza el sentido de las operaciones y de las relaciones en sistemas de números reales.
- Interpreta instrucciones, expresiones algebraicas, diagramas operacionales y de flujo y traduce de unos a otros, en el sistema de los números reales.
- Investiga y comprende contenidos matemáticos a través del uso de distintos enfoques para el tratamiento y resolución de problemas; reconoce, formula y resuelve problemas del mundo real aplicando modelos matemáticos e interpreta los resultados a la luz de la situación inicial.

*Ministerio de Educación Nacional*

- Elabora modelos de fenómenos del mundo real y de las matemáticas con funciones polinómicas, escalonadas, exponenciales, logarítmicas, circulares y trigonométricas; las representa y traduce mediante expresiones orales, tablas, gráficas y expresiones algebraicas.
- Aplica modelos de funciones para tratar matemáticamente situaciones financieras y transacciones comerciales frecuentes en la vida real.
- Analiza situaciones de la vida diaria generadoras de las ideas fuertes del cálculo, tales como tasa de cambio, tasa de crecimiento y total acumulado; descubre y aplica modelos de variación para tratarlas matemáticamente.
- Hace inferencias a partir de diagramas, tablas y gráficos que recojan datos de situaciones del mundo real; estima, interpreta y aplica medidas de tendencia central, de dispersión y de correlación.
- Reconoce fenómenos aleatorios de la vida cotidiana y del conocimiento científico, formula y comprueba conjeturas sobre el comportamiento de los mismos y aplica los resultados en la toma de decisiones.
- Formula hipótesis, las pone a prueba, argumenta a favor y en contra de ellas y las modifica o las descarta cuando no resisten la argumentación.
- Elabora argumentos informales pero coherentes y sólidos para sustentar la ordenación lógica de una serie de proposiciones.
- Detecta y aplica distintas formas de razonamiento y métodos de argumentación en la vida cotidiana, en las ciencias sociales, en las ciencias naturales y en las matemáticas; analiza ejemplos y contraejemplos para cambiar la atribución de necesidad o suficiencia a una condición dada.
- Planifica colectivamente tareas de medición previendo lo necesario para llevarlas a cabo, el grado de precisión exigido, los instrumentos adecuados y confronta los resultados con las estimaciones.
- Disfruta y se recrea en exploraciones que retan su pensamiento y saber matemáticos y exigen la manipulación creativa de objetos, instrumentos de medida y materiales y medios.

Figura 3. Indicadores de logro curriculares comunes para los grados de Décimo y Undécimo de la educación media.

Fuente: MEN (1996, p. 36)

El Decreto 1419 de 1978, MEN (1978), hizo énfasis en las normas y orientaciones básicas para la administración curricular en los niveles de educación pre-escolar, básica (primaria y secundaria), media vocacional e intermedia profesional; en el Decreto 1002[2] de 1984, MEN (1984), se establece el Plan de Estudios Para la Educación Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional, en su capítulo III, establece la organización y distribución de 30 horas semanales para la educación media vocacional. En el decreto 1002 de 1984 se adjuntó un libro de marco teórico con el contenido completo para toda la básica de primero a noveno, no obstante, este libro no trata la educación media vocacional de décimo y undécimo grado. Muchos de los contenidos de los decretos anteriores no están digitalizados; sin embargo, la Universidad Industrial de Santander sí digitalizó los programas de matemáticas de sexto a noveno grado, pero esos programas nunca entraron en vigor, pues la Ley General de Educación de 1994, MEN (1994), dio a cada colegio la potestad de elaborar sus propios programas específicos para cada área y cada grado según su propio Proyecto Educativo Institucional PEI. No obstante, en el Artículo 23 de la Ley General de Educación, se estableció que las Matemáticas son parte de los grupos de áreas obligatorias y fundamentales, las cuales comprenderían un mínimo del 80% del plan de estudios. Y el MEN (1994b) reglamentó parcialmente la Ley 115 de 1994, en los aspectos pedagógicos y organizativos generales por medio del Decreto 1860 de 1994. Allí, en el Artículo 4°, estableció el plan fundamental mínimo para la educación media estableciendo

[2] Vale la pena aclarar que la mayoría de estos decretos que fueron citados tenían enunciados o encabezados como “Se establece el plan de estudio…” pero no se mostraban dichos planes de estudio. Por lo general eran expedidos por resolución ministerial en documentos aparte que no se conservaron ni fueron digitalizados.

que Matemáticas, en el Grado V (hoy denominado décimo grado), tendría una intensidad horaria de tres (3) horas-clases. La palabra Geometría no apareció en la Ley General de Educación de Colombia.

El MEN (1998a) establece los *Indicadores de logros curriculares*, allí se encuentra el concepto de *Procesos de la dimensión corporal*, que se plantea como:

> En esta dimensión se identifican procesos interdependientes que tienen su propia especificidad a partir de la cual se construyen prácticas y discursos particulares que corresponden a procesos de desarrollo del ser humano que se conforman y se expresan como totalidad. Los procesos componentes de la dimensión corporal son entre otros: habilidad práxica, experiencia corporal, experiencia lúdica, la inteligencia corporal - kinestésica y la inteligencia espacial. (p. 25-26)

Posteriormente se plantea que:

> **e. La inteligencia corporal-kinestésica y la inteligencia espacial**
> En el estudio de los procesos de la dimensión corporal pueden incluirse dos tipos de inteligencia citados por Carlos Vasco, a propósito de las investigaciones de Gardner sobre las inteligencias múltiples. Tales son: la inteligencia corporal kinestésica y la inteligencia espacial. (p. 27).

Y sobre la *inteligencia espacial*, planteó lo siguiente:

> La inteligencia espacial identificada por Gardner como muy apreciada por ciertas culturas como los navegantes Powlat de las islas Carolinas en el Pacífico, en donde realizan grandes desplazamientos sin ayuda de brújula, únicamente guiados por las estrellas. Es un tipo de inteligencia que se basa “en el manejo de la información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación, y distribución de espacios” (Carlos Vasco, MEN). (p. 27).

Esta inteligencia espacial, que en el MEN (1998b) será llamada *Pensamiento espacial y sistemas métricos*, ha jugado un papel esencial en el desarrollo de la humanidad, pues se trata como lo establece la anterior cita, de procesos de ubicación, orientación, distribución de espacios, pero también de candidación, temporalidad, durabilidad, inherentes a esos procesos anteriores, es decir al pensamiento témporo-espacial que es objeto de desarrollo en los cursos de Geometría analítica de la educación media.

En MEN (1998b), cuando se establecen los lineamientos curriculares en matemáticas, se hace más énfasis en pensamiento espacial y sistemas geométricos, y se considera como un conocimiento básico y esencial para el pensamiento científico. Esto se puede notar en la siguiente cita:

> Howard Gardner en su teoría de las múltiples inteligencias considera como una de estas inteligencias la espacial y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial. (p. 37).

Luego se plantea lo siguiente:

> Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales. (p. 37)

Posteriormente, se hace un desarrollo conceptual sobre Geometría activa, Cuerpos, superficies y líneas, Desarrollo del pensamiento geométrico, Representación bidimensional del espacio tridimensional y por último Las transformaciones. De estos temas, si bien todos son afines a nuestra investigación, el tema de *Representación* *bidimensional del espacio tridimensional* ocupa un lugar destacado. Sobre este tema el mismo documento MEN (1998b) conceptualiza lo siguiente:

> Otro aspecto importante del pensamiento espacial es la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio.
> Al respecto Lappan y Winter, afirman:
>
> > A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales. Nos valemos de libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los niños, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales. A no dudar, tal uso de "dibujos" de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de comprensión. Es empero, necesario que los niños aprendan a habérselas con las representaciones bidimensionales de su mundo. En nuestro mundo moderno, la información seguirá estando diseminada por libros y figuras, posiblemente en figuras en movimiento, como en la televisión, pero que seguirán siendo representaciones bidimensionales del mundo real".
>
> Para comunicar y expresar la información espacial que se percibe al observar los objetos tridimensionales es de gran utilidad el uso de representaciones planas de las formas y relaciones tridimensionales. Hay distintos tipos de tales representaciones. Cada una es importante para resaltar un aspecto, pero es necesario utilizar varias a la vez para desarrollar y completar la percepción del espacio.
>
> > La representación en el plano de cuerpos sólidos o de objetos de la realidad, puede hacerse mediante dibujos de vista única o dibujos de vista múltiples. Los dibujos de vista única son aquellos en los que se ilustran las tres dimensiones del objeto en una sola vista, con lo cual se logra representar el objeto de una manera muy próxima a la realidad. Hay dos maneras de hacer estos dibujos: mediante axonometrías y mediante perspectivas cónicas.
> > Los dibujos de vistas múltiples representan los objetos a través de una serie fragmentada de vistas relacionadas".
>
> El dibujo en perspectiva se puede utilizar con mucho provecho para la educación estética, y para el ejercicio de las proyecciones de objetos tridimensionales en la hoja de papel, y de la hoja de papel al espacio. Para esto último se puede empezar por dibujar cubos y cajas en perspectiva, de manera que unos oculten parcialmente a los otros, y luego tratar de colocar cubos y cajas de cartón sobre una mesa de manera que se vean como en el papel. Aun en el dibujo en perspectiva es difícil dibujar las elipses que representan las distintas maneras como aparece un círculo desde distintos puntos de vista. Por eso puede ser aconsejable limitar la perspectiva a figuras rectilíneas, a menos que los mismos alumnos quieran explorar cómo se dibujan las tapas de las alcantarillas en las calles ya dibujadas en perspectiva.

Hemos tomado esta extensa cita, debido a la importancia que tiene esta conceptualización para la presente investigación, debido a sus relaciones con las formas de expresión de los modelos mentales cronotópicos, como, por ejemplo, lo expresado sobre el uso de representaciones planas de las formas y relaciones tridimensionales. En el documento MEN (1998b) se hace entonces por primera vez una conceptualización sobre pensamiento espacial y de forma implícita sobre sus relaciones con lo temporal debido a la vinculación del movimiento relacionado con el paso de representaciones en 2d a 3d.

En el año 2006, después de cuatro años de reuniones y consultas, el Ministerio de Educación Nacional publicó los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, MEN (2006). Dos de los seis estándares básicos de competencias están muy relacionados con el presente estudio. Se refieren al gran tema del *pensamiento espacial y sistemas geométricos*:

— "Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (*polares, cilíndricos y esféricos*) y en particular de las curvas y figuras cónicas" [las cursivas son nuestras].

—"Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras".

Alcanzar estos dos estándares no fue fácil para los estudiantes que participaron en la presente investigación, como se presentará en el Capítulo 4, pues sus formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos] evidencian problemas de representación en el plano cartesiano y de igual forma cuando se hacen un tratamiento algebraico de algunas de las secciones cónicas.

Pero como estos estándares no se acompañaron de materiales curriculares, ejemplos ni problemas, ni afectaron los cursos de formación de licenciados en matemáticas, es poco probable que hayan tenido algún efecto en la enseñanza de la Geometría Analítica en las Instituciones educativas[3]. En parte por la poca influencia que tuvieron los estándares y por la persistencia del bajo rendimiento en matemáticas de los bachilleres en las pruebas SABER 11 y en las pruebas PISA.

En el año 2016 aparece un documento que trata de exigir más rigor y precisión a los profesores: los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) para Matemáticas, MEN (2016b). En el título se alude a una cuestionable motivación: se insinúa que son los profesores los que están violando los Derechos Básicos de Aprendizaje de los niños. Estos "Derechos Básicos" se concretan en 2017 en algunas propuestas curriculares más detalladas, llamadas "Mallas de aprendizaje para secundaria y media". No hay, en lo que hemos encontrado en la literatura, investigaciones de impacto de los DBA ni de las Mallas de aprendizaje en las aulas de secundaria y media, ni de su influencia en las maneras de enseñar por parte de los profesores ni en el rendimiento en las calificaciones y pruebas del Icfes por parte de los estudiantes.

Ahora que estamos en una cima más cercana de los senderos históricos, podemos mirar hacia atrás y apreciar el camino recorrido. Se puede inferir que el curso de Geometría Analítica en grado 10° de Colombia data explícitamente del año 1962, con el Decreto 45

[3] Asesorías con Carlos Vasco. 20 de noviembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

de ese año, en el que se establece al menos un curso que se centre en la Trigonometría y en los elementos de Geometría Analítica. Se encontraron antecedentes en la década del 50, mediante cursos de Geometría y Trigonometría, aunque no se encontraron temas u objetivos explícitos en los programas oficiales. Los maestros entrevistados están de acuerdo en que los temas que se han enseñado durante la última parte del siglo XX y en los veinte años que corren del XXI tienen una clara *base común*: el estudio de la línea recta, la ecuación general de segundo grado, las secciones cónicas representadas principalmente en el sistema cartesiano de 2d, y en que los problemas de aplicación son muy similares.

Si lo anterior se pone en relación con los aspectos que emergieron en la revisión de literatura de corte histórico internacional, se confirma que no hubo dudas sobre las temáticas generales que se deberían enseñar en geometría analítica (aunque por la influencia de Bourbaki sí hubo dudas sobre si se debería enseñar o no la geometría plana euclidiana). Si acaso, aparecen discusiones sobre qué es lo más adecuado para enseñar en el bachillerato o lo que más bien se debe dejar para los primeros años de universidad. Pero se mantiene la indiferencia de los expertos y los autores de textos escolares ante las diferencias sociales, educativas y culturales de los distintos países y la desconexión de las actividades curriculares de matemáticas con el mundo espacial cotidiano fuera del aula. Se nota en todas partes la ausencia del paso de 2d a 3d. Aunque aparece la conversión de coordenadas cartesianas a polares y viceversa, no aparecen las coordenadas cilíndricas ni esféricas. No dar ese paso a las representaciones en 3d es limitar el conocimiento de los fenómenos en otras representaciones espaciales que le pueden permitir tanto al profesor como a alumnos otro tipo de expresiones témporo-espaciales más arraigadas a su vida cotidiana.

#### *1.2.2.1. El caso de tres profesores de Geometría Analítica*

A pesar de contar con los documentos oficiales, resoluciones o decretos expedidos por el MEN, que se han venido desarrollando previamente, quisimos conocer el caso de tres profesores de matemática que dieron el curso de Geometría Analítica en diferentes décadas. Así, se estableció como estrategia de recolección de información consultar a tres profesores que enseñaron Geometría Analítica en grado 10º en la década del 80, del 90 y en el 2017. No fue posible encontrar un profesor que hubiera enseñado dicho curso en la década del 70.

Lo anterior implicó un cambio en el tipo de datos, pues se venía presentando una revisión documental y legislativa y ahora se pasará a una información referida a tres entrevistas. Caminar por distintos senderos en muchas ocasiones implica "salirse" del camino para comprender rasgos, características, momentos, del mismo camino; por ello, se decidió entrevistar a estos tres profesores. Se le pidió a cada uno de ellos que escribiera cuáles fueron los contenidos que se enseñaron en ese año y grado, y que explicara cómo habían obtenido la información necesaria para planificar su curso. Todos coincidieron en afirmar que la obtuvieron de un texto guía.

El profesor que enseñó a principios de la década de los 80 planteó el siguiente programa: Antecedentes históricos. Ecuación cartesiana de la circunferencia. Circunferencia circunscrita a un triángulo. La parábola. Parábola con vértice en (h, k). La elipse como lugar geométrico. Definición y elementos. Construcción de una elipse. Principales propiedades de la elipse. Ecuación cartesiana de una elipse de centro en el origen y cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados. Determinación de los principales elementos de una elipse, dada en la primera forma ordinaria. Ecuación de una elipse de centro un punto cualquiera y ejes paralelos a los coordenados (segunda forma ordinaria). Determinación de los elementos de una elipse dada en su segunda forma ordinaria. Definición de la hipérbola. Hipérbola con centro en el origen. Asíntotas de la hipérbola. Excentricidad de la hipérbola. Hipérbolas con eje focal paralelo a un eje cartesiano. Su fuente para la organización de los contenidos anteriores se basó en su propia experiencia docente como en varios textos de la época, principalmente el de Patiño (1977).

Un segundo profesor que enseñó a finales de la década del 90 planteó el siguiente programa: Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. Punto medio de un segmento. La recta. Las cónicas. La circunferencia y sus elementos. Puntos de corte entre una circunferencia y una recta. Problemas aplicados a la circunferencia. La parábola y sus elementos. Puntos de corte entre una parábola y una recta. Problemas aplicados a la parábola. La elipse y sus elementos. Puntos de corte entre la elipse y una recta. Problemas aplicados a la elipse. La hipérbola y sus elementos. Puntos de corte entre una hipérbola y una recta. Problemas aplicados a la hipérbola. Los contenidos anteriores no fueron organizados por el profesor, sino que le fueron dados por la Fundación universitaria que lo había contratado, sin embargo, el profesor manifestó que tenía l libertad de consultar libros o textos de matemáticas, entre ellos libros que eran usados a nivel universitario como Lehmann (1989) y Leithold (1998), entre otros. Pero también usó otros textos para la educación media. Las diferencias y coincidencias entre ambos cursos son notorios, al preguntarles por qué no habían enseñado ciertos temas y otros sí, se notó que la razón respondía a criterios personales de preferencia, sin dar más razones para la selección.

Un tercer profesor que enseñó en el 2017 planteó el siguiente programa: La línea recta. Ejercicios. La ecuación de segundo grado. Ejercicios. Secciones cónicas. La circunferencia. Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h,k). Ecuación general de la circunferencia. Ejercicios. Problemas de aplicación. La parábola. Ecuación canónica de la parábola con centro en (h,k). Ecuación general de la parábola. Ejercicios. Problemas de aplicación. La elipse. Ecuación canónica de la elipse con centro en (h,k). Ecuación general de la elipse. Ejercicios. Problemas de aplicación. La hipérbola. Ecuación canónica de la hipérbola con centro en (h,k). Ecuación general de la hipérbola. Ejercicios. Problemas de aplicación. Su fuente fue el texto de Riaño (2017a).

Si se toman como referencia los tres programas desarrollados por el primer profesor, el segundo profesor y el tercer profesor, se nota inmediatamente que ellos tienen algunas coincidencias, entre las cuales llama la atención la siguiente: hay ausencia del paso formal del espacio 2d con las variables $x$, $y$, a la representación del espacio 3d con tres variables $x$, $y$, $z$, es decir, cuando se representan en el plano problemas sobre el espacio tridimensional, en ningún caso se trata de volver de la proyección en 2d hacia el espacio tridimensional.

Cuando se les preguntó por los problemas de aplicación, los tres profesores tuvieron respuestas similares como, por ejemplo: el barco que se acerca al muelle, el acantilado muy perpendicular al suelo, el vuelo del avión, la forma del túnel o de la antena, entre otros clásicos problemas que aún hoy día, en ediciones nuevas de textos de Matemáticas para grado 10° se siguen encontrando. Pero no parece notarse el aplanamiento de las imágenes mentales evocadas por esos problemas de aplicación en 3d a las representaciones en 2d, ni de recuperar la tercera dimensión. Para completar las entrevistas realizadas a los tres profesores, se construyó la Tabla 2, que muestra un breve análisis de los problemas de aplicación de secciones cónicas dados en tres textos escolares de matemáticas más los problemas de aplicación que se presentaron en las clases observadas, cuyos cortes analíticos se dan desde 1993 hasta el 2017. Siendo lo anterior, vacíos que se observan en las apreciaciones de los profesores y en los textos de referencia usados.

Tabla 2. Temas encontrados en problemas de aplicación de secciones cónicas.

<table>
<tr><th rowspan="2">Sección cónica</th><th colspan="4">Referencias</th></tr>
<tr><td>Beltrán, L.; Rodríguez, B.; Dimaté, M. (1997). pHC: Colombia.</td><td>Moreno, V.; Restrepo, M. (2003). Alfa 10, con estándares. Serie matemáticas para educación secundaria y media. Grupo editorial Norma: Colombia.</td><td>Buitrago, L.; Romero, J.; Ortiz, L.; Jiménez, J. (2013). Los caminos del saber. Matemáticas 10. Santillana: Colombia.</td><td>Los problemas de aplicación desarrollados en las clases observadas. (2017-2).</td></tr>
<tr><td>Circunferencia</td><td>Ninguna aplicación de 20 actividades propuestas. 0% de problemas de aplicación. Ver páginas: 121, 123.</td><td>No se desarrolla el tema de Circunferencia.</td><td><ul><li>Diseño de una transmisión de movimiento.</li><li>Velocidad de un punto que gira alrededor de una circunferencia.</li><li>Conjunto de puntos por donde pasa una onda circular que se propaga sobre el agua.</li><li>Circunferencias en un tanque cilíndrico.</li><li>Alturas de puntos que se mueven circularmente.</li><li>Propagación del sonido después de una denotación de una carga explosiva.</li><li>Antenas de radio que emiten ondas.</li><li>Construcción de un desagüe en un piso circular</li></ul>8 problemas de aplicación de 83 actividades propuestas. 9% de problemas de aplicación. Ver páginas: 228, 232, 237, 239.</td><td><ul><li>Trayectoria de un avión que vuela en círculo.</li><li>Diseño de un engranaje.</li><li>Diseño de una arandela.</li></ul>Ver Transcripción de Clase 4. C4. 13-09-17.</td></tr>
<tr><td>Parábola</td><td>Ninguna aplicación de 50 actividades propuestas. 0% de problemas de aplicación. Ver páginas: 125, 127, 129, 131.</td><td><ul><li>Tiempo de caída de un objeto.</li><li>Altura de un punto de un cable entre dos torres.</li><li>Altura de un punto que toma como referencia un arco de una casa.</li></ul></td><td><ul><li>Diseño de un camino o carretera.</li><li>Espejo de una linterna</li><li>El espejo de un telescopio.</li><li>Trayectoria de un objeto, por ejemplo: una pelota de golf.</li><li>Diseño de una estufa solar con forma de paraboloide.</li></ul></td><td><ul><li>Producción de carros de juguete.</li><li>Cable sostenido por dos columnas de un puente.</li></ul></td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 3 problemas de aplicación de 18 actividades propuestas. 17% de problemas de aplicación. Ver páginas: 156, 157, 158. | • Sección transversal de un canal de irrigación.<br>• Puente construido en forma de arco parabólico.<br><br>7 problemas de aplicación de 106 actividades propuestas. 6% de problemas de aplicación. Ver páginas: 244, 247, 249, 253, 254. | • Antena parabólica.<br><br>Ver Transcripción de Clase 9. C9. 18-10-17. |
| *Elipse* | • Movimientos de cuerpos celestes y sus órbitas.<br>• Movimiento de satélites en torno a la tierra.<br><br>3 problemas de aplicación de 32 actividades. 9% de problemas de aplicación. Ver páginas: 133, 1335, 137, 139. | • Arco de un túnel.<br>• Órbita de un cometa.<br><br>2 problemas de aplicación de 9 actividades propuestas. 22% de problemas de aplicación. Ver página: 164. | • Un perro amarrado al cuello con dos cuerdas.<br>• Trayectoria de un planeta.<br>• Arco semielíptico que sostiene un puente.<br>• Un puente sostenido por cables con tramo semielípticos.<br>• Pista de carreras.<br><br>5 problemas de aplicación de 52 actividades propuestas. 9% de problemas de aplicación. Ver páginas: 259, 264, 265. | No se desarrollaron problemas de aplicación de la Elipse. |
| *Hipérbola* | • Ángulo de elevación.<br>• Alturas dados el ángulo de elevación y otros datos.<br><br>2 problemas de aplicación de 20 actividades. 10% de problemas de aplicación. Ver páginas: 141, 143, 145,147. | Ubicación de una explosión dados dos puntos de referencia.<br><br>1 problema de aplicación de 10 actividades propuestas. 10% de problemas de aplicación. Ver página: 171. | • Emisión de sonidos de dos emisoras y un barco receptor.<br>• Trayectoria de un avión.<br>• Producción de dos tipos de productos por parte de una fábrica.<br>• Explosiones simultaneas en dos puntos diferentes.<br><br>4 problemas de aplicación de 79 actividades propuestas. 5% de problemas de aplicación. Ver páginas: 268, 270, 273, 274. | No se desarrollaron problemas de aplicación de la Hipérbola. |

### 1.2.3. La propuesta de formación en Geometría Analítica desde los textos escolares editados en el periodo de la recolección de referentes legislativos y curriculares

Después de analizar algunos textos escolares de matemáticas o de matemáticas, por ejemplo Phillips (1948), Postigo (1964), Dorsiano *et al*. (1972), Chávez (2000), Martínez (2007) y Riaño (2017a),[4] que fueron empleados por profesores de la educación media en diversos momentos históricos, los contenidos de Geometría Analítica mantienen la misma *base común* descrita previamente, lo que implica, entre otras cosas, que también se confirma la ausencia del paso formal a 3d en la representación del espacio con tres variables *x, y, z*. Esto último es sorprendente, pues en el mismo grado 10º los estudiantes están cursando a la vez la física elemental, en la que aparecen con frecuencia las representaciones con las coordenadas *x, y, z,* sin ninguna coordinación ni referencia mutua con el curso de Geometría Analítica. La importancia para el problema de investigación, de lo establecido anteriormente, es que los alumnos siguen analizando fenómenos de la vida cotidiana o de la cultura general en representaciones de dos dimensiones cuando ellas están en tres dimensiones.

En los libros de texto consultados se encontró que varios de los problemas que se denominan “de aplicación” se empezaron a volver frecuentes con el paso de los años. Se observa que solo se cambiaban los datos y las representaciones como los que ya mencionaron nuestros entrevistados sobre el barco, el avión y la antena, entre otros. En

[4] Teniendo en cuenta a López (2002), lo que se hizo en el análisis de contenido fue aplicar un método intensivo que consiste en el estudio con detenimiento de algunos documentos, en este caso libros de textos escolares de matemáticas que, destinado para el grado décimo de la educación media, en ellos se identifica si efectivamente aparecía en su Tabla de contenidos la unidad de Geometría analítica, luego se transcribieron los temas en unos cuadros que incluía dicha unidad. Luego se compararon los cuadros entre sí, lo que arrojó como conclusión la base en común que mantienen dichos textos escolares y que previamente fue descrita. También fue motivo de estudio intensivo el tipo de aplicaciones que se emplean de los temas lo que arrojó como resultado que durante muchos años se vienen haciendo aplicaciones sobre unos mismos, que también fueron descritos, indistintamente si el mundo, la vida cotidiana de los alumnos y profesores, van cambiando a un ritmo donde la modernidad al parecer no le tiene límites.

este sentido se percibe una indiferencia de los textos escolares a diferencias sociales, educativas y culturales sigue siendo una constante en este tipo de recurso pedagógico del profesor. La repetición misma de los problemas de aplicación muestra la desconexión de las actividades curriculares con el mundo espacial fuera del aula. Nos hemos acostumbrado a ser víctimas de la comodidad que ofrecen los “textos guías” del profesor al tener una abundante bandeja de actividades matemáticas propuestas o resueltas en prácticas sociales. Hemos entrado en un estado de confort o zona segura donde no diseñamos nuevas actividades más relacionadas con la vida afuera de la escuela de los estudiantes.

Los senderos anteriores se recorrieron porque se vio la necesidad de presentar algunos aspectos de la Geometría Analítica en la educación media, pues ello permitió identificar diversos enfoques de enseñanza que hoy perduran en nuestras aulas de clase y que, por ende, condicionan, bloquean o estimulan distintas formas de expresión gráfica, plástica, verbal y simbólica de las imágenes y modelos mentales tanto de alumnos como de profesores a la hora de resolver actividades matemáticas, como se presentará en el Capítulo 4. Aunque esta conexión de la externalización de lo mental privado a lo público no suele ser consciente en los profesores y textos escolares, las presencias y ausencias notadas nos acercaron a precisar más lo que podría pretender esta investigación.

La revisión de literatura de corte histórico y la presentación de una construcción de referentes legislativos y curriculares en Colombia, más la exposición de sus limitaciones en tanto aspectos por profundizar y la revisión de textos escolares editados en el periodo de la construcción de referentes legislativos y curriculares, nos dio elementos para el planteamiento del problema de investigación que a continuación se presenta. Fueron diversos los enfoques que se presentaron sobre qué, cómo y para qué enseñar Geometría

Analítica en la educación media. Vimos que no hay acuerdos aún sobre estas perspectivas, en particular desde la década del 60. El recorrido de corte histórico en el contexto internacional y nacional, partiendo desde el Programa de Erlangen de Klein de 1872, nos permitió comprender lo que es hoy día el curso de Geometría Analítica en la educación media colombiana. El curso de Geometría Analítica para la educación media en Colombia data del año 1962. Comprender lo que es hoy dicho curso en Colombia, nos condujo a una revisión inédita de reformas y resoluciones expedidas por el Ministerio de Educación Nacional. Esta revisión nos llevó hasta los Derechos Básicos de Aprendizaje, DBA. Vemos que, a pesar, por lo menos en la teoría, de que hay un respaldo, por parte del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, a la enseñanza de representaciones planas, a la imaginación tridimensional, a representaciones de gráficas relacionadas con la realidad, al análisis del paso de $R^3$ a $R^2$ al cálculo de áreas y volúmenes, a la relación entre volúmenes y capacidad y al análisis del sistema métrico decimal y otros usados localmente, es decir, a relacionar más este cursos con la vida cotidiana de los alumnos y profesores, en la práctica lo que vemos en este curso, es que su enseñanza en la educación media se ha remitido al estudio de la línea recta, la ecuación general de segundo grado, las secciones cónicas representadas principalmente en el sistema cartesiano de 2d, y en que los problemas de aplicación son similares y estos se repiten en diversos textos escolares. Este tipo de reformas lo que sugiere es que el profesor de Geometría Analítica busque en su entorno sociocultural próximo o universal, aplicaciones o conexiones con temas que le sean de interés a los alumnos. Agregamos que la enseñanza de la Geometría Analítica debe evitar el aplanamiento de las imágenes mentales evocadas por esos problemas de aplicación en 3d a las representaciones en 2d, en lo posible volver este paso en objeto de discusión con los alumnos.

### 1.3. Planteamiento del problema

A continuación, se presenta la problemática general, en Educación Matemática, donde se inscribe el objetivo general de la investigación. Posteriormente se organiza un conjunto de preguntas y problemas a partir de la problemática general. Esta estrategia nos llevó a delimitar el problema de investigación y a postular el objetivo general y sus respectivos objetivos específicos. Por último, se presenta la justificación de la investigación.

Solo con propósitos introductorios al lector, se presenta de manera sintética algunas características del Programa Cronotopía. El Programa Cronotopía para la Educación Matemática reconoce la coexistencia de los modelos mentales de alumnos y profesores cuando en conjunto resuelven actividades matemáticas. La finalidad del Programa Cronotopía para la Educación Matemática es ver qué se puede compartir transculturalmente, entre profesores y estudiantes, de aquellas representaciones que se puedan denominar matemáticas. Las situaciones físicas del diario vivir de las personas o los fenómenos que configuran nuestras realidades, están regidas mediante representaciones en d, 2d, 3d y t+3d y sus transformaciones, lo cual se podrá analizar, más adelante, en Vasco (2000, 2011, 2014, 2019) y son ellas parte esencial de las actividades que se realizan en clases de matemáticas y que al final tienen como objetivo, sobre todo para los estudiantes, que sus agentes produzcan matemáticas.

#### 1.3.1. Problemática general

El interés por establecer o por identificar factores relacionados con la educación matemática en el campo de la geometría llevó a la revisión curricular sobre Geometría Analítica en la educación media, que tuvo como resultado la identificación de un conjunto de problemáticas en investigaciones sobre diseño de currículos o de implementación y desarrollo curriculares y la manifestación de currículos que fragmentan el currículo. Dicho estudio arrojó los siguientes ejes problemáticos, entre los cuales se destacan: un currículo fragmentado; epistemología de la geometría sintética y la geometría analítica en el sentido de pasar de una a otra; la falta de formación en geometría en distintos niveles de educación entre otros ejes problemáticos que a continuación se presentan y que se podrían denominar dimensiones del problema de investigación.

A. Currículo fragmentado. La fragmentación del currículo hace referencia a un conjunto de temas por enseñar, cuyas relaciones parecen interdependientes y sin o poca conexión entre ellos. Al respecto, Reitz et al. (2013) consideran que la fragmentación del currículo no le posibilita al profesor y a los alumnos ver conexiones entre los mismos contenidos y sus realidades. Dichos autores, ante la fragmentación del currículo, se formularon la siguiente pregunta: ¿Qué tipo de geometría analítica se ha instalado en el currículo de la escuela secundaria?

B. Epistemología de la geometría sintética y la geometría analítica. En este eje problemático lo que se nota es la falta de conciencia del paso de una hacia la otra. Gascón (2002) considera que estas geometrías viven en *mundos separados*; no obstante, advierte que las limitaciones de las técnicas sintéticas son las que dan sentido a las técnicas analíticas. En Colombia, es fácil notar esta falta de tránsito o complementariedad cuando se pasa de la educación básica secundaria (enseñanza de la geometría a partir de un corpus axiomático con un tratamiento lógico-deductivo donde los alumnos tienen un rango de edad de 12 a 14 años) a la educación media (enseñanza de la geometría a partir de un corpus algebraico y un tratamiento demostrativo, donde los alumnos tienen un rango de edad de 15 a 16 años).

C. Formación en geometría en distintos niveles de educación. Este eje problemático se ve reflejado en la separación entre la geometría analítica de la educación media y la geometría analítica que se desarrolla en algunas carreras profesionales universitarias. La primera aún mantiene una fijación excesiva en una geometría analítica plana del siglo XVI y preferencialmente emplea dos ejes ortogonales para conectar la geometría con dos ramas de las matemáticas, aritmética y álgebra (Reitz et al., 2013). La segunda, avanza mucho más a representaciones tridimensionales que son más acordes con la interpretación de fenómenos naturales o de la vida cotidiana. En cuanto al aprendizaje de la geometría, es mucho más productivo este tipo de representaciones tridimensionales que las planas. Los mismos Reitz et al. (2013) manifiestan que las discusiones llevadas a cabo en el IMECC (Instituto de Matemáticas, Estadística e Informática) de Brasil, en cabeza del profesor Márcio Antônio de Faria Rosa, llevaron a la conclusión de que se debería enseñar Geometría Analítica con vectores en lugar de la Geometría Analítica cartesiana. Sería mucho más productivo para la imaginación, espacializar la enseñanza de la Geometría Analítica que seguir forzando a los alumnos a limitar sus representaciones mentales tridimensionales a dibujos en el plano.

Este eje también se ve reflejado en la falta de información que le permita al docente una orientación en las relaciones entre geometrías sintética y analítica, en tanto su tránsito de una a la otra, su complementariedad y su respectiva enseñanza. Según Henríquez & Montoya (2016): “La problemática persiste invisible para el profesor y la transposición que debe (o puede) realizar, ante el aparecimiento en la enseñanza de la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas” (p. 50).

D. Formación docente. Este eje problemático se ve reflejado en la falta de formación profesional y didáctica en el campo de la Geometría. Quienes asumen una geometría dinámica para la enseñanza de la geometría analítica, advierten problemas de investigación que se pueden sintetizar de la siguiente forma: falta de formación profesional y didáctica (Piva & Scheffer, 2014), más la falta de desarrollo de proyectos en geometría analítica que se articulen con otras áreas en la formación inicial de maestros (Richit & Maltempi, 2009). Larios (2006) problematiza sobre las representaciones gráficas que enfrentan los alumnos durante el aprendizaje de la geometría; también refiere la influencia de la geometría dinámica, en particular sobre los mediadores semióticos, como el software empleado y la computadora, y de cómo estos influyen en las percepciones sobre las representaciones gráficas y significados geométricos.[5]

E. El saber del profesor. Este eje se ve reflejado en la falta de comprensión teórica y práctica y del lugar curricular y didáctico de lo témporo-espacial y su importancia en la enseñanza de la geometría analítica. El problema subyacente es que el privilegio en la enseñanza de la Geometría Analítica sigue siendo para las coordenadas en el plano; esto se puede notar en textos escolares de matemáticas de grado 10º, como por ejemplo Sullivan (1997), Beltrán et al. (1997), Moreno & Restrepo (2003) y Swokowski & Cole (2008).

F. Procesos investigativos del paso de 2d a 3d y viceversa en la representación de figuras geométricas. En eje problemático y teniendo en cuenta la búsqueda bibliográfica descrita en F, los resultados muestran que los profesores no analizan la incorporación del estudio de otras formas académicas de dotar al plano o al espacio de coordenadas polares, cilíndricas o esféricas. Bien pueden asumir los alumnos de

[5] Aclarando que una cosa es la geometría dinámica que utiliza el software Cabri, Sketchpad, Geogebra, Car Metal, etc., y otra la geometría dinámica de las transformaciones, como lo propusieron en los años 69 Choquet, Stone, Fehr y otros (ver Vasco, 1992), quienes utilizan translaciones, ampliaciones, rotaciones y reflexiones para generar familias de figuras en el plano y en el espacio. Esta propuesta estaba dentro del marco de enseñanza de una nueva matemática, “New Math”, que según Barrantes y Ruiz (2013), “la reforma se dio de diferentes formas en el Tercer Mundo, y avanzó hasta en la Unión Soviética. En cuestión de quince años la enseñanza de las nuevas matemáticas llegó a dominar el planeta”. Este periodo estaba comprendido entre 1959 y mediados de la década de los setenta, según dichos autores. Este libro de Barrantes y Ruiz (2013), según Ubiratan D’Ambrosio, quien fue el encargado de hacer la introducción a dicho texto, muestra la Historia del Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM), y de cómo este Comité ha servido como un puente entre las realidades curriculares de Estados Unidos y Canadá, América Latina y el Caribe.

grado 10° estos dos últimos tipos de coordenadas espaciales, pues se trata en el fondo de combinaciones de coordenadas cartesianas con polares en un nivel tridimensional, según lo ha contemplado por el MEN (1984) y el NCTM (2000). Lamentablemente existe una tendencia en la enseñanza de las matemáticas en grado 10° a analizar cualquier fenómeno geométrico solo con las coordenadas cartesianas y solo en el plano. En varios textos escolares de matemáticas la Geometría Analítica se ha reducido al estudio de la línea recta, las cónicas, la ecuación general de segundo grado y ejercicios o problemas para repasar. Nuestra experiencia muestra que en algunas clases de Geometría Analítica, que hemos podido observar, existe una forma de enseñar que tiende a anular la posibilidad de pensar matemáticamente en el espacio y mucho menos de tomar conciencia del papel que juegan en esos análisis la experiencia práctica y la experiencia matemática de los alumnos, la experiencia sociocultural de los maestros y los alumnos, así como el papel preponderante del tiempo, el movimiento y el gesto en esas experiencias[6].

G. Prácticas de enseñanza. En este eje problemático se evidencia la desarticulación entre los registros de la lengua natural, algebraico y gráfico en clases de Geometría Analítica. Según Dallemole (2010), hay dificultades que presentan alumnos de licenciaturas en matemáticas para realizar articulaciones entre los registros de la lengua natural, algebraico y gráfico que implican los contenidos de la Geometría Analítica, ante el cambio de registro de representación semiótica (ver Duval, 1993, 2004a). Duval considera que entre más tipos de registros el alumno pueda manejar sobre el mismo objeto matemático, es mejor la apropiación de dicho objeto; no obstante, este paso de la lengua natural al registro algebraico o al gráfico, o del algebraico al gráfico, entre otras conversiones posibles, no es tan fácil ni para los

[6] Asesorías con Dora Calderón y Carlos Vasco. 20 de noviembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

alumnos ni para los profesores. Sumamos entonces la falta de comprensión de alumnos de figuras geométricas por medio de ecuaciones y viceversa (Dallemole & Oliveira, 2013). Agregaríamos la falta de un contexto que le dé sentido a los alumnos, el estudio de esas ecuaciones y figuras geométricas. Así, el problema subyacente desemboca en memorizaciones excesivas de fórmulas por parte de alumnos. Se trata de las dificultades que presentan los alumnos para articular las diversas representaciones gráficas y algebraicas como la dificultad para comprender la diferencia entre objeto matemático y su representación (Silva, 2006). Rogenski & Pedroso (2014) precisan lo siguiente:

> No que se refere às aulas de geometria espacial e geometria analítica, verifica-se que os alunos têm amplas dificuldades, primeiramente com relação à visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da geometria básica e, por conseguinte da geometria espacial. Também apresentam problemas de percepção das relações existentes entre os objetos de identificação das propriedades das figuras que formam os sólidos, dentre outros conceitos (p. 5)

Algunas de las problemáticas planteadas anteriormente dan origen a la problemática sobre las relaciones témporo-espaciales en el aprendizaje de la geometría o de los problemas geométricos, lo cual exige una mirada de tipo noético-semiótico a teorías sobre modelos mentales y especialmente al Programa Cronotopía.

#### *1.3.1.1.Preguntas y problemas a partir de las problemáticas identificadas*

A partir de las problemáticas identificadas para este estudio, emergieron algunas preguntas relacionadas con aspectos semióticos, los modelos mentales y las relaciones témporo-espaciales en el aprendizaje de la geometría. Esas preguntas llaman a campos teóricos como la semiótica, las teorías de modelos y el Programa Cronotopía. De esta manera, antes de cada pregunta se propone una frase clave en negrilla que sirve de guía para analizar el lugar de lo témporo-espacial en el currículo, en la formación del profesorado, en sus prácticas de aula, en las teorías.

**Currículo y vida**. ¿Tal como está diseñado el currículo de Geometría Analítica de la educación media implica que el profesor y sus alumnos no vean conexiones de los contenidos con sus realidades y los problemas del mundo contemporáneo y de su región o vida cotidiana, desfavoreciendo así el tratamiento didáctico de los procesos involucrados en los aprendizajes, en este caso geométricos?

**Geometría Analítica en niveles diferentes.** ¿Se incluye la formación témporo-espacial en geometría en la Geometría Analítica de la educación media y universitaria?

**Cambio de registro semiótico.** ¿Cuáles son los problemas que se generan al no comprenderse las relaciones entre ecuaciones y figuras geométricas en los procesos de visualización y de representación geométrica?

**Aplanamiento de la espacialidad**. ¿La generalizada opción en la enseñanza de la geometría analítica por representaciones de problemas que suceden en nuestras vidas, en 3d, pero que se representan en 2d en las clases, conlleva a qué tipo de expresiones estudiantiles?

Las anteriores preguntas han abonado la delimitación del problema para la investigación, pues cada una de ellas indaga por aspectos como las implicaciones de la fragmentación curricular y su relación con la vida cotidiana o el mundo contemporáneo; sobre la formación en el manejo de lo témporo-espacial y su importancia en la enseñanza de la geometría analítica; sobre las implicaciones de un formalismo en la enseñanza de un área de las matemáticas que desconocen otras formas de expresión de los alumnos y los profesores; sobre las relaciones entre los procesos de visualización de representación geométrica y por último algo que sintetiza todo: las representaciones de problemas que suceden en nuestra vidas en 3d pero que son analizadas en el plano. La importancia de otras formas de expresión de los alumnos y de los profesores, Duval (2016) la advirtió de la siguiente forma:

> La investigación en educación matemática casi siempre se enfoca en las maneras de enseñar contenidos y procedimientos conceptuales particulares para cada nivel del currículo. Lo que concierne a la actividad matemática se relega a un segundo plano o se explica bien sea mediante la comprensión conceptual (o no comprensión) o mediante un marco pedagógico común sobre la importancia de la actividad del alumno y del papel de sus representaciones mentales para la comprensión. Esto conduce a eliminar la importancia de la diversidad de registros de representación y a actuar como si todas las representaciones del mismo objeto matemático tuvieran el mismo contenido o como si el contenido de uno se pudiera ver desde otro de manera transparente. (p. 91)

A continuación, se organizan estas problemáticas en la delimitación del problema para la investigación.

### 1.3.2. Delimitación del problema para la investigación

El privilegio de la enseñanza de la Geometría Analítica en representaciones del plano implicó que el interés de la investigación se diera por la comprensión de modelos mentales de alumnos y profesores cuando resuelven en conjunto actividades matemáticas. Esta problemática es la que se delimita a continuación.

*Existe una falta de comprensión de investigadores de las formas de expresión de los modelos mentales de profesores y alumnos cuando ellos en conjunto resuelven actividades de Geometría Analítica.*

La comprensión de los modelos mentales de los alumnos y profesores cuando realizan en conjunto actividades de Geometría Analítica exige conformar un lente teórico que permita aproximar comprensiones sobre ellos, sus caracterizaciones, relaciones y el papel que pueden jugar en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas. Ese lente teórico hoy no es claro, y quizás por ello se presentan tensiones en la educación matemática y en particular en el curso de Geometría Analítica cuando se trata de validar procesos interpretativos de las actividades matemáticas o de fenómenos de la vida cotidiana. Así, uno de los aspectos problemáticos de esta investigación lo constituye el comprender y establecer qué son los modelos mentales y su caracterización teórica. Los modelos mentales no son perceptibles directamente por las demás personas presentes en la actividad. Los participantes, los observadores y el investigador solo pueden escuchar y observar las distintas formas de expresión, y tratar de interpretarlas para “adivinar en qué está pensando” el que emite esas expresiones. Esta inobservabilidad del constructo “modelo mental” que postulamos, que existe “en la cabeza” de cada participante y que solo es accesible a su propia inspección o intuición interna se constituye en el principal reto metodológico de esta investigación. En el Capítulo 4 se presentará algunas soluciones al problema descrito previamente.

En la problemática planteada anteriormente, se deriva otro tema relacionado y es la falta de conciencia sobre el paso de 2d a 3d y viceversa en el estudio de fenómenos de la vida cotidiana. El problema subyacente, como se ha anotado previamente, es el privilegio, en la enseñanza de la Geometría Analítica, del empleo de las coordenadas *x*, *y* en el plano para el estudio de cualquier fenómeno de la vida cotidiana, en la física o de relaciones sociales, tal como se notó en diversos textos escolares de matemáticas del grado 10° que fueron analizados.

El paso de representaciones en 2d a 3d y viceversa, tal como se estableció en MEN (1984) y el NCTM (2000), es de suma importancia para la comprensión de las formas tridimensionales y bidimensionales, sus relaciones y el paso de una hacia la otra, conocer sus propiedades, características y procedimientos de construcción como la visualización, el movimiento, el razonamiento espacial y modelado geométrico, este proceso se constituye en el medio para la presente investigación. Esto no se desarrolla en el currículo usual de la Geometría Analítica, lo que implica la dificultad de una caracterización de modelos mentales de alumnos y profesores cuando estos emergen en el análisis de actividades geométricas de 3d o 2d o cuando la actividad pertenece a 3d, pero se analiza en 2d. Lo anterior nos muestra que hay una brecha entre lo que se enseña y se aprende en la geometría de décimo grado y la vida real de los profesores y alumnos.

De las problemáticas generales de la primera sección y de las preguntas y problemas actuales del campo de investigación, la reflexión sobre los dos ejes problemáticos anteriores surge una pregunta central de investigación:

*¿Cuáles son las formas de expresión de los modelos mentales de alumnos y profesores cuando desarrollan actividades en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría analítica, por medio de representaciones cartesianas en el plano?*

Teniendo entonces la delimitación del problema de investigación y su formulación, se procedió a establecer los objetivos de la investigación que a continuación se presentan.

## 1.5. Objetivos de la investigación

### 1.5.1. Objetivo general

Identificar las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos]de alumnos y profesor cuando se desarrollan actividades matemáticas de un curso de Geometría Analítica del Grado 10°.

### 1.5.2. Objetivos específicos

- ✓ Caracterizar modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesor que emergen en el análisis de actividades geométricas de 3d, cuyas representaciones se hacen en el plano.
- ✓ Determinar formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesor asociadas a las actividades geométricas de 3d, cuyas representaciones se hacen en el plano.
- ✓ Comparar las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesor que emerjan con las actividades matemáticas desarrolladas en aula de clase.

## 1.6. Justificación

Esta investigación se justificó principalmente por cuatro razones que a continuación se listan:

1. Porque se necesitan herramientas teóricas y metodológicas para identificar y analizar los discursos y las representaciones asociadas a la solución de actividades en Geometría Analítica de la educación media por parte de alumnos y profesores, por parte de los investigadores, diseñadores de currículos y materiales didácticos. Ello implica que los profesores contarán con una información que les permita conocer la coexistencia de múltiples representaciones de los modelos mentales cronotópicos, no solo en aulas de clases de Geometría Analíticas sino en cualquier aula de matemáticas.
2. Es necesario encontrar elementos que permitan comprender modos de construcción de sentido en la experiencia matemática que le darían los alumnos y profesores al currículo de Geometría Analítica cuando interpretan diversos fenómenos de la naturaleza o problemas sociales o de índole económica, etc., por medio no solamente de representaciones ortogonales en el plano sino también por medio de representaciones en 3d. De ahí la necesidad de caracterizar modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y una profesora cuando estos emergen en el análisis de actividades geométricas de 3d cuyas representaciones o análisis se hacen en el plano.
3. Desde implicaciones didácticas o metodológicas en la enseñanza de la Geometría Analítica, se identifican modelos mentales y la comprensión de los mismos y su papel en el aprendizaje de la geometría analítica, así como necesidad de contar con herramientas analíticas para los modelos mentales de los estudiantes, lo que permitiría esa identificación tanto a profesores como a investigadores, y que hoy día es motivo de discusión hacia dónde apunta la enseñanza de la Geometría Analítica en la educación media. Por lo anterior consideramos que se justifican este tipo de investigaciones y más cuando no sabemos con certeza cómo proponer

actividades matemáticas que le den sentido a la expresión representaciones témporo-espaciales, lo cual queda abierto para nuevas investigaciones.

# Capítulo 2. Marco teórico

El problema de investigación que se quiere abordar hace referencia a la falta de comprensión de investigadores, de autores de libros de texto, de maestras y maestros y de los alumnos, de los modelos mentales cuando en conjunto resuelven, alumnos y profesores, actividades en un curso de Geometría Analítica de la educación media. Este problema de investigación exigió afinar el lente teórico inicial del Programa Etnomatemática hacia un microscopio de doble ocular, y que tiene un triple objetivo de gran aumento, que vamos a llamar el "Ψridente teórico": la primera permite analizar los modelos y las teorías como sistemas generales con sus tres aspectos básicos, sus componentes, sus relaciones y sus operaciones; la segunda permite insertar la geometría en un marco espacio-temporal más amplio, el Programa Cronotopía, y la tercera permite analizar las expresiones públicas de los modelos mentales con las herramientas semióticas de las representaciones e interpretaciones (semiosis expresivas e interpretativas). Este triple objetivo o Ψridente teórico nos servirá para abordar el problema de investigación formulado al final del Capítulo 1.[7] El Ψridente teórico aporta al Programa Etnomatemáticas a tener mejores herramientas analíticas para comprender los modelos mentales de personas en diversos contextos socioculturales.

En la historia de la humanidad se han registrado tres tipos de Ψridentes prehistóricos, los Peschiera de Garda (Italia), de la Tène (Núcleo en Los Alpes, Centro de Europa, Francia, norte de España, islas británicas y parte del este de Europa) y los del lago Peipsi (Estonia, URRS). Los Ψridentes servían sea para defenderse, matar o cazar. En esta investigación el Ψridente teórico, como en todas las tesis doctorales, tiene la función sujetar firmemente

[7] Asesorías con Carlos Vasco. 16 de abril del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

la masa de datos y permitir las múltiples disecciones necesarias para tomar una posición que pueda fundamentarse sobre los resultados de la investigación. En el Ψridente de la Tène, la punta del medio es la más larga de todas y por lo tanto la más fuerte. Para esta investigación, esta punta central del Ψridente la constituye el Programa Cronotopía con sus bases conceptuales de Carlos Vasco (2011a, 2019), que más adelante se presentarán. Así, el marco teórico está conformado por el doble ocular inicial de la Teoría General de Modelos y Teorías TGMT, y por un Ψ[8]ridente Teórico con una primera punta que permita trabajar sobre los modelos mentales de profesores y estudiantes y de sus producciones teóricas como sistemas. Para ello nos servirá la Teoría General de Procesos y Sistemas TGPS que permite diseccionar cada sistema, modelo o teoría en sus tres aspectos: el conjunto de elementos o componentes: su *sustrato*; las relaciones o nexos entre ellos: su *estructura*, y las operaciones o transformaciones sobre ellos: su *dinámica*. La segunda punta la constituye el campo conceptual de la Cronotopía, con el constructo básico del cronotopo individual de cada sujeto pensante y las ocho subdisciplinas que nos permiten estudiarlo. La tercera punta se vale de la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones, que nos permite analizar tanto los procesos de pensamiento (noesis) como los de expresión e interpretación semiótica (semiosis); estas múltiples semiosis expresivas e interpretativas son las que nos permiten la construcción de los modelos mentales y su modificación y refinamiento a través de la comunicación.

En la primera sección que sigue a esta introducción, se presenta el doble ocular del microscopio teórico, antes de presentar el Ψridente, que hace referencia a algunas discusiones y precisiones sobre modelos mentales y su distinción de las teorías

[8] Esta letra es la Psi griega. Con el permiso de ella, vamos a abusar de su notación debido a su apariencia de Ψridente que ella tiene.

interpretadas en dichos modelos. En la siguiente sección se presenta la punta central del Ψridente, con las bases conceptuales del Programa Cronotopía, que proporciona el soporte teórico principal de esta investigación y, por último, se hace referencia a la semiótica de representaciones e interpretaciones en las matemáticas, desde el enfoque noético-semiótico de Raymond Duval, que es un soporte básico para interpretar, analizar y tratar de comprender las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de los alumnos y de su profesora que emergieron en aula de clase de Geometría Analítica

## 2.1. Discusiones y precisiones alrededor de modelos mentales

Uno de los aspectos problemáticos de esta investigación lo constituye el comprender y establecer qué son los modelos mentales, sus caracterizaciones teóricas, sus caracterizaciones o tipos de modelos semejantes, como “modelos causales”, “modelos explicativos”, etc., también utilizados en la didáctica de las matemáticas y de las ciencias naturales, pero que con frecuencia se confunden con las teorías respectivas. Por ello se hace necesario aclarar estas expresiones. Esta es precisamente la iniciación a la Teoría General de Modelos y Teorías como aplicación de la TGPS a los sistemas de imágenes mentales representables por registros semióticos como diagramas, dibujos, pinturas y esculturas y a los sistemas de enunciados lingüísticos mentales representables por sartas de fórmulas producidas por registros semióticos orales y escritos. Situamos este primer componente de los modelos antes del Ψridente Teórico, en el doble ocular del microscopio que nos va a permitir distinguir los modelos de las teorías, aunque en esta primera sección nos limitaremos a los modelos en general, a los modelos mentales, privados o internos de los sujetos y su contraste con los públicos y externos.

La palabra *mental* no tiene un significado más allá del que le otorga ser un adjetivo restrictivo para los modelos de los que hablamos, que en esta investigación se restringen a los modelos internos, privados o imaginativos construidos por nuestra mente, pero que podrían también ser externos, públicos, gráficos, ecuacionales o computacionales.

Esta sección parte de la tesis doctoral de Junca (2015), con su análisis de los modelos en general; allí se hace referencia a tres campos teóricos: 1. Los modelos desde la perspectiva de las ciencias, la educación en ciencias y la educación matemática en distintos autores. 2. Los modelos desde la perspectiva de la Teoría Estructuralista de la Ciencia de Balzer, Moulines y Sneed (1987, 2000), y 3. Los modelos y las teorías desde la perspectiva de la Teoría General de Proceso y Sistemas (TGPS) y la Teoría General de Modelos y Teorías de Vasco (1995, 2014).

### 2.1.1. Los modelos desde la perspectiva de las ciencias, la educación en ciencias y la educación matemática en distintos autores

Gustavo Junca nos presenta dos autores principales, Wartofsky (1979, 1965) y Harré (2004), quienes analizan un modelo en sentido general; luego se reporta a Johnson-Laird, quien produce una teoría más general, utilizable en el aprendizaje de distintas ciencias (1983, 1985, 1987, 1990, 1988, 1989a, 1989b, 1993, 1994, 1996, 1998); esta teoría es retomada por D’Amore y Sbaragli (2004); y, finalmente, Blum, Galbraith, Henn y Niss (2007) y Niss (2010) plantean definiciones más específicas sobre los modelos matemáticos que se utilizan en el desarrollo de la competencia de modelación matemática, no solo en las ingenierías, sino también en las matemáticas de básica secundaria y media.

No es de nuestro interés formalizar un modelo mental por medio de una expresión lógica formal o algebraica, como lo proponen algunos de los autores anteriores, quienes llaman “modelo matemático” a una ecuación o grupo de ecuaciones simultáneas que permiten calcular valores futuros de ciertas magnitudes definidas en una ciencia dada (como es usual en física y en economía), a partir de insertar datos numéricos actualizados.

En esta investigación, como lo precisaremos en el aparte 2.1.3, cualquier fórmula o grupo de fórmulas, acompañadas o no de definiciones y expresiones verbales escritas, sería más bien parte de la *teoría* de la ciencia respectiva, la cual tendría que ser interpretada en un modelo mental evocado por quien escuche las producciones orales o lea la información simbólica escrita. Es conveniente evitar desde un comienzo caer en esta trampa del formalismo, pues el éxito de ciertos cálculos para tomar decisiones en la ciencia respectiva oculta la necesidad de interpretar cada término de cualquier discurso oral y cada símbolo de cada definición y de cada fórmula matemática expresadas por escrito en un aspecto específico de un modelo mental previamente construido por el lector. Esa atribución usual de ser "modelos de la realidad" a unas ecuaciones o instrucciones para un computador humano o artificial obstaculiza la comprensión de lo que denominamos "modelo mental" y difumina la distinción entre las teorías expresadas en lenguajes articulados y los modelos mentales en los que se interpretan las teorías.

Por ello, solo analizaremos algunos aspectos de lo planteado por los autores mencionados. Wartofsky (1979) interpreta un modelo como una selectiva o abstracta duplicación de algunos aspectos del mundo, donde se incluyen características como la organización de símbolos producto de la experiencia personal, de cómo la concebimos y de cómo la expresamos a otras personas, donde también se consideran los símbolos y formas de expresión como parte del modelo. El trabajo de Wartofsky (1979) permite identificar seis tipos de modelos, que fueron presentados en Junca (2015, pp. 26-27), de los cuales hacemos una presentación abreviada:

- ✓ Analogías “ad hoc”: son modelos cualitativos que se aplican principalmente para resaltar ciertas características de aquello que se quiere representar y aquello que sirve de modelo. Es una analogía de o con propósitos conceptuales o pictóricos.
- ✓ Modelos Formales: son modelos matemáticos utilizados principalmente en ciencias sociales.
- ✓ Modelos Mecánicos: son modelos o dispositivos computacionales. Estos modelos son comunes en las ciencias empíricas.
- ✓ Modelos Hipotéticos: corresponden a modelos teóricos con razonamientos que parten de postulados, axiomas o principios hipotéticos iniciales.
- ✓ Modelos Ideales: estos modelos son representaciones aproximadas que se toman como una abstracción de los hechos, las cuales, además, se ha comprobado que no llevan a falsedades en su aplicación a casos particulares, así no proporcionen un ajuste muy preciso a los resultados que ocurren en la realidad concreta. Dichos modelos están sujetos a modificaciones y refinamientos sucesivos, dando la impresión de que los hechos se aproximaran de manera asintótica a un “verdadero modelo ideal” todavía por formular.
- ✓ Modelos Descriptivos: corresponden a refinamientos conceptuales y definiciones precisas de los términos que permiten una descripción de un estado de cosas, proceso o fenómeno, que parece coincidir con la realidad de los hechos percibidos por otros observadores.

En forma cercana a los dos últimos tipos de modelo de Wartofsky, para Harré (2004) existen dos atributos fundamentales que caracterizan un modelo: la *abstracción* y la *idealización*. El modelo es *abstracto* porque omite algunas características del sujeto o problema, para manifestar más claramente propiedades relevantes de lo representado. Es *idealizado* porque tiende a representar los objetos materiales modelados de una manera más perfecta y precisa, a la vez más simplificada que sus ocurrencias empíricas.

Al analizar estas propuestas de Wartofsky y Harré, consideramos que es necesario seguir avanzando en la búsqueda de un referente teórico que nos permita tener claridad acerca de cómo detectar, identificar y describir pistas, trazas, rasgos u otras manifestaciones de modelos mentales en las expresiones de estudiantes y profesora cuando en conjunto resuelven actividades matemáticas, y cómo analizar e interpretar las distintas formas de expresión o externalización de esos modelos mentales para averiguar algo sobre ellos, por una razón muy fuerte: los modelos mentales no son perceptibles directamente por las demás personas presentes en la actividad. Los participantes, los observadores y el investigador solo pueden escuchar y observar las distintas formas de expresión, y tratar de interpretarlas para "adivinar en qué está pensando" el que emite esas expresiones. Esta inobservabilidad del constructo "modelo mental" que postulamos que existe "en la cabeza" de cada participante y que solo es accesible a su propia inspección o intuición interna se constituye en el principal reto metodológico de esta investigación.[9]

A pesar de la dificultad de este reto, decidimos continuar nuestro avance, dada la potencia que este acercamiento promete para todos los procesos de aprendizaje en general, no solo en la geometría sino en todas las matemáticas y las ciencias naturales, sociales y humanas. En esa búsqueda, encontramos la Teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird, construida a lo largo de unos 15 años (Johnson-Laird, 1983, 1985, 1987, 1990, 1988, 1989a, 1989b, 1993, 1994, 1996, 1998), más un abundante número de investigaciones que tomaron como referencia dicha teoría.

En los postulados de la Teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird, nos llamó la atención el lugar que toma las imágenes y su relación con el modelo mental y con las diversas formas de representación de un objeto. Inferimos que la imagen se interpreta como una cierta visión parcial o representación mental de un objeto, es decir, como un modelo mental parcial que puede generar vistas o visiones parciales, o sea imágenes, sobre las cuales se puedan apoyar razonamientos, deducciones, inferencias,

[9] Asesorías con Carlos Vasco. 16 de abril del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

interpretaciones y reformulaciones de analogías. Johnson-Laird (1983), precisa lo anterior de la siguiente manera:

> Entonces es posible argumentar que los modelos mentales desempeñan un papel central y unificador en la representación de objetos, estados de hechos, secuencias de eventos, de la manera en que el mundo es y en las acciones sociales y psicológicas de la vida diaria. Permiten a los individuos hacer inferencias, entender fenómenos, decidir las actitudes a ser tomadas, controlar su ejecución y principalmente experimentar eventos. (p. 397)

Para Johnson-Laird, la mente emplea un *triple código* para mediar entre el individuo y la realidad, el mundo y la vida cotidiana, ante la imposibilidad de aprehenderlo directamente que tiene la mente humana. Ese triple código consiste en las proposiciones o representaciones proposicionales, los modelos mentales y las imágenes. Sin embargo, en esta tesis no se asume la Teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird, porque en ella no queda clara la diferencia ya señalada entre modelos y teorías, dado que la primera categoría del triple código, las proposiciones o representaciones proposicionales, claramente pertenecen a la teoría, no al modelo. Por otra parte, las imágenes quedarían sin un lugar establecido en el modelo mental, o flotarían en un intermedio indefinido entre la teoría y el modelo mental. Sin embargo, esto se cumple para las personas que no tienen limitaciones visuales, pues parece obvio que las imágenes son como fotografías visuales flotantes en la mente, lo cual es imposible para los ciegos de nacimiento. Es por ello, que la extensión del significado de imagen a cualquier huella sensorio-motriz de cualquier modalidad sensorial es necesaria. Necesitamos mucha más precisión en el uso de estos términos.

Siguiendo la huella sobre la conceptualización de los modelos mentales y la relación entre imágenes y modelos, nos encontramos con los aportes de Bruno D’Amore (1999, 2002, 2003, 2006), y Silvia Sbaragli (2004). Uno de los autores que tal vez ha profundizado más sobre modelos mentales en didáctica de la matemática es en particular con su discípula Silvia Sbaragli, quien en su tesis doctoral (Ibid, 2004) plantea lo siguiente sobre imágenes y modelos mentales:

> Todas las imágenes mentales elaboradas (más o menos conscientemente) conectadas al mismo concepto forman el modelo mental (interno) del concepto mismo. De hecho, los alumnos construyen por sí mismos la imagen de un concepto. Creen que es estable y definitivo, pero en un momento determinado de su historia cognitiva reciben información sobre el concepto que no está incluido en la imagen que han construido. Por lo tanto, los alumnos tienen que ajustar la "vieja" imagen a una nueva imagen más amplia que contenga tanto la anterior como nuevas piezas de información. Este hecho se debe a un conflicto cognitivo desencadenado por el profesor. El proceso puede tener lugar muchas veces durante la "historia educativa" del alumno. La mayoría de los conceptos en matemáticas se forman sólo a través del tránsito constante, a lo largo de los años, de una imagen a la otra, siendo esta última más poderosa que la primera. Uno puede visualizar estas construcciones conceptuales posteriores como una secuencia de imágenes, que se acercan "cada vez más" al concepto. (p. 47)

Nótese la expresión "el modelo mental del concepto", el cual, según Sbaragli, es aquel que resulta cuando aquella imagen final de la secuencia de imágenes se vuelve estable y no cambiante, pues "resiste" a diferentes estímulos. Por ello, construir un modelo mental a partir de un concepto, dice la autora, "significa revisar sucesivamente varias imágenes (débiles e inestables) para llegar a una última imagen fuerte y estable".

Plantea Sbaragli (ibid.), que se dan dos situaciones muy distintas en la construcción del modelo por parte del estudiante, que le van a permitir a ella formular la distinción entre concepciones correctas y concepciones equivocadas (o "misconcepciones", que es la traducción preferida por D'Amore del vocablo inglés "misconceptions"):

> —o el modelo se crea en el momento adecuado, es decir, es sólo el modelo correcto dirigido a ese concepto específico de conocimiento matemático. La acción didáctica ha dado resultado: el alumno ha construido un modelo correcto del concepto;
>
> —o el modelo se crea demasiado pronto, es decir, la imagen es todavía débil y necesita ser ampliada. En este caso, alcanzar el concepto resulta difícil porque la estabilidad del modelo es un obstáculo para el aprendizaje futuro.

Ahora, para profundizar en la distinción entre modelo, modelo conceptual y concepto, es necesario referirnos a las características que D'Amore y Sbaragli le atribuyen a un *concepto*. Para ello nos remitimos a D'Amore (2006):

- ✓ Todo concepto matemático remite a "no-objetos" materiales externos.
- ✓ Todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de "objetos" para exhibir en su lugar ("objetos ostensibles o señalables").
- ✓ En matemática se habla más frecuentemente de "objetos matemáticos" que de "conceptos matemáticos", en cuanto a que en matemática se estudian preferentemente objetos mentales o ideales y no tanto los conceptos, los cuales serían más bien atributos, propiedades o cualidades predicables de los objetos.

Interpretamos que la diferencia entre Sbaragli (2004) y D'Amore (2006) está en el lugar que ocupan las imágenes, el modelo mental y el concepto. Mientras para Sbaragli la secuencia de imágenes se acerca "cada vez más" al concepto, para D'Amore el conjunto de las imágenes mentales relativas a un mismo concepto constituye "el modelo mental del concepto mismo". Se revela aquí una dificultad de fondo en la comprensión y uso de los términos "imagen", "modelo", "concepto", "objeto" y "modelo del concepto".

D'Amore propone la discusión y diferenciación entre imagen, modelo y concepto[10] de la siguiente manera:

> *Imagen mental* es el resultado figural, proposicional o mixto producido por un estímulo (interno o externo). La imagen mental se halla condicionada por la experiencia personal, por las influencias culturales, por los estilos personales, pero con constantes y connotaciones comunes entre individuos diferentes. Puede más o menos elaborarse conscientemente (pero también esta capacidad de elaboración depende del individuo). Sin embargo, la imagen mental es interna y, al menos en primera instancia, involuntaria. (p. 164)
>
> El conjunto de las imágenes mentales elaboradas (más o menos conscientemente) relativas a un mismo concepto constituye el *modelo mental* del concepto mismo. Por lo que, el modelo mental de un concepto reúne en sí cada una de las imágenes mentales que de ese concepto nos hemos hecho en diferentes ocasiones específicas, basándose en las condiciones señaladas. (p. 165)

[10] Para profundizar en el concepto de concepto, recomendamos leer el capítulo 6 de D'Amore (2006).

D'Amore retoma la discusión sobre imágenes mentales y su relación con las figuras geométricas al decir que no se puede aludir a las figuras geométricas como meros dibujos, sino que ellas requieren una teorización de tipo conceptual. Para ello, recurre a Fischbein (1993), en la cita:

> … una figura geométrica puede describirse como algo que tiene intrínsecamente propiedades conceptuales. Sin embargo, una figura geométrica no es un puro concepto. Es una imagen, una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no poseen, es decir incluye la representación mental de propiedades espaciales. (…). Todas las figuras geométricas representan construcciones mentales que poseen, simultáneamente, propiedades conceptuales y figurales. // Los conceptos figurales son entidades mentales, que representan propiedades espaciales (forma, posición, magnitud) y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales – como idealidad, abstracción, generalidad, perfección.

A partir de la idea de Fischbein, podemos interpretar que una figura geométrica es la representante de un modelo mental con imágenes de tipo triangular acompañadas de restricciones teóricas sobre la rectitud de cada uno de los tres lados, el cierre de la frontera y la ubicación en un mismo plano. Este tipo de interpretaciones teóricas podrían extenderse fácilmente a los dibujos, tejidos y artesanías en donde se identifiquen a primera vista los que comúnmente se llaman "triángulos", por lo cual se aplicaría en cualquier contexto sociocultural[11]; es decir, cuando un alumno dibuja o construye una figura geométrica en papel, a mano alzada o con ayuda de una regla o por medio de un *software*; pero también cuando un indígena teje diseños en una mochila, o cuando se dibujaron franjas en los techos de los hipogeos de Tierradentro formando los que podríamos llamar "rombos concéntricos" (ver Aroca, 2013), todas ellas son acciones que representan externamente modelos mentales de las personas que actuaron en dichas acciones representativas. También consideramos que esta interpretación se puede extender a cualquier contexto sociocultural, como lo dice Mariotti (1995a): sólo con un

[11] Asesorías con Carlos Vasco. 16 de abril del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

acto mental un dibujo puede llegar a compartir con el concepto que representa, también la generalidad.

Se ha hecho un análisis de modelos mentales propuesto por D'Amore y Sbaragli, con el ánimo de presentar un estado del arte sobre uno de los conceptos centrales de esta investigación, pero consideramos que este enfoque podría ser motivo de una revisión más detallada que escapa a los propósitos de esta investigación, proponemos se profundice más aún las relaciones entre proposiciones y resultados proposicionales, como las definiciones y ecuaciones, y si realmente hacen parte de los modelos mentales. Como también proponemos un análisis más detallado sobre la expresión "modelo del concepto".

En general, lo que se forman son imágenes múltiples, multimodales, flotantes y cambiantes, que se van sistematizando como componentes o como relaciones entre ellos y con distintos tipos de acciones, operaciones o transformaciones sobre los componentes y las relaciones. Aprovechando la sugerencia de D'Amore y Sbaragli, llamamos "modelo mental" a esa sistematización temporo-espacial de las imágenes cuando se estabiliza y se empieza a usar para representar procesos y subprocesos externos, inspeccionando el modelo mental y revisando periódicamente los "cuadros" o "instantáneas" que vamos cotejando entre lo que esperamos que ocurra en el modelo mental y lo que nos informen las sensaciones y percepciones que van realimentándolo, pero excluyendo del modelo los aspectos proposicionales, que serían más bien de la teoría.

Inferimos entonces que las relaciones entre objetos matemáticos, conceptos, modelos de concepto, modelos imaginativos y modelos de proceso no quedan claras en nuestros autores, pero, por ahora, basta la descripción anterior. Más adelante, trataremos de precisar algunas de estas relaciones desde la Teoría General de Procesos y Sistemas (TGPS) y la Teoría General de Modelos y Teorías (TGMT) de Vasco (1995, 2014), y, finalmente, precisaremos la posición que se asume en este informe de tesis, sin desconocer ninguno de los aportes conceptuales que se han presentado previamente.

El reto para el investigador es lograr que el sujeto externalice su modelo mental privado, ojalá con pistas para construir un modelo externo y público, o al menos con sugerencias para ayudar al investigador a "adivinar" el modelo interno. Así, un proceso clave de análisis es el pasaje del modelo interno (lo privado de cada sujeto) al modelo externo (lo público y lo que todos podemos percibir).

Emerge aquí la relación entre modelos mentales, conceptos y modelos de concepto, que son claramente del ámbito de lo privado, por una parte, y, por otra, las expresiones, manifestaciones o externalizaciones de ellos en el ámbito de lo público, lo que lleva necesariamente a adoptar una teoría semiótica. Esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿qué es lo que el investigador y el profesor sí pueden considerar como expresiones, pistas o representaciones externas de los procesos internos del estudiante, y cómo pueden interpretarlas para acercarse a sus conceptos teóricos y a sus modelos mentales?

### 2.1.2. Los modelos desde la Teoría Estructuralista de la Ciencia de Balzer, Moulines & Sneed (1987, 2000)

Estos autores proponen una teoría general de los modelos utilizados en las ciencias naturales y en la economía. Su principal obra es el libro *Architectonic for Science,* escrita en 1987, y fue traducida al español por la Universidad de Quilmes en el 2012. Esta obra es un gran referente para comprender la Teoría Estructuralista de la ciencia. Moulines (2006) considera que sobre el Programa Estrcturalista se han producido malentendidos en su interpretación epistemológica general o de insuficiencias en su aplicación para la reconstrucción de teorías concretas de disciplinas empíricas; para ello recomienda revisar a Bazer y Moulines (1996), donde se hacen algunos de los desarrollos posteriores más importantes, que se reúnen en la compilación de Balzer y Moulines sobre la teoría estructuralista de las ciencias. El pionero de estas investigaciones es Joseph D. Sneed, según lo manifiesta el propio Moulines. De esta concepción nos interesa tomar nota sobre la relación de la concepción estructuralista y la teoría sobre modelos.

Miremos algunos fragmentos de lo planteado por Moulines (2006) sobre el estructuralismo y su relación con su enfoque sobre modelo.

> La concepción estructuralista de las teorías científicas hace, sin duda, parte de los enfoques que hemos reunido bajo la etiqueta de 'modelismo', porque le otorga un lugar totalmente central a la noción de modelo y está fuertemente inspirada en los trabajos de la Escuela de Stanford. (p. 15).

Vemos entonces que su enfoque se denomina "modelismo" a esta teoría sobre modelos mentales y que, en la concepción estructuralista de la ciencia, la noción de modelo ocupa un lugar clave en ello. Sin embargo, ese lugar central que ocupa la noción de modelo a nuestro juicio se opaca cuando Moulines plantea que la afinidad metodológica de dicha concepción estructuralista de la ciencia es con los trabajos realizados por el grupo Bourbaki. Veamos el planteamiento:

> El único "estructuralismo" con el que la concepción estructuralista de la ciencia tiene una afinidad metodológica es aquel practicado en los estudios de los fundamentos de la matemática, sobre todo (pero no únicamente) en su versión llevada a cabo por los trabajos del grupo Bourbaki sobre de la reconstrucción conjuntista de teorías matemáticas. (p. 15).

El grupo Bourbaki fue cuestionado en educación matemática para la primaria y el bachillerato por utilizar lenguajes y formalismos muy abstractos y rigurosos.

Sigue planteando Moulines (2006) que el nombre de "estructuralismo" se debe a un ideal básico, de la manera conveniente de interpretar la "esencia" de una teoría científica basada a un conjunto de tipos diferentes de estructuras complejas, ellas mismas compuestas de estructuras más simples y no de recurrir a un conjunto de proposiciones. Y es allí en ese ideal donde encontramos la relación, un tanto compleja, con el concepto de modelo. Hacemos una cita sobre lo que considera Moulines son los modelos.

> Las unidades estructurales más simples que constituyen una teoría son los modelos,[12] concebidos (en la tradición de Tarski-McKinsey-Suppes) de la siguiente la forma:
>
> $$<D1, ..., Dm, R1, ..., Rn>$$
>
> donde los D1 representan los "dominios de base" y los R1 son las relaciones construidas (en el sentido de la teoría de conjuntos) sobre los dominios de base. Aquellos fijan "la ontología", es decir, los conjuntos de objetos admitidos por la teoría como entes "reales". Las relaciones fijan los vínculos admitidos entre los objetos de estos diversos conjuntos; en las teorías más "avanzadas" estas relaciones" serán generalmente funciones numéricas, es decir, magnitudes. Los dominios y las relaciones especificas en una teoría particular son caracterizados por un cierto número de condiciones formales que determinan el "marco conceptual" de la teoría; por ejemplo, se podrá especificar que el dominio D1 debe ser un conjunto finito de objetos mientras que el dominio D2 debe ser un continuo, que la relación R1 es una relación simétrica y transitiva, o que la relación R2 debe ser una función dos veces diferenciable sobre los números reales, y así sucesivamente. Cuando todas estas condiciones formales del "marco conceptual" son satisfechas, se dice que la estructura en cuestión es un modelo potencial de la teoría. Es "potencial" en el sentido de que fija un marco posible para concebir la realidad sin que nosotros tengamos aún la menor garantía que sirva para representar algunos aspectos sustanciales de ésta, como dar unas explicaciones o hacer unas predicciones. Las condiciones estipuladas son puramente a priori. Para que la estructura en cuestión sea no sólo un modelo potencial, sino también un modelo actual, es necesario que satisfaga, además de las "condiciones-marco", las "leyes de la naturaleza", es decir, ciertos axiomas en el sentido propio del término. (p. 18-19).

Ibid (2006), plantea que con el fin de determinar la identidad de una teoría son necesarios, a lo menos, otros cuatro componentes que son esenciales para la comprensión correcta de su funcionamiento, a saber:

> 1) Los modelos (potenciales o actuales) de una teoría cualquiera no aparecen aislados los unos de los otros; ellos están ligados por ciertas condiciones (generalmente implícitas) que constriñen los componentes de cada modelo (por ejemplo, los valores de una función determinada) en función de los componentes de otros modelos.
> 2. Las teorías no son ellas mismas entidades aisladas las unas de las otras. Eso quiere decir que los modelos de una teoría no están solamente ligados a otros modelos de la misma teoría sino, igualmente, a los modelos de teorías diferentes.
> 3. En general, se hace necesario distinguir dos niveles conceptual y metodológicamente diferentes en el seno de una misma teoría: el de los conceptos que son específicos de la

[12] Según Vasco (2021), en Asesorías de Tesis Doctoral, plantea lo siguiente: Aquí está el problema principal que le encuentro a Balzer, Moulines y Sneed: para mí, los modelos no son unidades que constituyen las teorías. Decir que son unidades estructurales es circular. Esta definición de modelos solo sirve para los modelos estáticos con sustratos ("dominios") y estructura puramente relacional. Por lo tanto, coincide con Bourbaki y tiene los mismos problemas de reducir las operaciones a relaciones estáticas y de confundir la teoría como sartas formales dejando por fuera las distintas interpretaciones posibles de cada fórmula en distintos modelos.

> teoría en cuestión y que pueden ser determinados solamente si se presupone la validez[13] de la teoría, y los que provienen del “exterior”, generalmente de otras teorías “sub-yacentes”.
> 4. Toda teoría empírica, al tomarse con seriedad, es aproximativa. La aproximación puede ser cuantitativa o cualitativa; ella puede variar según el tipo de aplicación que se considere; pero no es jamás un “modelo exacto” el que se utiliza para representar la experiencia, sino más bien un conjunto “borroso” de modelos, determinado en unos límites admisibles de “emborronamiento”. (p. 18-20).

Este componente de Moulines y nuestra posición de la dificultad de comprender directamente los modelos mentales cronotópicos, sino a través de sus representaciones. En síntesis, nuestro análisis coincide, con Moulines (2006) en que, a los modelos mentales, en nuestro caso cronotópicos, no se pueden llegar directamente a ellos.

### 2.1.3. Los modelos desde la Teoría General de Modelos y Teorías (TGMT) y la Teoría General de Procesos y Sistemas (TGPS).

La TGMT y la TGPS son teorías atribuidas a trabajos del profesor Carlos Vasco, especialmente sus trabajos de 1995 y de 2014. A continuación, se presenta un resumen de la TGMT, basado en Vasco (2014) y sobre todo para precisar el significado de algunos conceptos, para los intereses de la presente investigación, especialmente la díada modelo/teoría.

En lo que considera Vasco (2014) como una *filosofía primera,* estableció un mapa de 16 categorías,[14] de las cuales de la 13 hasta la 16 son referidas a la TGMT, estás son:

- ✓ Décima tercera categoría clave: modelizar o modelar
- ✓ Décima cuarta categoría clave: teorizar
- ✓ Décima quinta categoría clave: morfismo o flecha de representación de un modelo para expresarlo en distintos lenguajes y registros semióticos,
- ✓ Décima sexta categoría clave: morfismo o flecha de interpretación de una teoría en un modelo o de cualquier otro intercambio en cualquier lenguaje y registro semiótico para intentar reconstruir un modelo mental de otro agente en un modelo mental personal.

[13] Se hace la advertencia que no se puede formular claramente lo que significa “validez de la teoría” si los modelos mentales son parte de la teoría. ¿Quién o qué puede juzgar la validez de un modelo mental?
[14] Remitimos a Vasco (2014) para una mejor comprensión de dichas categorías.

Estas categorías se pueden sintetizar como modelo, teoría, morfismo de representación y morfismo de interpretación. El concepto de modelo se desarrolló en la primera punta del Ψridente Teórico y por ello no vamos a conceptualizar nuevamente sobre él. Así que el propósito de este resumen es mostrar una conceptualización sobre las categorías teoría, morfismo de representación y morfismo de interpretación.

Vasco (2014), presenta cuáles son los alcances de la TGMT y cuál es su principal reto en la comprensión y explicación de ciertos fenómenos, en particular de asumir la separación entre los modelos y la teoría como también volver explícitos las flechas de representación y de interpretación, de la siguiente manera:

> La TGMT extiende pues a todas las ciencias formales y fácticas, antrópicas[15] y preantrópicas la teoría de modelos de la lógica matemática (ver por ejemplo el texto de Chang y Keisler, 1973) y la propuesta epistemológica neo-estructuralista de Baltzer, Moulines y Sneed (1987), con el fin de precisar la reformulación del programa popperiano que hizo Imre Lakatos sobre los programas de investigación progresivos y regresivos. En cada propuesta de explicación o comprensión de cierta clase de fenómenos, el reto correspondiente es separar los modelos mentales de las teorías y explicitar los morfismos o flechas de representación y de interpretación. (p. 58)

La diada modelo/teoría permite teorizar como un acto de comprensión sobre "la teoría" más su relación con sus modelos y acto de su comprensión que podemos denominar modelar o modeliza. Regularmente se confunden los modelos con las teorías, por ello se hace necesario hacer explícito cada uno los conceptos que involucran, ello lo haremos por medio de una especie de listado que muestra características de las teorías y relaciones con los modelos, que Vasco (2014) describe de la siguiente manera:

- Modelos y teorías están fuertemente ligados entre sí. Las teorías pretenden explicar los modelos mentales.
- La distinción entre modelos y teorías es clave porque ellos conforman la realidad de cada uno de las personas y la realidad que creemos compartir socialmente con otros.
- De los modelos no se puede decir que sean falsos o verdaderos, de igual manera de las teorías, pues ambos son productos de subjetividades en un modelo mental de cada sujeto.

[15] Carlos Vasco, tomando el concepto de Carlo Federici Casa, se refiere a todas las ciencias sociales y humanas como ciencias o disciplinas antrópicas.

- Todo lo que se diga o exprese de un sistema que utiliza como modelo mental se denomina “la teoría” de dicho sistema.
- Es posible hablar de “teorías”, pues a cada modelo le pueden corresponder múltiples teorías y viceversa. La diada modelo/teoría, es tan fuerte que las teorías por sí solas no dicen nada, solo expresan algo cuando se interpretan en un modelo mental.
- Las teorías son sistemas lingüísticos que configuramos para hablar sobre nuestros modelos, sin embargo, los modelos son sistemas no lingüísticos que configuramos para representar subprocesos.
- Una teoría es un sistema de enunciados. Se entiende que los enunciados están formulados en un lenguaje articulado, como la lengua natural o la técnica.
- Pero un sistema solo es una teoría si su sustrato está compuesto de expresiones o formulaciones lingüísticas.
- Comprender un proceso es tener un buen modelo y una buena teoría que permitan aplicarlos a ese proceso para hacer: contrastar, aplicar, explicar, experimentar, predecir-retrodecir y enriquecer y aguzar la observación.

Un ejemplo propuesto por Vasco, que muestra un caso sobre modelos y teorías, nos ayuda a comprender más aún el concepto de teoría, modelo y su relación diádica.

> En física se suele decir que la ecuación
>
> $$s = g \cdot t^2/2 + v_o t + s_o$$
>
> «es un modelo» para la caída libre. En sentido estricto, en la TGMT esa fórmula es precisamente una sola proposición de la teoría newtoniana de la caída libre; no es pues un modelo de la misma. El modelo mental queda oculto. Más bien, con esa escritura simbólica queda claro que se necesita un modelo mental para interpretarla como digitalización algebraica de una proposición de la teoría que puede enunciarse en lenguaje natural. (p. 72)

De esta manera presentamos las principales características sobre la teoría y su relación con los modelos mentales, sobre todo lo que el autor denominó la díada modelo/teoría.

Sobre los morfismos o flechas de representación y flechas de interpretación, Vasco (2014) plantea lo siguiente:

> Ahora es necesario reflexionar sobre las formas de enlazar o relacionar activamente las teorías con los modelos. La idea básica se plasma en las dos últimas categorías clave, las de morfismos o flechas de representación y de interpretación. Cada una de estas flechas o morfismos tiene que ser al menos triple: debe servir para expresar (o para interpretar) los términos, los transductores y los predicados de la teoría. Los términos o sintagmas nominales se expresan (o se interpretan) como elementos o componentes del sustrato del modelo; dichos componentes pueden ser simples o compuestos, como colecciones, conjuntos o subsistemas. Los transductores, modificadores o sintagmas transductivos o modificativos se expresan (o se interpretan) como operaciones o transformaciones de la dinámica del modelo respectivo. Los predicados o sintagmas predicales (que a veces se llaman ambiguamente «sintagmas verbales») se expresan (o

> se interpretan) como relaciones de la estructura del modelo, o sea que son lazos, nexos o correspondencias entre componentes del sustrato de los modelos. (p.58).

Desde la Teoría General de Procesos y Sistemas (TGPS), los modelos son construcciones mentales que intentan captar cómo los individuos tratan de representar internamente los procesos circundantes para comprenderlos, reaccionar y actuar sobre esos procesos a través de una representación sistémica en la mente que parece anterior a cualquier formulación teórica verbal o escrita (Vasco, 1995, 2014).

Vasco (2014) diferencia las teorías sobre o acerca de un proceso y los modelos de ese proceso. Distingue dos tipos de modelos, unos que son *mentales* (que podríamos denominar internos o privados) y otros *extramentales* (que podríamos denominar externos o públicos), y también los separa en dos categorías: los *facsímiles* y los *prototipos*. Sobre esta terminología, Junca (2015) plantea lo siguiente:

> Vasco (2014) distingue entre modelos mentales y extramentales, así como modelos facsimilares o explicativos que representan procesos similares a ellos; y modelos prototipos que buscan iniciar procesos semejantes a ellos. Una manera de representar el proceso podría ser a través de un modelo, mientras que las teorías corresponden a toda expresión lingüística (oral y/o escrita) que nos permite decir algo acerca de los modelos, es decir, son el conjunto de sistemas simbólicos así como los registros semióticos de representación que permiten producir representaciones semióticas externas y materializadas de cómo los elementos del modelo se caracterizan, se relacionan (análisis sincrónico) y qué operaciones realizan los elementos del modelo (análisis diacrónico). (p. 20)

Desde Vasco (1995) se ha desarrollado la Teoría General de Procesos y Sistemas, TGPS, en la que notamos que el concepto de modelo está ligado al de sistema (todo modelo es un sistema) y al de proceso (todo modelo pretende representar un proceso), y estos a su vez están ligados a otros conceptos muy generales del campo de la actividad humana que escapan a definiciones verbales precisas, como experimentar, imaginar, modelar, plasmar, construir, servir para, delimitar, analizar, desenglobar, ubicar, entender, comprender, actuar sobre, influenciar, guiar, desviar, detener, reprimir, potenciar, acelerar o fomentar. Según dicho autor, los sistemas

> … se van a ubicar solo como construcciones mentales auxiliares que nos sirven para modelar ciertos procesos ya desenglobados y delimitados como subprocesos de otros procesos, con el fin de intentar comprenderlos y potenciar nuestras acciones para desviar, detener, acelerar, fomentar o reprimir dichos procesos o subprocesos que tratamos de modelar e influenciar a través de nuestras acciones guiadas por esos modelos. (p. 27)

Según la TGPS, los modelos son sistemas compuestos por tres aspectos: el *sustrato* (de componentes o elementos), la *estructura* (de relaciones o nexos) y la *dinámica* (de operaciones o transformaciones). Los conceptos de sustrato, dinámica y estructura, propuestos por Vasco (ibid.) se presentan a continuación:

> El *sustrato* es el conjunto de componentes que seleccionamos y recortamos del trasfondo o campo subyacente, llamado en inglés «background». Es clave para la metodología de la investigación no olvidar que el trasfondo o «background» es espacio-temporal o cronotópico y que los componentes surgen y se seleccionan en el tiempo; por lo tanto, pueden cambiar, moverse o desaparecer.
>
> La *estructura* es el conjunto de relaciones que construimos mentalmente para reparar los cortes espaciales y recuperar la interconexión entre los componentes que recortamos. La estructura se refiere principalmente a las restricciones respecto al movimiento y al cambio, y apunta más a la permanencia, a la rigidez, a la estabilidad. A veces se habla de la red de relaciones del sistema como «la estática del sistema», para oponerla a «la dinámica del sistema». Un sistema que solo tenga estructura se llama «sistema estático», y si tiene estructura y dinámica, «sistema dinámico».
>
> La *dinámica* es el conjunto de operaciones, transformaciones o transiciones que construimos mentalmente para reparar los cortes y congelamientos temporales y recuperar el dinamismo de los procesos. La dinámica se refiere principalmente a las transformaciones y movimientos en el tiempo, y para dominar la dinámica de un sistema es necesario adquirir destrezas finas en la cronología y la cronotopía, pues las representaciones externas de lo temporal se hacen generalmente en lo espacial y al terminar de producirlas quedan estáticas. Al dibujar un segmento de recta, lo hacemos en el tiempo y con una orientación específica, por ejemplo, de izquierda a derecha en nuestra cultura, pero apenas terminamos de dibujarlo, queda fijo y estático, y se olvida el sentido del trazo dinámico. Aun si dibujamos una flecha para representar un movimiento o una acción, apenas terminamos de pintarla en el tablero se queda quieta, y los pequeños ángulos que pintamos en su punta y su cola no logran recapturar el movimiento. (p. 48)

Resaltamos el ejemplo de la flecha, porque consideramos que lo expuesto en ese ejemplo por Vasco ilustra el aspecto de la dinámica y remite a la paradoja de Zenón de Elea sobre la flecha.

Hay tres distintos aspectos del modelo mental opera el sujeto y estas están precisamente relacionadas con los tres aspectos anteriores de la siguiente manera:

1. **Sobre los componentes o elementos del sustrato** (moverlos, ponerles letreros, colores, achicarlos, agrandarlos, borrarlos, insertar otros, cambiarles la forma, hacerlos girar, etc.)
2. **Sobre las relaciones o nexos de la estructura** (cambiar el orden lineal corriendo una ficha o una marca para adelante o para atrás, cambiar de perpendicularidad a paralelismo de dos rectas con un cuarto de vuelta, proyectando una recta o una curva sobre una recta o un plano, ocultando una superficie al mover otra, alargando una figura hasta tocar otra, acercándola o separándola de otra, etc.)
3. **Sobre las operaciones mismas de la dinámica** (repetirlas, devolverlas en el tiempo, invertirlas, concatenarlas, cambiarles el orden, integrarlas, derivarlas, modificarlas, etc.)

Podríamos decir que una práctica es una sucesión articulada de operaciones mentales y musculares. Ello implica que es necesario aceptar que es posible, útil y con frecuencia exitosa la comunicación entre los sujetos durante las prácticas y sobre las prácticas, para guiarlas y coordinarlas, intercambiando e interpretando instrucciones y sugerencias, comparaciones, diagramas y dibujos, gestos y señales faciales de aprobaciones y desaprobaciones, e incluso las equivocaciones, los balbuceos y los cambios, sustituciones y recortes de sonidos, sílaba y palabras, así parezcan no tener sentido gramatical, pueden tener sentido pragmático e influir en las prácticas en las que se participa.

En esta investigación se trata de interpretar las teorías como construcciones psicológicas, subjetivas, privadas, que sirven como modelos mentales para procesos externos que percibimos, experimentamos y sufrimos sin comprenderlos. Vasco (2014) entiende por modelo mental cualquier representación subjetiva, imaginaria, privada, sistémica, compleja y dinámica de un proceso o subproceso recortado de aquello que consideramos "el mundo real" que en cada momento estamos experimentando. Lo que nos trae nuevamente a citar lo expresado por dicho autor: lo real parece compuesto por muchos seres, cosas o procesos que interactúan con cada uno de nosotros, que también nos consideramos como un ser, cosa o proceso, pero como “cosa pensante” en el lenguaje de Descartes.

Así, para esta investigación es necesario explicitar sobre qué, sobre cuáles objetos, elementos, imágenes o componentes públicos o privados se habla y se opera, sobre cuáles de sus relaciones, nexos, operaciones y transformaciones, qué comunican y cómo se expresan los agentes noético-semióticos cuando resuelven en conjunto actividades de Geometría Analítica.

Sobre estos tres distintos aspectos del modelo mental opera el sujeto, se puede precisar que los alumnos y profesores pueden operar privadamente sobre sus propios modelos mentales, en sus actos de pensamiento o *noesis*, y también públicamente, actuando con y sobre representaciones externas que son productos de su *semiosis*, como dibujos, diagramas, modelos externos de cartón, madera o plástico, signos y símbolos. Cada profesor y cada alumno opera de distintas maneras sobre su modelo mental privado, que parece emerger del propio cronotopo; que en sus expresiones comunicativas pueden expresarse los modelos mentales por distintos recursos semióticos y, luego, puede también operar sobre los resultados de esos intentos de expresión a través de distintas transformaciones de las representaciones semióticas externas que produzca, que Duval (1998) identifica como tratamientos y conversiones, (Duval, 1998).

Desde nuestra interpretación, lo que el sujeto comunica por las semiosis son *expresiones* que produce públicamente, por la misma situación comunicativa del aula de matemática, para que a través de ellas pueda expresar a otros sujetos su particular manera de proceder o resolver un problema o actuar ante una situación sobre sus propias imágenes y modelos mentales, sus componentes y relaciones, los estados y transiciones, y los resultados de sus operaciones sobre esos modelos mentales. Lo anterior implicaría que, a los ojos del observador externo, ante todo el investigador y la profesora, esos modelos mentales son invisibles, y solo podemos inferir indirectamente, a partir de nuestras *interpretaciones* de esas expresiones, algunos rasgos y características de sus imágenes y modelos mentales privados y del cronotopo que está siempre en el trasfondo de esas imágenes y modelos.

Por último, después de la sustentación de diversos autores sobre modelos mentales, miremos ahora dos categorías que se encuentran en Vasco (2014), como lo son el binomio sustrato/estructura y la triada sustrato/estructura/dinámica, pues esto nos llevará a una clasificación de modelos estáticos y modelos dinámicos sobre los cuales notaremos su importancia en educación matemática.

## 2.2. Binomio sustrato/estructura para modelos estáticos

Los modelos estáticos están compuestos por sustrato y estructura, pero sin dinámica. Las *grafías, una vez fijadas en diagramas y símbolos escritos ya son estáticas y se pueden asociar con modelos estáticos, como los gráficos o árboles de puntos y rayas, pero esos gráficos podrían ser instantáneas de distintas etapas de evolución de un modelo dinámico. Las *metrías siempre se asocian con modelos dinámicos en el sentido de que suponen que hay operaciones de medición que dan como resultado numerales en ciertas bases. Las *nomías no son modelos sino trozos de teorías, enunciados que representan leyes, reglas, regularidades y patrones. Asociamos las *nomías con modelos estáticos porque ellas son teorías de modelos mentales que no tienen dinámica, es decir, en ellas no se pueden hacer operaciones, transformaciones o transiciones que construimos mentalmente para reparar los cortes y congelamientos temporales y recuperar el dinamismo de los procesos.

La díada modelo/teoría nos conduce al manejo de las transformaciones mentales del modelo con las instrucciones de la teoría. Según Vasco (2014),

> Cada agente autoconsciente tiene su propia realidad idiosincrásica. Esa realidad de cada uno de nosotros es prácticamente intransmisible a los demás, porque se compone principalmente de su propia enciclopedia de sus modelos mentales y de sus teorías, y lo que puede transmitir a otros son casi siempre solo las teorías, pero muy poco de los modelos y casi nada de las interpretaciones. Lo único que puede hacer cada uno de nosotros es intentar, a través de la comunicación en todas sus formas, que otra persona reconfigure sus modelos y sus teorías para hacerlos más compatibles con los propios. Ese es el juego de lenguajear, con lenguajes articulados y analógicos, corporales, gestuales, sonoros, pictóricos o plásticos. (p.65)

## 2.3. Tríada sustrato/estructura/dinámica para modelos dinámicos

Para Vasco (2014), a diferencia de los modelos estáticos, los modelos dinámicos sí tienen dinámica, y los describe de la siguiente forma:

> Los modelos dinámicos sí se pueden «echar a andar», o «ejecutar», o «hacer correr», o simplemente «correr» («run», «runnable models»). Eso permite las anticipaciones, predicciones y retrodicciones que guían la acción, y permiten que las teorías nos ayuden a formular esas predicciones de manera que puedan comprobarse o falsarse. Solo se falsa una proposición hipotética derivada de una teoría para unas condiciones particulares dadas, no toda teoría. Pero tampoco podemos decir que el estado futuro del modelo que predice la teoría es verdadero o falso. Solo podemos decir que se acerca o se aleja del estado vivido por el agente noético-semiótico si va nadando en el río de Heráclito cerca del subproceso modelado. Podríamos más bien decir que el modelo mental parece estar bien sintonizado con el subproceso real que pretende modelar. (p. 64).

En estos modelos dinámicos la tríada sustrato/estructura/dinámica es esencial; resta ahora plantear la descripción sobre dinámica. En Vasco (2014), ella es descrita de la siguiente manera:

> La dinámica es el conjunto de operaciones, transformaciones o transiciones que construimos mentalmente para reparar los cortes y congelamientos temporales y recuperar el dinamismo de los procesos. La dinámica se refiere principalmente a las transformaciones y movimientos en el tiempo, y para dominar la dinámica de un sistema es necesario adquirir destrezas finas en la cronología y la cronotopía, pues las representaciones externas de lo temporal se hacen generalmente en lo espacial y al terminar de producirlas quedan estáticas. Al dibujar un segmento de recta, lo hacemos en el tiempo y con una orientación específica, por ejemplo, de izquierda a derecha en nuestra cultura, pero apenas terminamos de dibujarlo, queda fijo y estático, y se olvida el sentido del trazo dinámico. Aun si dibujamos una flecha para representar un movimiento o una acción, apenas terminamos de pintarla en el tablero se queda quieta, y los

> pequeños ángulos que pintamos en su punta y su cola no logran recapturar el movimiento. (p. 48).

Son planteamientos que ofrecen retos metodológicos difíciles y prometen efectos didácticos interesantes, pues se trata de que el investigador y el profesor se hagan cada vez más conscientes de la aparición de fenómenos externos que podrían dar pistas de los conceptos teóricos y de los modelos mentales de sus alumnos y de saber cómo "adivinarlos", cuestionarlos, modificarlos y ponerlos en función del aprendizaje de las matemáticas, en nuestro caso, de la geometría analítica.

En síntesis, en esta investigación se asume modelo mental como el producto final de un proceso de sistematización y estabilización de las imágenes mentales, teniendo en cuenta sus tres aspectos básicos, que sintetizamos en la tríada *sustrato-estructura-dinámica* del modelo mental como sistema (Vasco, 2014).

## 2.2. Las bases conceptuales del Programa Cronotopía para la Educación Matemática

El estudio de lo témporo-espacial a través de actividades matemáticas, especialmente relacionadas con la geometría, puede implicar la toma de conciencia por parte de alumnos y profesores de muchos fenómenos físicos o naturales o de situaciones de la vida cotidiana de las personas y las comunidades a las que pertenecen, que tienen estrechas relaciones con muchos tópicos de las matemáticas antiguas y modernas. Estas relaciones entre las matemáticas modernas centroeuropeas y los contenidos matemáticos de muchas actividades cotidianas en las distintas culturas han sido resaltadas por Ubiratán D'Ambrosio, Paulus Gerdes, Alan Bishop, entre otros autores y una multitud de investigaciones en revistas como la Revista Latinoamericana de Etnomatemática y diversas publicaciones de la Red Internacional de Etnomatemática.

Como se dijo en la introducción, el autor de esta tesis comenzó explorando la relación entre las actividades enseñadas por los profesores de geometría analítica en 10º grado y las actividades cotidianas de alfareros, carpinteros, tejedores, pescadores, transportistas y otros artesanos sin educación matemática formal, que confirmaban sus hipótesis sobre la desconexión entre las actividades escolares en las clases de matemáticas y las matemáticas implícitas o explícitas que se estaban utilizando en las actividades cotidianas que ocurrían por fuera de la escuela y sobre la falta de apreciación consciente por parte de los docentes de las oportunidades, motivaciones y aplicaciones que esas actividades etnomatemáticas podrían presentar para el trabajo matemático dentro de las aulas. Pero, al mismo tiempo, se hizo evidente que las conceptualizaciones y teorizaciones sobre lo que es o no es matemática, sobre lo que es o no es etnomatemática, y sobre los acercamientos y distanciamientos entre ambas, carecían de un sustento claro y preciso que permitiera la operacionalización de los conceptos en prácticas sobre la actividad matemática y sobre sus aprendizajes y en diseños didácticos más potentes que los que se han producido en estos últimos 20 años.

En el Programa Cronotopía encontramos una propuesta para profundizar en este estudio. Durante los últimos quince años del presente siglo, el Dr. Carlos Eduardo Vasco ha sido el pionero en el desarrollo del Programa Cronotopía en sus aspectos histórico-epistemológicos, lógicos y matemáticos y en su utilización para la Educación Matemática y la Didáctica de la Matemática. Este conjunto de propuestas se denomina “Programa” porque aún está en un proceso exploratorio, propositivo, de consolidación teórica y de experimentación práctica, y también como alusión a otro programa vigente en la Educación Matemática, como es el Programa Etnomatemática ya mencionado, y, en la historia de la geometría, al Programa de Erlangen, formulado por Félix Klein en 1872, que cambió las concepciones de la geometría de manera radical entre el siglo XIX y el siglo XX. La producción bibliográfica sobre el Programa Cronotopía se condensa en una serie de trabajos (Vasco, 2006, 2007, 2011a, 2011b, 2013, 2014, 2015, 2019), a los que se hará referencia en el transcurso de esta investigación.

Vasco (2006) propuso formalmente “La Cronotopía o el Programa de Bogotá” en una conferencia en un encuentro de geometría en 2005, seguida de diversas presentaciones internacionales a partir de 2007, que pueden seguirse en Vasco (2011a, 2011b, 2013, 2014, 2015, 2019).

La inspiración básica del Programa Cronotopía es darwiniana: nuestros cerebros se han refinado y especializado en millones de años de evolución para producir modelos mentales que tengan éxito en orientar las actividades de supervivencia, que siempre están situadas en un tiempo y su respectivo espacio.[16] Si suponemos que todos los cerebros de los miembros de nuestra subespecie han ido adquiriendo por la selección natural las mismas estructuras o configuraciones neuronales, es decir, que esas estructuras son ahora en cierto sentido con-formes o iso-morfas, podemos suponer también que todos los modelos mentales que produzca un determinado individuo de nuestra subespecie, que solo él mismo puede inspeccionar privadamente, también pueden expresarse, manifestarse y describirse en formas públicas perceptibles e interpretables por los demás agentes humanos como sistemas emergentes de la actividad cerebral, y que todos ellos pueden describirse como sistemas de imágenes mentales que parecen surgir de un continuo témporo-espacial interno o “cronotopo” mantenido activo o soportado por la

[16] Asesorías con Carlos Vasco. 21 de febrero del 2017. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

actividad mental privada de cada uno, alimentada y modulada por la interacción con su entorno sociocultural. Al respecto, Vasco (2019) plantea lo siguiente:

> Para decirlo con una sola imagen, supongamos que yo vivo en una casa de dos pisos. El Programa Cronotopía me dice que yo no subo y bajo las escaleras de mi casa, sino que subo y bajo por la imagen sensomotriz de las escaleras que forma parte del modelo mental de mi casa. Para las matemáticas, el Programa Cronotopía me dice que yo no cuento, mido y juego con las figuras geométricas, las letras y los números en las superficies planas de los libros, los cuadernos o los tableros, sino que manipulo imágenes tridimensionales en mis modelos mentales [cronotópicos] en mi cerebro y trato de externalizarlas con palabras, gestos y dibujos para examinarlas mejor yo mismo y compartirlas con otros.

El Programa Cronotopía tiene como propósito central el tratar de aproximarnos a comprender, a "adivinar" y a describir las imágenes que se activan en nuestro cerebro y se van sistematizando y estabilizando como modelos mentales cuando realizamos diversas acciones sensorio-motrices, entre ellas, aquellas que involucran el desarrollo de actividades que llamamos "matemáticas", y muchas otras relacionadas con ellas que llamamos "etnomatemáticas", todavía sin precisar estos dos vocablos.

A continuación, se presentan algunos conceptos básicos del Programa Cronotopía, en particular el marco categorial con el que se fundamenta.[17]

### 2.2.1. El origen de la palabra cronotopía y sus raíces Chronos* y *Topos

La palabra *cronotopía* no está en el Diccionario de la Real Academia Española DRAE; sin embargo, la palabra *cronotopo* sí está. En la palabra *cronotopía*, la cual fue acuñada por Carlos Vasco en el 2007, se perfilan sus dos raíces griegas, <u>*chronos*</u>-<u>*chronía*</u> (el tiempo, la duración, lo relativo al tiempo) y <u>*topos-topía*</u> (el espacio, el lugar, lo relativo al espacio). En Vasco (2007) se puede leer:

> En esa misma época, el escocés William Rowan Hamilton reformuló la mecánica clásica de Newton, D'Alembert y Lagrange, considerando –además del tiempo y de las tres

[17] Este marco categorial fue discutido y concertado en asesorías con Carlos Vasco. Fechas diversas entre los años 2015 y 2016. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

> coordenadas usuales de posición– también los momentos como tres nuevas dimensiones. Creó así nuevos espacios, hoy llamados “espacios de fase”, y nuevas maneras de trabajar sobre ellos. En 1843 inventó los cuaternios, el primer cuerpo no conmutativo, al ocurrírsele agregar una dimensión real a las triplas que representaban las tres dimensiones del espacio, anticipándose a las necesidades del pensamiento espacio-temporal de la relatividad einsteiniana. Este estilo de trabajo anticipó el espacio-tiempo de Minkowski y las reformulaciones cuaterniónicas de la mecánica cuántica. Podríamos llamarlo “el Programa de la geometría multidimensional de Hamilton” o “Programa de Dublín”. En el trabajo de Hamilton sitúo el comienzo de lo que llamaré “la cronotopía”. (p. 80)

También Vasco (íbid, p. 82) plantea que, así como la etimología de la palabra *geometría* refiere al tratado de las mediciones de la Tierra (o de las tierras), o sea a la *agrimensura*, propone que la Cronotopía sea el tratado de los aspectos lógicos y métricos del cronotopo mental y sus extensiones, lo cual nos conduce a la pregunta: ¿qué es el cronotopo?

### 2.2.2. El cronotopo

La etimología de la palabra *cronotopo* viene del griego: kronos = tiempo y topos = espacio; no es del todo claro si quien por primera vez le dio forma y concepto a dicha palabra fue Albert Einstein, en su presentación del campo unificado del espacio-tiempo de la física relativista, que sería el *topo-crono*, o si fue una reinterpretación en el orden inverso que hizo Mijaíl Bajtín: el *crono-topo.* Como lo dice el mismo Bajtín (1989):

> Vamos a llamar *cronotopo* (lo que en traducción literal significa “espacio-tiempo”) a la conexión esencial de relaciones temporales y espaciales asimiladas artísticamente en la literatura. Este término se utiliza en las ciencias matemáticas y ha sido introducido y fundamentado a través de la teoría de la relatividad (Einstein). (p. 237)

Posteriormente, según Morado (2008), el mismo Bajtín reflexiona sobre *el cronotopo artístico-literario*, especialmente em la novela rusa, dejando a un lado el *cronotopo histórico real* de la física.[18]

---

[18] Estas categorías de *cronotopo artístico-literario* y *cronotopo histórico real*, se encuentran en Bajtín (1989), pero no es nuestro interés profundizar en ellas en este informe de tesis.

Fue Vasco (2007) quien introdujo una fundamentación y aplicación del cronotopo mental en educación matemática. Dicho autor registra una conceptualización sobre el cronotopo mental de cada persona consciente, donde se resalta la fusión del espacio y el tiempo en el trasfondo (*background*) que parece subyacer a todas las imágenes mentales correspondientes a los distintos sentidos, no solo las visuales. Para este entonces, planteaba que la Cronotopía sería el tratado de los aspectos lógicos y métricos del cronotopo y sus extensiones. Hoy día, para Vasco, el cronotopo es el trasfondo de las representaciones mentales de lo témporo-espacial, de donde parecen surgir las imágenes y modelos experimentados internamente, y que comprende al menos cuatro aspectos distintos: los gráficos, los lógicos, los métricos y los nómicos, relacionados con las cuatro raíces griegas *grafos (lo grabado), logos (lo hablado), metron (lo medido)* y *nomos (lo regulado).*

Los cronotopos mentales se suponen muy semejantes en todos los individuos de la especie humana, pues todos parecen compartir la continuidad del movimiento en el espacio y la intuición del fluir del tiempo; parece que todos compartimos también la tridimensionalidad espacial y la unidimensionalidad temporal, así como otras características que hacen que todos los cronotopos de distintos individuos sean presumiblemente similares, homogéneos y, en cierto sentido, iso-morfos o con-formes. Vasco, parafraseando a Piaget, afirma que todos los cronotopos parecen estar dotados de las mismas formas que parecen *a priori* para cada organismo consciente, pero *a posteriori* para nuestra especie, como condiciones mínimas de posibilidad de acción conjunta por medio de la comunicación entre organismos dotados de un sistema nervioso central SNC muy semejante y que han co-evolucionado en actividades sociales coordinadas por medio de signos y señales, aun antes de la aparición del lenguaje verbal articulado.

### 2.2.3. Isomorfismos

Según Vasco,[19] la categoría *isomorfismo*, con su predicado respectivo, *isomorfo*, que viene de las raíces griegas *iso-* (igual) y *-morfo* (forma), y que en latín podrían traducirse como *con-forme*, no se refiere a una identidad o estricta igualdad de formas sino a ciertas semejanzas, regularidades, equivalencias y parecidos. En ello se encuentra que la *isomorfía* es una propiedad abstracta distinta de la identidad, una especie de *con-formidad*, mientras que el *isomorfismo* se puede interpretar como una función, mapeo o correspondencia entre sistemas diferentes que preserva su estructura, con propiedades precisas que lo distinguen entre muchos otros tipos de funciones y morfismos, como por ejemplo los homomorfismos y los homeomorfismos,[20] y el adjetivo *isomorfo* se refiere a un sistema que es distinto de otro pero que tiene definida una función o relación de isomorfismo con ese otro.

Según el diccionario de la RAE,[21] un isomorfismo o isomorfía en geología establece que dos o más cuerpos, con diferente composición química, presentan igual estructura cristalina y pueden cristalizar asociados. Un isomorfismo en matemáticas hace referencia a una correspondencia biunívoca entre dos sistemas o dos estructuras algebraicas, que conserva las relaciones y las operaciones internas.

---

[19] Asesorías con Carlos Vasco. 28 de mayo del 2020. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

[20] El homomorfismo es una función que preserva parcialmente la estructura, pero pierde información sobre distinciones entre elementos del sistema de salida por no ser biyectiva o uno-a-uno. En el caso del homeomorfismo (del griego ὅμοιος (homoios) = misma y μορφή (morphē) = forma), en topología se define como una función de un espacio topológico a otro que cumple las propiedades requeridas para ser una función biyectiva continua y cuya inversa también es continua.

[21] Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española. Diccionario disponible en: http://www.rae.es/

En la Cronotopía, el isomorfismo se refiere a que los discursos, las representaciones y las imágenes y modelos mentales empleados por los alumnos y profesores se pueden comparar, caracterizar y diferenciar solo si se parte de la hipótesis de que los cronotopos de cada una de las personas “son iso-morfos” en cuanto que se pueden describir algunas formas, características o propiedades del cronotopo de cada uno lo suficientemente parecidas para que se puedan distinguir las distintas imágenes y modelos mentales y las representaciones semióticas que parecen surgir en, sobre o contra la homogeneidad del trasfondo cronotópico (como decir que ese trasfondo permite el movimiento sin resistencia aparente, que parece ser tridimensional, que parece continuo o sin huecos ni rajaduras, que parece vacío o transparente).

Decir que dos sistemas “son iso-morfos" es tratar de expresar que, a pesar de las diferencias entre los componentes, a pesar de tomarlos como sistemas distintos, tienen la misma forma, la misma estructura, la misma red abstracta de relaciones. Este isomorfismo rara vez se podrá comprobar en los modelos mentales de dos personas diferentes, pero las pocas propiedades del cronotopo que podamos expresar y las relaciones forma-fondo con figuras o formas específicas como manchas, trazos, movimientos, detenciones, fronteras y otros fenómenos de la experiencia interna sí parecen sugerir que los cronotopos son isomorfos, al menos en ese sentido muy general que se ha descrito.[22]

Para poder describir el cronotopo de otra persona es necesario que ambas traten sinceramente de expresar sus representaciones mentales de lo témporo-espacial de donde

[22] Tomado de Asesorías con Dora Calderón y Carlos Vasco. 13 de febrero del 2017. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

parecen surgir los componentes, las relaciones y las transformaciones de los modelos mentales que están experimentando como sistemas mentales “activados” o como “objetos de su atención” en el momento en que tratan de examinarlos introspectivamente y de comunicarlos con otros, de alguna manera “mirando de reojo” al cronotopo subyacente, debajo, encima o detrás del modelo mental.

En matemáticas, la idea que hay detrás es la de encontrar “la esencia” relacional y operacional o algebraica de la estructura abstracta de cualquier sistema matemático, separando, apartando o abstrayendo de su ocurrencia particular y su apariencia concreta. Por ello, “estructura” o “forma” se toman como “esencia”, como “patrón” (“pattern”), como “red de relaciones abstractas” o abstraídas de las particularidades de cada modelo mental en cada persona situada en cada cultura, en cada institución, en cada territorio, en cada aula, en cada grupo de alumnos y profesor.

La relación de isomorfismo entre dos sistemas diferentes producidos por el mismo agente en su cronotopo mental, o por dos agentes diferentes, cada uno activado en su propio cronotopo, no se puede atribuir globalmente sin analizar explícitamente al menos tres correspondencias diferentes, cada una relacionada con uno de los tres aspectos diferentes que la TGPS distingue en todo sistema:

> —la correspondencia que hay entre los elementos de los dos conjuntos de componentes (el *sustrato* de cada sistema);
> —la que hay entre las relaciones de las respectivas redes de relaciones (la *estructura* de cada sistema), y
> —la que hay entre las operaciones mentales o virtuales de cada uno de los dos grupos de transformaciones (la *dinámica* de cada sistema).

### 2.2.4. Características del cronotopo

Según Carlos Vasco, las características que se han podido establecer hasta el momento sobre el cronotopo mental, interno, privado de las personas de distintas culturas son las siguientes:

- ✓ Captura el tiempo-espacio externo o espacio-tiempo ambiental según el contexto cultural donde esté el sujeto.

- ✓ El cronotopo solo parece indirectamente observable como trasfondo (“background”) de las representaciones mentales témporo-espaciales que cada persona intuye e inspecciona como imágenes provenientes de la percepción, la memoria y la imaginación.

- ✓ Es homogéneo. En particular en lo que hace relación a lo continuo: de no tener huecos ni mostrar bordes, de ser liso, o ser uniforme, isotópico (lo relacionado con los movimientos en el espacio mental, donde el trasfondo espacial parece seguir siendo igual), isocrónico (en el tiempo de la imaginación, la memoria o la proyección hacia el futuro), tridimensional para el movimiento en el espacio mental y unidimensional para el flujo temporal.

- ✓ El cronotopo permite que yo intente medir la antigüedad de una escena imaginada como si fuera una “distancia” temporal, y medir la duración de un fenómeno como si fuera la “longitud” de un segmento o intervalo de tiempo. La analogía va de lo temporal a lo espacial, pero no en la otra dirección. Gadamer (1999) reflexionó que la “distancia temporal” es aquella que le permite al sujeto (que interpreta la historia, personal, de un suceso, de la vida, etc.) construir un sentido sobre los hechos involucrados en el fenómeno. En la enseñanza y el aprendizaje de la historia se habla de la dificultad que tienen los niños en construir “una línea de tiempo”, en donde inserten las fechas de los acontecimientos del pasado como marcas en una línea horizontal.

- ✓ En el cronotopo no hay ninguna unidad “natural” para las medidas espaciales ni tampoco una unidad natural temporal. El tiempo no es propiamente una magnitud ni una cantidad, sino una estructuración intuitiva del cronotopo mental distinta pero mezclada con la estructuración espacial, pero parece que la duración de un evento localizado en el espacio sí podría ser una magnitud física que tiene cantidades diferenciadas y medibles como duraciones de distintos eventos. La única unidad que podría llamarse “natural” hasta el momento encontrada en el trasfondo del cronotopo es la vuelta, que no es ni solo en el espacio ni solo en el tiempo, y no pude decidirse exactamente en dónde empieza ni en dónde termina, ni si la vuelta como unidad dura un día o más, o menos, o un mes de la Luna, o un año solar. El espacio por sí solo tampoco es una magnitud ni una cantidad y por eso no tiene unidades. Pero sí hay al menos tres magnitudes espaciales, como son la longitud, el área y el volumen, con cantidades distintas que tienen un orden de menor a mayor; pero las unidades que se utilizan para medirlas con más precisión no parecen “naturales” o sea “nacidas naturalmente en un cronotopo privado”.

- ✓ Memorizar, recordar y olvidar están relacionados con la estructura temporal del cronotopo. Re-cordar es volver a traer al corazón. El re-cuerdo es un fantasma o espectro que proyecta nuestra facultad de la imaginación o fantasía, que llamamos así cuando funciona de ahora hacia delante para pre-*ver* el futuro, pero que parece ser la misma facultad que llamamos "memoria" cuando funciona de atrás para adelante hacia el ahora. A veces al recuerdo también lo llamamos "memoria".

✓ El isomorfismo de dos cronotopos privados implica la posibilidad de coordinación y comunicación entre dos modelos mentales activados en los dos cronotopos de esos dos agentes diferentes; el isomofismo no puede comprobarse directamente entre los dos agentes ni por un tercero, pero se postula como la mínima condición que permite la comunicación de esos modelos personales y privados a través de gestos, señales y lenguajes analógicos y digitalizados y la coordinación de las acciones guiadas por esos modelos.

✓ Los modelos complejos, múltiples y cambiantes que se activan o surgen en el cronotopo mental de un agente noético-semiótico son personales y privados, pero también hay una contrapartida pública del cronotopo como trasfondo de esos modelos mentales, que corresponde al espacio-tiempo ambiental que todos experimentamos y que trata de precisar el saber físico-matemático (y por eso se suele llamar "espacio-tiempo físico"), el cual parece compartido por todos los agentes noético-semióticos que se encuentren cercanos entre sí espacial y temporalmente y pueden comunicarse entre sí.

En el proceso de comunicación entre sujetos, en nuestro caso, entre la profesora y sus alumnos, cada uno inspecciona, habla y opera sobre su propio modelo mental, pero a la vez puede dar también instrucciones y sugerencias a otra persona para que opere sobre su propio modelo mental y le comunique los resultados de esas operaciones. Estos intercambios sobre las transformaciones en el modelo mental privado de un sujeto provocadas por esas instrucciones y sugerencias del profesor o de otro alumno son la fuente principal de información para esta investigación.

El cronotopo personal no parece permitir que ni el mismo sujeto ni sus interlocutores le cambiemos sus propiedades como trasfondo estable. En lo que comunica el sujeto, que suelen ser a través de expresiones semióticas, discursivas, gestuales y gráficas, se pueden encontrar rasgos de ciertas características de los tres aspectos del modelo mental: [23] aquellas que nos dan pistas de los componentes del *sustrato* del modelo, en particular, de

[23] Asesorías con Dora Calderón. 16 de abril del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

los resultados de los análisis, divisiones, cortes, distribuciones de partes o subconjuntos de elementos o componentes, sobre los cuales se dan nombres sustantivos o sintagmas nominales y se usan íconos o términos algebraicos; aquellas que expresan las relaciones, nexos o lazos de la *estructura* del modelo mental, sobre los cuales se usan predicados, atributos o relatores, y aquellas que intentan comunicar las transformaciones, cambios, estados, transiciones, acciones y operaciones de la *dinámica* de un modelo mental, para lo cual se usan verbos, instrucciones u órdenes.[24]

Por lo anterior, un sujeto no puede operar directamente sobre el cronotopo personal y privado de los otros sujetos. Solo puede hacerlo indirectamente a través de sugerirle al otro que haga cambios en sus imágenes y modelos mentales y de darle instrucciones sobre cómo hacerlo. Tampoco cada sujeto puede comunicar nada directamente sobre el cronotopo mismo como trasfondo de los modelos e imágenes, salvo indirectamente, confirmando las generalidades que se enunciaron en las características del cronotopo. Lo anterior se soporta el marco teórico de Teoría General de Procesos y Sistemas desarrollada por Vasco (1995, 2014).

He aquí las dos mayores dificultades de la investigación: en primer lugar, puesto que no es el modelo mental global lo que se comunica directamente, sino solo algunos componentes de su sustrato, algunas relaciones entre esos componentes y algunos cambios, transformaciones u operaciones sobre los componentes, las relaciones y las operaciones, con respecto a los demás componentes, relaciones y operaciones del modelo mental del profesor o el alumno, el investigador no tiene otra alternativa que intentar inferirlos, conjeturarlos y aun "adivinarlos". En segundo lugar, la comunicación, que es

[24] Asesorías con Dora Calderón y Carlos Vasco. 13 y 15 de marzo del 2017. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

un acto orientado o dirigido a otro como información, petición, discusión, declaración de algo, instrucción o sugerencia, implica que las respuestas y reacciones del sujeto interpelado no le permiten tampoco al investigador acceder directamente al cronotopo mental del profesor o del alumno como trasfondo de sus modelos mentales; solo podemos inferir las características de ese trasfondo en forma muy parcial e indirecta.

### 2.2.5. Las actividades semióticas del cronotopo

Según Carlos Vasco, la Cronotopía se encarga de estudiar las formas posibles, las delimitaciones de regiones, caminos y marcas producidas por la actividad consciente del cerebro humano, con sus relaciones, transformaciones, dimensiones, magnitudes y cantidades que pueden distinguirse sobre el trasfondo continuo de cualquier modelo mental específico que intente representar fenómenos como procesos y subprocesos que ocurren necesariamente en el tiempo y en el espacio, y que se experimentan como internos ("aquí dentro"), pero que parece que se dan siempre en un contexto, tiempo y espacio sociogeográfico externos ("allá afuera").

Lo anterior se precisa en Vasco (2019, p. 2) de la siguiente manera: "…la Cronotopía estudia, ante todo, el espacio-tiempo mental interno del sujeto que trata de practicar esa disciplina…". Eso ya es bien difícil, pero la introspección nos permite avanzar lentamente en ese estudio del propio cronotopo; en cambio, el estudio del cronotopo de otra persona, como trasfondo de sus modelos e imágenes mentales, es asunto mucho más difícil, conjetural e indirecto.

Si la Cronotopía es el estudio de los cronotopos y adquiere, en este sentido el carácter de disciplina, para estudiar el cronotopo propio y el de los demás, el Programa Cronotopía propone dividir su estudio por subdisciplinas relacionadas con lo temporal (crono) y lo espacial (topo) de la siguiente manera:[25] Las subdisciplinas de lo temporal o lo crónico son la Crono*[26]grafía y la Crono*logia, la Crono*metría y la Crono*nomía, y las de lo espacial o lo tópico son la Topo*grafía y la Topo*logía, la Topo*metría y la Topo*nomía.

La subdivisión de la Cronotopía en las cuatro actividades humanas noético-semióticas del cronotopo en lo temporal y las cuatro de lo espacial implica una reflexión sobre la combinación de los sufijos *grafía, *logía, *metría, y *nomía. Estos sufijos tomados del griego indican prácticas e intencionalidades distintas aplicadas a los distintos campos semánticos en los que se mueven las prácticas y lenguajes sobre el tiempo y el espacio (prefijos *crono*- y *topo*-). Las dos primeras actividades semióticas se desarrollan con el inventario y clasificación de multitud de *grafías y *logías acumuladas durante muchos siglos. Estas dos primeras actividades podrían considerarse “precientíficas” si las miramos desde las ciencias actualmente más desarrolladas, pero se van volviendo científicas en la medida en que continúan refinándose con el desarrollo y refinamiento paralelo de las *metrías y las *nomías. Estas dos últimas actividades semióticas, las *metrías y las *nomías, pueden considerarse “científicas”, sin que esto implique que las dos primeras sean “no científicas”. Ambas etapas pueden llamarse “científicas” o, si se prefiere, se puede llamar a la primera “precientífica o científica en sentido impropio” y a la segunda “científica propiamente hablando”.

[25] Asesorías con Dora Calderón. 16 de abril del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.
[26] Los asteriscos se presentarán para llamar la atención a la forma peculiar de entender estas disciplinas en el Programa Cronotopía.

A continuación, se explica el porqué de esta afirmación. Vasco (2018)[27] comenta que optó por una caracterización descriptiva, histórico-evolutiva de la Cronotopía, en la que empezó a notar la periodización de lo temporal y de lo espacial en dos grandes etapas de acumulación de resultados de dos actividades semióticas relacionadas: una con las pinturas, diagramas y dibujos, y otra con los lenguajes orales.

Analizando la historia de los pastores, agricultores, artesanos y comerciantes pudo distinguir en una primera etapa de la sistematización de lo temporal o crónico y de lo espacial o tópico dos procesos paralelos de acumulación de dibujos, figuras, gráficas, pinturas, esculturas, petroglifos, alto- y bajorrelieves, montajes, modelos y aparatos, que llamó "*grafías", por estar grabadas, fijadas, disponibles públicamente para su análisis y estudio. Antes de esas *grafías, lo único que podría llamarse "grabado" es lo grabado en la memoria individual, que fuera recordable a voluntad, pero esas imágenes y modelos mentales eran privados y no acumulaban material repetible públicamente que pudiera llamarse ni siquiera "precientífico", por la ausencia de lenguajes escritos.

Distinguió luego entre las *grafías y las *logías, por la palabra, el discurso, los dichos, narraciones e instrucciones verbales, y entre estas últimas, distinguió las orales y las escritas, pues las primeras escrituras o logo*grafías exigían muchos milenios de *grafías y de *logías orales previas, enunciadas en un lenguaje articulado público, con sonidos linealmente distintos o discretos (o discretizados o digitalizados) que a su vez exigían esfuerzos de interpretación por parte de los que los escucharan, pero todavía no estaban grabados o graficados en silabarios ni alfabetos. En cambio, las *grafías empezaron muchos miles de años antes que las logo*grafías, pues los dibujos en las piedras, en las

[27] Asesorías con Carlos Vasco. Comunicación personal del 4 de septiembre del 2018. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

cuevas, en trozos de hueso y otras inscripciones de formas y figuras, muescas y adornos, preceden en muchos miles de años a los jeroglíficos egipcios y a los caracteres chinos. Estos no son letras ni siquiera ahora, pues cada grafismo representa una idea o una palabra o frase. Se pueden llamar más bien *ideogramas*, que solo más tarde producen silabarios, todavía no alfabetos fonéticos. Lo icónico vuelve ahora a aparecer con la diversificación de las fuentes de impresión ornamentadas y últimamente con los emoticones o emoji, y con las ranuras, manchas y rayas reaparecen como los actuales códigos de barras y los QR.

La acumulación precientífica de *logías se dio inicialmente solo por memorización de los enunciados, formulaciones o fórmulas orales, y luego por la escritura, que comienza hace unos 5000 años (Mosterín, 2002). Podríamos llamar los textos escritos “*grafías de las logías” o “logo*grafías”. En cambio, las “grafo*logías” serían los enunciados acerca de las *grafías o agregados a las *grafías, como los letreros de las figuras y los enunciados de problemas y teoremas sobre figuras geométricas dibujadas en papiros, pergaminos y papeles.

A partir de un buen número de *grafías y *logías que permitían orientar la acción propia o la de los colaboradores y aprendices con mayores probabilidades de éxito que otras, se fue dando la necesidad de cuantificar lo cualitativo, en el sentido de que había muchas ventajas en ordenar en una escala de menor a mayor probabilidad o de menor a mayor intensidad de muchas de las distintas cualidades o atributos de los objetos y fenómenos que se pudieran comparar y calificar como menores o mayores que los atribuidos a otros objetos y fenómenos, ya fuera al mismo tiempo o en distintos tiempos.

Como ejemplo, desde los primeros tiempos de las actividades del *Homo erectus* y e*l Homo faber* algunos objetos o fenómenos se podían comparar y separar en grandes y pequeños; más tarde se podía compararlos y ordenarlos más finamente, formándose así las primeras escalas ordinales con la clasificación en "muy pequeños, pequeños, medianos, grandes o muy grandes" (ver Bishop, 2005). Esa ordenación inicial la podríamos llamar "todavía cualitativa", aunque el orden de menor a mayor ya introduce lo cuantitativo, pero sin utilizar todavía números para la medida o números de medir; sin embargo, sí pudieron haber surgido desde entonces los números para la ordenación o números de ordenar, que hoy llamamos "ordinales antiguos", como "primero, segundo, tercero, cuarto, penúltimo y último" para los dedos de la mano o para filas de personas o animales.

Así se forma la escala ordinal dentro de aquellas cualidades que anteriormente solo eran clasificables en escalas nominales, categoriales o cualitativas, que todavía no merecen el nombre de "escalas", sino como el inicio del paso de lo cualitativo a lo cuantitativo ordinal, y, luego, se refinan las escalas ordinales con la atribución de números ordinales, y luego los números cardinales o para medir cantidades discretas, para luego llegar a las escalas aditivas y a las escalas multiplicativas actuales. El desarrollo de la tercera fase, la *metría, como crono*metría y topo*metría, permite el paso a la cuarta fase, la *nomía.

Una vez que se refinan las escalas métricas ordinales y numéricas, es posible precisar y formular por escrito con palabras y otros símbolos las leyes o regularidades que se observan entre las ocurrencias de distintos tipos de fenómenos cuantificables. A partir de la raíz griega *nomos*, la ley, la regla, la costumbre, podemos decir que se empiezan a desarrollar las *nomías de lo espacial y de lo temporal.

La cuarta fase de consolidación de una disciplina científica se llama, pues, su *nomía. La Crono*nomía y la Topo*nomía son actividades que tratan de combinar las *grafías, *logías y *metrías en enunciados legaliformes o leyes, reglas, regularidades y patrones que se espera que se repitan "cæteris paribus": mientras las demás condiciones se mantengan iguales o muy parecidas. Así, cada disciplina científica estudiaría esos rasgos de las cuatro actividades semióticas del cronotopo, comenzando con las dos actividades de acumulación precientífica de *grafías y *logías, para pasar a las dos actividades propiamente científicas de la *metría y la *nomía.

Para esta investigación sobre geometría analítica, la teoría de Vasco sobre las cuatro actividades semióticas del desarrollo de cualquier ciencia crea un interrogante muy retador para nuestro tema de estudio: la astronomía antigua creó, desarrolló y refinó desde hace al menos 4000 años la astro*grafía y la astro*logía; luego, la astro*metría y la astro*nomía se consolidaron en la China, la India, Mesopotamia y Egipto al menos hace unos 3000 o 2500 años, en particular, con grandes avances en la Crono*metría. ¿Por qué la geometría antigua, que también se desarrolló muchísimo desde hace al menos 4000 años con gran acumulación de geo*grafías y geo*logías, y luego avanzó rápidamente a la tercera fase de la geo*metría hace unos 2500 años, con grandes avances en la Topo*metría, no parece haber consolidado la geo*nomía?

Una posible respuesta podría ser que consideremos que los teoremas de Euclides y otros "Elementos" conocidos o perdidos, y que las ecuaciones de Diofanto y las de los matemáticos del Renacimiento que se recogen hoy en algunos libros de texto sean las *nomías de la cuarta fase de esta rama de la Topo*metría. Otra respuesta podría ser que la geo*nomía es precisamente la geometría analítica de Descartes, en la que las ecuaciones enuncian las leyes o regularidades geo*nómicas. ¿Qué encontramos de todos esos desarrollos tan antiguos en una clase "normal" de geometría analítica en 10º grado, en los libros de texto actuales y en los discursos didácticos de los docentes de hoy?

Ya precisaremos más las ocho subdisciplinas y sus nombres. Como ejemplo inicial, la Crono*metría exige, principalmente, una reflexión sobre el flujo temporal y la "distancia" temporal, que se llama más precisamente la "duración" (que se considera como "corta" y "larga", con vocabulario tomado de la Topo*metría); el estudio de lo que llamamos "durar más" o "durar menos", y de las clases de equidurancia de dos o más procesos (que "duran lo mismo"); la clasificación de los intervalos (lapsos, momentos, instantes) y su anidamiento, para el establecimiento de una estructura métrica temporal que comienza como pre-métrica o pre-numérica linealmente ordenada con sus distintos tipos de coordenadas y unidades. Como consecuencia, el profesor debe indagar por la temporalidad que experimentan y emplean sus alumnos, por la suya propia y por las distintas maneras de representarlas en la vida cotidiana de sus alumnos y en los textos escolares de matemáticas, geografía, historia, biología, física, lenguaje, ante todo el uso de relojes, calendarios, las maneras de fechar los hechos recientes y los antiguos, las líneas de tiempo, etc.

### 2.2.6. Las actividades semióticas precientíficas del proceso de expresión del cronotopo: *grafías y *logías

#### 2.2.6.1. ¿Qué son las *grafías en la perspectiva cronotópica?[28]

Una *grafía es una representación que deja huella. Según Dora Calderón,[29] en el sentido más generalizado, una *grafía es la producción del grafo,[30] gráfico, grafismo, rasgo, rasguño, esquema, dibujo, que todavía no es "letra" antes de que haya lenguajes articulados con escritura alfabética. También puede ser la descripción de algo por un diagrama, esquema o grafismo, que es un modelo exteriorizado y público. Por ello, puede considerarse que las *grafías se refieran fundamentalmente a las representaciones gráficas, esquemáticas, diagramáticas e icónicas, que emplean a veces signos alfabéticos u otros caracteres, pero con función de índices, no como descripciones verbales, las cuales serían ya *logías.

Según los últimos descubrimientos de pinturas rupestres de animales, flechas e impresiones de la mano, las *grafías datan de hace unos 40 mil años.[31] Hay ejemplos de *grafías en las cuevas de Alatamira y Lascaux, en los jeroglíficos en la Gran Pirámide de Giza en Egipto (Velasco, 2007); en las figuras tradicionales tejidas en las mochilas arhuacas en la Sierra Nevada de Santa Marta de Colombia (Aroca, 2009); en los tatuajes que se hacían miembros de tribus de la polinesia oriental y que hoy se realizan muchas personas en el mundo (Rodríguez, 2011); en el decorado de la porcelana de la dinastía

---

[28] Para el desarrollo conceptual de cada una de las actividades semióticas se tomaron algunos apartes de documentos escritos por los profesores Carlos Vasco y Dora Calderón o análisis de actas de asesorías que fueron en su mayoría dados en el segundo semestre del 2017.

[29] Asesorías con Dora Calderón. Comunicación personal del 20 de abril del 2019. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

[30] Plantea Dora Calderón lo siguiente: Mi alusión se refiere a que el concepto más generalizado con respecto al significado de grafía es su relación con letra: ser representación del sonido y en especial de las lenguas, que como signo sería cada uno de los signos alfabéticos. Así mismo se relaciona con escritura como tipo de producción de signos bajo reglas y como generación de enunciados. Así, se observa por una parte el carácter representacional (que es un tipo de problema y tiene que ver con los signos) y con ser huella, marca. Cuando se toma grafo, observar la amplitud de significados, siempre representacionales, pero no solo con lenguaje verbal o con palabras. Asesorías con Dora Calderón. Comunicación personal del 28 de mayo del 2020. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

[31] M. Aubert, P. Setiawan, A. A. Oktaviana, A. Brumm, P. H. Sulistyarto, E. W. Saptomo, B. Istiawan, T. A. Ma'rifat, V. N. Wahyuono, F. T. Atmoko, J.-X. Zhao, J. Huntley, P. S. C. Taçon, D. L. Howard & H. E. A. Brand (2018). *Nature*, 564, 254-257.

Qing (Cabrera & Rodríguez, 2017); entre otras muchas otras *grafías relacionadas con la geometría.

A las *grafías, el carácter impreso o inscrito le da también el sentido de grafo, gráfico y sobre todo de rasgo, rastro o huella. La mayoría de las expresiones que dejan esa huella con sentido comunicativo, son eventos muy cortos en duración y muy localizados en vecindades de poco volumen en el entorno espacial. Solo unos pocos de esos eventos cortos dejan huella estable y pública en marcas, manchas, trazos, dibujos, rayas, rayones, huecos, surcos, formaciones y deformaciones que permanezcan el tiempo suficiente para poderlas examinar y reexaminar o revisar, compararlas con otras, interpretarlas y reinterpretarlas, imitarlas y repetirlas. A esas huellas estables o al menos semi-estables son las que denominamos *grafías, no a los eventos pasajeros que las producen y menos a los que no las producen o cuando sus huellas son tan efímeras que no se pueden revisar posteriormente.

Muchas representaciones no dejan huella, como la mayoría de los gestos y de las expresiones faciales. Por ejemplo, trazar un círculo en el aire con el dedo, aunque significa algo espacial que ocurre en el cronotopo mental del que hace el gesto respectivo, no deja huella; sin embargo, como medios de expresión o externalización de los modelos mentales, es necesario analizar el papel de los gestos en la clase de matemáticas cuando tengan intención comunicativa, así no sean *grafías; más adelante se presentará una reflexión específica sobre la gestualidad como actividad expresiva de lo espacial, que, aunque no parece dejar huella perceptible en el momento de su ejecución, gracias a las tecnologías de filmación en película o en medios videomagnéticos o electrónicos sí deja una huella que permite examinarla y reinterpretarla más tarde.

Toda *grafía es, pues, una representación semi-estable que se considera significativa, pero no toda representación es una *grafía. No toda *grafía es expresión intencional y no toda expresión intencional produce *grafías. Toda *grafía consciente e intencionalmente producida es expresión, pero no viceversa. Puede haber sido una expresión que no dejó huella, o puede ser una huella producida inconscientemente y sin intención comunicativa, pero en algunos sí pudo tenerla, dejando o no huella, como más adelante se analizará en el caso de la relación entre los gestos y las *grafías.

Para ilustrar estas ideas con un ejemplo, supongamos que la profesora pinta en el tablero un redondel y una flecha horizontal hacia la derecha. Apenas termina de pintar esa gráfica, ese resultado semi-estable es una *grafía.[32] La figura 4 muestra un ejemplo de una *grafía institucionalizada, tomada de un texto escolar sobre la elipse y de otra *grafía hecha por una alumna. Una vez terminada la *grafía (en azul en la figura 4), ya no se puede capturar en ella el movimiento ni la rotación que sí se percibieron en los gestos y trazos de la profesora y de la alumna, pero sí puede inspeccionarse su forma global, sus trazos y cruces locales, los colores y las manchas rectas, onduladas o punteadas que las acompañan.

[32] Se dice solo "semi-estable", pues es fácilmente borrable, aun con el codo o la mano del que la acaba de hacer. Pero una vez terminada, es temporalmente estable y fija y puede inspeccionarse, copiarse y mejor aún, fotografiarse.

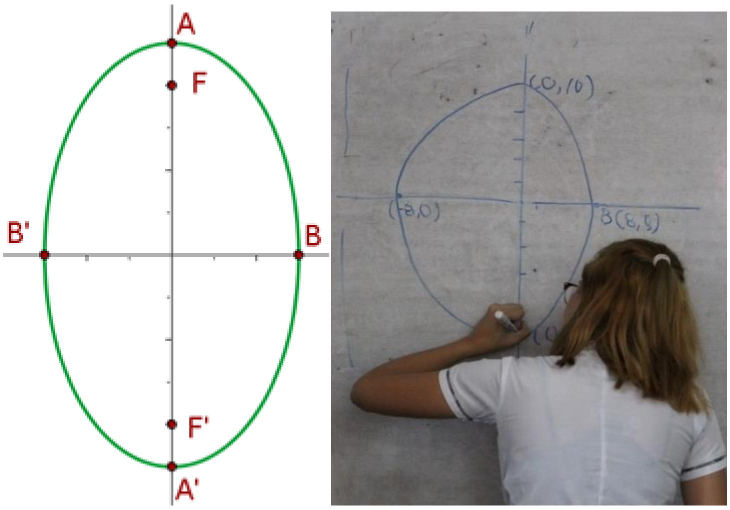



*Figura 4.* *Grafía de un texto escolar sobre una elipse y *grafía de una alumna

Siendo los dibujos, las gráficas, esquemas y diagramas las representaciones más recurrentes y visibles en las clases de matemáticas, Duval (2017) conceptualiza una diferenciación clave entre estos dibujos y lo que en geometría se llama “figura” así:

> El "dibujo" es la configuración particular que se muestra en el papel, en el pizarrón o en el monitor de la computadora, mientras que la "figura" sería las propiedades del objeto representadas por el dibujo o aún, la clase de todos los dibujos que pueden ser representaciones visuales del objeto.
>
> La figura se identifica con las propiedades que no vemos porque ningún dibujo las muestra en general. Estas líneas regulares específicas distinguen las figuras geométricas de imágenes o diagramas. Suprime la importancia de mirar y visualizar. La figura se identifica con las propiedades que no vemos porque ningún dibujo las muestra en general. Estas propiedades solo pueden aprehenderse mediante conceptos, es decir, términos definidos en declaraciones. (p. 63)[33]

Por su parte, Miranda, Radford & Guzmán (2017) interpretaron las gráficas cartesianas sobre el movimiento desde la teoría de la objetivación; en esta investigación los autores se propusieron:

> …indagar el proceso de aprendizaje relacionado con la interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento lineal de objetos en alumnos preuniversitarios a partir de una perspectiva teórica de orientación semiótica, derivada de corrientes contemporáneas socioculturales del aprendizaje (la teoría de la objetivación). (p. 7)

---

[33] Aunque no aparece en la presente investigación, es conveniente comparar esta distinción entre dibujos y figuras con las construcciones de geometría dinámica computacional como las trabajaron Colette y Jean-Marie Laborde en el grupo de investigación *Cabri-Gomètre* en la Universidad de Grenoble.

Dicha investigación, con orientación semiótica, consideró que "la manera de dar cuenta del uso e interpretación de gráficas que hacen los alumnos supone, naturalmente, la adopción de una postura epistemológica que permite la interpretación que se hace del trabajo del alumno". En el caso de Radford y sus colaboradores, la Teoría de la Objetivación del enfoque semiótico-cultural de Luis Radford es la que fundamenta su posición epistemológica. En nuestro caso, se asumen las gráficas cartesianas como una de tantas representaciones del tipo que llamamos "*grafías" y la posición epistemológica que permite la interpretación se analizará desde el Programa Cronotopía y, en particular, desde la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones TGRI de Carlos Vasco, con la ayuda del enfoque noético-semiótico de Raymond Duval.[34]

**2.2.6.2. El papel de los gestos y su relación con las *grafías**

Según el diccionario de la RAE, *gesto*, del latín *gestus*, tiene cuatro acepciones, de las cuales presentamos la primera y la cuarta: 1. m. Movimiento del rostro, de las manos o de otras partes del cuerpo, con que se expresan afectos o se transmiten mensajes. 4. m. Acto o hecho que implica un significado o una intencionalidad.

En ambas acepciones se especifica una intención comunicativa que hace del gesto un tipo de expresión, un recurso semiótico potente, pero que no es ni *grafía ni *logía. Hemos planteado que una *grafía es una representación que deja huella, pero en general el gesto no deja huella. Cuando el gesto como expresión acompaña a una expresión verbal o *logía, se habla de una "expresión paralingüística". En este caso, los gestos son complementarios a la oralidad, a lo dicho en un registro semiótico articulado,

[34] Otras investigaciones en curso en España y Latinoamérica se basan en el enfoque onto-semiótico (EOS) de Juan Díaz-Godino, Carmen Batanero y Vicenç Font. Otros grupos en Estados Unidos, España y Colombia han iniciado estudios de los diagramas, gráficos y dibujos basados en la semiótica de Charles Sanders Peirce, con la epistemología del pragmatismo de Peirce, James y Dewey. Hoy día la utilización de un enfoque semiótico explícito parece ineludible en cualquier estudio de didáctica de las matemáticas.

generalmente el de la lengua materna o natural oral. Pero en otros casos, se hacen gestos que son expresiones no verbales autónomas. Un ejemplo ilustrativo puede ser el gesto usual de aprobación, que, al no poderlo hacer aquí manualmente, se representa con el ícono o emoticón siguiente (del que sí queda huella):

En general, el gesto no verbal no adquiere el carácter de *grafía cuando no deja huella; sin embargo, la discusión sobre lo que es “huella” aún sigue siendo motivo de reflexión, lo cual se puede ver desde diferentes perspectivas. Una de esas perspectivas se encuentra en la historia de cualquier lengua oral y su representación escrita; es decir, la relación entre los sonidos emitidos por los hablantes y las *grafías como representaciones de los sonidos de esa lengua. Suelen distinguirse los signos logográficos, como los jeroglíficos, los caracteres chinos y los numerales, que representan cada uno una palabra; los caracteres silábicos, tomados de un silabario, que representan cada uno una sílaba, y los caracteres alfabéticos tomados de un alfabeto o abecedario, que representan cada uno un fonema.[35]

En esta discusión se destaca que las emisiones fonéticas, los gestos y las *grafías se daban (y se siguen dando) también con frecuencia por el uso espontáneo no ajustado a un sistema gráfico determinado y convencionalizado. Así tuvo que darse durante siglos, hasta que se fijaron el sistema fonético y el sistema fonológico de las lenguas actuales, como nuestra lengua española. Luego, cuando ya se han vuelto lenguas escritas, se desarrolla la gramática, con la léxica, la sintaxis y la ortografía, que podríamos llamar

[35] Asesorías con Dora Calderón. Comunicación personal del 28 de mayo del 2020. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

"sistema logográfico". Las repetidas ocurrencias de estos usos espontáneos por fuera de estos tres sistemas, que se siguen dando profusamente en distintos contextos, provocan a largo plazo la evolución de las lenguas.[36]

Obsérvese que la raíz "gramma" en "gramática" y el sufijo "-grafía" en "ortografía" solo pueden aludir a lenguas escritas, y "léxico" o "diccionario" se refieren también a ellas.

En este sentido, además de la huella privada en la memoria de los oyentes, una *grafía provocada por una emisión fonética que deja huella puede referirse al signo del alfabeto castellano usual o del alfabeto fonético internacional que representa uno de esos fonemas como sonido del español. Pero después del invento del fonógrafo y, más tarde, de los distintos tipos de grabadoras magnéticas y digitales, permiten que los sonidos puedan dejar una huella adicional que es la que se registra en las grabaciones y, si disponen de analizadores de frecuencias, aparece una huella más fina en los espectrogramas que estudian los fonetistas, lo que se designa como el nivel fonemático. Estas nuevas *grafías como representaciones del sonido se suman a las *grafías que utilizan letras u otros símbolos, en particular los del alfabeto fonético internacional. Son distintas formas de transitar del nivel fonológico al nivel fonográfico.

Es claro que, en el nivel fonemático, los usos de las lenguas y, en este caso, la producción o emisión de sonidos de una de esas lenguas por parte de los individuos usuarios de la lengua oral respectiva, como acontecimientos breves y localizados que llamamos "enunciaciones", dependen de factores contextuales, como la edad y género, el ambiente geográfico, la clase social a la que pertenecen los hablantes, su grado de escolaridad y

---

[36] Asesorías con Dora Calderón. 15 de diciembre del 2019. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

otros factores socioculturales, mientras que, en el nivel fonológico, los lingüistas consideran que el repertorio de signos de una lengua en un periodo cronológico de mediano plazo no varía mucho a pesar de las múltiples variantes que se dan en las utilizaciones locales en el corto plazo. Esta semi-estabilidad de los recursos semióticos de cada lengua oral compartida por una comunidad corresponde a la noción del registro semiótico de representación de la lengua natural o materna oral, que es el registro central y privilegiado de todos los demás registros semióticos en el enfoque noético-semiótico de Raymond Duval (2017). Esas consideraciones lingüísticas, especialmente al uso de “registro semiótico” en este sentido preciso, las atribuye Duval al lingüista Émil Benveniste (1902-1976).[37]

Para aclarar lo dicho anteriormente con un ejemplo, se ve en las tres imágenes de la figura 5 que la profesora se dirige oralmente a los alumnos para explicar o explicitar un objeto matemático sin acompañar la acción oral y gestual con una inscripción en el tablero (para representar, reproducir el enunciado dicho, establecer una relación, etc.), pero sí acompaña su expresión oral con un despliegue de gestualidad, con movimientos giratorios de brazos, manos y dedos. La *grafía que se alcanza a ver detrás de la profesora en la figura 5, con símbolos escritos en el tablero, fue hecha por el alumno que acababa de hacer su exposición, quien, a su vez, la tomó del texto escolar de matemáticas.

Esta situación se manifestó en la clase No. 4, cuando la profesora intentó explicar qué es una arandela:

> P: yo le quito esta área pequeña/ ¿Qué me queda?/ el área de la arandela/ (()) como una dona /como una dona/ que parte de la dona (()) a la parte hueca/ sí o no/ o como el trululu/ exactamente como el trululu/ el área que uno se come es el bordecito/ o sea/ completo porque hay un hueco/ hay un hueco/ uno no se come toda un área completa/ porque hay un hueco/ entonces/ para yo poder hallar el área que me como/ tengo que

[37] Semiólogo sirio, discípulo de Ferdinand de Saussure y maestro de muchos lingüistas franceses en el Collège de France de 1937 a 1969.

restarle el huequito/ eso es exactamente lo que viene siendo allí / entonces/ cual es el área de esta/ ¿Cuál será el área solamente de la partes esta de acá? /

Figura 5. La Profesora intenta explicar qué es una arandela solo con gestos.

Desde el punto de vista de la huella, puede considerarse que aquí no se produjo una *grafía ni de la enunciación oral ni de su acompañamiento gestual. En efecto, si no hubiera habido en el aula ni grabadoras de audio ni de video, ni cámaras fotográficas o celulares inteligentes, esas emisiones sonoras no hubieran dejado huella, ni el movimiento de las manos tampoco, como sí la dejó el escrito que se aprecia en el tablero. Pero en la grabación del video sí quedó huella de esos sonidos y tanto en el video como en la sucesión de fotos sí quedó una huella estable de la gesticulación. En este caso quedó una huella electrónica: el video es una cinemato-grafía, una *grafía del movimiento (pues “cinema” viene del griego *kinesis*, *kinema*).

Así pues, aunque hasta hace poco los gestos no dejaban huella, ahora sí puede quedar una huella semi-estable que se vuelve pública, repetible y objeto de análisis. Regularmente, la profesora decomisaba los celulares a los alumnos, porque no le gustaba que filmaran las clases, sino que copiaran en el cuaderno; pero esta vez se obtuvo su consentimiento informado para filmar muchas de las actividades de aula.

Es indudable que los gestos realizados por la profesora o los alumnos, aunque no dejen huella, son una fuente muy rica de expresión de los modelos mentales que tiene activado el agente respectivo. Esta conclusión es importante para la teoría y para la metodología de análisis de los datos. Afortunadamente, con el uso de videos de las actividades de aula, quedaron múltiples huellas fotográficas que permiten observar, repetir y analizar los gestos. Así pues, la inclusión de los gestos grabados en video como datos adicionales a las *grafías y a las *logías deja el camino claro para especificar el tipo de datos que se van a analizar en el capítulo respectivo.

Hasta el momento se han descrito dos perspectivas sobre el gesto: una sobre el gesto mismo como acción expresiva que no deja huella y su relación con las *grafía como representaciones lingüísticas, y otra sobre la inscripción de gestos como huellas fotográficas en video.

Otras perspectivas se encuentran en algunos programas de investigación en el campo de la Educación Matemática que también involucran la semiótica, como las investigaciones de Arzarello & Edwards (2005) y las de Radford (2003, 2005) y Vergel (2015); estas últimas, como se dijo anteriormente, involucran el enfoque semiótico-cultural y la Teoría de la Objetivación de Radford en el estudio del papel de los gestos en el aula en cuanto a la generalización de patrones.

Hemos visto durante la investigación que existen tres grupos de gestos; el primero está conformado por aquellos gestos que dejan una huella inmediata que pueda ser analizada posteriormente; por ejemplo, cuando quedan unas líneas o círculos trazados en el tablero o en el cuaderno, que serían *grafías; el segundo grupo es el de los gestos que solo dejaron una huella en la grabación de video, y el tercero, el de los gestos que no dejaron huella ni en los tableros o cuadernos ni quedaron grabados en video, pero que el investigador considera que sí dejaron una imagen en los modelos mentales de los que lo observaron (alumnos, profesora e investigador); por ejemplo, cuando la profesora emplea el movimiento lineal de la mano para indicar la inclinación de la recta con pendiente positiva o negativa o cuando la nivela para indicar pendiente cero. Para estos últimos gestos, se procuró hacer una anotación en la bitácora o diario de campo inmediatamente después de la clase.

Así, queda claro que un gesto no es algo pasivo e intrascendente, y no se produce solo con los brazos, las manos y los dedos; también están los músculos de la cara y los ojos; abrir de repente los ojos o cerrarlos, mantener el ceño muy fruncido, medio fruncido o levemente fruncido; hacer una inhalación profunda; sacudir la cabeza; efectuar un movimiento repetido de un dedo o un golpeteo en el pupitre con el lapicero; iniciar un amague frustrado, entre muchos otros gestos más, ofrecen al investigador mucha información sobre el trabajo matemático del alumno, y desde nuestro enfoque, nos permiten inferir muchas características de los modelos mentales de los estudiantes y su profesora.

La importancia de las tres formas de expresión: las *logías, las *grafías y los gestos, está en que, a través de ellos, el alumno puede plasmar públicamente o dar a conocer sus modelos mentales privados e invisibles para que los "vean" tanto su profesora como el investigador profesor.

En la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en todas sus versiones, y, en particular, de la geometría analítica de la educación media en Colombia, esas nuevas posibilidades de exteriorizar lo que está pensando e imaginando el alumno deberían jugar un papel destacado en la clase de matemáticas y en la investigación sobre su enseñanza y aprendizaje. Pero en esta tesis fue necesario reducirnos al estudio de las *logías, las *grafías y los gestos como productos finales de los esfuerzos de exteriorización o externalización de las imágenes y modelos de la profesora y los alumnos del curso que analizamos. En cualquier caso, es de suma importancia para el futuro promover como uno de los grandes propósitos y logros didácticos de un profesor de geometría conseguir las externalizaciones de lo que piensan e imaginan sus alumnos por todos los medios posibles.

**2.2.6.3. ¿Qué son las *logías en la perspectiva cronotópica?**

Nos dice el diccionario de la RAE que -*logía*, proviene del griego -λογία y significa 'tratado', 'estudio', 'ciencia'. Como sufijo, -*logía* ayuda a componer palabras, generalmente del tipo que llamamos "nombres" o "sustantivos", instalándolos como ciencias o teorías, con el sentido de indicar "el estudio de…". Por ejemplo, muchísimas ciencias reciben corrientemente el nombre de antropología, mineralogía, lexicología, geología, biología, etc. La astrología podría considerarse como una fase precientífica de la astronomía. En el Programa Cronotopía, tenemos la Crono*logía y la Topo*logía como actividades semióticas precientíficas de la Crono*nomía y la Topo*nomía.

Como vimos anteriormente, en el Programa Cronotopía, Carlos Vasco (2007) propone un uso específico de la palabra *logía en forma independiente, no solo como sufijo. Precisando lo siguiente:

> La *logía de la cronología y de la topología en el sentido amplio en que la propongo no se refiere únicamente al estadio final de pulimento de una teoría con una axiomatización y un despliegue hipotético-deductivo, por importante que este estadio sea. La *logía está ya desde la visualización y la corporalización de los modelos mentales e imaginados a partir de las experiencias diarias, desde la aprehensión que Raymond Duval llama "operatoria" de lo experimentado o imaginado. (p.86)

Para Vasco (2015a) se catalogan como *logías los enunciados, como producciones verbales en el registro semiótico de la lengua natural oral, en el discurso "en vivo", pero todavía sin lenguaje técnico o numérico, que refieren aspecto lógicos cualitativos o cuantitativos, así sean anuméricos o prenuméricos de lo témporo-espacial, mucho antes de la utilización explícita de las denominaciones precisas de las magnitudes, de sus cantidades y de sus medidas numéricas en lenguajes técnicos.

Por la razón anterior, las *logías, los enunciados en lenguaje cotidiano revelan imágenes y modelos mentales y las maneras de operar sobre ellos, con términos cotidianos imprecisos o ambiguos del lenguaje natural, como "grande" o "pequeño", "derecho" o "torcido", "curvo" o "recto", "abombado", "plancho", "tamaño", "grosor", "espesor", etc., en lugar de especificar las magnitudes témporo-espaciales con el vocabulario técnico como la duración, la longitud, el área, el volumen, la capacidad, la densidad u otras, y sin necesidad de expresar esas cantidades con medidas numéricas expresadas con unidades de los sistemas de medición más formalizados.

Una *logía sería una palabra, frase o enunciado en el registro semiótico de representación que hace parte de las expresiones de cualquier lengua natural, con fonemas y sílabas discretizadas, o en un lenguaje técnico escrito con caracteres, letras u otros símbolos digitalizados.

Toda *logía es, pues, una expresión consciente e intencional, oral o escrita, producida por un emisor por medio de un registro semiótico de representación que pueda llamarse lengua o idioma porque produce representaciones semióticas articuladas, digitalizadas y discretizadas en un código que requiere interpretación en ese mismo código por parte del receptor.

En el Programa Cronotopía, las *logías tienen una función expresiva explicativa, que implica unas palabras y frases producidas en el discurso "en vivo", con sus tonos, gestos y modulaciones, pero que hayan quedado fijadas por escrito o grabadas y luego transcritas para su estudio y análisis posterior. Las *logías son las emisiones verbales orales y escritas de los agentes, independientemente de si la representación verbal oral dejó o no dejó huella o de si la representación escrita se conserva todavía o no; función que se asigna en el Programa Cronotopía. Para una investigación como la presente, para clasificarse como *logías se requiere que esas expresiones verbales orales, gestuales o escritas sean producidas consciente e intencionalmente por medio de lenguajes articulados (que incluyen las manuas o manuajes de señas) o por códigos digitalizados o discretizados para representar públicamente algo que el alumno o profesor quiere expresar sobre su mundo cronotópico con sus modelos e imágenes mentales, y que hayan quedado registradas en los tableros, cuadernos, audios, videos o anotaciones en las bitácoras o diarios de campo de los observadores. En esta investigación, las *logías se acompañan de las *grafías y los gestos que se hayan producido por los alumnos o su profesora a la hora de resolver actividades matemáticas, pero, aunque se hayan producido al mismo tiempo y por el mismo sujeto, se consideran como independientes de las *grafías y los gestos, aunque estos puedan aducirse como pistas para la interpretación de las *logías.

Las *logías pueden o no dejar huellas o *grafías. Si las *logías dejan huella, podríamos hablar de “logo*grafías”, como las inscripciones en las lápidas, los jeroglíficos, las decoraciones simbólicas con ideogramas o jeroglíficos, como en los manuscritos y calendarios Mayas y Aztecas, o algunos frisos y murales en el interior de los hipogeos de Tierradentro y todas las sartas y arreglos de caracteres fonéticos, silábicos, alfabéticos o alfanuméricos, codificados en números en distintos códigos, como la numeración romana y en la sexagesimal mesopotámica, la binaria, la decimal y la hexadecimal, el código Morse, o las tablas ASCII, o las distintas versiones de UNICODE, etc.

En tanto inscripciones, las *grafías pueden ser analógicas o icónicas sin —o con— *logías acompañantes y así podríamos hablar también de “grafo*logías”. En caso de ser *grafías puras, las *logías acompañantes pueden ser emitidas por un guía que produce otras *logías para aclarar y explicar, y si es combinada o mixta, pueden aparecer *grafías analógicas o icónicas mezcladas con *logías, o grafo*logías impresas al lado o dentro de los diagramas analógicos o icónicos.

Las *logías son representaciones semióticas de segundo orden, tanto en su producción como en su interpretación, pues exigen por parte del emisor un esfuerzo de memoria y una activación de un registro semiótico que le permita la codificación de la expresión que quiere emitir, y por parte del receptor, un esfuerzo de memoria y la identificación y activación de un registro semiótico que le permita la interpretación de esa representación semiótica en el código en que se produjo.

Así, las *grafías y los gestos se encontrarían en un primer orden antes de las *logías, dentro de los medios semióticos de los que disponen los agentes-noético semióticos para lograr lo que denominamos la exteriorización o externalización de sus imágenes y modelos mentales cronotópicos. Todas estas expresiones verbales, gráficas y gestuales, ante todo los sistemas de *grafías y *logías ya producidas y registradas para su análisis, serían representaciones semióticas RS producidas en algún sistema de producción llamado "Registro Semiótico de Representación RSR" en la terminología de Duval (1993, 2004a). Registro semiótico es el sistema en el que se producen las representaciones, por ejemplo, en el de la lengua natural, en el sistema geométrico euclidiano o en el cartesiano, en el numérico decimal, etc.; la presentación semiótica adquiere sus características de las cualidades de este registro. Así el RSR es resultado de la capacidad sí de producir significados y sistemas de significación. Es a esa capacidad a la que se llama *lenguaje* justamente. Por ejemplo, el registro semiótico de la lengua natural, que es el principal de todos los registros semióticos que domina el agente noético-semiótico, tiene como recursos los fonemas y el léxico de esa lengua, así como la sintaxis y las capacidades de codificar y formular frases de longitud variable y expresarlas por activación coordinada de los sistemas de vocalización.

A su vez, esas *logías requieren una interpretación indirecta a través de un sistema o registro semiótico RSR dominado por el receptor o enunciatario que sea lo suficientemente semejante al registro semiótico de representación para poder descodificar e interpretar la representación semiótica RS producida por el registro productor de representaciones que domina el emisor o enunciador de las RS que el receptor esté tratando de interpretar.

Para el caso de esta investigación, toda expresión oral o escrita de la profesora o de cada uno de sus alumnos en su lengua natural, o en inglés, corresponde a expresiones del tipo de las *logías. Las fotografías y videografías, las grabaciones o fonografías y las transcripciones escritas en papel o en computador se clasifican aquí como *grafías, *logías, grafo*logías o logo*grafías, todas ellas consideradas como representaciones semióticas RS, producidas por sistemas productivos o registros semióticos de representación RSR. Uno de los más difíciles desafíos metodológicos de este tipo análisis de los datos con el enfoque noético-semiótico de Duval es identificar y caracterizar el posible registro semiótico de representación RSR que produjo cada una de esas RS.

### 2.2.7. Las actividades semióticas científicas del proceso de expresión del cronotopo y los modelos mentales: *metrías y *nomías

#### 2.2.7.1. ¿Qué son las *metrías en la perspectiva cronotópica?

De nuevo, según el DRAE, el sufijo -*metría*, proviene del griego -μετρία, de la raíz μέτρον (métron) que significa 'medida' o 'medición'. Regularmente, su posición es sufija o después de la base o raíz de una palabra compuesta; por ejemplo, geometría, econometría, trigonometría, etc., o en otras combinaciones como simetría y asimetría, y aun puede llegar a estar en una palabra que significa su ausencia: ametría.

El metro como medida de longitud usada actualmente también proviene del griego μέτρον (métron) y el adjetivo correspondiente es “métrico” o “métrica”. Según el DRAE, Métrico, -ca; del latín *metrĭcus*, y este del gr. μετρικός *metrikós*; la forma f., del latín tardío *metrĭca*, y este del gr. μετρική *metrikḗ*. Como adjetivo es perteneciente o relativo al metro.

A veces se usa "metro" como instrumento para medir, o "cinta métrica". El uso técnico más común del adjetivo "métrico" es en la expresión "sistema métrico", como el caso del sistema métrico decimal, los sistemas métricos inglés y norteamericano y el Sistema Métrico Internacional SI. La RAE anota que "sistema" proviene del latín tardío systēma, y este del griego σύστημα *sýstēma*, cuya definición se presenta como conjunto de reglas o principios sobre una materia racionalmente enlazados entre sí. En el caso de sistema métrico decimal, la RAE plantea que es un sistema de pesas y medidas que tiene por unidades de base el metro y el kilogramo, en el cual las unidades de una misma naturaleza son múltiplos o divisores de diez con respecto a la unidad principal de cada clase y que ha sido desplazado por el Sistema Internacional SI.

Para construir una primera idea sobre el uso de *metría en el Programa Cronotopía, es necesario conocer inicialmente la etimología y los distintos significados de todos los conceptos ya presentados, como metro, métrico, métrica y sistema, así como algunos conceptos sobre los sistemas métricos. Según Carlos Vasco,[38] la *metría es una actividad intelectual teórica y práctica que necesita combinar *grafías y *logías para precisar, comprobar y hacer públicas las clasificaciones, valoraciones y apreciaciones cualitativas o categoriales en escalas nominales, y las cuantitativas en escalas ordinales y numéricas (sean de intervalo o de razón, llamadas también aditivas y multiplicativas, incluyendo también las escalas logarítmicas y semilogarítmicas).

[38] Asesorías con Carlos Vasco. 21 de noviembre del 2018. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Con respecto a la *metría, en el Programa Cronotopía se distinguen dos de las cuatro actividades semióticas científicas correspondientes a lo temporal o crónico, la Crono*metría, y a lo espacial o tópico, la Topo*metría. En general, en cualquier disciplina científica, la *metría trata de las magnitudes, las cantidades, los procesos, los instrumentos y los resultados de una medición. Es necesario distinguir la medición como *proceso* y la medición o medida como *resultado,* la cual puede ser numérica o anumérica (también llamada prenumérica). Una medida numérica se presenta con una marca numérica en una escala, que como ya se dijo, puede ser nominal o categorial, en la cual las categorías 1, 2, 3, etc. no tienen ningún orden de prioridad; en una escala ordinal, generalmente ordenadas de menor a mayor, primera, segunda, tercera, etc., o en una escala aritmética de intervalo (aditiva) o de razón (multiplicativa).

Teniendo en cuenta lo expresado por Dora Calderón,[39] consideramos que estas actividades de desarrollo de una *metría y la ejecución de las correspondientes a la medición como *proceso* de medir cantidades, requieren tiempo, herramientas y aparatos; desarrollo de habilidades para manejarlos; desarrollo de lenguaje y desarrollo de conocimientos acerca de magnitudes, cantidades, sistemas numéricos y sistemas métricos, y las actividades de obtención y manejo de la medición como *resultado,* requieren habilidades de lectura, codificación y decodificación y sobre todo de interpretación y comunicación de los resultados del proceso de medición.

[39] Asesorías con Dora Calderón. 18 de agosto del 2019 Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Según Carlos Vasco,[40] desde el comienzo de una medición, así sea solo en la primera etapa de categorización o clasificación mental para organizar una escala categorial —aun antes de su nominación verbal para establecer la escala nominal— el proceso de medición no es neutral, sino que va acompañado de una valoración inicial subjetiva, emocional o afectiva de aceptación, neutralidad o rechazo por parte del sujeto; este proceso implica, pues, una cierta preferencia, indiferencia o repugnancia, atracción (apetito, gusto), dejación o repulsión (asco, náusea), que más o menos inconscientemente ordena las categorías que, aparentemente, están todavía en escala nominal y parecerían neutras. Este clima emocional resulta así en una ordenación encubierta en una escala ordinal subjetiva de menor a mayor. De hecho, en casi todos los casos concretos, el sujeto no trata las cualidades como neutras, a menos que por causalidad, esté en una posición intermedia en una escala ordinal subjetiva de menor a mayor. Esto se refleja inclusive en la palabra "cualidad", que, a diferencia del uso de esta palabra en la filosofía, está asociada con "calidad" y opuesta a "defecto", cuando filosóficamente lo cualitativo y lo cuantitativo se distinguirían precisamente por la neutralidad de las cualidades y por la ordenación de menor a mayor de las cantidades.

La escala ordinal puede llamarse cuantitativa, y aun numérica, al menos porque a las distintas cualidades en orden de preferencia se les pueden asignar los números ordinales primero, segundo, tercero, … Pero podría también llamarse "todavía cualitativa". Lo cualitativo puramente nominal puede pensarse "en frío", pero es mejor considerarlo como cuantitativo, al menos cuantificable en una escala ordinal numérica o a-numérica o pre-numérica o todavía no numérica; para los datos dados en escalas ordinales ya es posible tratarlos cuantitativamente con estadística no paramétrica.

[40] Asesorías con Carlos Vasco. 5 de mayo del 2019 Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Para esta investigación bastan las escalas nominales y ordinales y no es necesario que los datos se valoren en escalas numéricas. Más bien que hacer una medición del número de modelos mentales que ocurran o de la eficacia o claridad de su externalización o exteriorización, se trata solo de analizar las actividades de la profesora y sus alumnos que puedan clasificarse como *metrías.

Los enunciados que revelen la presencia de las *metrías, que pueden ser *grafías, *logías o grafo*logías, acompañadas o no por gestos, deben pasar del nivel *gráfico y del *lógico al nivel *métrico. Los enunciados de este tercer nivel se distinguen por las frases, términos y símbolos de magnitudes, cantidades, mediciones, medidas, ordenaciones, preferencias, intensidades, y más claramente, cuando contienen expresiones de asignación de valores numéricos (con números ordinales, naturales, enteros, racionales o reales) que el enunciador asigna a cada una de las cantidades para compararlas por medio de igualdades y desigualdades o para relacionarlas y transformarlas de distintas maneras, como sumar o restar, multiplicar o dividir, elevar a potencias o extraer raíces o logaritmos, u operar sobre ellas para transformarlas por medio de funciones u otros operadores matemáticos.

En Vasco (2007), se presenta una relación entre *logías y *metrías, a saber:

> …los aspectos lógicos son anteriores y necesarios para los aspectos métricos, pero los métricos no son necesarios para los lógicos. Más aún, el pasar demasiado pronto a los aspectos métricos puede y suele obstaculizar el desarrollo de los aspectos lógicos, de suyo, más importantes. (p. 85)

Al buscar algunas técnicas de análisis de actividades de medida, que serían en nuestro caso las *metrías, se encontró la investigación de García y Osorio (2008) sobre actividades de medida con niños y jóvenes. Reportan que ellos adoptan y relacionan diferentes modelos explicativos sobre la medida: antropocéntrico, mítico (temor a medir partes del cuerpo porque se cree que no se va a crecer más), religioso (la medida se confunde con la estafa, es símbolo de la pérdida de la felicidad, proviene directamente del pecado original), justicia, poder (como atributo de poder en todas las sociedades civilizadas, es símbolo de soberanía, de dominación), perfectibilidad (proceso racional, perfecto en su racional claridad, obra de la mente humana, libre de prejuicios y tradiciones). También se destaca en esa investigación el empleo del modelo cuantitativo más cercano a la ciencia, en donde los niños y jóvenes ven la medida como un proceso de asignación numérica. Esta investigación aportó algunos modelos mentales para identificar aquellos que emplearon alumnos y profesora para expresar sus *metrías.

Para finalizar queremos mostrar parte del análisis que hacen Lowrie, Logan y Scriven (2012), sobre el currículo matemático australiano, en concreto sobre la enseñanza de la geometría y la medición. Estos autores consideran que es imperativo que se preste la atención que merecen la medición y la geometría, señalando la falta de referencia al razonamiento visual y espacial. Consideran que se debe aprovechar el hecho de que los alumnos, citando a varios investigadores (incluido MacDonald, 2010; Bobis, Mulligan & Lowrie, 2009), han demostrado que los estudiantes comparan naturalmente la medición de los objetos con su propio cuerpo.

Por su parte Owens y Outhred (2006), consideran que la medición y la geometría ofrecen ricas oportunidades para el razonamiento visual, las representaciones de esquemas mentales y el compromiso con los objetos físicos y las representaciones. Contextualizando, dada la interconexión entre la geometría y la medición, es decir con las *metrías, su estudio, enseñanza y aprendizaje, juegan un papel importante en las clases de matemáticas, especialmente en las de Geometría Analítica. Por último, Lowrie, Logan y Scriven (2012), cuestionan tres aspectos claves sobre la enseñanza de la geometría y la medición:

1. Cuestionan si las prácticas de evaluación actuales son congruentes con la medición y la geometría.

Por otro lado, manifiestan lo siguiente:

> 2. En la amplia base bibliográfica indica que el conocimiento del contenido de los profesores es limitado (da Ponte y Chapman, 2008; Vinson, 2001; Weiss, 1995) y que muchos profesores tienen dificultades para relacionar y separar conceptos de longitud, área y volumen dentro de la medición y de contenido de geometría. (p.72).

Y 3. Consideran que el contexto de la escuela primaria como en la secundaria, girarán en torno al contenido de Números y Álgebra.

### 2.2.7.2. ¿Qué son las *nomías en la perspectiva cronotópica?

Llegamos así a la cuarta y última fase del desarrollo de un nivel científico en los modelos mentales según el Programa Cronotopía, la correspondiente a lo temporal o crónico, la Crono*nomía, y a lo espacial o tópico, la Topo*nomía. La raíz -*nomía* tiene procedencia griega, bajo la denominación νομια (*nomia*), de la raíz νομος (*nómos*), que quiere decir ley, regla o norma.[41] En el Programa Cronotopía, las *nomías[42] son enunciados en el registro de la lengua natural o técnica oral o escrita, que tienen la forma de leyes (enunciados legaliformes), que fijan reglas, postulados, axiomas o instrucciones, que comunican regularidades, procedimientos, esquemas y patrones que se espera que se repitan, mientras las demás condiciones se mantengan iguales o muy parecidas ("*caeteris paribus*"). Es una concepción estructuralista de la ciencia vemos que la interpretación de

[41] Tomado de: https://definiciona.com/nomia/

[42] Al consultar el diccionario de definiciones y etimología Definiciona.com, se encontró sobre nomía: *Definición.* Elemento compositivo. Este vocabulario se define a un sufijo de origen griego con variedad del idioma español, que puede abarcar a todas las palabras, expresiones o denominaciones relacionadas con la ley, norma, precepto o un conjunto de una normatividad aplicado en cualquier rama o disciplina. **Etimología.** Este vocablo etimológicamente es de procedencia griega bajo denominación «νομια» (nomia), de la raíz de «νομος» (nómos) que quiere decir ley o norma. Tomado de: https://definiciona.com/nomia/

las *nomías es radical, veamos el planteamiento de Mejía (2006, p. 54): En consecuencia, las leyes son regularidades verdaderas nómicamente necesarias que no se suceden accidentalmente y que además cumplen con ciertas condiciones adicionales, como por ejemplo ser "puramente generales", ser irrestrictas y no ser vacuamente verdaderas. Dudamos de la verificabilidad en cualquier contexto socio cultural de las *nomías en tanto que sea “puramente general”. Nuestro interés, desde el Programa Cronotopía, es ver qué se puede compartir transculturalmente, entre hablante y oyente, de la estructura de las *nomías. También asociamos nuestra crítica a lo “puramente general”, basándonos en la afirmación de uno de los pioneros de la concepción estructuralista, Moulines (1982):

> Debemos tener siempre presente que las teorías científicas y todo lo que va asociado a ellas constituyen entidades que existen en el tiempo histórico; no son entidades connaturales al ser humano y mucho menos entidades que lo trasciendan) sino que tuvieron un nacimiento en determinado momento histórico) se desarrollaron y cambiaron de cierta manera y eventualmente desaparecieron en otra fase histórica, al igual que lenguas, naciones, códigos jurídicos o religiones. (p.439).

Las *nomías pueden combinar *grafías, *logías y *metrías en dichos enunciados, y pueden ser complementadas por un gesto que aclare una posible ambigüedad en lo verbal oral. Así, si un alumno o un profesor expresa una ley o aplica una regla o da una instrucción de cómo hacer algo, está haciendo uso de lo *nómico con respecto a lo crónico o a lo tópico, independientemente de si coincide o no con las leyes teóricas expuestas en las teorías científicas. Piénsese, por ejemplo, en las instrucciones, reglas y prevenciones que intercambian maestros y aprendices entre sí en el trabajo diario de la culinaria, la panadería, la carpintería o la mecánica. En nuestro caso, trataremos de detectar las *nomías que se expresan en una actividad de aprendizaje de geometría analítica en el aula de clase.

En estas actividades matemáticas escolares se puede establecer que la presencia de las *nomías se ve más clara si se escriben ecuaciones o inecuaciones con signos como $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, etc., que indiquen un propósito de expresar leyes, reglas, regularidades o patrones que se repiten. Pero si la ecuación es solo una definición que sirve para sustituir un código por otro, o es un ejemplo puramente algebraico para manipular símbolos formales, o es una especie de adivinanza para averiguar el valor de una incógnita, variable o parámetro, esa ecuación puede no estar representando ninguna *nomía.

Si el alumno logra construir mentalmente y luego formular una *nomía sobre un objeto matemático con que está trabajando en ese momento en al aula (lo veremos con el objeto “elipse”), ese enunciado externaliza que está “haciendo matemáticas”, que está desarrollando pensamiento matemático sobre ese objeto matemático, que lo ha comprendido a su manera con imágenes y modelos visuales y motrices, que está manejando una métrica y operando mentalmente sobre él. Todo esto implica que construir y formular una *nomía se refiere al nivel más complejo de estas configuraciones cronotópicas teórico-prácticas en los modelos mentales, en donde se combinan muchos aspectos gráficos, lógicos y métricos.

Esta descripción noético-semiótica de “aprender haciendo” en matemáticas operando sobre objetos imaginados en modelos mentales privados expresados públicamente es un tema que genera diversas posiciones y reacciones entre los investigadores. La posición más común en Educación Matemática es que la mejor manera de aprender matemáticas es por resolución de problemas. Al respecto, Duval (2017) se formula la pregunta: ¿Qué hacemos cuando hacemos matemáticas? A lo cual responde:

> Obviamente decir "estamos resolviendo problemas" no responde la pregunta, porque esto realmente significa "resolver problemas matemáticos", ¡que son problemas matemáticos incluso si se presentan como problemas de la vida real!

> La transformación de representaciones semióticas es el proceso que encontramos en todas las formas de actividad matemática. Ya sea para explorar situaciones, resolver problemas o demostrar conjeturas, esto impulsa la actividad matemática. (p. 42)

Esta acusación de circularidad o tautología contra el enfoque de resolución de problemas despierta diversas reacciones sobre la discusión sobre qué son las matemáticas; brevemente presentamos una discusión sobre ello.

Vasco (2018), advirtió que la definición de las matemáticas en los diccionarios y enciclopedias hasta finales del siglo XIX era "el tratado de los números y las figuras (aritmética y geometría)", lo cual, hoy día, sigue siendo una concepción popular sobre qué son las matemáticas. Bastaría solo con preguntar en las calles a cualquier transeúnte qué son las matemáticas y encontraríamos muchísimas respuestas, en su mayoría asociadas al pensamiento aritmético. Muchos matemáticos del siglo XX creían que esa definición, *tratado de los números y las figuras*, era obsoleta, pues no incluye el álgebra (las álgebras real y compleja, el álgebra lineal, las álgebras de funciones, el álgebra abstracta ni la topología algebraica), ni tampoco el análisis (el análisis real, el análisis complejo, el análisis numérico discreto, el análisis funcional, etc.), ni la teoría de categorías. Inicialmente, propusieron definiciones más completas, que parecían solo alargar la lista de los números y de las figuras, y algunos expertos proponían incluso eliminar las figuras como "seudociencia euclidiana", como fue el caso de Dieudonné y otros miembros del grupo Bourbaki que decretaron "la muerte a Euclides". Este proceso conllevó a la concepción muy en boga por los años 60 a 2000 sobre la "Nueva Matemática" o las "Matemáticas modernas" o la "Arquitectura Bourbakista de las Matemáticas".

René Thom (1980, p.25) advierte sobre la propuesta bourbakista de la unificación de las matemáticas lo siguiente: “La vieja esperanza bourbakiana de ver las estructuras matemáticas salir de forma natural de la jerarquía de los conjuntos, de sus subconjuntos: y de sus combinaciones, es quizá solo una quimera”. Por ello, Thom se pregunta si las Matemáticas modernas son un error pedagógico o filosófico. Esto, debido al tipo de sujeto (alumno) que contemplaba esta propuesta de las Matemáticas modernas y que Radford (2018, p.216) plantea de la manera siguiente: “Un sujeto intrínsecamente racional, autosostenido, que madura a medida que interpreta y refina la retroalimentación que se supone ser éticamente neutral del medioambiente”.

Tal vez donde se encuentra la más fuerte de las críticas a las Matemáticas modernas es en el libro de Morris Kline (1998), el cual tituló: *El fracaso de las matemáticas modernas. Por qué Juanito no aprendió a sumar.*[43] En este libro, Kline hace un completo análisis de las matemáticas modernas: sus orígenes, su lenguaje, su método, etc. Llama la atención sobre el enfoque de este tipo de matemáticas sobre sí misma, es decir, el objeto de aprendizaje era ellas mismas de manera atemporal, sin contexto, lo que hoy día se sigue dado en muchas Instituciones Educativas y que genera poco interés y mucha frustración tanto en alumnos como padres de familia. Basta con ver la muestra que hace Kline de las matemáticas modernas con una clase de una profesora hacia sus alumnos, (p.4-7).

A partir de la década del 80 hubo un movimiento internacional que pretendió establecer las matemáticas como “la ciencia de los patrones” (“Science of Patterns”). Devlin (2012) planteó lo siguiente:

> The dramatic growth in mathematics led in the 1980s to the emergence of a new definition of mathematics as the science of patterns. According to this

[43] Entre la gran cantidad de autores que también criticaron o se opusieron a la Matemática moderna, queremos destacar a Freudenthal (1979), Barrantes y Ruiz (2013) y Valero (2017).

> description, the mathematician identifies and analyzes abstract patterns—numerical patterns, patterns of shape, patterns of motion, patterns of behavior, voting patterns in a population, patterns of repeating chance events, and so on. Those patterns can be either real or imagined, visual or mental, static or dynamic, qualitative or quantitative, utilitarian or recreational. They can arise from the world around us, from the pursuit of science, or from the inner workings of the human mind. Different kinds of patterns give rise to different branches of mathematics. For example:
>
> - Arithmetic and number theory study the patterns of number and counting.
> - Geometry studies the patterns of shape.
> - Calculus allows us to handle patterns of motion.
> - Logic studies patterns of reasoning.
> - Probability theory deals with patterns of chance.
> - Topology studies patterns of closeness and position.
> - Fractal geometry studies the self-similarity found in the natural world. (p. 14)

En este mismo sentido se pronunciaron algunos autores como Sawyer (1955), Steen (1988), Fleron, Hotchkiss, Ecke, y von Renesse (2013), considerando a las matemáticas como una “ciencia de los patrones”. Aunque es claro que las matemáticas se refieren a la detección, formulación y operacionalización de patrones, esto parece aplicarse igualmente bien a cualquiera de las ciencias naturales actuales, como la física, la química, la biología y las neurociencias. Habría que tratar de precisar lo característico del punto de vista matemático en esa relación del investigador matemático con los patrones.

Ya vimos arriba una pista propuesta por Duval (2017, p. 42). Para él, “la transformación de representaciones semióticas es el proceso que encontramos en todas las formas de actividad matemática.” Si además de las transformaciones semióticas incluimos la producción de representaciones semióticas por parte del agente noético-semiótico que se propone “hacer matemáticas” y pretende expresar a otros sujetos sus modelos mentales, sus componentes, las relaciones de su estructura y las transformaciones de su dinámica; sus distintas formas de comunicación con otros sujetos a través de distintos registros semióticos, y su interpretación de las producciones de esos otros sujetos, tendríamos una más fina caracterización del quehacer matemático que solo “la ciencia de los patrones” o solo “las transformaciones semióticas”.

Hoy día, nuestros currículos y formas de enseñar las matemáticas tienen herencias epistemológicas de estas distintas concepciones sobre lo que entendemos por matemáticas, por hacer matemáticas y por enseñar matemáticas. A nuestro parecer, una forma de comprender qué son las matemáticas y cuándo un alumno hace matemáticas en el aula de clases, puede verse representada por las mencionadas actividades de producción, transformación e interpretación de representaciones semióticas del cronotopo y de los modelos mentales que en él surgen. Estas actividades semióticas y las correspondientes interpretativas se encuentran articuladas a las subdisciplinas del Programa Cronotopía en las formas que a continuación se describen.

## 2.8. Las ocho subdisciplinas del Programa Cronotopía

Después de establecer las cuatro actividades semióticas precientíficas (las dos *grafías y las dos *logías) y las cuatro científicas (las dos *metrías y las dos *nomías) de los procesos de manejo interno de los modelos mentales [cronotópicos] que parecen surgir en el trasfondo del cronotopo privado de cada sujeto y de los procesos de expresión o externalización pública de dichos modelos y del cronotopo subyacente, emergen claramente de esas actividades semióticas sistematizadas y formuladas más precisamente las ocho subdisciplinas del Programa Cronotopía.

Vasco (2015a) explica la necesidad de precisar que el hablante intenta formular sus teorías en un lenguaje articulado, discretizado en letras, sílabas, palabras y sartas textuales, mientras que a la vez intenta expresar sus modelos mentales con lenguajes análogos, gestuales e icónicos. Por ello, fue necesario separar las *grafías de las *logías que representaran lo tópico y también fue necesario separar las *grafías de las *logías que representarán lo crónico, de tal manera que en estas dos actividades semióticas precientíficas las *logías se entrelacen con las primeras, las *grafías, para acumular logo*grafías y grafo*logías.

Así, las cuatro primeras actividades semióticas de acumulación de discursos, textos, dibujos, gráficos y diagramas sobre lo temporal o crónico y sobre lo espacial o tópico irían enriqueciendo y consolidando durante muchos siglos la Cronografía y la Cronología, la Topografía y la Topología, en las que ya podemos eliminar los asteriscos que llamaban la atención a la forma peculiar de entender estas disciplinas en el Programa Cronotopía.

Además, desde hace cuatro mil años se sumaron a estas disciplinas otros cuatro procesos que consideramos ya científicos, los dos primeros referidos al establecimiento de metrías como medidas, instrumentos y patrones de medida, unidades de medición de distintos sistemas métricos, que dieron lugar a la Cronometría y la Topometría, y luego los otros dos procesos que tratan de la producción, expresión, comprobación e invención de regularidades, leyes, reglas u otros enunciados de tipo nomotético, las nomías, mediante el uso de las grafías, logías y metrías, los cuales dieron lugar a la Crononomía y la Toponomía.

Podemos seguir claramente el desarrollo y consolidación de esas ocho disciplinas de la Cronotopía en la historia de Astronomía antigua, que comienza hace seis mil años con la Astrografía y la Astrología, las cuales se van consolidando a lo largo de unos dos mil años. Luego, durante otros dos mil años en la China y la India, y en especial en

Mesopotamia y Egipto, los astrólogos desarrollaron una Astrometría muy precisa en numeración sexadecimal, con la cual se fue formulando la Astronomía antigua con una perfección que aun hoy nos parece sorprendente en episodios como la conformación de los distintos calendarios de las culturas antiguas, que culminaron con el calendario juliano en Egipto hace dos mil años que se atribuye a Sosígenes. La sucesión de los equinoccios previstos por ese calendario —sin haberse inventado todavía el telescopio— se adelantó solo 15 días en los 1500 años siguientes.

En un ejercicio de escribir ecuaciones simbólicas, podríamos resumir las relaciones entre las ocho subdisciplinas no excluyentes del Programa Cronotopía en la siguiente forma:

**Cronotopía = (Cronografía + Cronología + Cronometría + Crononomía) +**

**(Topografía + Topología + Topometría + Toponomía).**

El Programa Cronotopía convoca elementos de orden semiótico que favorezcan la comprensión de los procesos intelectuales en la actividad matemática para complementarse con una propuesta semiótica que articule la propuesta ontológica de la Teoría General de Procesos y Sistemas TGPS y la propuesta epistemológica y metodológica de la Teoría General de Modelos y Teorías TGMT.

## 2.3. Semiótica de representaciones e interpretaciones en las matemáticas

Según Vasco (2017), actualmente la didáctica de las matemáticas cuenta con al menos cuatro programas de investigación bien consolidados que han adoptado el punto de vista semiótico: el enfoque Onto-Semiótico EOS de Godino, Batanero y Font (2007, 2017); el

Enfoque Semiótico-Cultural ESC de Radford (2006a, 2006b), el Enfoque de Juegos Semióticos de Interpretación EJSI de Adalira Sáenz, inspirado en Charles Sanders Peirce, que se puede evidenciar en Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow, Molina (2016), Duval y Saénz-Ludlow (2016); y el Enfoque Noético-Semiótico ENS de Duval (1993, 1999, 2006, 2017), quien sigue a Émile Benveniste, desde el punto de vista del lenguaje. Después de estudiarlos y de buscar y analizar algunas investigaciones en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría desde estas orientaciones, en esta investigación se hizo necesario centranos en el Enfoque Noético-Semiótico ENS, dado el interés que se tiene por establecer las formas de expresión, externalización o exteriorización pública de los modelos mentales [cronotópicos] privados de profesores y alumnos, y por la exploración e investigación de los procesos de aprendizaje vinculados a la comprensión de las matemáticas por parte de los alumnos como actividad semiótica sobre representaciones privadas imaginativas privadas y sobre representaciones públicas habladas, escritas, dibujadas y gesticuladas. Así, el Enfoque Noético-Semiótico de Duval —ENS— se convierte en la tercera punta de nuestro Ψridente Teórico.

La propuesta de Duval sobre Semiosis y Noesis (1992, 1995/1999, 2006, 2017) aporta valiosos elementos para la explicación de procesos implicados en la expresión e interpretación de modelos mentales cronotópicos. Consideramos que son tres los elementos teóricos de Duval que más contribuyen en ello:

1. La relación entre objeto matemático y sus representaciones
2. Los conceptos de semiosis, noesis, su relación y el agente noético-semiótico
3. Los conceptos de registros y representaciones semióticas.

A continuación, se presentan los aspectos relacionados con cada uno de los tres elementos que se incorporan a la base teórica para esta investigación.

### 2.3.1. Objeto matemático y sus representaciones

Duval (1993) advierte el problema de confundir el objeto matemático con una de sus representaciones. Por ejemplo, confundir el objeto matemático *función* con una representación como $y = f(x)$, o, como ocurre con frecuencia entre los alumnos, con la gráfica cartesiana de la función en el plano. Este autor llama la atención sobre las dificultades y ambigüedades del uso de la palabra *representación*, y más aún del verbo *representar*. Los objetos matemáticos no deben ser transpuestos por sus representaciones ni confundidos con ellas, debido a los obstáculos que ello genera hacia el futuro en el aprendizaje de las matemáticas, aunque no haya otra manera de acceder a esos objetos sino por esas transposiciones.

Dada la importancia del concepto de representación, Duval (2016) precisa así ese concepto:

> Esta noción básica de representación es muy antigua y precisa. Una representación es algo que se pone en lugar de otro algo. Pero al mismo tiempo esta noción puede ser elusiva o demasiado formal. ¿Cuál es la naturaleza de este "algo que se pone en lugar de…"? Se puede tener un abanico amplio de respuestas, dependiendo de si se consideran las representaciones con respecto a un individuo concreto y sus experiencias, a las estructuras mentales o, por el contrario, a los objetos de conocimiento con sus requisitos epistemológicos específicos (Hitt, 2002). Así, las representaciones pueden ser creencias, concepciones o concepciones erróneas individuales a las que cada quien accede a través de sus producciones verbales o esquemáticas. Esta respuesta, desarrollada inicialmente en dos estudios importantes de Piaget (1923, 1926), es ahora uno de los marcos metodológicos y teóricos más importantes para investigar y explicar la adquisición del conocimiento matemático. (p. 61)

Duval (ibid, p. 39) advierte que las representaciones no son solo para fines de comunicación; ellas también son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento o noesis.

Profesor y alumno debieran tomar consciencia sobre las diferencias y las relaciones que hay entre objeto matemático y todas y cada una de sus representaciones; este es un punto clave para la comprensión de las matemáticas en general. No es fácil el acto de "tomar consciencia" de esas relaciones, más aún, cuando Piaget (1967) considera que las representaciones son solamente los resultados superficiales del funcionamiento de estructuras mentales profundas, que no dependen de la conciencia explícita de los individuos sobre lo que está realmente ocurriendo.

Al contextualizar este tema con el fin de refinar nuestros métodos de análisis de los datos en esta investigación, se trataría de que, a pesar de que no haya otras vías de acceso al objeto matemático, no confundamos el objeto matemático mismo con ninguna de sus *logías, *grafías, *metrías o *nomías. Por ejemplo, en el caso de las *grafías, toda aquella marca que deje huella y pueda ser analizada posteriormente para representar la función, como una fórmula o una gráfica cartesiana, de entrada, podemos decir que *no es* la función, sino una de las *grafías que representan el objeto matemático que llamamos "la función".

Esta cautela recomendada por Duval tiene una consecuencia para los matemáticos que tienen una concepción formalista de su disciplina, pues ninguna definición, por rica, precisa, apropiada y bien formulada que parezca, puede tomarse por el objeto matemático que pretende definir, pues no es sino una más de las múltiples *logías que lo representan.

Duval (2004) afirma reiterativamente que a los objetos matemáticos no podemos acceder directamente por medio de la percepción o de una experiencia intuitiva inmediata, sino que tenemos que recurrir no solo a una sino a diversas representaciones semióticas del objeto. La pregunta clave de Duval es contundente: si solo tenemos una sola representación semiótica del objeto matemático, ¿cómo podríamos distinguir el objeto y la representación?

Esto quiere decir que en las clases de matemáticas el profesor no debería intentar "enseñar" el objeto matemático recurriendo a una sola definición, o a una sola presentación gráfica o computacional, por apropiada que la considere, sino utilizando siempre varias de sus representaciones, ojalá de distintas modalidades y producidas por distintos registros semióticos.

Por su parte, Duval (2016) considera que las representaciones semióticas tienen un rol primordial en todas las ciencias, y más aún en matemáticas, pues en ella existe la difícil situación de que ninguno de los objetos matemáticos abstractos puede ser construido sino a partir de distintas representaciones semióticas, pero no puede confundirse con ninguna de ellas. Si los profesores de otras ciencias creen que al menos algunos de los objetos de su ciencia se pueden enseñar directamente o mostrarlos o señalarlos en la realidad cotidiana, Duval insiste en que, al menos en matemáticas, las representaciones semióticas constituyen el único medio de acceso a los objetos matemáticos. En la terminología introducida por el Enfoque Onto-Semiótico EOS de la dualidad entre objetos ostensibles y no-ostensibles, habría que decir que ningún objeto matemático es ostensible, y que, dado cualquier objeto ostensible, por eso mismo ya se sabe que no es un objeto matemático sino una representación semiótica de alguno de ellos. Godino, Gonzato, Cajaraville, Fernández (2012), plantean los conceptos de ostensible y no ostensible de la siguiente manera:

> … expresión ostensiva (lenguajes analíticos o secuenciales), y sobre todo, su relación con los objetos matemáticos no ostensivos (sean considerados como mentales, formales, o ideales).

Duval (2016) plantea sus respuestas a dos preguntas difíciles sobre las representaciones semióticas: ¿Cómo sé si son dos instancias de la misma representación o si se trata de dos representaciones diferentes? y ¿Si son dos diferentes, de dónde proviene esa diferencia?

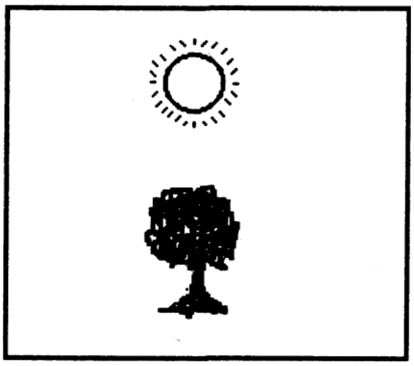
En su primera respuesta introduce indirectamente dos conceptos: el concepto de *contenido* de una representación y el de *unidades (significativas)* de una representación.

Sobre el contenido de una representación Duval (2016) no presenta una definición, pero si da a entrever algunas de sus características, como, por ejemplo, que puede ser percibido, imaginado o ya representado. Por otra parte, él mismo plantea que la comprensión de una representación en un registro determinado parece implicar directamente la comprensión del contenido conceptual representado, sobre todo cuando el registro de representación es la lengua natural (Ibid, p. 609).

En la misma obra sobre las unidades plantea lo siguiente:

> Las reglas de conformidad son las que definen un sistema de representación y, en consecuencia, los tipos de unidades constitutivas de todas las representaciones posibles en un registro. Estas se refieren esencialmente a:
> - la determinación (estrictamente limitada, o al contrario, abierta) de unidades elementales (funcionalmente homogéneas o heterogéneas...): símbolos, vocabulario...
> - las combinaciones admisibles de unidades elementales para formar unidades de nivel superior: reglas de formación de un sistema formal, gramática de las lenguas naturales...
> - las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa: reglas canónicas propias a un género literario o a un tipo de producción en un registro. (Ibid, p.41-42)

Un ejemplo de unidades sería el que Duval presenta con una imagen:



> Esta imagen tiene cuatro unidades: las dos formas dibujadas y sus respectivas posiciones sobre el eje vertical (p.49).

Y sobre las reglas de conformidad Duval aclara:

> Las reglas de conformidad permiten identificar un conjunto de elementos físicos o de trazos (sonidos, posiciones opuestas de un circuito, caracteres, rayas...) como una representación de alguna cosa en un sistema semiótico: es un enunciado en alemán, es un cálculo, es una fórmula de física, es una figura de geometría, es una caricatura, es el esquema de un circuito eléctrico... (p.42).

En la segunda respuesta presenta un concepto muy potente para la formulación de la teoría de las representaciones semióticas, el concepto de *registro* semiótico o sistema productor de representaciones:

> 1. Dos representaciones son diferentes cuando sus contenidos son de naturaleza diferente, es decir, no presentan el mismo tipo de unidades (palabras, contornos, densidad de puntos, flechas…), aunque representen el mismo objeto.
>
> 2. Existen tantos tipos de representación diferentes como medios o sistemas para producir una representación: aparatos físicos, sistemas semióticos. No es posible clasificar, ni analizar las representaciones sin referirse a los diferentes sistemas que permiten construirlas. Eso quiere decir que las representaciones no dependen en primer lugar de los individuos sino de los sistemas productores de representaciones. (p. 65)

A partir de lo anterior, Duval exhorta a docentes e investigadores a prestar atención a que los procesos cognitivos propios o de sus alumnos que les permiten reconocer un mismo objeto en dos representaciones diferentes A y B no pueden ser los mismos en las dos situaciones, porque subsistiría la pregunta de cómo distinguir el objeto de cada una de las representaciones, y la de cómo saber que las dos representan el mismo objeto y no cada una un objeto diferente, lo cual el mismo Duval representa, mediante la figura 6, de la siguiente manera:

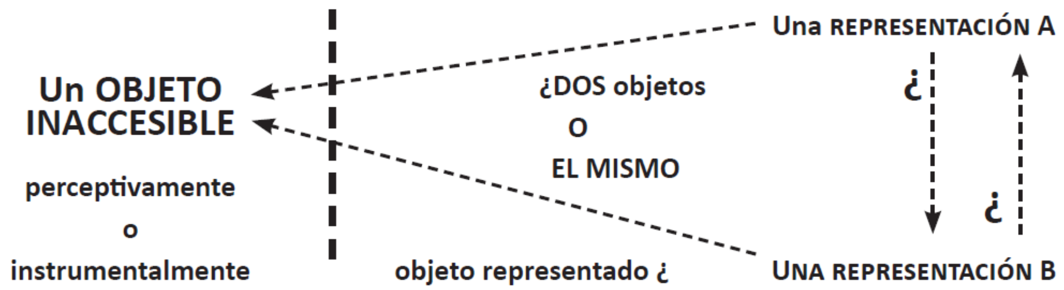


Figura 6. Representación del esquema de un objeto inaccesible. Este esquema fue titulado en Duval (2016, p. 68): ¿Qué reconocimiento en situación de inaccesibilidad no semiótica?

Fuente: Duval (2016, p. 68)

Luego, Duval (2016, p.69) precisa que el papel de las representaciones semióticas no se reduce a designar objetos, a ponerse en lugar de algo, o a ser ellas mismas consideradas como objetos. Su uso está determinado por las posibilidades de procesamiento matemático que permiten y esas posibilidades están determinadas a su vez por el sistema productivo o registro que las produce.

Por lo anterior, esta compleja relación entre un objeto matemático, sus representaciones semióticas y los registros semióticos que las producen nos obliga a seguir precisando e interpretando cada vez más detalladamente el papel que juegan los distintos tipos de representaciones que hemos llamado *grafías, *logías, *metrías y *nomías, así como los gestos que puedan acompañarlas sin dejar huella; la naturaleza y el funcionamiento de los distintos registros semióticos que pueden producirlas, y las funciones que puedan cumplir como formas de expresión o externalización de las imágenes y modelos mentales [cronotópicos] y del cronotopo mismo privado del sujeto.

El mismo Duval (2016) hace una observación profunda sobre el uso a la vez multi-representación y multi-registro de diversas representaciones semióticas de un mismo objeto, pues toda representación contrae y amalgama dos dimensiones semánticas que podrían dificultar la comprensión del objeto matemático: la del *contenido*, que representa solo parcialmente algunos aspectos del objeto, y la del *objeto*, del que cada representación solo puede representar algunos aspectos. Toda representación abstrae o selecciona algo del objeto que se va a representar y descarta otros aspectos, asume y resalta ciertas características y no hace énfasis en otras. Esta observación tiene serias consecuencias en nuestro caso, pues una *grafía representa visualmente algunas características del objeto matemático, pero ellas no podrían ser percibidas por una persona ciega, o podrían ser percibidas de manera diferente por alumnos de distintas edades y proveniencias culturales o con problemas de miopía o daltonismo. De forma equivalente, sucedería algo parecido con las *logías sobre un objeto matemático: la *logía lo representaría parcialmente en su descripción lingüística, pero aun ese contenido parcial sería inaccesible para una persona sorda, o para algunos alumnos que no dominen el idioma que está usando el profesor. Se aclara que una cosa es que cada representación representa solo algunos aspectos del objeto y que no pueda confundirse con el objeto mismo, lo que es un problema epistemológico y epistémico. Y otra cosa es la accesibilidad a la representación por la forma misma de la representación o por el registro que la manifiesta; este sería un problema semiótico y comunicativo[44].

### 2.3.2. Procesos cognitivos y procesos representacionales en el funcionamiento de los modelos mentales

Los procesos cognitivos y los procesos representacionales en el funcionamiento de los modelos mentales pueden ser estudiados desde las categorías semiosis y noesis del Enfoque Noético-Semiótico. Duval (1993, 1999, 2006) considera que la semiosis y la noesis son dos procesos fundamentales que nos hacen humanos y que nos permiten actuar guiados por el pensamiento y la comunicación; es decir, como agentes noético-semióticos. Por ejemplo, Duval (1993) parte de un enunciado condicional:

> Si llamamos semiosis al proceso de pensamiento que nos permite la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y noesis al proceso de aprehensión conceptual de un objeto matemático, es necesario afirmar que la noesis es inseparable de la semiosis. (p. 39-40)

[44] Asesorías con Dora Calderón. 16 de abril del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Según Duval (1993, 1999) para acceder a la compresión de un objeto matemático es necesario hacerlo dentro de un sistema simbólico. Sin embargo, Duval (2016) precisa lo siguiente:

> Esta diferencia funcional entre los varios sistemas de representación semiótica usados en matemáticas es esencial porque está intrínsecamente conectada con la manera en que los procesos matemáticos transcurren: dentro de un sistema semiótico monofuncional, la mayoría de los procesos toman la forma de algoritmos, en tanto que dentro de un sistema semiótico multifuncional los procesos nunca se pueden convertir en algoritmos. Por ejemplo, en geometría elemental no hay algoritmo para utilizar figuras de una manera heurística (Duval, 1995b) y la manera como transcurre una prueba matemática en lenguaje natural no se puede formalizar sino usando sistemas simbólicos. La mayoría de los alumnos no entiende las pruebas que usan lenguaje natural (Duval, 1991). (p.70)

Los agentes son pues los sujetos que realizan procesos semióticos y noéticos entrelazados de aprehensión y producción de representaciones semióticas, a la vez que tratan de aprehender el objeto representado por las representaciones semióticas que perciben y de volver a representarlo para sí mismos y para los demás.

Con relación al Programa Cronotopía y a la Teoría de Modelos y Teorías de Vasco, podríamos decir que este enfoque noético-semiótico de Duval (1999/1995, 2004, 2017) puede reinterpretarse en la terminología de esta tesis así: que en un episodio de intercambios semióticos entre profesores y alumnos sobre objetos geométricos, las noesis les permiten a los agentes noético-semióticos generar modelos e imágenes mentales y físicas de objetos de pensamiento ya conocidos y de otros objetos nuevos que otros agentes, profesores o compañeros, quieren presentarles a través de esas representaciones semióticas aprehendidas y examinadas en las semiosis interpretativas, e inmediatamente, a través de las semiosis expresivas, les permiten formular teorías oralmente y por escrito por medio de múltiples *logías sobre esos objetos y sus relaciones y transformaciones. Razonar consciente y controladamente con esos modelos y teorías, y seguidamente, reiniciar semiosis interpretativas que les permiten aprehender los objetos matemáticos representados por representaciones diferentes, y empezar a generar posibles maneras de representar interna y externamente esos objetos en imágenes y modelos públicos a través de señales, signos, símbolos, gestos, íconos, dibujos, gráficos, esquemas y diagramas (*grafías), palabras, frases y enunciados (*logías), que vuelven a emitir hacia los agentes noético-semióticos presentes a través de distintos registros semióticos como sistemas productores de esas representaciones semióticas.

Las personas presentes activamente en ese intercambio de representaciones semióticas, a través de las noesis como procesos de pensamiento o procesos cognitivos subjetivos, son agentes noéticos y a la vez semióticos que pueden interpretar y expresar representaciones internas de procesos y subprocesos por medio de modelos mentales en los que ubican los objetos antiguos y nuevos que aprehenden a partir de las interpretaciones que examinan a través de procesos cognitivos conscientes de aprehender, interpretar y volver a representar el objeto matemático; todo esto como una sucesión de actos conscientes de querer aprehender, comprender y volver a representar los objetos matemáticos de que se trata en el intercambio. Duval considera que las noesis como procesos de pensamiento o procesos cognitivos del sujeto no pueden darse por fuera del trabajo de interpretar, aprehender e intentar expresar representaciones semióticas: “No existe noesis sin semiosis”, Duval (1993, p.40).

Para Duval (2017), en el *acto de pensar* (noesis) están involucradas tres funciones cognitivas que se describen a continuación:

1. *La producción de representaciones*, que son representación de algo, porque el pensamiento siempre implica pensar en algo mediante algo (en este caso, la representación).

2. Esta producción es primero *una objetivación*. La producción de representación semiótica precede de alguna manera al pensamiento de los objetos que se representan. Esto es evidente con el uso del lenguaje natural. La práctica de un discurso privado, un discurso

> para uno mismo, y la escucha íntima y empática de su eco, es crucial para el desarrollo individual y en el aprendizaje. Pero, también funciona a través de la producción de dibujos, diagramas o gráficos.
>
> 3. *La transformación de las representaciones* ya sea por conversión o por tratamiento. La producción de representaciones semióticas en el pensamiento "intelectual", y más específicamente en el pensamiento matemático, es más que un proceso de asociación de diversas representaciones relacionadas con la primera producida por uno mismo. La producción de nuevas representaciones depende únicamente del cambio de registro y de la operación de sustitución específica del registro seleccionado. Así, los tratamientos son los procesos que generan nuevas representaciones en el mismo registro por una operación específica de sustitución. (p. 70)

En términos de la noesis y la semiosis, los dos tipos de transformación de las representaciones semióticas, el tratamiento y la conversión, son los dos procesos fundamentales de trabajo noético-semiótico con y sobre las representaciones semióticas. Estos dos tipos de transformación se explican a continuación.

### 2.3.3. El agente noético-semiótico: alumnos y la profesora

Teniendo en cuenta a Duval (1993), un agente noético-semiótico, en nuestro caso, es cada una de las personas que participan en el desarrollo de una clase de matemáticas, como alumno, como profesor o como observador, que está tratando de aprehender conceptualmente un objeto matemático (está produciendo *noesis*), pero solo puede hacer esos intentos tratando de aprehender una representación semiótica de ese objeto (produciendo *semiosis*, en este caso interpretativas), y, a su vez, es capaz de producir otras representaciones semióticas de dicho objeto (produciendo *semiosis* expresivas). Queremos también tener en cuenta a Vasco (2014, 2015) para presentar lo que entendemos por agente noético-semiótico. En primera instancia, Vasco (2014) lo concibe de la siguiente manera:

> Al hablar de «agente noético-semiótico» estoy enfatizando la acción o actividad del agente humano, y entiendo tanto la noesis como la semiosis como tipos de actividad mental que involucran todo el cuerpo del agente, aunque la atribuyamos principalmente al sistema nervioso central. Eso ya es un recorte de nuestro modelo mental del ser humano. En algunos modelos de otras culturas, esos tipos de actividad se han atribuido al corazón, o a las entrañas, y en otros, a un alma o espíritu que habitaría el cuerpo humano, (p.41-42).

Posteriormente Vasco (2015b) plantea lo siguiente:

> Con Raymond Duval, llamo al agente pensante “agente noético-semiótico”. Lo llamo “agente”, o “actor” (sin connotaciones de teatro), "actuante" o “actante”, porque está actuando, obrando, haciendo algo, al menos patalear para no ahogarse en el río de Heráclito. Al agente lo llamo “noético”, porque le atribuyo una actividad mental, la “noesis” (de “nous”, “la mente”), lo que remite al pensamiento. Lo llamo “semiótico”, porque percibo que gesticula, emite sonidos y expresiones faciales y parece esperar otras de nosotros, actividad que llamamos “semiosis” (de “semeion”, el signo, la señal, el símbolo), lo que remite a la representación y la expresión, a la escucha y la interpretación. El producto de la actividad sensorio-motriz, cognitivo-afectiva, socio-histórico-cultural o noético-semiótica del agente –o como quiera llamarse, pues es todo eso y probablemente más– es un sistema mental que –con las teorías que eventualmente lo acompañen y limiten– intenta modelar el subproceso recortado de lo real por ese agente, seleccionado por su atención y valorado como atractivo o repulsivo, amistoso o amenazante, placentero o doloroso. (p. 8-9).

Por la anterior se asume el agente noético-semiótico como el que experimenta o realiza la acción o actividad del agente humano, que hace, que actúa y que espera comunicación con los de su misma especie o contexto cultural, por ejemplo, en una clase de matemáticas si la profesora hace una *grafía de un objeto matemático ella espera que sea compartida socialmente con sus alumnos o por lo menos la lleguen a comprender. En esta investigación el agente noético-semiótico corresponde a la profesora o a los alumnos de las clases observadas donde cada uno de ellos piensa y tiene formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos] cuando en conjunto resuelven actividades de Geometría Analítica.

### 2.3.4. Registros y representaciones semióticas en el funcionamiento de los modelos mentales

Para Duval (2016) la comprensión en matemáticas supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica. En esta investigación nos interesaron fundamentalmente las representaciones semióticas externas y en particular aquellas que puedan develar el cronotopo de alumnos y profesor cuando en conjunto resuelvan actividades de Geometría Analítica. Por ello se puso la lupa, por ejemplo, en cada una de las *logías, *grafías, *metrías y *nomías que se detectaron en las 14 sesiones de clases que fueron registradas audiovisualmente.

Duval (2016) clasifica los registros que se pueden movilizar en procesos matemáticos y los representa en el siguiente esquema, ver figura 8.

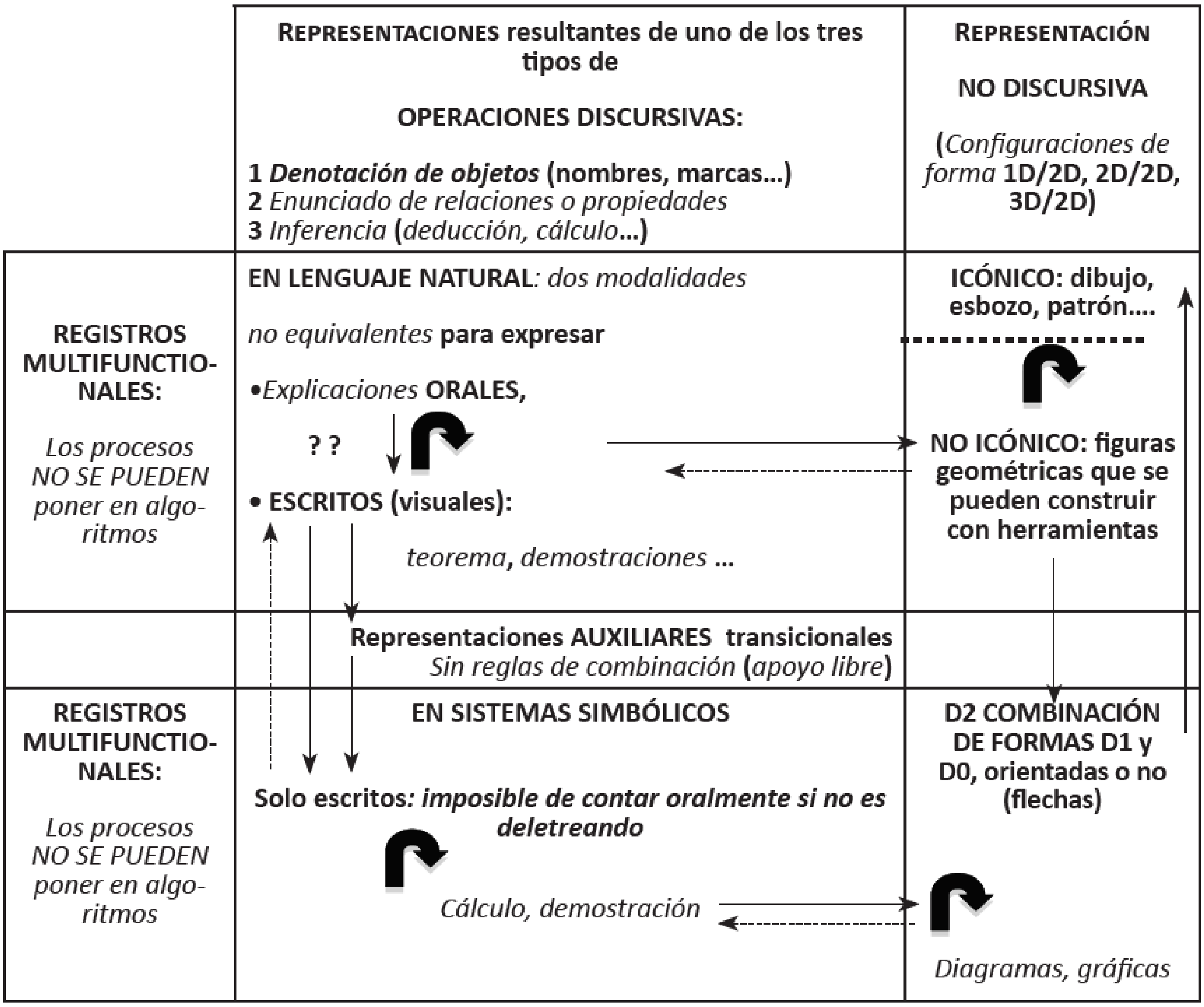



Figura 7. Clasificación de los registros que se pueden movilizar en procesos matemáticos. Tomado de Duval (2016, p.71)

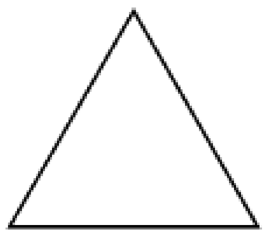
Al contextualizar el esquema anterior a nuestros intereses teóricos, se puede concluir que:

1. Las *logías estarían representadas por medio del lenguaje natural, oral y escrito (visuales o imposibles de contar oralmente).
2. Muchas *grafías hacen parte de un sistema semiótico multifuncional, pues muchas de ellas no se pueden poner en algoritmos.

3. Las *metrías y las *nomías pueden ser parte de un sistema semiótico monofuncional, pues su característica principal es que si se pueden poner en algoritmos.

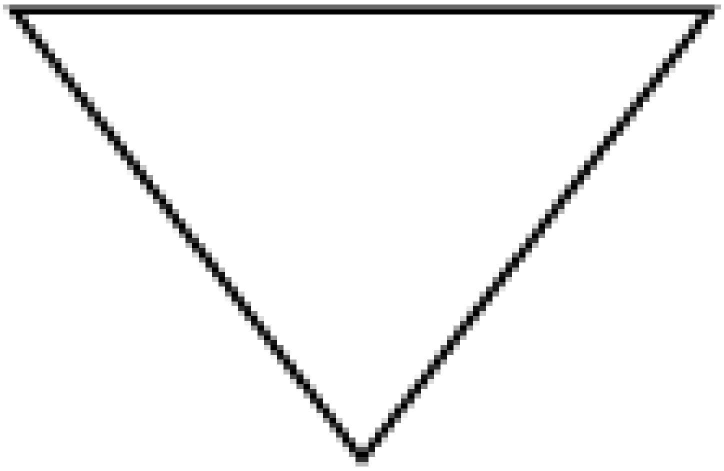
A diferencia de los objetos matemáticos en comparación con objetos de la química, la biología, la física, etc., estos últimos pueden ser manipulables (una polea, un insecto, etc.), mientras que un triángulo no puede ser tangible, es decir no es accesible, incluso a pesar de verlo dibujado en una hoja de papel. Al triángulo solo podemos acceder por medio de sus representaciones semióticas, de sus *logías, *grafías o *nomías. Este ejemplo implícitamente incluye un nuevo concepto, se trata del tipo de registro de representación que se puede emplear, lo que precisa más aún la relación entre objeto matemático y su representación.

Los registros semióticos producen distintas representaciones; cada tipo de representación corresponde al registro con el que se produjo, mientras que el agente noético-semiótico es quien emplea el registro. Cada vez que aparezcan dichas representaciones será una forma diferente de interpretar el objeto matemático por parte del agente noético-semiótico; por ejemplo, cada vez que aparezca en clase de matemáticas una nueva *grafía, involucra una noesis en los agentes. Una mínima diferencia entre las representaciones dentro de un mismo registro puede conllevar a una interpretación diferente del objeto matemático. Por ejemplo, cada representación del registro figural del triángulo mostrará una característica del triángulo que puede conllevar a diversas noesis, por ejemplo, un registro semiótico que produzca una representación figural del triángulo equilátero que emplee una representación semiótica como:

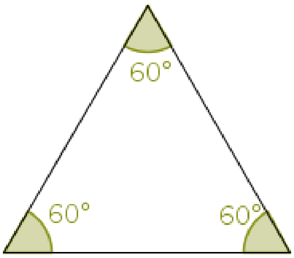


Es diferente a la representación semiótica:

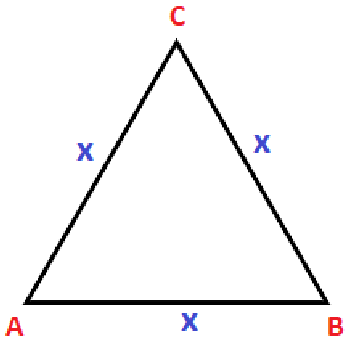
Como también es diferente a la representación semiótica:



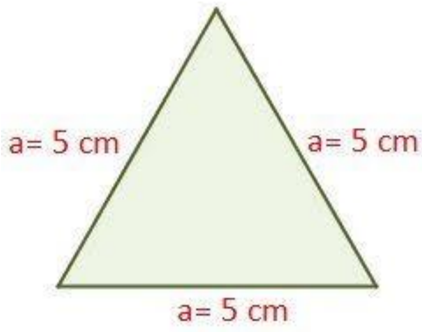
Como también es diferente a la representación semiótica:



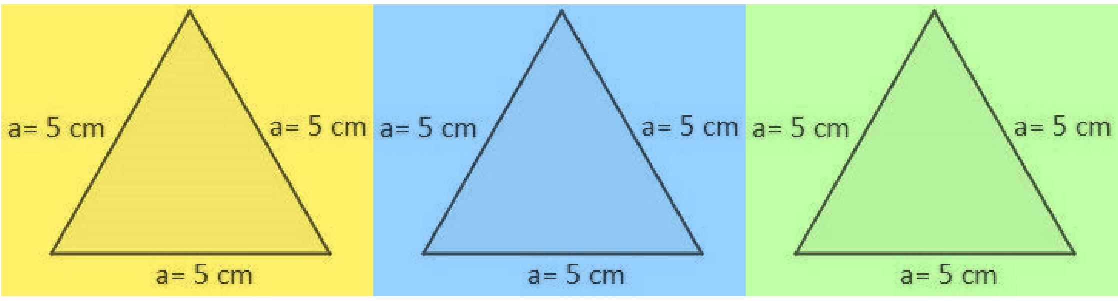

Como también lo es a la representación semiótica:



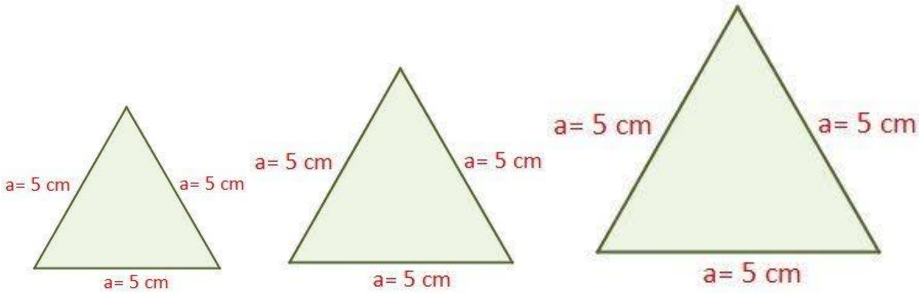

Como también lo es a la representación semiótica:




Basta que el profesor cambie el color para que la representación cambie:




O si se presenta:




Todas las representaciones semióticas del equilátero anteriores son diferentes entre sí porque, como lo plantea Duval (2016, p. 65), sus contenidos son de naturaleza diferente: la altura, la extensión de la superficie, la "base", la presencia de medidas de los lados o su ausencia, la representación de los vértices por las letras A, B, C; el color, la secuencia y organización individual o en conjunto de tres triángulos, incluso, ante la mirada de una comunidad indígena dicha representación del triángulo equilátero podría representar algo diferente alojado en su cosmogonía. Las representaciones anteriores son isomorfas respecto a la forma del triángulo equilátero, pues el tratamiento de ampliación, de reducción, de posición, de cambio de colores, asignación de *metrías a sus lados, muestra que representan el mismo objeto matemático *triángulo equilátero*. Cada una de esas representaciones semióticas podría llevar al alumno a producir diversas *grafías e incluso *nomías sobre el triángulo.

El mono-registro es altamente riesgoso; es decir, el empleo de un solo registro en una representación semiótica. Por ello Duval (2004) hace la advertencia de que las representaciones mentales, que son modelos mentales, también son representaciones semióticas y estas tienen una íntima relación con la percepción de la realidad del agente noético-semiótico. Estas representaciones incluyen las creencias, los conceptos, las fantasías, sus miedos, sus nociones, etc. Y para comprender mejor esas representaciones, es preferible que los agentes las produzcan por dos o tres registros diferentes y no en uno solo.

Si cambia el registro semiótico tendrá cambios la representación semiótica, pero el mismo Duval (2006) advierte que, si se produce un cambio de representación semiótica, no necesariamente cambia el registro semiótico. En esto consiste el tratamiento: en hacer transformaciones de la representación inicialmente dada, que se hacen en o dentro del mismo registro, utilizando recursos semióticos del registro inicial en el que se produjo la representación que está sometida a tratamiento.  Un ejemplo de ello es imaginar que se están mostrando a los alumnos varias representaciones gráficas sobre el objeto matemático que llamamos “función real de una variable”, que suele presentarse en 10º grado. Supongamos que el profesor traza distintas gráficas funcionales en el tablero, tomándolo como el plano cartesiano, pero siempre manteniéndose en el registro figural.

Los tratamientos en este registro son difíciles de llevar a cabo en el tablero (aunque no en la pantalla del computador), como serían, por ejemplo, subir o bajar toda la gráfica “para indicar el efecto de una constante arbitraria”, o cambiar el intervalo de base para examinar “la forma de la función cerca de origen” o “el comportamiento de la función cuando *x* tiende a infinito”. En cambio, si el profesor hubiera comenzado con el registro algebraico, sería mucho más fácil escribir varias fórmulas y hacerles tratamientos. Pero si utiliza solo el registro gráfico, induce a los alumnos a confundir el objeto función real con la gráfica cartesiana, y si solo usa el algebraico, los induce a entender la expresión “función real” como si dijera “una fórmula con efes y equis”.

Para experimentar la dificultad de hacer dichos análisis de las representaciones gráficas o algebraicas desde el punto de vista de los registros semióticos de Duval, basta caer en la cuenta de que el profesor que imaginamos estaría necesariamente utilizando también el registro de la lengua natural *oral*, como se indicó con algunas frases entre comillas; o sea que en ninguno de los dos casos estaba usando un solo registro; menos todavía notamos que todo el párrafo sobre los dos registros gráfico y algebraico fue producido en el registro de nuestra la lengua natural *escrita*, que es un registro semiótico distinto de los anteriores.

Según Duval (2006), las transformaciones semióticas y la coordinación entre los registros de representación son imprescindibles en la actividad matemática. Más recientemente, Duval (2017) plantea que la actividad matemática consiste en transformar las representaciones semióticas en otras representaciones semióticas para obtener nueva información o conocimiento y resolver problemas. Eso nos lleva a reconocer que también son imprescindibles en el análisis de los datos para cualquier investigación en Educación Matemática.

A manera de cierre de esta sección sobre los registros de representación y los tratamientos dentro de mismo registro, Duval (2016) considera que:

> Cambiar el registro de representación es el umbral de la comprensión matemática para los aprendices en cada etapa del currículo. Ello depende de la coordinación de varios

> registros de representación y es solo en las matemáticas donde se requiere fuertemente la coordinación de registros. (pp. 91-92).

Así, en palabras de Duval, "el verdadero reto de la educación matemática consiste en desarrollar primero la capacidad de cambiar el registro de representación". En nuestro caso, el reto consiste en que no solo el profesor, sino todos y cada uno de sus alumnos, sean capaces de producir e interpretar muchas *logías y *grafías producidas por distintos registros y acompañadas por gestos, pero también que cada uno de ellos vaya avanzando hacia la producción de *metrías y *nomías acerca de los objetos matemáticos aprehendidos en sus noesis y semiosis, como avance en su consciencia sobre su manejo mental de los sistemas de objetos matemáticos, sus modelos y sus teorías, y en su destreza para manejar distintos registros semióticos para expresar sus noesis a distintos interlocutores a través de distintos registros semióticos de representación.

En esta investigación se asume el modelo mental como el producto final de un proceso de sistematización y estabilización de multitud de imágenes multimodales y cambiantes en el cerebro del agente noético-semiótico, teniendo en cuenta sus tres aspectos o tríada básica: su sustrato, su estructura y su dinámica. Este producto ya almacenado en la memoria le permite al agente activarlo, inspeccionarlo recorriendo los componentes del sustrato con sus relaciones estructurales y modificarlo y manejarlo aplicándole las distintas operaciones de la dinámica, mientras va comparando el estado final de cada transformación con el estado inicial, para armar una especie de narrativa episódica interna en una limitada línea de tiempo.

Pero una cosa es manejar el modelo mental y recordar los episodios de su recorrido, y otra cosa es manejar las representaciones semióticas de ese modelo, tanto internas como externas. Esas representaciones semióticas son a su vez sistemas simbólicos con múltiples componentes, relaciones y operaciones que suelen combinar modalidades sensoriales diferentes, e involucran simplificaciones del modelo mental más complicado, que permiten manejar los símbolos del sustrato y los de las relaciones con la aplicación de operaciones sobre los distintos símbolos de componentes, relaciones y operaciones con mayor facilidad, rapidez y ahorro de energía que las acciones mentales sobre el modelo mental más complicado.

Por ese motivo procuraremos evitar en esta investigación las palabras “complejo” y “complejidad”, pues todo modelo mental es sumamente complicado, al menos con tres aspectos claramente diferenciados, con muchos componentes en el sustrato, con distintas relaciones estructurales entre cada pareja, terna o cuaterna de ellos, y múltiples operaciones posibles en la dinámica. Por lo tanto, en el Programa Cronotopía decir que algo es complejo no añade ninguna información útil, pues hasta las necesarias simplificaciones para poder representar el modelo mental en sistemas semióticos más fácilmente manejables siempre seguirán exigiendo el manejo de registros como sistemas productores que producen representaciones semióticas muy complicadas.

Cualquier sistema de objetos matemáticos es muy complicado, y cualquier teoría matemática, que es una colección de *logías acera de ese sistema formuladas en un lenguaje técnico articulado con sus términos, fórmulas, relaciones de inferencia y operadores lógicos, es a su vez otro sistema complejo en todos sus aspectos: en su sustrato, en su estructura y en su dinámica.

Las categorías provenientes del Programa Cronotopía, con sus teorías generales de procesos y sistemas TGPS y de modelos y teorías TGMT nos permitirán analizar con mayor precisión y finura las cinco actividades semióticas del cronotopo del agente noético-semiótico que asume temporalmente el papel de enunciador y emisor, que son las *grafías, *logías, *metrías, *nomías y gesticulaciones, y las actividades semióticas interpretativas del agente que asume temporalmente el papel de receptor e intérprete.

El Enfoque Noético-Semiótico, ENS, de Duval nos hace aportes muy valiosos al estudio de modelos mentales [cronotópicos] en la medida que las distinciones semióticas aportadas por él, nos permite un análisis muy fino de la relación entre objeto matemático y sus representaciones semióticas.

Básicamente estas representaciones están dadas por las *grafías, las *logías y los gestos que hayamos logrado capturar en artefactos escritos o dibujados y en audios o videos. Los conceptos de semiosis, noesis, sus relaciones y alternancias en el agente noético-semiótico expresivo e interpretativo, la distinción entre los sistemas semióticos que sirven de representaciones ya producidas y los registros como sistemas semióticos productores de representaciones y la distinción entre tratamientos y conversiones nos permiten refinar el análisis de los datos para avanzar en la comprensión de las actividades semióticas del cronotopo de cada alumno y de su profesora, y los aspectos de sus modelos mentales que tratan de expresar en las *grafías, las *logías y los gestos, que pueden avanzar a ser *metrías y *nomías, según las capacidades que tenga el alumno o la profesora de poder expresar externa y públicamente los modelos internos privados que reflejan al exterior una mayor consciencia del objeto matemático y de su manejo semiótico interno.

# Capítulo 3. Metodología para el estudio de modelos mentales cronotópicos

Puesto que el interés es comprender los modelos mentales [cronotópicos] de los alumnos y una profesora que se manifiestan en un aula de matemáticas de grado 10º, empleamos un lente teórico que hemos denominado el Ψridente Teórico. El tipo de problema que se pretende dilucidar implicó que la investigación fuera de corte cualitativo. Salgado (2007) señala:

> La investigación cualitativa puede ser vista como el intento de obtener una comprensión profunda de los significados y definiciones de la situación tal como nos lo presentan las personas, más que la producción de una medida cuantitativa de sus características o conductas. (p. 71)

También estamos frente a una investigación de tipo exploratorio pues al momento se han realizado investigaciones sobre el cronotopo en literatura, filosofía y biología, pero no en educación matemática; de igual manera se observa, en términos generales, formas de operación y de expresión de modelos mentales [cronotópicos] en clases de matemáticas. Por lo anterior, en particular por las pocas publicaciones al respecto, consideramos que esta investigación será apenas una búsqueda inicial. Sobre este tipo de estudios Hernández, Fernández y Baptista (2014) plantean lo siguiente:

> Los estudios exploratorios se realizan cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes. Es decir, cuando la revisión de la literatura reveló que tan sólo hay guías no investigadas e ideas vagamente relacionadas con el problema de estudio, o bien, si deseamos indagar sobre temas y áreas desde nuevas perspectivas. (p. 91)

Además de lo exploratorio, solo se podrá dar *pistas, rasgos* o *huellas* sobre los modelos mentales [cronotópicos] empleados por los alumnos y la profesora. Así que identificar rasgos de los modelos mentales sería la principal estrategia de análisis de los datos ante la dificultad de comunicar imágenes y modelos mentales a través del lenguaje de las concepciones témporo-espacial de los agentes noéticos-semióticos.

Para describir un poco la población perteneciente a esta investigación planteamos lo siguiente: Podríamos haber tomado como población más amplia todos los alumnos de la ciudad de Barranquilla, pero decidimos tomar solo a los que cursaban el décimo grado en el año 2017, que se puede calcular aproximadamente en 40.455 alumnos según estadísticas de la Secretaría de Educación Distrital, SED (2017). En total hay 574 establecimientos educativos del sector oficial y no oficial y no se discrimina cuántos pertenecen a cada sector. De estos 574 establecimientos educativos no se precisa cuántos ofrecen el grado décimo. El rango de edad de los jóvenes del grado décimo está entre los 15 a 16 años, pero en general podríamos decir que el promedio de edad es de 15 años. No se especificó en dicho informe la distribución de los estudiantes por género.

Como población restringida tomamos los 170 alumnos de los cinco grupos que cursaban el décimo grado, 10º A, B, C, D y E en una IE pública de la ciudad, que tiene en total 3457 alumnos y 139 profesores. Como muestra por criterio, no probabilística, tomamos todos los 37 alumnos que cursaban la sección D de décimo grado, cuyo rango de edad oscilan entre 15 y 16 años y de las cuales 18 son hombres y 19 mujeres.

Debido a los propósitos de la investigación de identificar rasgos de modelos mentales [cronotópicos] a través de sus distintas formas de expresión, se realiza una investigación orientada por la teoría fundamentada (Strauss y Corbin, 2002), por cuanto se parte de categorías provenientes del sistema teórico para la comprensión de dichos modelos y de un corpus que permita identificarlos en los actores presentes en las clases de matemáticas, una maestra y 37 alumnos. Por esta razón, la investigación requirió una combinatoria metodológica por momentos de la investigación, que provienen del problema y los objetivos de investigación relacionados con encontrar rasgos de modelos mentales [cronotópicos]. Dicha combinatoria metodológica está dada por la metodología para la recolección de datos que es de tipo etonográfica y la metodología para el análisis de datos que es basada en la teoría fundamentada y empleando los fundamentos del Programa Cronotopía.

### 3.1. Momento etnográfico

El momento etnográfico se realiza con el fin de observar y recoger información sobre las expresiones de alumnos y profesores en las que se pueden identificar modelos mentales [cronotópicos]. Para ello se requirió una observación dentro del aula de matemáticas que focalizara las interacciones entre alumnos, profesor o juntos y sus productos discursivos y representacionales, en situaciones de resolver problemas en clases de Geometría Analítica. Las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] que se caracterizaron son de alumnos y la profesora del curso de Geometría Analítica, considerando que dichas formas y modelos se manifiestan en el discurso producido por alumnos y profesores en sus interacciones comunicativas y en lo que producen como efecto de su actividad de resolver problemas (o tareas o solicitudes). La etnografía, como lo señala Spradley (1979), significa *aprender de la gente*. Precisamos, aprender sobre las formas de expresión de modelos mentales de una profesora y sus 34 alumnos cuando en conjunto resuelven actividades de Geometría Analítica. Sobre este proceso de aprendizaje, Vasilachis et al (2009) plantea que se trata de un proceso de socialización en el curso del cual el investigador va aprendiendo pautas y criterios de comportamiento, códigos de convivencia y significados presentes en la vida social.

En el momento etnográfico era importante comprender lo que sucedía en el aula de clases. Así, el análisis del contexto de las clases donde se producen las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesores en el aula de clases se caracteriza por: 1. Establecer el ambiente o contexto sociocultural de las clases donde se da la comunicación y, por ende, en el que surgen los datos, y 2. Dar razón de la interacción social en el aula de clases.

*Establecer el ambiente o contexto sociocultural de las clases donde se da la comunicación*

En la terminología de Godino (2011), se interpretaría esta característica del análisis como la *idoneidad ecológica*, la cual se establece como grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla, (p. 6). En esta conferencia, Godino establece los *componentes e indicadores de idoneidad ecológica.*[45] Para Chevallard (1980), se trataría de captar la *noosfera* del sistema de enseñanza, donde se analiza el papel que juegan los diseñadores curriculares, autores de libros de texto, las reuniones de área, el impacto de políticas nacionales establecidas por ejemplo por el Ministerio de Educación Nacional, las decisiones del rector de la Institución Educativa, los padres de familia, las políticas nacionales, entre otros.

No es entonces fácil establecer este ambiente, o contexto, o entorno ecológico, o noosfera, pues son muy diversas las variables que intervienen en ello y, más aún, cuando se aspira a establecer “relaciones con el entorno social, político, económico…” con lo expresado en el aula de clases, tanto por los alumnos como por los profesores, cuando

[45] Puesto que no es objeto de estudio de esta investigación la idoneidad didáctica desarrollado por Godino, Batanero y Font, incluyendo sus seis facetas, estas no serán conceptualizadas aquí. Solo estamos presentando una relación con respecto al desarrollo de unos conceptos de esta investigación.

ello también responde a otros fenómenos complejos de la interacción social dentro y fuera del aula de clases. Por ejemplo, Bishop (2005) hace una descripción de las interacciones sociales al interior de la clase de matemáticas y de cómo ellas pueden o no establecer condiciones para las formas de expresión de alumnos y profesores, los agente(s) noético-semiótico(s).

*Dar razón de la interacción social en el aula de clases*

En la interacción social se tiene como objetivo determinar en cuáles condiciones se estableció mayor comunicación de tipo bidireccional en el aula de clases, con participación explícita de ambos interlocutores, profesor y alumno(s), y que las expresiones usadas por los actores de la comunicación sean relativas a la Geometría Analítica. Para ello fue necesario:

- ✓ La identificación de los modos de interacción que se manifiestan en la clase y en los que se producen las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesora cuando en conjunto resuelven una actividad matemática.
- ✓ La organización y enseñanza de los contenidos y su relación con las condiciones para favorecer la comunicación entre profesor y alumnos.

El análisis de las expresiones semióticas puede llegar a establecer rasgos y comparar las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de los alumnos y su profesora en el aula de clases cuando, en conjunto, resuelven actividades matemáticas. Dicho análisis se encargará entonces del estudio de los acuerdos y desacuerdos en la comunicación entre la profesora con sus alumnos.

La empresa anterior puede ser posible de lograr debido a que el análisis de las expresiones semióticas trae consigo los siguientes subprocesos[46]:

[46] Asesorías con Dora Calderón. 23 de octubre del 2019. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

- ✓ Buscar pistas del cronotopo sea intencionales, no intencionales, gestuales, que remiten a componentes, relaciones y operaciones, los tres aspectos de cómo operan los modelos mentales.
- ✓ Identificar modelos estáticos, que son modelos tópicos con sus componentes y relaciones estáticas. Por ejemplo, lo tópico sirve para la identificación de formas de expresión de *grafías. Algunos ejemplos pueden ser: una foto de un momento de la clase, de un cuaderno, de un taller, etc., un pantallazo de un instante de un video, etc. En estos casos se perdió el tiempo. Se paraliza la dinámica y se deja solamente la estática.
- ✓ Identificar el paso de modelos estáticos a modelos dinámicos por medio de sus operaciones, el paso a lo crónico.
- ✓ Identificar modelos dinámicos, que son modelos crónicos con sus componentes y cambios relacionados. Este tipo de modelos sirven para identificar de formas de expresión de *metrías, pues esta fase implica movimiento.
- ✓ Identificar operaciones de modelos mentales que se realicen en el tiempo, lo que implica establecer si las actividades matemáticas que realizaron los alumnos con la profesora tienen movimiento. Ejemplos de estas operaciones, que implican tiempo, pueden ser: trazar, mover, girar, explicaciones empleando gestos, etc.

Con estos criterios pretendemos establecer una manera de acercarnos a determinar de qué manera o en qué medida operan los modelos mentales cronotópicos, es decir, en qué medida se da la comunicación entre la profesora y sus alumnos y en qué medida se expresan cada uno sus modelos mentales [cronotópicos] y en qué medida el otro lo interpreta y transforma sus modelos.

Las herramientas conceptuales del Programa Cronotopía favorecen la identificación de modelos mentales y las herramientas conceptuales del Enfoque Noético Semiótico permiten identificar formas de expresión de tales modelos y sus cualidades.

Pasemos ahora a describir las técnicas e instrumentos empleados en el momento etnográfico y sus resultados, que conforman el momento etnográfico.

### 3.1.1. Observación no participante de clases

Este método etnográfico estuvo compuesto por observación etnográfica, registro audiovisual de las clases, registro fotográfico o captura de pantalla, registro de audios y bitácora. ¿Por qué se opta por la observación etnográfica? Es importante señalar que la necesidad de obtener información sobre los modelos mentales [cronotópicos], y en el entendido que ellos no son observables por sí mismos, sino a partir de lo que los sujetos expresan y comunican, implicó recoger datos que reportaran esas expresiones. A continuación, se describe cada una de ellas.

### 3.1.2. Observación etnográfica

Se caracteriza por ser la técnica más empleada en las investigaciones etnográficas. Murillo & Martínez (2010), consideran que una observación etnográfica debe permitir recoger las situaciones en su estado natural, cuestión difícil de lograr. En esta investigación se trató de observar la relación entre la profesora y los 37 alumnos en un ambiente cotidiano de clases, sin intervención externa, mientras realizaban actividades matemáticas en clases de Geometría Analítica, para ello se tuvo en cuenta la Tabla 3. Por ello la observación fue no participante.

Tabla 3. Guía de observación de la discusión entre la profesora y 37 alumnos en la solución de actividades de Geometría Analítica de grado 10.

| | | |
|---|---|---|
| Fecha: | Lugar: | |
| Observador: | Hora de inicio: | Hora de terminación: |
| Discusión entre investigador y alumnos e investigador y profesor(es) (argumentos cronotópicos de cada uno de los participantes): | | |
| Interpretaciones del alumno de las expresiones[47] del investigador: | | |
| Interpretaciones del investigador de las expresiones del alumno: | | |
| Interpretaciones del saber geométrico por parte del alumno: | | |
| Interpretaciones del profesor de las expresiones del investigador: | | |
| Interpretaciones del investigador de las expresiones del profesor(es): | | |

[47] Se asume como expresiones las palabras claves, frases y párrafos descritos en las unidades de análisis.

| |
|---|
| Interpretaciones del saber geométrico por parte del profesor: |
| Descripción de formas, características o propiedades del cronotopo del alumno: |
| Descripción de formas, características o propiedades del cronotopo del profesor: |
| Conclusiones: |
| Comentarios: |

### 3.1.3. Técnicas e instrumentos de recolección de información.

A continuación, se presentan las técnicas que se emplearon para la recolección de información que ayudara a identificar formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos].

#### 3.1.3.1. Registro audiovisual de las clases

Para determinar qué tipo de análisis del discurso se da durante la clase e inferir información sobre los cronotopos mentales privados de la profesora y de sus alumnos y extraer de esas huellas textuales, palabras, expresiones lingüísticas organizadas ,acciones como dibujos y gestos, las posibles características de ese trasfondo de los modelos mentales [cronotópicos] que permita avanzar en la exploración del cronotopo, de los medios de expresión y de las interpretaciones divergentes de las esperadas, se hizo un registro audiovisual de las clases. Para ello, se instaló de manera estratégica una videocámara que registró la comunicación entre la profesora y sus alumnos y entre alumnos cuando resolvían actividades matemáticas en el curso de Geometría Analítica del grado 10. Estas actividades matemáticas tienen que ver con el estudio de la Recta, Secciones cónicas: Circunferencia, Parábolas, Elipses, Hipérbolas y la Ecuación general de segundo grado, aplicaciones de secciones cónicas, entre otros temas relacionados.

Para conocer la *sistematización inicial de fotografías sobre el desarrollo de clases, de los videos, audios y páginas transcritas, de cuadernos, talleres y exámenes* se puede ver el *Anexo 3. La descripción de las 14 sesiones de clases que fueron registradas* *audiovisualmente en los dos periodos académicos que comprendieron el semestre 2017-2* se puede ver en el *Anexo 4*. *Los resultados de codificación de las transcripciones de las 14 clases, Tabla de códigos-documentos*, pueden verse en el *Anexo 5*. *Algunas representaciones o acciones cronotópicas de los agentes noéticos-semióticos durante el desarrollo de las clases observadas* se pueden ver en el *Anexo 6*. Si se desea ver un *ambiente de las clases que fueron observadas* se puede ver el *Anexo 7*.

Para la sistematización de los datos obtenidos de las clases y para facilitar la transcripción de los vídeos se diseñó el siguiente instrumento, ver Tabla 4.

Tabla 4. Instrumento de sistematización de los datos y transcripción de videos.

| | | |
|---|---|---|
| Título y número (código de identificación) | | |
| Fecha de grabación | Día: Mes: Año: | |
| Técnica de grabación | Auditiva: | Audiovisual: |
| Tipo de transcripción | Total: No total: Parcial: | |
| Origen del documento (ámbito social) | Escuela: Familia: Barrio: | |
| Recolector de información | | |
| Técnica de recolección de información | Conversación: Entrevista:<br>Grupo focal: Observación pasiva:<br>Observación participante: | |
| Breve descripción de la situación | Participantes: | |
| | Localización: | |
| | Tema: | |
| | Finalidades | |
| Interés para el análisis | Lenguajes análogos, gestuales e icónicos de representación del tiempo | |
| | Lenguajes análogos, gestuales e icónicos de representación del espacio | |
| | Expresiones gestuales de tipo discursivo (orales, escritas o visogestuales), orales y escritas relacionadas con el antes, durante y después de un fenómeno. | |
| | Aspectos lógicos de la estructura de su propio espacio, tanto de los alumnos como del profesor. No sin antes reflexionar qué entienden ellos por espacio. | |
| | Lo que alumnos y el profesor consideran de mayor duración, menor duración o igual duración (equidurancia). | |
| | Tipos de metrización de la distancia. | |
| | Leyes o normas que rigen sobre la duración o temporalidad de fenómenos | |

| | |
|---|---|
| | Leyes o normas que rigen sobre el espacio. |
| | Interacciones[48] |
| | Dibujos o construcciones geométricas realizados |
| | Gestos empleados que sirven de complemento para la comunicación de palabras, frases o párrafos relacionados con lo témporo-espacial. |
| Otras observaciones | |
| Transcripción | |

Fuente: Adaptada de Tusón (2002) y Nussbaum (1991).

#### 3.1.3.2. Registro fotográfico o captura de pantalla (screenshot)

Se utilizó la fotografía como un medio para la recolección de información durante el trabajo de campo; se trata de un modo de registro, una manera de crear y capturar imágenes. Las tomas fotográficas se emplean para el relevamiento sistemático de aquellos aspectos o cuestiones en los que los registros clásicos, como la transcripción escrita de lo observado resultan insuficientes o inadecuados, tal como lo indica Augustowsky (2017). Con el propósito de determinar formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y la profesora asociados al tipo de actividades en la clase de matemáticas, el registro fotográfico o capture de pantalla ayudó a responder preguntas como:

- ¿Cuáles son las *grafías que hacen tanto profesora como los alumnos, en el tablero, en carteleras, en el cuaderno o en talleres?
- ¿Hay gestos que acompañan sus expresiones de los modelos mentales cronotópicos?
- ¿Se puede evidenciar y capturar en palabras el ambiente de la clase?

[48] Según Carlos Vasco, las interacciones son mucho más ricas que la conversación registrada en una grabadora de sonido. Son las interacciones entre personas y entre personas, artefactos y tareas las que hay que analizar. Las transcripciones van formando el "corpus", el cuerpo o masa documental. En el análisis del corpus hay unas primeras categorías que son los cajones de la clasificación inicial de los términos, predicados, operadores como conectivas, cuantificadores, negaciones, etc., y luego se buscan otras en autores que hayan hecho análisis de este tipo de interacciones de aula, y luego se van construyendo otras más finas que posibilite ver una categoría emergente, que permita análisis más finos y redacciones más precisas de las conclusiones.  Tomado de Asesorías con Dora Calderón y Carlos Vasco. 13 de marzo del 2017. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. (No obstante, no se descartan otras unidades de análisis como las que se listan junto con las interacciones).

#### 3.1.3.3. Registro de audios

Los registros de audios constituyen otra herramienta para registrar la información que no era audible desde la parte de atrás del grupo donde se ubicó la videocámara. En esta investigación se realizaron grabaciones de audio de cada una de las clases. Los audios por lo general tenían una duración de dos horas, en ciertas ocasiones de 30 minutos. Siempre se colocó la grabadora en el escritorio de la profesora.

#### 3.1.3.4. Bitácora

La bitácora, representó la herramienta o el instrumento para los registros de esta investigación, donde se consignaban las notas personales de los investigadores que reportaron las observaciones, hipótesis, ideas, datos, obstáculos que surgieron en el momento de la recolección de la información en el salón de clases o actividades asociadas a ella. *Un ejemplo de una bitácora* se puede ver en el *Anexo 8.*

## 3.2. Procesamiento inicial de materiales para la obtención de datos

*Los materiales recolectados durante la obtención de la información en aula de matemáticas,* se pueden ver el Anexo 1. *El procesamiento inicial de materiales obtenidos en la recolección de la información* se puede ver el *Anexo 2*. El procesamiento inicial se produce cuando se consiguen datos y se cambia a información utilizable. Este procesamiento inicial de materiales, teniendo en cuenta a Hernández, Fernández y Baptista (2014), consistió en: Procesamiento inicial de fotografías sobre el desarrollo de clases, Procesamiento inicial de los videos, Procesamiento inicial de los audios, Procesamiento inicial de las bitácoras, Procesamiento inicial de las páginas transcritas/organizadas, Procesamiento inicial de cuadernos, Procesamiento inicial de talleres y exámenes. De esta manera se presentan los instrumentos para la recolección de datos.

### 3.3. Método para la sistematización de datos y obtención del corpus

A continuación, se presentarán los criterios para la selección de pasajes de las transcripciones de clases, para conformar el corpus, que fueron analizados con el propósito de encontrar rasgos de expresiones de modelos mentales cronotópicos. También se presenta el uso del Atlas-ti8 para la sistematización de las primeras categorías, que se denominará análisis categorial.

#### 3.3.1. Criterios para la selección de pasajes comunicativos

Los pasajes son fragmentos de comunicación entre la profesora y alumnos o entre alumnos de tal forma que en ellos se pueden notar rasgos de expresiones de modelos mentales [cronotópicos]. Los fragmentos fueron seleccionados con el criterio de que tuvieran como tema el desarrollo de una actividad matemática de Geometría Analítica. Con los pasajes se pretendió seleccionar externalizaciones o expresiones generadas durante la interacción comunicativa, especialmente cuando hay situaciones conflictivas en la comunicación, por ello son expresiones o representaciones de tipo discursivo y no discursivo. La unidad de análisis es la *clase,* la cual se divide en *episodios* que presentan interacciones profesor-estudiante con sus respectivos *turnos de habla*. La selección de pasajes que permitiera estudiar los modelos mentales [cronotópicos] de la profesora y los alumnos e identificar rasgos, pistas de los mismos, debido a que son objetos mentales, es decir internos, de muy difícil acceso a los ojos del investigador, se realizó bajo dos criterios:

> *Primer criterio.* Debe existir interacción comunicativa que manifieste turnos de habla entre los interlocutores, con al menos un turno de habla entre el profesor

> y mínimamente un alumno y ello debe evidenciarse en el registro audiovisual o las transcripciones de clases.

Este primer criterio establece que los datos se toman en una situación de relación didáctica (profesor–alumno), en el marco de clases de Geometría Analítica. Es decir, este primer criterio incide en el tipo de información que se produce, pues se da una relación sociocultural de aula (clase de matemáticas) que produce, al decir de Bajtín (1989), un tipo de género discursivo: el del aula (Calderón, 2005). Las relaciones son altamente reguladas y las formas discursivas darán cuenta de ello. La implicación frente a los datos sería la posibilidad de seleccionar los pasajes que fundamentalmente den razón de la manifestación de enunciados y de representaciones referidas al desarrollo de la temática geometría analítica (en cualquier sentido y función: para comprender, para explicar, para valorar, para identificar, para responder, etc.).[49]

> *Segundo criterio*. El tópico de comunicación debe ser sobre temas de Geometría Analítica.

Los pasajes seleccionados debían expresar palabras, manifestaciones, representaciones o acciones, de modelos mentales [cronotópicos] en los turnos de habla. En general, teniendo en cuenta a Carrillo et al. (2017), la interacción comunicativa (como proceso social en el que se construyen significados y sentidos y se desarrollan prácticas culturales) puede ser verbal o gestual; una situación de comunicación puede llevarse a cabo empleando signos verbales, gestuales, entre otros, pero lo que está circulando es un discurso sobre algo y a propósito de algo (como un tema, de clase, un acuerdo anterior), que puede expresarse empleando palabras, u otras representaciones (gráficas, expresiones gestuales, etc.). También la comunicación puede expresarse por medio de

[49] Asesoría con la profesora Dora Inés Calderón. 1 de agosto del 2018. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

una pregunta, una repuesta, una sugerencia, una advertencia, una afirmación, etc. Podría ser, por ejemplo, verbal por parte del profesor y gestual por parte del alumno (que involucre un simple gesto, aún si fuere imperceptible por la videocámara); incluso, podrían existir clases unidireccionales donde la comunicación se dio en un solo sentido y no hubo retorno. Como interacción comunicativa, interpretando a Carrillo et al. (2017), no importa si no hay expresión verbal de retorno o de respuesta, de todos modos, se está en la situación de comunicación, aun cuando haya silencio. Puede incluso que no haya respuesta explícita del receptor, o al menos no haya información de retorno, *feedback*, hacia el emisor sobre la información emitida. Pero puede haber una respuesta gestual mínima, como una encogida de hombros o una sacudida de la cabeza que se pueda discriminar como aceptación, indiferencia o rechazo. Los rasgos que identifican a los criterios de selección de pasajes permitirán separar la comunicación matemática entre la profesora y mínimamente un alumno, de los episodios que tengan otros rasgos temáticos, como, por ejemplo, información sobre rifas, actividades deportivas, recaudo de mercados, informaciones tipo institucional, llamados de atención, justificaciones de decomiso de celulares, etc. Dichos rasgos fueron obtenidos de datos que emergieron de una cantidad significa de materiales recolectados durante la obtención de información en aula de clases, que se pueden ver en el Anexo 1.

### 3.4. Análisis categorial basado en la Teoría fundamentada

El procesamiento de la información puso en juego criterios que vienen del Programa Cronotopía para la identificación de los modelos mentales [cronotópicos] y sus formas de expresión en los alumnos de 10 grado y su profesora, en clases de geometría analítica. *Un ejemplo de páginas transcritas u organizadas* se puede ver en el *Anexo 9*. *Un ejemplo de página de cuadernos revisados* se puede ver en el *Anexo 10*. *Un ejemplo de un taller revisado* se puede ver en el *Anexo 11*.

Se tomó la referencia de las ocho subdisciplinas de la Cronotopía como categorías para dicho análisis. Tal como se estableció en los objetivos específicos, el interés radica en la caracterización y estudio de las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y una profesora de grado 10º en algunas actividades de Geometría Analítica que vinculen la introducción y manejo de coordenadas en un sistema coordenado. Por ello, otras unidades de análisis, inscritas en la unidad de análisis mayor que son las clases, están los enunciados o textos escritos en el tablero o en papel de profesores y alumnos que se pudieron clasificar según los criterios de los pasajes seleccionados. Los turnos de habla, que caracterizan los pasajes, hacen alusión a la forma en que se sistematizan los datos y comprenden expresiones verbales y no verbales de por lo menos un agente noético-semiótico, sea la profesora o sea un alumno. Dichos datos, en tanto constituyen textos, son objeto de estudio desde la Teoría Fundamentada. En dicho análisis, la construcción de categorías iniciales y codificaciones sucesivas, fueron desarrolladas a partir de la Teoría Fundamentada (Strauss y Corbin, 2002).

Para la sistematización de datos se empleó el Altlas-Ti8, bajo los tipos de codificación propuestos por Strauss y Corbin

1. C*odificación*: *abierta* (códigos que se emergen a partir de lo leído en una cita libre), *in vivo* (se crean códigos tomados literalmente de lo expresado por alumnos o profesora) o *por lista* (códigos a priori). Cualquiera de los anteriores tipos de códigos pudo ser clasificado en temas, subtemas (estos dos últimos escritos regularmente en mayúscula sostenida), categorías o subcategorías (estos dos últimos escritos regularmente en minúscula sostenida).

2. C*odificación axial*, donde algunos códigos fueron considerados como los tres temas centrales: 1. *grafías en clases, 2. *metrías en clases y 3. *nomías en clases. Las *subcategorías* fueron otros códigos que se presentaron para cada uno de estos temas. Así, lo que se obtuvo fueron *redes de códigos*, buscando identificar varios aspectos: El *enraizamiento* (E) que es cuántas citas tiene cada *código* y la *densidad* (D) que es el número de vínculos entre los códigos.

3. Redes de códigos para cada una de las transcripciones de clases, ver figura 9, por separado, pues en cada una de ellas se maneja un tema diferente o por lo menos el desarrollo de diferentes conceptos bajo un mismo tema. Este procedimiento permitió hacer ajustes para el resto de las codificaciones y tener elementos para los resultados que en el Capítulo 4 se presentan. El *resto de las redes de códigos* se puede ver desde el *Anexo 12* hasta el *Anexo 25*.

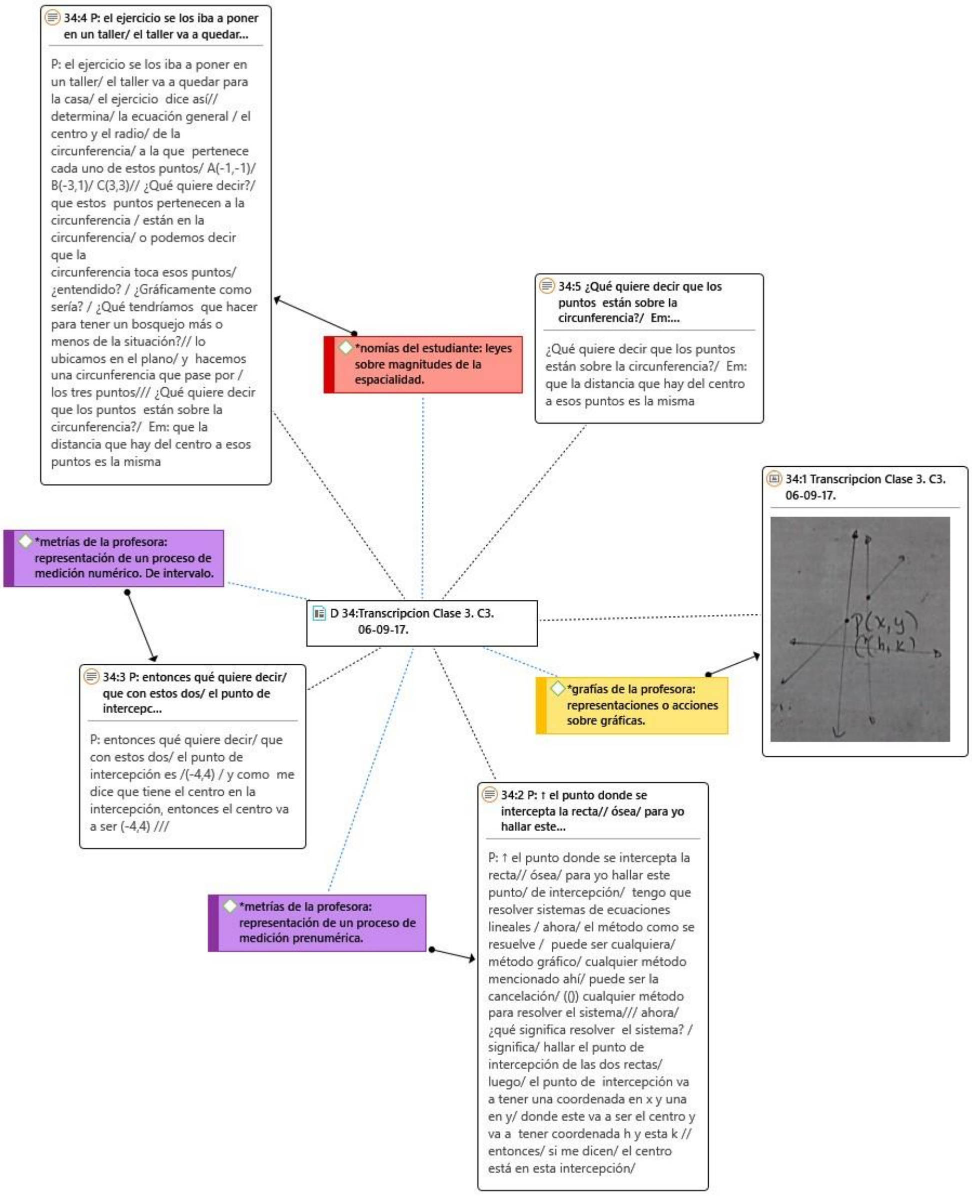



Figura 8. Red de códigos de la Clase 5 *(Clase 05. C5. 20-09-17)*: *grafías, *metrías y *nomías.

6. N*ubes de palabras* (ver figura 10) como un insumo más de *recurrencia de palabras* en cada una de las clases, haciendo el respectivo filtro de palabras que no deseemos estén en ella. La nube de palabras se aprovechó para encontrar las palabras clave que tengan que ver con la Cronotopía y con la Geometría Analítica: recta, cónica, plano, elipse, parábola, hipérbola, círculo, radio, diámetro, secante, longitud, fórmula, ecuación, etc. y ver así la frecuencia de empleo de este tipo de palabras. La nube de

palabras permite establecer si hay o no rasgos de lo tópico o lo crónico o de ambos. Es por ello que se hace necesario avanzar en el estudio de frases compuestas, en expresiones y acciones, primero teniendo en cuenta los criterios de selección de pasajes y luego el análisis de los tópicos en los actos comunicativos entre la profesora y alumnos para identificar posibles actividades semióticas del cronotopo por medio de expresiones de *grafías, *logías, *metrías y *nomías. Entre más grande se vea una palabra en la Nube de palabras quiere decir que su frecuencia de uso es mayor. *Las nubes de palabras que se realizaron* se pueden ver del *Anexo 26* hasta el *Anexo 39*.


Figura 9. Nube de palabras de la Transcripción Clase 1. C1.

7. M*emos* que ayudaron a responder las siguientes preguntas: en una clase de Geometría Analítica ¿en qué circunstancias se producen *grafías?, ¿en qué circunstancias se producen *metrías?, ¿en qué circunstancias se producen *nomías? Los memos son el espacio de reflexión sobre los datos que se van codificando, qué estamos haciendo y por qué lo estamos haciendo, dar sentido a lo que se está haciendo.

8. Búsqueda de *citas* que tuvieran códigos de *grafías y *metrías, lo que podría ayudar a comprender más la emergencia de *nomías en una clase de matemáticas de Geometría Analítica.

9. Por último, se realizó una *Tabla código-documento*; la cual mostró la *frecuencia de códigos* empleados en los documentos de análisis, como se indicó para el Anexo 5.

**3.5. Metodología de análisis de datos**

Para el análisis de los datos obtenidos, realizado desde la teoría fundamentada, se procede en los siguientes momentos:

3.5.1. Análisis del corpus bajo categorías iniciales provenientes de la Teoría de Modelos y Teorías y de las subdisciplinas cronotópicas.

3.5.2. Análisis en profundidad para caracterizar e identificar formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos].

A continuación, se describe el procedimiento seguido en cada uno de estos momentos.

**3.5.1. Momento de análisis del corpus: Teoría fundamentada o análisis con base en categorías y el empleo de las ocho subdisciplinas cronotópicas**

Como necesitamos comparar las expresiones o representaciones témporo-espaciales empleados por los alumnos y su profesora es necesario describir algunas formas, características o propiedades del cronotopo de cada uno de ellos lo suficientemente para que se puedan distinguir los modelos y las representaciones semióticas que emplean. Recordemos que para poder describir el cronotopo de una persona es necesario que esta exprese sus representaciones mentales de lo témporo-espacial, de esta manera consideramos que la columna 3 (*Qué analizar. Categorías y Códigos*) de la Tabla 5 permite una aproximación a tal propósito, más los diversos instrumentos de recolección que ya se presentaron, lo que de paso conlleva al cumplimiento del primer objetivo específico. En esta columna 3 se presentan las categorías y códigos que fueron desarrollados a partir de la Teoría Fundamentada basada en Strauss y Corbin (2002) y con la ayuda del Atlas-Ti8. En el Anexo 3, se puede ver también la sistematización inicial de fotografías sobre el desarrollo de clases, de los videos, audios y páginas transcritas, de cuadernos, talleres y exámenes, empleando el Atlas-Ti8, lo cual ayudó a la categorización y codificación que se presenta en la columna 3 de la Tabla 5.

Tabla 5. Instrumento para el análisis de las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de la profesora y sus alumnos.

| *No.* | ***Sub disciplina. Modelos mentales que hacen énfasis en:*** | ***Qué analizar. Categorías y Códigos.*** |
|---|---|---|
| 1 | **Topografía** | **Categoría:** Representaciones icónicas del espacio. *Categorías previas de análisis:* Rasgos de expresiones sobre *grafías alusivas al espacio.<br>**Códigos:**<br>Identificación de representaciones icónicas del espacio, donde se tuvieron en cuenta dibujos, gráficas hechas con marcador, construcciones geométricas realizadas referidos al espacio. Escritura de signos o *grafías empleadas para representar el espacio sea en el tablero, hojas o en los cuadernos de los alumnos y la profesora. |
| 2 | **Cronografía** | **Categoría:** Representaciones icónicas del tiempo.<br>*Categorías previas de análisis:* Rasgos de expresiones sobre *grafías alusivas al tiempo.<br>**Códigos:**<br>Identificación de representaciones icónicas del tiempo, escritura de signos o *grafías empleadas para representar el tiempo sea en el tablero, hojas o en los cuadernos de los alumnos y la profesora. Todo lo relacionado al movimiento para la realización de dichos signos o *grafías. |
| 3 | **Topología** | **Categoría**: Aspectos analógicos de la comunicación topológica.<br>*Categorías previas de análisis:* Rasgos de expresiones sobre *logías al espacio.<br>**Códigos:**<br>1. Identificación de la forma, la calidad de lo que se expresó en las sesiones de clases sobre el espacio. Dentro de esa identificación estuvieron los aspectos |

| | | |
|---|---|---|
| | | lógicos de la estructura del propio espacio, tanto de los alumnos como de la profesora.<br>2. Identificación de enunciados y/o acciones en los que se reveló el trabajo de producir, comparar, clasificar y analizar las propiedades de las líneas y de las figuras puntuales, lineales, regionales, espaciales y témporo-espaciales, si así era el caso, que sería analizar uno de los aspectos lógicos de la estructura del espacio. |
| 4 | **Cronología** | **Categoría**: Aspectos analógicos de la comunicación cronológica.<br>*Categorías previas de análisis:* Rasgos de expresiones sobre *logías alusivas al tiempo.<br>**Códigos:**<br>Las reflexiones conscientes sobre la temporalidad y del tiempo por parte de alumnos y la profesora. Analizar aspectos relacionados con la vivencia del antes–durante–después. Vasco (2000: 224) |
| 5 | **Topometría** | **Categoría**: Metrización de la distancia.<br>*Categorías previas de análisis:* Tipos de metrización de la distancia.<br>**Códigos:**<br>1. Identificación de metrizar la distancia entre dos puntos o la longitud de una línea o del perímetro y el área de figuras regionales, etc., que sería analizar aspectos métricos de la estructura del espacio, o sea “su *metrías”.<br>2. En el corpus tendría que ver con localizar acciones de medir o de asignar medidas, ver el marcador discursivo o de otro orden sobre lo métrico. |
| 6 | **Cronometría** | **Categoría**: Metrización del tiempo.<br>*Categorías previas de análisis:* Tipos de metrización sobre el tiempo.<br>**Códigos:**<br>Estudio de la medición de la duración y de la coordinatización temporal de los fenómenos, Vasco (2000: 224). Fenómenos o subprocesos más largos o cortos que otros, o que duran más o menos que otros, para configurar la Cronometría. (p. 225). Análisis sobre la equidurancia de dichos fenómenos temporales. |
| 7 | **Toponomía** | **Categorías:** Enunciados legaliformes sobre el espacio.<br>*Categorías previas de análisis:* Leyes o normas que rigen sobre el espacio o sobre *su propio* espacio.<br>**Códigos:**<br>1. Donde se identifiquen leyes o normas que rigen sobre el espacio, identificar aspectos lógicos de la estructura de su propio espacio, tanto de los alumnos como del profesor. Por ejemplo, la relación en turnos de habla sobre preguntas que interrogan sobre el porqué de un objeto matemático y las respuestas categóricas del |

| | | |
|---|---|---|
| | | alumno o profesora sobre lo que sería dicho objeto matemático.<br>2. Donde se establezca lo relacionado al conjunto de las leyes o normas de la longitud, el área, el volumen y otras magnitudes de la espacialidad. Se trata de identificar la aparición de leyes, normas o patrones, y o el uso o expresión de estas, que rigen sobre el espacio. |
| 8 | **Crononomía** | **Categorías:** Enunciados legaliformes sobre el tiempo.<br>*Categorías previas de análisis:* Leyes o normas que rigen sobre el tiempo o sobre *su propio* tiempo.<br>**Códigos:**<br>Lo relacionado al conjunto de las leyes o normas de la duración, las frecuencias, períodos y otras magnitudes de la temporalidad. |

Fuente: Diseño a partir de reuniones tutoriales con Carlos Vasco. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

### 3.5.2. ¿En que enfocarán las categorías de análisis?

El enfoque de las categorías de análisis se centró en:

- ✓ Representaciones del tiempo en lenguajes análogos, gestuales e icónicos
- ✓ Representaciones del espacio en lenguajes análogos, gestuales e icónicos
- ✓ Expresiones gestuales de tipo discursivo (orales, escritas o visogestuales), orales y escritas relacionadas con el antes, durante y después de un fenómeno.
- ✓ Aspectos lógicos de la estructura de su propio espacio, tanto de los alumnos como del profesor. No sin antes reflexionar qué entienden ellos por espacio.
- ✓ Lo que alumnos y el profesor consideran de mayor duración, menor duración o igual duración (equidurancia).
- ✓ Expresiones de metrización de la distancia.
- ✓ Expresiones de leyes o normas que rigen sobre la duración o temporalidad de fenómenos
- ✓ Expresiones de leyes o normas que rigen sobre el espacio.
- ✓ Interacciones
- ✓ Dibujos o construcciones geométricas realizados
- ✓ Gestos empleados que sirven de complemento para la comunicación de palabras, frases o párrafos relacionados con lo témporo-espacial.

Nuestro Ψridente Teórico actuará a continuación, en el Capítulo 4: Las dos primeras puntas, sobre modelos mentales [cronotópicos] y el Programa Cronotopía, se emplearán para el desarrollo de la caracterización de modelos y la tercera punta, el Enfoque Noético-

Semiótico, se empleará para el desarrollo de formas de expresión de dichos modelos. Resumiento gráficamente el Capítulo, la figura 10 muestra una sintésis de él.

Figura 10. Visualización de la metodología de investigación

# Capítulo 4. Caracterización de modelos mentales [cronotópicos] de una profesora y sus alumnos

Los primeros capítulos de la investigación presentaron un recorrido por las reformas curriculares y legislativas del curso de Geometría Analítica de la educación media, lo que corresponde al Capítulo 1. La construcción de un Ψridente Teórico basado en la comprensión de los modelos mentales de profesores y estudiantes, las bases conceptuales del Programa Cronotopía y la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones, se presentó en el Capítulo 2. Los aspectos metodológicos que permitieron conocer rastros de modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y una profesora que se manifiestan en un aula de matemáticas de grado 10, se desarrollaron en el Capítulo 3. En este capítulo se presentan los modelos mentales identificados mediante el análisis del corpus recolectado a través del estudio de sus formas de expresión. En la caracterización de los modelos mentales, la comunicación entre la profesora y sus alumnos juega un papel esencial en la identificación de rastros de sus modelos mentales. Consideramos que para el estudio de los procesos de comunicación entre la profesora y algunos de sus alumnos, donde se evidencien rasgos distintivos de modelos mentales, es necesario analizar la relación entre las tríadas sistémicas [Componentes, Relaciones, Operaciones] y [Sustrato, Estructura, Dinámica] que abreviamos [C, R, O] y [S, E, D], Vasco (1995, 2014). Lograr la caracterización de los modelos mentales [cronotópicos] exigió seguir la indicación de triadas sistémicas, de tal modo que se lograran los indicios o rastros de dichos modelos. Ello se hizo en tres momentos: 1) La identificación de los tópicos, que favorecerá la manifestación de, por lo menos componentes y relaciones. 2) La descripción de procesos comunicativos relacionados con objetos, relaciones y operaciones, y 3) La caracterización de algunos de los modelos mentales [cronotópicos][50] que se pudieron inferir del análisis de los datos del momento anterior.

Así, el capítulo describe tres momentos y sus resultados, a saber:

> 4.1. Identificación de tópicos de la interacción en las distintas sesiones de clases
> 4.2. Descripción de procesos de comunicación en aula de matemáticas de una profesora y sus alumnos y su relación con los modelos mentales
> 4.3. Descripción y caracterización de algunos modelos mentales [cronotópicos] de una profesora y sus alumnos.

Estos tres momentos se presentarán a continuación.

## 4.1. Identificación de tópicos de la interacción en las distintas sesiones de clases

En este primer momento se describirán los principales pasajes seleccionados. En todas las Clases, salvo aquellas en las que hubo examen o evaluación final, se encontraron pasajes que cumplieron con los *criterios de selección*; recordemos que los dos criterios de selección son: *Primer criterio. Debe existir interacción comunicativa que manifieste turnos de habla entre los interlocutores, con al menos un turno de habla entre el profesor y mínimamente un alumno y ello debe evidenciarse en el registro audiovisual o las transcripciones de clases. Segundo criterio. El tópico de comunicación debe ser sobre temas de Geometría Analítica*. Por lo anterior, se decidió tomar pasajes de las Clases 1, 2, 4, 9 y 11. Transcribir estos pasajes fue de suma importancia, porque consideramos es allí donde tratan de expresarse los modelos mentales cuando la profesora y cada uno de sus estudiantes hacen el intento de producir formalmente matemáticas. El orden de los pasajes que se presenta aquí se hizo teniendo en cuenta la secuencia de análisis de *grafías, *metrías y *nomías. Por ejemplo, el primer pasaje

[50] Asesorías con Dora Calderón. 4 de octubre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

que se seleccionó de la Clase 1, será uno de los últimos en ser analizados, pues en él se encuentran algunas *nomías expresadas por un alumno y la profesora.

Transcribamos el primer pasaje.

**Clase 1. C1. 16-08-17.**
*Contexto:* Discusión de cómo se obtiene una sección cónica.
*Pasaje comunicativo:*

> P: la pregunta es clara/ ¿cómo se obtiene cada sección cónica?
> Eh3: pues se ejerce una fuerza y //
> P: no
> Eh3: ¿no?
> Em1: Mijo no estamos en física
> Eh3: ajá
> P: No/ eso son de las aplicaciones/ la pregunta viene después/ cómo se obtiene cada una/ depende de la inclinación /// que le demos a él
> Eh4: la parábola
> P: al plano/ el corte del plano al cono/ ¿cierto?
> Eh4: seño la del °()° ↓ debe ser menor de 90°
> P: la del °()°↓ debe ser menor de 90° // ¿qué más?// cómo se obtiene la hipérbola
> §: (Voces en el ambiente) (())
> P: ¿cómo se obtiene la hipérbola?
> Em?: °()°
> P: y / ¿cómo va el plano? / ¿cómo es el plano en este caso?
> §: (Voces en el ambiente)
> P: ajá, (()) de acuerdo a alguien que se llama directriz
> P: dale, siguiente

El tópico del pasaje anterior es la enseñanza de la sección cónica como corte del cono tomada como procedimiento de obtención de la cónica. La Profesora inicia el momento de la Clase 1 con la pregunta *¿cómo se obtiene cada sección cónica?*, y se pueden notar dos tipos de respuestas, donde cada estudiante que oye la pregunta trata de interpretar algunas palabras generando imágenes y modelos mentales que le permitan interpretar las palabras en uno de esos modelos: una que se alojó en el área de la Física, cuando un alumno considera que se obtienen empleando una fuerza y la otra que hace referencia al ángulo de corte del plano al cono de Apolonio. En este pasaje hay pistas de enunciados legaliformes en torno a cómo se puede obtener la sección cónica hipérbola, los cuales clasificamos como *nomías que más adelante serán objeto de análisis.

Transcribamos el segundo pasaje.

**Clase 1. C1. 16-08-2017.**
*Contexto:* exposición de una alumna sobre la obtención de las secciones cónicas a partir de cortes del plano con un cono.
*Pasaje comunicativo:*

P: ¿O sea cómo se obtiene por ejemplo la circunferencia?
§: (Voces en el ambiente)
Em3: o por cualquiera de (()) qué °()forma recta (hace un movimiento con la mano como una recta en el espacio paralela al piso)
P: qué cosa/ qué cosa es así ↑/ que tú me estás diciendo que es así (repite el movimiento de Em3 mientras se nota el desconcierto de la profesora)
§: (Voces en el ambiente)
Em3: (()) Cono de forma recta seño// una recta con un aa
P: Maginate tú// °()° Qué es la intersección/ (()) Vamos a mirar la atención sobre la imagen que tiene Em5 de cónica
Em1: qué es la intersección//entre/ que parte la intersección entre un cono y un plano
P: y un plano
Em1: interceptando el cono eee
Em2: el plano
Em3: en el plano con 90°
Eh3: nooo aa
§: (Voces en el ambiente)
P: ¡Si!/ exactamente perpendicular al cono/// bien/ la parábola
§: (Voces en el ambiente)

El pasaje anterior muestra una interacción comunicativa entre la profesora y sus alumnas para obtener la sección cónica *circunferencia*. Para la alumna hacer un corte horizontal del cono de Apolonio implica que aparezca la circunferencia en el borde del cono, es decir, hay pistas de un modelo mental [cronotópico] de la alumna que identifica que si se hace un corte del cono que sea paralelo al piso del salón de clases se debe obtener una circunferencia. Si vemos la posición estándar del cono de Apolonio como se muestra en la figura 10, donde se manifiestan rasgos distintivos de modelos mentales sobre la obtención de secciones cónicas, pues no tendríamos objeción alguna en aceptar el planteamiento de la alumna. El problema es cuando la base del cono deja de estar posada sobre el piso del salón de clases. Según el gesto de desaprobación de la profesora, hay pistas de un modelo mental [cronotópico] que no lo reconoce así, rasgos homomórficos, porque el ángulo debe estar asociado es al eje central del cono.

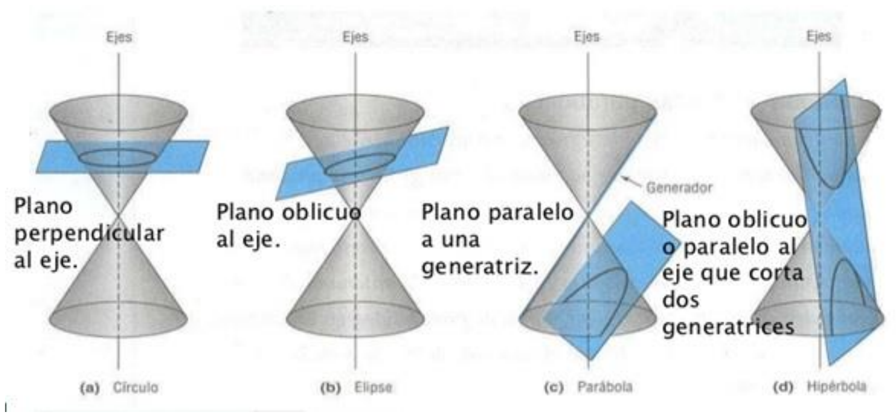



Figura 11. Obtención de las secciones cónicas en el cono de Apolonio y cortes del plano con respecto al eje.

Fuente: http://epsomat.blogspot.com/2012/09/el-cono-de-apolonio.html

Transcribamos el tercer pasaje.

**Clase 2. 30-08-2017.**
*Contexto:* Explicación de la profesora sobre cómo obtener la ecuación general de la circunferencia.
*Pasaje comunicativo:*

> P: bien/ el ejercicio dice así/(Ruidos en el ambiente) / pero déjenme copiar el ejercicio//dice así/// (Copia en el tablero) halle la ecuación de la circunferencia cuyas coordenadas de los extremos de uno de sus diámetros son los puntos A (4,6) / B (-8,-2) (())// bien/ primero pregunto/ (()) la ecuación general / o sea / a donde debo llegar yo / ¿cuál es la forma general de la ecuación de la circunferencia?/
> §: x cuadrado/ más b x // (())
> P: (Hace un gesto de aprobación con la cabeza) // yo les dije a cada fila/ de qué manera tienen qué hacer // tengo otra pregunta/ para hallar/ la ecuación de una circunferencia/ // ¿que necesito? /// el centro y el radio/ tengo el diámetro/ ¿Cómo hallo el radio? //
> Eh: ¡con punto medio!

P: con punto medio/ ¿por qué? // Porque el centro está en la mitad (Ilustra con las manos) del extremo que corresponde a el diámetro/ entonces será el punto medio/ ¿cómo hallo el radio?
§: la distancia/ con el punto medio/ con el centro/ y uno de esos dos puntos/ o/ ¿de qué otra manera? /// el diámetro/
P: ya tienen todas las condiciones para un examen/// ¿preguntas? // ¿hay alguna pregunta? / / ahora/ ¿cómo se halla el punto medio?
§: y uno/ y uno/ coma x uno más x dos (())
P: es al revés/ así te pasó con la ecuación (()) invertiste/ porque cuando tu inviertes las coordenadas del punto/ el punto está ubicado en otro lugar
Em: ¿cómo así? / ¿cómo así?
P: hallar el punto medio/ ¿te acuerdas cómo es?
Em: no entiendo/ usted le está diciendo a él que sí invierte/
P: es al revés / las coordenadas del punto
§: (Hablan todos a la vez)
P: A ver/ a ver/ uno solo// vamos a recordar/ con tanto que han hecho se han confundido/ (()) yo tengo la coordenada en y
§: (Todos hablan a la vez)
P: la distancia que hay del centro a cualquier punto/ halla el radio /
§: (())
Eh: seño/ ¿cómo hallo el radio?
P: como dijo él /
Eh: es el diámetro entre dos / (La profesora responde dudas de algunos estudiantes, mientras ellos resuelven el ejercicio)

Sobre el pasaje anterior se puede anotar lo siguiente: Mediante el enunciado: *… halle la ecuación de la circunferencia cuyas coordenadas de los extremos de uno de sus diámetros son los puntos*, la profesora instala el tópico: la sección cónica llamada “circunferencia”. Además, en el segundo orden del enunciado da una instrucción: *hallar la ecuación de la circunferencia*; es decir, pide una acción (operación) y un resultado.  El pasaje anterior nos muestra que el propósito de la clase, en ese momento, se centra en obtener la ecuación general de la circunferencia cuando están dados los puntos extremos de uno de sus diámetros. La profesora indaga por aspectos que se deben tener en cuenta para tal propósito y además indaga por cómo se puede hallar el radio de la circunferencia.

En el pasaje anterior la profesora le advierte a una alumna que invierta el orden de la pareja ordenada que representa el centro de la circunferencia, *P: es al revés/ así te pasó con la ecuación (()) invertiste/ porque cuando tu inviertes las coordenadas del punto/ el punto está ubicado en otro lugar.* Por su parte la alumna presenta su argumento: *Em: no entiendo/ usted le está diciendo a él que sí invierte/.* Hay pistas de que los modelos mentales con énfasis en lo topométrico identifican una pareja ordenada como centro de una circunferencia, pero interpretan el orden de las coordenadas de manera diferente. Vemos también que hay un acuerdo en la comunicación entre los agentes profesora y un alumno que insinúan isomorfismos: cuando un alumno le pregunta a la profesora cómo halla el radio de la circunferencia y ella responde: *como dijo él /*. En este caso la profesora parece establecer que hay un isomorfismo entre el modelo mental cronotópico de un alumno con el de ella.

En la Clase 4, se desarrolló un problema de aplicación del círculo que vinculó el concepto de área. En el análisis conjunto de la profesora y algunos alumnos se pueden identificar huellas sobre este concepto métrico. A continuación, se presenta este pasaje comunicativo, Clase 04 (*Clase 04. C4. 13-09-17*), cuyo énfasis es sobre área. La actividad es la que muestra la figura 11.

**Clase 4. 13-09-2017.**

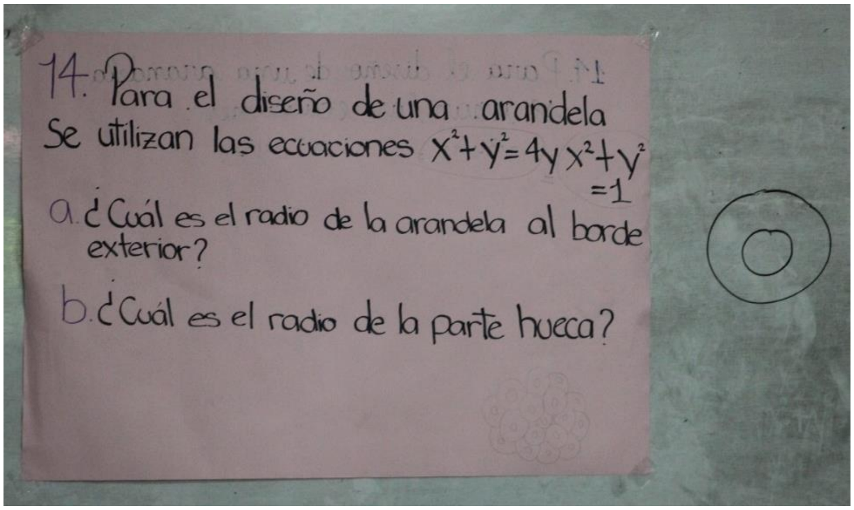



Figura 12. Actividad de aplicación de la circunferencia para el cálculo de un área.

*Contexto:* Análisis de un problema de aplicación del círculo: diseño de una arandela.

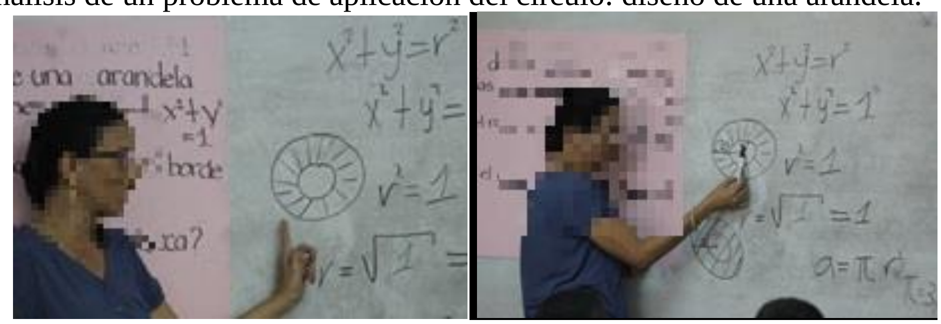



Figura 13. Se muestra el área a la cual se refiere la profesora

§: π(pi) por r(ere)  al cuadrado
P: si esa es la fórmula para hallar el área/ π por r al cuadrado/ ¿Quién me dice cómo hallamos esa área?
Ee: con la fórmula
P: vamos a pensar antes de hablar/ ¿tú que dices Eh? /
Em: con el radio al cuadrado por π°()° hallamos el área
P: ¿cuál área? /// me está diciendo que el área está/ el área todo/
Em: la de afuera
P: ella me está dando la de adentro/ ¿cierto?/ yo lo que le dije / ¿Cuál es esta área? / ¿tú que dices? / ustedes me están dando una idea de cómo hacerlo/
Em: con la primera ecuación/ x al cuadrado más y al cuadrado igual a r cuadrado / el área es igual a π que es 3,16
P: a mí no me interesa a que es igual π/
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())
P: ¿Cuál área? / tú me estás diciendo que este radio es dos/ ¿cierto? / y me está diciendo que este radio/
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())

Em: al área de adentro hay que restarle a la de afuera
P: ¿no será a la de afuera la de adentro?
Eh: que es la mayor/ sería uno
P: yo le quito esta área pequeña/ ¿Qué me queda?/ el área de la arandela/ (()) como una dona /como una dona/ que parte de la dona (()) a la parte hueca/ sí o no/ o como el trululú/ exactamente como el trululú/ el área que uno se come es el bordecito/ ósea/ completo porque hay un hueco/ hay un hueco/ uno no se come toda un área completa/ porque hay un hueco/ entonces/ para yo poder hallar el área que me como/ tengo que restarle el huequito/ eso es exactamente lo que viene siendo allí / entonces/ cual es el área de esta/ ¿Cuál será el área solamente de la partes esta de acá? /

Figura 14. La profesora trata de ejemplificar con sus manos el área pedida

§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())
Em: 3π
P: ¿Por qué?
Em: porque el área total es 4π y el área de adentro es 1π/
P: ¿estamos claros?
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())

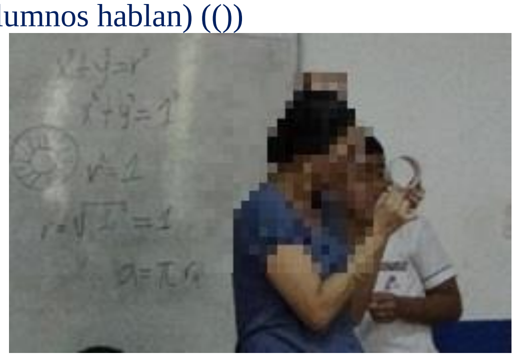


Figura 15. La profesora toma un carrete de una cinta adhesiva para explicar el área que se pide

P: bueno/ ya se los voy a hacer de nuevo/ que si yo aquí / (()) el área mayor va a ser π por r cuadrado y el área menor va a ser π por r cuadrado también/ el área esta/ que viene siendo lo que mide la arandela viene siendo el área menor/ ¿eso es nuevo? (())

Lo que se puede notar es que los alumnos, para mostrar la relación entre el área mayor y el área menor de la arandela, que se está pidiendo y que implica una comparación de magnitudes de área, manifiestan las siguientes expresiones: *la de afuera*, *la mayor, el área total, el área de adentro*; mientras que la profesora expresa *área todo*, *la de adentro, la de adentro, área pequeña, área completa*, *área mayor y área menor*. Ningún alumno o la profesora emplearon la expresión del enunciado de la actividad: *borde exterior*. Se podría plantear que desconocer el concepto de *borde exterior*, significa desconocer también el *borde interior* y las relaciones entre ellos, como por ejemplo que sus límites delimitan la corona circular que tiene el mismo alto (o altura o espesor) de la arandela y, con respecto al centro, delimitan también los radios interno y externo, como lo muestra la figura 15 y que podrían dar una mejor comprensión de un nivel más complejo del objeto matemático en estudio.

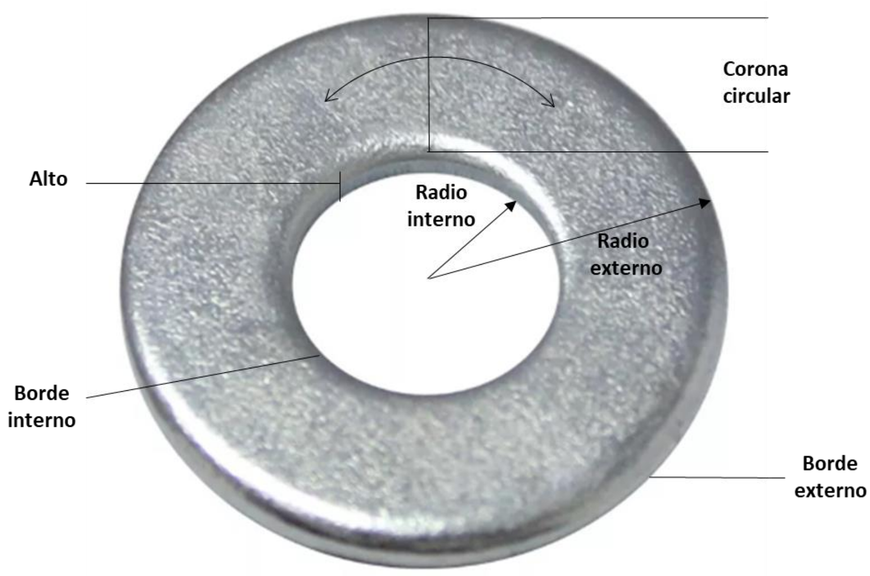



Figura 16. Partes de una arandela

Desde la cronometría, al parecer no hay rastros en el pasaje comunicativo anterior porque se trataría de modelos estáticos que se emplean para el cálculo de un valor concreto como la magnitud del área. En cambio, desde la topometría sí se observan rasgos de modelos estáticos que identifican la metrización de un área menor y de un área mayor (o áreas) superficial que permitirán calcular el radio hasta el borde exterior de la arandela y el radio de la parte hueca de dicho objeto.

Por sus funciones para enseñar, la profesora recurre a comparaciones de la arandela con gestos, empleando sus manos, con el carrete de una cinta adhesiva, con una dona y con un dulce local que se llama *trululú* muy conocido por los alumnos. En dichas comparaciones al parecer estaría la clave sobre el modelo mental [cronotópico] que emplea la profesora, pues es un modelo que reconoce la forma de la arandela en diversos objetos que están en la vida cotidiana de ella misma y de los alumnos. Como diría Vasco (2020): *Esos modelos mentales imaginados guían mi actividad, y continuamente tengo que "echarlos a correr" ("run" en el sentido de la informática) para "navegar" en el mundo externo, poniéndolos en marcha rápidamente y conectándolos de alguna manera con mis músculos y mis miembros para poder sobrevivir*. Estas comparaciones las muestra la figura 16.

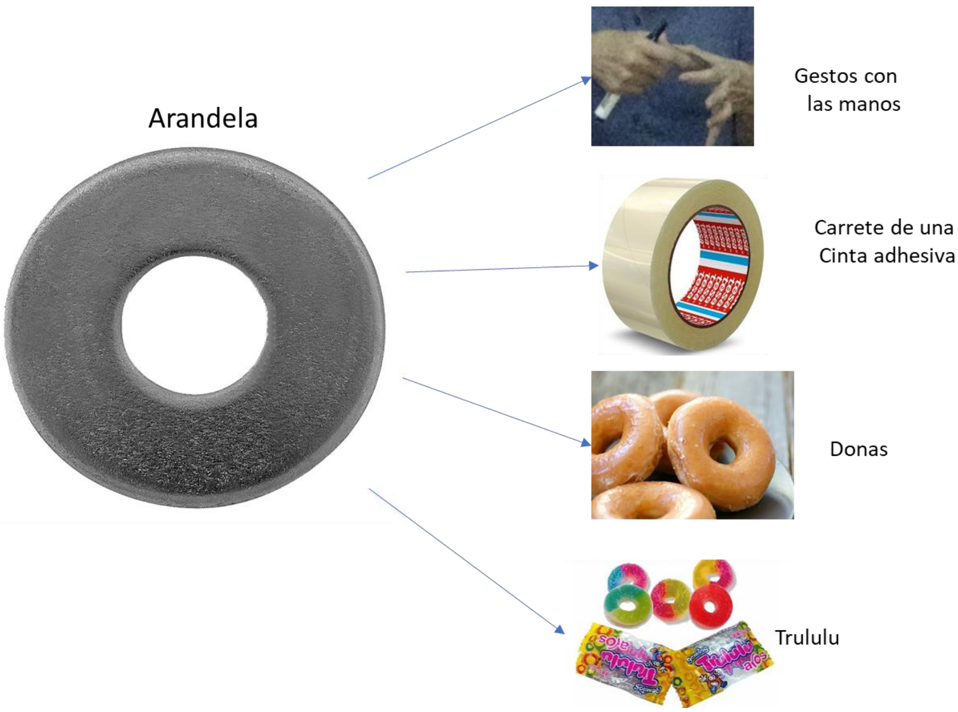



Figura 17. Comparación de una arandela con otras formas isomórficas.

Este fue uno de los momentos más hermosos que pude percibir como observador de las clases de matemáticas, viendo el esfuerzo de la profesora por enseñar a sus alumnos la forma de la arandela, por la manera en que relacionó esa forma con partes de su cuerpo y con cosas de la vida cotidiana, con objetos de su entorno sociocultural que eran reconocidos por la mayoría, si no por todos, los alumnos. He aquí el gran potencial de la asignatura de Geometría Analítica, que más allá de pensarse en función del cono de Apolonio o de los lugares geométricos de Descartes, podría conectarse con el ambiente sociocultural de los alumnos, con la vida, con la cotidianidad. Se infiere que la profesora apela a un isomorfismo entre su modelo mental con los modelos mentales de sus alumnos; es clara esa intención de buscar algo en común, algo así como: *¡Ah! ¿No conoces el trululú? … pues deberías conocer una dona, ¿no conoces una dona?, pues entonces, ¡conocerás el carrete de una cinta adhesiva!, ¿no conoces nada de lo* *anterior?, entonces empleo un gesto con mis manos,* de tal forma que ellos puedan identificar la forma de la arandela con algunos de las ilustraciones que empleó, apela a la imagen estabilizada que es ya un modelo mental (D’Amore, 2006), que se daría por compartida en el aula de matemáticas.

Transcribamos el cuarto pasaje. La Clase 9 fue la clase donde se halló más información sobre las interacciones entre alumnos y la profesora. En esta clase el objeto de estudio fue la parábola y sus aplicaciones, ver Riaño (2017a).

**Clase 09. C9. 18-10-17**
*Contexto:* Estudio de la parábola y sus aplicaciones
*Pasaje comunicativo:*

P: bueno/ ¿entendido? / ¿ahora sí estas lista?/ ¿tenía algo del otro mundo la aplicación?/ ¡nada! /// el suyo/ ¿Cuál es?/ el 10 de la página 187/ se ubican en este punto/ y van a leerlo mentalmente/ van a intentar hacerlo ustedes/ y luego ella va a hacer la explicación/ bueno a ver/ ese es muy parecido al que hizo Em/ es lo mismo/ listo/ empieza por la gráfica/// Eh le di el número 8/ Eh le di página 191 el i) / así que el que no expuso yo le voy a poner cero
Eh: seño no hay tiempo/ igual ya se va a acabar la hora/
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())
P: muy bien nos sentamos/ vea está prohibido estar dando permiso y cada rato quieren estar en el baño/ te dije que esperaras a que viniera Em/ ↑ te dije que esperaras a que viniera Em/ bueno ahora sí.
Em: bueno/ como decía en el ejercicio/ una antena parabólica tiene 22 metros de ancho/ y 12 metros de alto/ entonces como está en la figura

Figura 18. Em. realiza una *grafía que representa el problema de aplicación de la parábola.

P: a ver/ vamos a leer el problema en voz alta/ Eh léelo

Eh: una antena parabólica[51] tiene 22 metros de ancho y 12 metros de alto/ la figura 18 muestra la ubicación de la antena en el plano cartesiano/
P: ¡ok!

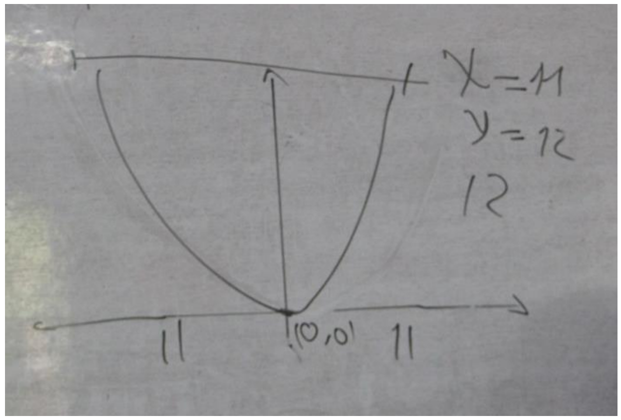



Figura 19. Gráfica *realizada por Em en representación del problema 10 de la página 187*

P: a ver/ ¿de dónde sacaste tú el 11 y el 12?
Em: el 12 es la altura/ y el 11 y el 11 / es de dividir el 22
P: ¿y qué es el 22?
Em: es el ancho de la antena
P: ¿Dónde está el ancho? // muéstrame el ancho/ de dónde a dónde/ aja /// y/ ¿Por qué es 11 y no 10 y 12?
Em: porque es la mitad
P: ¿y por qué es la mitad?
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())
P: puede estar en cualquier vértice
Eh: seño/ porque la parábola es simétrica
P: es simétrica/ y el lado izquierdo va a ser exactamente igual al lado derecho/ y el eje de simetría la divide exactamente en dos gráficas iguales/ en dos partes iguales/ ¿entonces?
Em: entonces como la parábola abre hacia arriba
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())
P: por favor/ por favor/ por favor/ ¿de dónde sacas tu que *x* vale 11 y *y* vale 12?/ ¿Cómo sabes tú que *y* vale 12 y *x* vale 11?
Em: porque son las coordenadas/
P: Yo sé lo que estás haciendo/ pero yo necesito que tú le expliques a ellos que es lo que estás haciendo/ no lo puedes hacer así a la trola tolondra/
Em.: ella quiere que tú le digas por qué el 11 y el 12
P: vea mijo/ yo no es que quiera molestar/ pero uno tiene que hacer las cosas bien/ ya yo le expliqué a ella de dónde sale/ entonces yo le estoy preguntando con justa razón/ préstame ahí el marcador/ (La profesora se levanta de su escritorio, borra la gráfica hecha por la alumna y realiza su gráfica de la actividad)

[51] Sabemos que una antena parabólica no puede ser una parábola, pues la parábola es una figura plana, mientras que la antena es una figura sólida, metálica, con concavidades y convexidades que parecen cambiar según cambia el punto de vista, de tal manera que podría considerarse un elipsoide, un hiperboloide o un paraboloide, que también podría ser hiperbólico. Asesorías con Carlos Vasco. 1 de septiembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

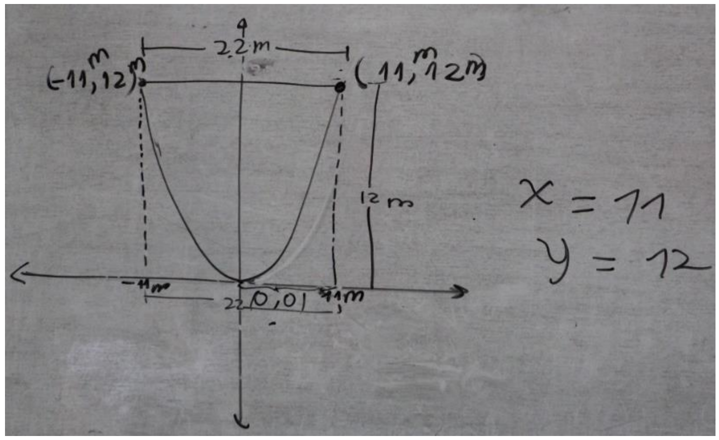



Figura 20. Gráfica realizada por la profesora en representación del problema 10 de la página 187

P: ¿cambió? / ¿Cambió? / ¿cambió?
Eh: obvio
P: ahí el ejercicio no le dice que *x* vale 11/ usted lo va a intuir / dale dale/ ya tienes todo ahí/ no mires a Eh/ ya tienes todo/ te lo digo yo
§: (Em procede a realizar el proceso algebraico del ejercicio)

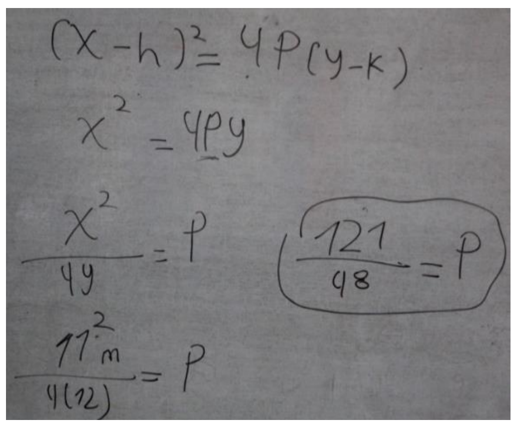
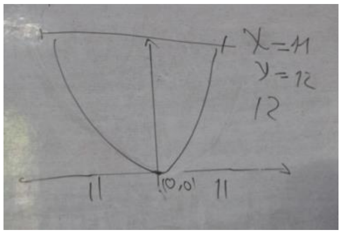



Figura 21. Proceso algebraico correspondiente al problema 10 de la página 187, realizado por Em.

P: ¿Eso era difícil de explicar? / ¡no! / solamente piden hallar la distancia/ prácticamente es el foco/ él es el receptor/ que te están pidiendo/
Eh: seño yo tengo el mismo/ pero con una taza
P: una taza/ igualito/
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())

En la búsqueda de rastros del modelo mental e identificando que el tópico de la interacción es la parábola, la pregunta del investigador es: ¿Qué se dice o qué se manifiesta sobre la parábola?

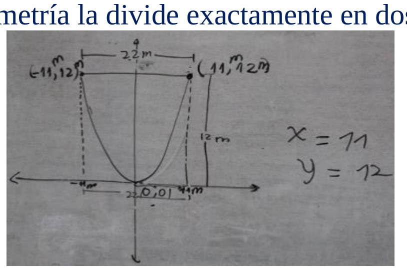
Las expresiones o acciones[52] que representan conocimiento sobre el objeto matemático *parábola* por parte alumnos son los siguientes:

Em: 


Em: es el ancho de la antena
Eh: seño/ porque la parábola es simétrica
Em: entonces como la parábola abre hacia arriba
Eh: seño yo tengo el mismo/ pero con una taza

Por su parte, la profesora expresa el siguiente conocimiento matemático sobre la parábola:

P: es simétrica/ y el lado izquierdo va a ser exactamente igual al lado derecho/ y el eje[53] de simetría la divide exactamente en dos gráficas iguales/ en dos partes iguales/ ¿entonces?

P: 


P: ¿Eso era difícil de explicar? / ¡no! / solamente piden hallar la distancia/ prácticamente es el foco/ él es el receptor/ que te están pidiendo/
P: una taza/ igualito/

Con el análisis de una parábola, partes de una parábola, distancia del foco de la parábola al vértice, distancia del vértice de la parábola a su directriz, emergen rasgos de posibles modelos estáticos que hacen referencias a patrones, reglas y leyes sobre magnitudes de la espacialidad. Según las expresiones o acciones que representan conocimiento sobre el objeto matemático

[52] Tenemos presente que algunas acciones son gestos, pero todos los gestos o acciones pueden ser expresiones o no, intencionales o no, claras o no.

[53] "La profesora le atribuye la simetría al dibujo como una propiedad que tiene independientemente del observador, pero si habla de eje de simetría es porque piensa en una rotación de media vuelta alrededor de ese eje y compara el resultado de la rotación como estado de llegada con la memoria que tiene del estado de partida". Asesorías con Carlos Vasco. 7 de septiembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

*parábola* por parte de alumnos, sus primeros rasgos de los modelos mentales [cronotópicos] al parecer hacen referencia a características de la parábola; no obstante, no se puede afirmar que ellos "saben" qué es o no es una parábola; solo se puede evidenciar que más allá de modelos topológicos o topográficos[54] que expresan la simetría de la parábola, ellos dicen que puede "abrirse" hacia arriba, que tiene "un ancho". Al parecer también hay enunciados legaliformes que denotan un modelo mental con énfasis en lo toponómico: *… porque la parábola es simétrica.* Según las expresiones o acciones que representan conocimiento sobre el objeto matemático *parábola* por parte de la profesora, ella plantea características de la parábola como el eje de simetría, lados, división de la parábola, el foco, el receptor; la compara con la superficie cóncava de una taza, y también manifiesta enunciados legaliformes que denotan un modelo mental con énfasis en lo toponómico. No se puede afirmar que los modelos, de los alumnos y la profesora coincidan en el trato algebraico de la parábola por medio de su ecuación para calcular el receptor de la antena parabólica, pues, según Vasco (2021),[55] este es un *tratamiento* de las fórmulas de la teoría, no un *manejo* del modelo. Continúa así: "Los alumnos suelen hacer los tratamientos algebraicos sin pensar en los modelos mentales, sino en el

[54] ¿Por qué no se estableció que son modelos topométricos sino topológicos o topográficos? En asesoría con el profesor Vasco, se precisaron algunos conceptos: "Una cosa es el radio como segmento del centro al borde, otra el diámetro de borde a borde, otra el borde, otra el foco como punto o la raya que une los dos focos, etc., que son todavía topo*lógicos, pero todavía no topo*métricos, pues solo se van a volver *metrías después de haber escogido una base para tomar medidas y atribuir números a lo topo*gráfico (las rayas) y a lo topo*lógico (el radio, el diámetro, el centro, el vértice, el foco, la circunferencia, la directriz); la *metría se produce después de haber tomado medidas para cuantificar lo cualitativo que es todavía topo*lógico. El círculo tiene diámetro y se puede tener el interés de medirlo, pero no sucede lo mismo con una parábola mental donde el ancho es difuso sin que se pueda medir. Tampoco se ve con claridad que el centro, el foco, el vértice o el otro foco se puedan medir (eso significa que tienen dimensión cero), pues la única que puede volverse métrica es la rayita recta imaginaria entre dos puntos, como la distancia focal del centro al foco, que es un radio de una circunferencia invisible, y la distancia interfocal, que es un diámetro de una circunferencia invisible". Asesorías con Carlos Vasco. 22 de noviembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

[55] Asesorías con Carlos Vasco. 7 de septiembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

“manipuleo” o “boleo” de símbolos con ciertas reglas formales (para ellos arbitrarias), que permiten ciertas transformaciones y prohíben otras. Si la multiplicación es conmutativa, ¿por qué para algunas parábolas se permite escribir ‘2xy’ pero se prohíben ‘x2y’ y ‘xy2?”

También se encuentran rasgos de modelos dinámicos del trazado de la parábola en la acción de una estudiante al dibujarla, a partir de las instrucciones de la profesora. Los rasgos de un modelo mental que identifica el ancho de una parábola indicando su mitad, sin dar medidas o escalas numéricas, sino planteando perceptivamente un valor anumérico o prenumérico, es decir, que tiene énfasis en lo cronométrico si nos referimos al proceso que determina el ancho de la antena, yendo de un punto a otro en el tiempo. En la profesora, al parecer opera un modelo mental dinámico del trazado de la parábola, cuando decide borrar la gráfica hecha por la alumna y hacerla ella misma, donde tiene una representación mental del objeto matemático. Ambos modelos mentales, tanto de los alumnos como de la profesora, coinciden en aceptar la comparación de la parábola, cuya representación está en 2d, con una taza que es un objeto con volumen, en 3d. El ejemplo de la taza provino de una alumna y fue aceptado por la profesora, es decir, hubo isomorfismo. Así, podríamos pensar que nos remitimos a la confusión entre la parábola como una línea en 2d y la antena parabólica como una superficie en 3d; como también a la distinción mental precisa entre una superficie esférica y una superficie parabólica.

Trascribamos un último pasaje.

*Contexto:* Representación de la sección cónica *elipse* empleando materiales manipulativos
*Pasaje comunicativo:*
**Clase 11. C11. 01-11-17.**

> P: bueno/ entonces miren/ por lo general puede pasar lo siguiente/ que el lápiz se le coloca dentro de la lana y no pinte/ entonces hay que hacerlo bien hecho/ bueno/ miren/ vamos a hacer lo siguiente/ marcamos hasta aquí/ y la otra parte/ la pasamos por arriba / tensamos/ y obtengo la elipse

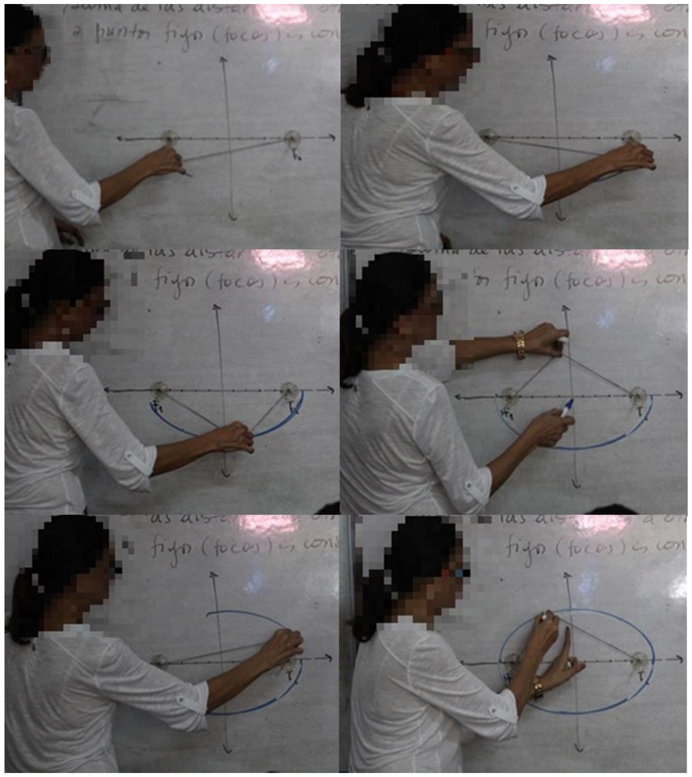



Figura 22. Transición de la Clase 11. C11. 01-11-17. La Profesora realizando la gráfica de la elipse usando material manipulativo

P: y que dice/ que la distancia que hay de este punto a este/ siempre va a ser una constante / miren/ si me pongo aquí/ la suma va a ser la misma/ una constante/ ¿está claro? (La profesora hace referencia a la distancia del foco 1, F1, a la de un punto que está en el perímetro de la elipse y la de este punto a el foco 2, F2) / yo voy a tomar un punto aquí / de coordenadas (*x*, *y*) /

Para llevar a cabo la actividad anterior, propuesta en la transcripción, la profesora había solicitado a los alumnos al final de la clase anterior, que trajeran algunos materiales como lana y estoperoles (en Colombia se conocen más como *chinches*). La profesora usó dos ventosas plásticas (en Colombia se conocen más como *chupas*) y lana. El propósito fundamental de la profesora con dicha actividad manipulativa es demostrarle a los alumnos que la suma de las distancias desde cualquier punto P de la elipse a los dos focos es constante, e igual a la longitud del diámetro mayor (d(P, F1) + d(P, F2) = 2a). En la figura 22, podemos ver cuáles son las representaciones que hace la profesora cuando demuestra el origen de la ecuación anterior.

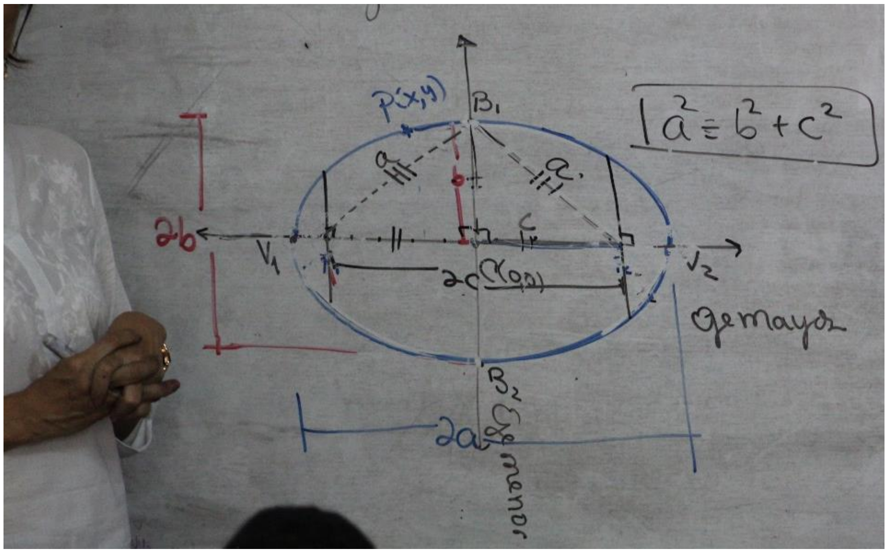



Figura 23. Representación gráfica de la elipse para obtener la fórmula d(P,F1)+d(P,F2)=2a

Hay que tener presente que la demostración de la ecuación canónica puede realizarse tanto en la posición horizontal, por la que optó la profesora, y en la posición vertical donde la designación de parámetros suele cambiar. La interpretación que hace la profesora de 2a es la longitud que hay de $V_1$ a $V_2$ que son los extremos del eje mayor, como ella lo denomina y 2b es la longitud que hay de B1 a B2, denominada por la profesora como el eje menor. En un momento de la transcripción la profesora hace mucho énfasis en los cuidados que se deben tener; al parecer, ella tiene un modelo mental estático sobre la forma de la elipse que se quiere obtener. Este cuidado debe tener en cuenta las siguientes preguntas: ¿Qué sucede si en el triángulo abc, |a|=|b|?, ¿Si |a|=|b|, funciona la demostración presentada por la profesora? Estas preguntas sin duda podrían conllevar a escenarios de investigacion, dada la importancia que tiene dicho triangulo en la demostración, sea que escojamos la elipse en posición vertical u horizontal.

Esto se acompaña de las instrucciones: *hay que hacerlo bien hecho, vamos a hacer lo siguiente, marcamos hasta aquí, y la otra parte la pasamos por arriba, tensamos y obtengo la elipse.* Estas instrucciones generan una elipse en posición horizontal y cuya forma se parece más a la silueta de un huevo, no obstante, se puede distinguir el ovoide de la elipse por aspectos dinámicos como mayor simetría con respecto al eje central vertical. Con el empleo de la lana, hay rasgos del modelo dinámico del trazado, restringido por la longitud de la lana, en particular por el punto de quiebre de la lana que la profesora va tensando con la punta del marcador y cuyo trazado va generando dicha elipse. Por lo desarrollado en ese momento de la clase, no se pudo evidenciar que existiera una conexión entre la fórmula, $d(P, F1) + d(P, F2) = 2a$, y los modelos mentales que se emplearon para dicha actividad, donde no hubo participación de los alumnos sino solamente de la profesora. Los alumnos reproducían la actividad en su cuaderno solo haciendo la actividad de la profesora y verificando la forma de la elipse.

Los pasajes comunicativos que se describieron previamente, permitieron mostrar algunos tópicos de la interacción entre la profesora y algunos de sus alumnos. Del desarrollo de las interacciones observadas en la transcripción se pudieron manifestar algunos primeros rasgos sobre los modelos mentales [cronotópicos] que se emplean en el estudio de secciones cónicas como la hipérbola, la parábola y la elipse.

Ahora, procedemos a mostrar algunas formas de expresión de dichos modelos, segundo momento de este Capítulo, que fueron empleados en la solución de las actividades matemáticas representadas por dichos pasajes.

## 4.2. Los procesos de comunicación en aula de matemáticas de una profesora y sus alumnos y su relación con los modelos mentales

La tercera punta de nuestro Ψridente Teórico se vale de los procesos de pensamiento (noesis) como los de expresión e interpretación semiótica (semiosis) (Duval, 1993, 1999, 2006, 2017), y se apoya en la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones, TGRI, cuyas categorías claves son representar, interpretar y lenguajear, (Vasco, 2014). Esos elementos permitieron analizar y comparar múltiples semiosis expresivas e interpretativas de la profesora y algunos alumnos.

Para hallar formas de expresión de modelos mentales se procede identificando: i) *los aspectos de la interacción comunicativa en clase entre profesores y estudiantes y, en particular, los referidos a expresiones de modelos mentales [cronotópicos]*, y ii) *las formas de expresión de tales aspectos*. Para ello se hizo necesario hacer un estudio del ambiente o contexto sociocultural e interacción social de las clases donde se dan los *propósitos* de la comunicación entre la profesora de matemáticas y sus alumnos. Este proceso se desarrolló mediante la pregunta: *¿De manera específica qué expresaron cronotópicamente los alumnos y su profesora en una clase?*

Se decidió analizar la Clase 11, (*Clase 11. C11. 01-11-17*), debido a que esta fue la que más información transcrita tenía y más datos acordes con los objetivos específicos de la investigación. Las formas de expresión son representaciones discursivas con expresiones gestuales que a veces emplean otros registros de representación gráfica, numérica, etc. que realizan los alumnos y el profesor cuando realizan actividades matemáticas. Así, inicialmente se presentará un estudio del papel que juegan las palabras en la externalización de los modelos mentales [cronotópicos] y de los propósitos en la comunicación entre la profesora y algunos alumnos. Se empieza con las nubes de palabras, que es una estrategia que propone el ATLAS.ti8.

### 4.2.1. Nube de palabras

El análisis de las palabras empleadas en la externalización de modelos mentales comenzó con la creación de la *Nube de palabras* de la Clase 11, empleando el ATLAS.ti8, ver figura 23.

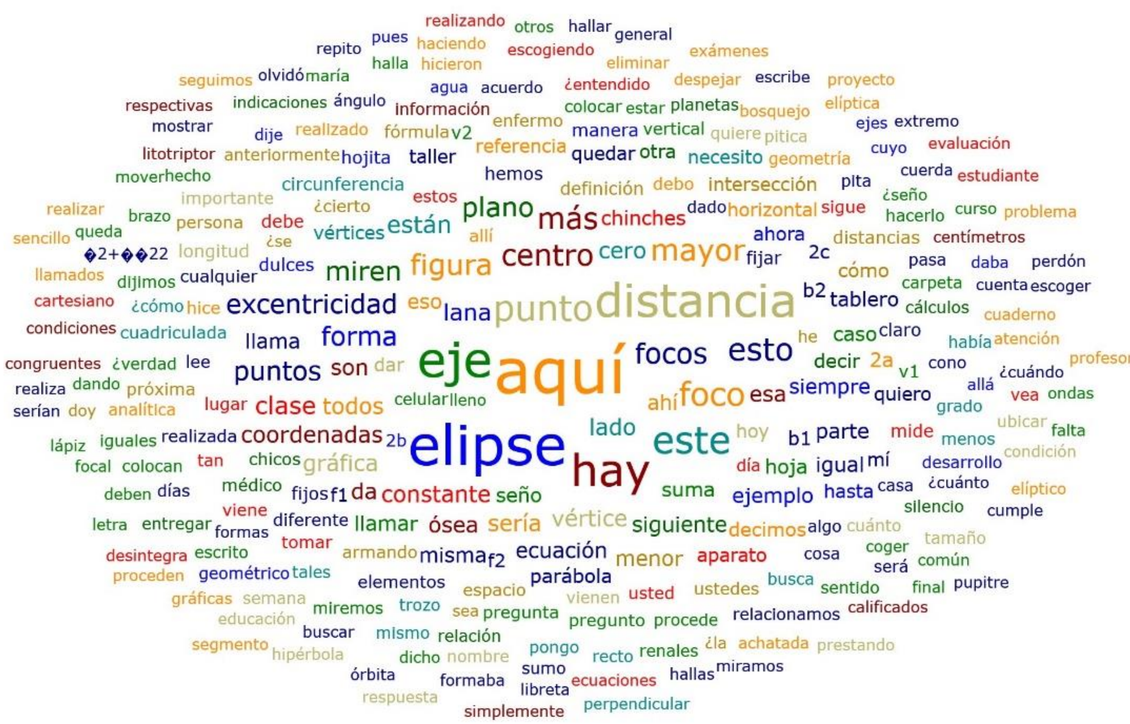



Figura 24. Nubes de palabras de la transcripción Clase 11. C11. 01-11-17.

Una nube de palabras, que generó el ATLAS.ti8, permite conocer la frecuencia de recursos lingüísticos, como las palabras del registro de un lenguaje oral o escrito (*logías y *logografías), que emplean alumnos y profesores, para representar, interpretar e incluso teorizar sobre sus modelos mentales cronotópicos. Gracias a las nubes de palabras se organizaron las Clases de forma descendente según el número de palabras que había en el texto de Word de su respectiva transcripción. A una Clase n, la vamos a simbolizar por Cn, y el número de palabras transcriptas en esa clase por X, y se va a organizar en una pareja ordenada (Cn, X)[56]. Los resultados fueron: **(C11, 5.196)**, (C1, 4.964), (C12, 4.771), (C6, 3.756), (C4, 3.668), (C5, 3.534), (C2, 3.494), (C13, 2.695), (C3, 2.435), (C9, 1.674), (C8, 1.194), (C10, 905), (C7, 473), (C14, 156). Se decidió entonces escoger a la Clase 11 por tener el mayor número de palabras transcritas, 5.196, se revisaron todas estas palabras y se hizo una selección dispendiosa del listado de palabras claves relacionadas con la Cronotopía, que llamaremos las *palabras cronotópicas,* a estas se le establecieron las frecuencias de uso, más el respectivo porcentaje que ocupa la frecuencia en toda la transcripción (con lista de exclusión), ver la figura 24. Cuando hubo la duda de uso de la palabra, la misma *Nube de palabras* da la opción de ver el contexto de ella.


Figura 25. Listado de *palabras cronotópicas* de la Clase 11.

La Tabla 6, presenta las *palabras cronotópicas* expresadas en dicha clase.

[56] En aquellas Clases donde el número de palabras es bajo, quiere decir que se realizó un examen, un taller o la clase fue interrumpida para tratar otros temas.

Tabla 6. Listado de *palabras cronotópicas* de la Clase 11. Frecuencia de uso verbal (F) y porcentaje en el texto transcrito (con lista de exclusión) (%).

| Palabra | F | % |
|---|---|---|
| achatada | 2 | 0,04% |
| analítica | 3 | 0,06% |
| ángulo | 2 | 0,04% |
| bolita | 1 | 0,02% |
| bosquejo | 2 | 0,04% |
| cálculo | 1 | 0,02% |
| cálculos | 3 | 0,06% |
| cartesiano | 2 | 0,04% |
| centímetros | 2 | 0,04% |
| centro | 22 | 0,43% |
| cero | 12 | 0,23% |
| circunferencia | 5 | 0,10% |
| congruentes | 2 | 0,04% |
| cónica | 1 | 0,02% |
| cónicas | 1 | 0,02% |
| cono | 3 | 0,06% |
| constante | 12 | 0,23% |
| coordenadas | 12 | 0,23% |
| coordenados | 1 | 0,02% |
| cuadriculada | 4 | 0,08% |
| cuerda | 2 | 0,04% |
| derecha | 1 | 0,02% |
| distancia | 46 | 0,90% |
| distancias | 5 | 0,10% |
| ecuación | 10 | 0,19% |
| ecuaciones | 2 | 0,04% |
| educación | 2 | 0,04% |
| eje | 51 | 0,99% |
| ejes | 2 | 0,04% |
| elipse | 60 | 1,17% |
| elipses | 1 | 0,02% |
| elíptica | 2 | 0,04% |
| elíptico | 2 | 0,04% |
| equidistantes | 1 | 0,02% |
| espacio | 4 | 0,08% |
| excentricidad | 17 | 0,33% |
| extremo | 2 | 0,04% |
| focal | 2 | 0,04% |
| foco | 26 | 0,51% |
| focos | 20 | 0,39% |
| fondo | 1 | 0,02% |
| forma | 17 | 0,33% |
| formas | 2 | 0,04% |
| formula | 1 | 0,02% |
| fórmula | 4 | 0,08% |
| geometría | 3 | 0,06% |
| geométricas | 1 | 0,02% |
| geométrico | 3 | 0,06% |
| grado | 3 | 0,06% |
| gráfica | 12 | 0,23% |
| gráficas | 2 | 0,04% |
| gráfico | 1 | 0,02% |
| hipérbola | 2 | 0,04% |
| horizontal | 6 | 0,12% |
| intercepta | 1 | 0,02% |
| intersección | 6 | 0,12% |
| lado | 12 | 0,23% |
| lados | 1 | 0,02% |
| larguito | 1 | 0,02% |
| longitud | 5 | 0,10% |
| matemática | 1 | 0,02% |
| matemáticas | 1 | 0,02% |
| mayor | 23 | 0,45% |
| menor | 10 | 0,19% |
| menos | 3 | 0,06% |
| mide | 5 | 0,10% |
| mitad | 1 | 0,02% |
| oblicua | 1 | 0,02% |
| órbita | 2 | 0,04% |
| ovaladito | 1 | 0,02% |
| parábola | 7 | 0,14% |
| paralelo | 1 | 0,02% |
| pedazo | 1 | 0,02% |
| pegaditos | 1 | 0,02% |
| perímetro | 1 | 0,02% |
| perpendicular | 2 | 0,04% |
| planas | 1 | 0,02% |
| plano | 18 | 0,35% |
| posición | 1 | 0,02% |
| primeros | 1 | 0,02% |
| punto | 30 | 0,58% |
| puntos | 17 | 0,33% |
| radio | 1 | 0,02% |
| rayo | 1 | 0,02% |
| recorrido | 1 | 0,02% |
| rectángulo | 1 | 0,02% |
| recto | 3 | 0,06% |
| redonda | 1 | 0,02% |
| redondeada | 1 | 0,02% |
| redondo | 1 | 0,02% |
| rotada | 1 | 0,02% |
| secciones | 1 | 0,02% |
| segmento | 2 | 0,04% |
| simetría | 1 | 0,02% |
| superficie | 1 | 0,02% |
| tamaño | 3 | 0,06% |
| transversal | 1 | 0,02% |
| triángulo | 1 | 0,02% |
| triángulos | 2 | 0,04% |
| trozo | 3 | 0,06% |
| vertical | 4 | 0,08% |
| vértice | 12 | 0,23% |
| vértices | 6 | 0,12% |

La suma de los porcentajes del uso de las *palabras cronotópicas* para la Clase 11 fue del 11,9%. En la Clase 11, cuyo tema central fue la elipse, sin duda fue esta palabra la de mayor frecuencia de uso, con un 1,17% del total de palabras usadas en la clase, seguida de las palabras: eje, punto, foco, mayor, focos, entre otras. Si observamos con atención las *palabras cronotópicas* de la Clase 11 y su contexto, pues ellas por sí solas no podrían clasificarse sin tener en cuenta el lugar que ocupa en la expresión, sea de la profesora o de los alumnos; entonces, podemos hacer las siguientes clasificaciones:

- Palabras que expresan aspectos topográficos de un posible modelo: elipse, cono, ejes, vertical, superficie, etc.
- Palabras que expresan aspectos topológicos de un posible modelo: geometría, forma, gráfica, tamaño, triángulo, etc.
- Palabras que expresan aspectos topométricos de un modelo: ángulo, radio, constante, trozo, redondo, etc.
- Mediante este método de las palabras no es posible identificar expresiones toponómicas, pues ellas requieren proposiciones completas, por ejemplo: *la parábola es simétrica*. No fue posible encontrar en las transcripciones una *nomía conformada por menos de tres palabras.

La última clasificación nos permite concluir que un estudio basado solo en función de palabras para establecer formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos] no es suficiente, por las siguientes razones:

1. Si a la expresión *la parábola es simétrica*, le sacamos el verbo, se perdería el sentido que se instala en una *logía y la posibilidad de clasificarla como en un enunciado legaliforme, es decir, una *nomía.

2. Con el análisis de textos a partir de las palabras deja de verse que en la construcción de las frases expresadas muchas veces los adverbios, los verbos, las preposiciones indican el significado expresado acerca de un objeto.[57]

Entonces según las dos razones anteriores nos podríamos preguntar: ¿Para qué sirve una estrategia basada solo en la *nube de palabras* y la *frecuencia de uso verbal* y *porcentaje en el texto* transcrito, es decir, solo analizando palabras referidas a nombres y adjetivos? La primera respuesta es que sirve mucho para las tres primeras subdisciplinas de lo tópico y para las tres de lo crónico previamente descritas. De las cinco clasificaciones anteriores, en las cuatro (4) primeras hay algunas respuestas: Permite identificar en cuál o cuáles subdisciplinas de la Cronotopía se podrían encontrar más rasgos de modelos mentales que harían énfasis en ellas. Por lo pronto, a partir del análisis de palabras, se puede decir que en la Clase 11, que hay pistas de que los alumnos y la profesora se expresaron más empleando modelos mentales con énfasis en los topográfico, lo topológico y lo topométrico.

La profesora y los alumnos expresaron representaciones o acciones sobre *grafías en 64 oportunidades; las *metrías fueron empleadas 62 veces y emplearon representaciones o acciones de *nomías en 16 oportunidades.  De estas 16 *nomías, a partir de la *red de códigos*, 14 fueron expresadas por la profesora y solo 2 por los alumnos. La profesora expresó en promedio una *nomía por cada clase. De estas *nomías muy pocas llegaron al nivel de enunciados legaliformes siendo en su mayoría establecimiento de reglas o patrones.  Lo que arroja pistas que los modelos mentales [cronotópicos] empleados relativos a las subdisciplinas

[57] Asesorías con Dora Calderón. 9 de septiembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

de lo nómico son referidos a reglas o patrones y que en su absoluta mayoría son más empleados por la profesora y muy escasamente por sus alumnos.

Las palabras relativas al cronotopo empleadas en la Clase 11 representaron la décima parte de todas las palabras empleadas por los alumnos y la profesora. En esas palabras, más las empleadas en las demás clases, hay una combinación de palabras provenientes del lenguaje común provenientes del contexto sociocultural (pedazo, redondeada, ovaladito, achatada, etc.) y del lenguaje convencional proveniente del contexto formal de enseñanza de las matemáticas (elipse, parábola, espacio, fórmula, radio, diámetro, etc.). Las palabras que se manifiestan con relación a lo cronotópico del contexto sociocultural con sus respectivos porcentajes de uso, con lista de exclusión, fueron: *achatada* (0,04%), *bolita* (0,02%), *larguito* (0,02%), *ovaladito* (0,02%), *pedazo* (0,02%), *pegaditos* (0,02%), *redondeada* (0,02%). Este 0,02% significa que solo fueron empleadas una sola vez y de estas 7 palabras todas ellas fueron empleadas por la profesora. Estas palabras están representando el 0,16% del total de palabras empleadas en la Clase 11, es decir, un poco más de una centésima parte de todo lo expresado. De ello se puede inferir que lo expresado por los estudiantes y la profesora corresponde a teorías verbales acerca del objeto matemático, y que en su mayoría se emplea el registro de lenguaje formal y se emplea muy poco el registro en lenguaje común, por lo menos en esta Clase 11. En estas *palabras cronotópicas* emergen pistas de modelos mentales con énfasis en lo topográfico, topológico y topométrico; corresponderían a teorías que interpretan el objeto matemático no solo en el registro de lenguaje formal sino empleando, de vez en cuando, y sobre todo cuando se trata de hacer comparaciones, el registro del lenguaje común. Como ya hemos planteado lo crónico se expresa especialmente en los procesos de medición y graficación; es allí donde nos dicen las subdisciplinas relativas al Crono* que lo crónico actúa. Todos los datos anteriores, son importantes porque nos muestran pistas de cómo se expresan los modelos mentales [cronotópicos] en una clase específica.

En la comunicación entre agentes noético-semióticos de la clase de matemáticas emergen expresiones compuestas por más de una palabra o acompañadas de acciones, donde el análisis por palabras ya no tiene sentido. Por ello se hace necesario avanzar en el estudio de la comunicación. Notamos que cuando se presentan desacuerdos en la profesora y algunos de sus alumnos se crea un campo fértil donde brotan muchos rasgos o huellas de modelos mentales. Este tema es el que se analizará a continuación.

#### 4.2.2. Las situaciones conflictivas de comunicación entre la profesora y algunos alumnos

Un *ambiente comunicativo* entre la profesora y alumnos se convierte en condición para la emergencia de formas de expresión de sus modelos mentales [cronotópicos]. El análisis de estas situaciones,[58] específicamente entre expresiones emitidas por cada uno de ellos como consecuencia del análisis conjunto que hicieron de una actividad matemática, permitió inferir que en las clases emergen condiciones que promueven acuerdos, desacuerdos comunicativos o expresiones de opiniones, en torno a las soluciones parciales de la actividad matemática. Cuando se dan estas *situaciones conflictivas de comunicación* surgen rasgos sobre las formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos]. Y cuando esto último sucede, existe la posibilidad de hacer comparaciones entre estos modelos. Dichas situaciones conflictivas de

[58] En el MEN (2006), en los tipos de actividad matemática de los lineamientos curriculares del MEN se mencionan la solución de problemas, el razonamiento lógico-matemático, la comunicación, la ejecución, examen y evaluación de los algoritmos y la modelación, que luego se ha venido considerando como la mejor manera de solucionar problemas. Asesorías con Carlos Vasco. 29 de noviembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

comunicación son claves para determinar formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos] porque permiten hacer comparaciones homomórficas[59] para luego establecer si se trata de isomorfismos entre esas formas de expresión de la profesora y algunos de sus alumnos, o de relaciones más débiles.

Una de las primeras comparaciones isomórficas que se puede hacer es sobre el empleo de prácticas cotidianas, artefactos y conceptos que se emplean como válidos a la hora de institucionalizar el saber. Vimos que para los alumnos no hay ningún problema en asociar, en sus procesos resolutivos de la actividad, elementos del ambiente de la clase o de su experiencia sociocultural para resolver la actividad y darles un grado de institucionalización similar al saber escolar; por ejemplo, tomar como referencia el piso del salón de clases, una escoba, una taza, etc., como se verá más adelante, sin embargo, en algunos casos la profesora no aceptaba algunos procesos o acciones de los alumnos. Estas acciones de los alumnos, de institucionalizar similarmente sus comprensiones con el saber escolar son las que generan en su mayoría en situaciones conflictivas de comunicación con la profesora de desacuerdos y por ende permitían concluir que mientras en el modelo mental de un alumno era válido, tomando una escoba como una regla, para el modelo mental de la profesora no lo era. Claramente estas situaciones conflictivas de comunicación que generan los alumnos con su espontaneidad están

[59] En asesorías con Carlos Vasco, se pudo establecer que las comparaciones, metáforas y analogías suelen ser solo homomórficas, con parecidos vagos, imprecisos, mezclados con diferencias. Dos modelos mentales son homomorficos si comparten parte de su estructura. Se puede usar la palabra “homomorfismo” en un sentido particular para distinguir los morfismos que no son isomorfismos de los que sí lo son: pero si no se especifica este sentido particular, ordinariamente se usan las palabras “morfismo” y “homomorfismo” como sinónimos. Así, no todo morfismo u homomorfismo es isomorfismo y por lo tanto invertible, pero todo isomorfismo es morfismo u homomorfismo. Asesorías con Carlos Vasco. 29 de noviembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

alojadas en las formas y las medidas. Así, estas situaciones son fértiles para encontrar rasgos de modelos mentales [cronotópicos], pero también para compararlos, en tanto cuán homomórficos o isomórficos pueden llegar a ser o no. Se advierte que esta aparente promesa de fertilidad es comparable con buscar doblones de oro en el mar caribe, debido a lo difuso del camino para llegar al cronotopo de las personas.

En la Tabla 7 se organizaron algunas situaciones conflictivas de comunicación que emergieron en algunas clases, donde hubo acuerdos, desacuerdos o expresión de puntos de vistas entre la profesora y como mínimo un alumno. El desacuerdo también podría verse como la diferencia de valor o de opinión que nos debería conducir a construir acuerdos. No obstante, sabemos que el desacuerdo puede manejarse para destruir o no el espacio abierto a la comunicación.

Tabla 7. Algunos contextos de desacuerdos en la comunicación entre la profesora y algunos de sus alumnos.

| Clase | Contexto | Situaciones conflictivas de comunicación |
|---|---|---|
| Clase 1. 16-08-2017. | Exposición de una alumna sobre la obtención de las secciones cónicas a partir de cortes del plano con un cono. | Cuando la respuesta de los alumnos es incorrecta ante la pregunta de la profesora, a juicio de ella misma |
| | Exposición de una alumna sobre la obtención de las secciones cónicas a partir de cortes del plano con un cono. | Cuando la profesora manifiesta duda sobre la respuesta del alumno |
| Clase 4. 13-09-2017. | Exposición de un problema de aplicación de la circunferencia por parte de un alumno. | Cuando una alumna pregunta a la profesora o al alumno o grupo expositor y no comparten su punto de vista |
| | Exposición de un problema de aplicación de la circunferencia por parte de un alumno. Cálculo de áreas. | Cuando un alumno considera que se debe cambiar el método expuesto, pero no aceptan el propuesto |

| | | |
|---|---|---|
| Clase 5. 20-09-2017. | La profesora demuestra la ecuación canónica de la parábola. | Cuando una alumna manifiesta si no hay una forma más fácil de comprender una demostración. |
| Clase 9. 18-10-2017. | Exposición de una alumna sobre aplicaciones de la parábola. | Cuando la profesora no acepta la gráfica hecha por una alumna y la reemplaza por la de ella |

En las situaciones conflictivas de comunicación presentados en la tabla anterior, vemos que es posible comparar modelos mentales [cronotópicos] de la profesora y de algunos alumnos, lo cual se presenta en la columna *Situaciones conflictivas de comunicación*. Por ejemplo, si tomamos el caso cuando la profesora no acepta la gráfica hecha por una alumna y la reemplaza por la de ella, percibimos que hay rasgos del modelo mental de la profesora que no reconoce algunos elementos de la *grafía realizada por la alumna, es decir, hay un homomorfismo entre los modelos que operan en la producción de la *grafía de una sección cónica.

En las situaciones conflictivas de comunicación, pero también en expresiones de la profesora y alumnos, se pudo notar que en el flujo de las interacciones transcritas se identifican enunciados legaliformes, pero también a acciones o expresiones relativas al movimiento o dinámica, es decir, a modelos estáticos y modelos dinámicos, algunos de ellos se presentan en la columna Contexto de la Tabla 7. A continuación se hará un análisis de pasajes comunicativos entre la profesora y sus alumnos que den pistas de sus cronotopos.

### 4.2.3. Modelos mentales en la comunicación y las formas de expresarlos en *grafías, *metrías, *nomías y gestos

Puesto que se trata de buscar en los procesos de comunicación entre la profesora y los alumnos algunas pistas de sus cronotopos (ya sean intencionales, no intencionales, solo gestuales o acompañadas de lenguaje) que remiten a componentes, relaciones y operaciones, para ello se hace necesario la identificación de modelos estáticos, el paso de estos modelos a los modelos dinámicos, la misma identificación de los modelos dinámicos y, posteriormente, la identificación de operaciones sobre modelos mentales dinámicos, que son las maneras de actuar de la maestra o de los alumnos sobre sus propios modelos mentales para transformarlos de un estado del sistema a otro estado diferente (Vasco, 1995, 2014, 2019); visto desde el análisis de la Teoría Fundamentada, los resultados al ser incluidos en secuencias arrojan más resultados, Strauss y Corbin (2022). La principal pista que tenemos es que, si estos modelos interactúan entre sí para resolver una actividad matemática, emergen pistas que nos pueden indicar qué están pensando las personas sobre el mismo objeto matemático. Así, analizar la comunicación entre profesores y alumnos, entre modelos estáticos y modelos dinámicos, es un paso clave para comprender un poco lo que piensa matemáticamente el otro. Fue entonces necesario precisar la dialéctica entre modelos estáticos y dinámicos, seleccionando solo los enunciados que se refieren a modelos dinámicos en donde hubo cambios en el tiempo-espacio o crono-topo, logrado esto se buscaron las *metrías, pues ellas son las que permiten formular con precisión las *nomías. Veamos entonces unos ejemplos. En el primer pasaje seleccionado que se desarrolló en la Clase 1. C1. 16-08-17, los códigos que se emplearon para seleccionar el pasaje anterior fueron los siguientes:

*Código: *nomías de la profesora: reglas de magnitudes de la espacialidad.*
*Código: *nomías del alumno: reglas sobre magnitudes de la espacialidad.*

Con ellos se pudieron encontrar rasgos de un modelo dinámico que está relacionado sobre cómo se puede obtener una hipérbola y su estructura con que la inclinación del plano, que corta el cono, debe ser siempre menor a 90° con respecto al eje vertical o al plano vertical perpendicular al plano del tablero que lo corta en el eje vertical del tablero. Sin embargo hay que advertir la siguiente situación: Lo anterior cambia cuando el estudiante copia el modelo público y estático que la profesora externaliza en el tablero a partir de su modelo mental privado, pues el alumno, al agacharse a copiar el modelo público en su cuaderno, ya cambia el plano vertical del tablero por el plano horizontal de la mesa, siempre y cuando esté paralelo al plano del piso, pues hay algunos pupitres o mesas que tienen brazos o tableros de trabajo que no son paralelos al piso del salon.[60]

El segundo caso es el pasaje seleccionado en la Clase 11. C11. 01-11-17. El código que se empleó para seleccionar el pasaje anterior fue el siguiente: **nomías de la profesora: leyes sobre magnitudes de la espacialidad.* Con este código se pudo encontrar rasgos del modelo estático que está relacionado con las partes de la elipse, la distancia de un punto a dos focos y la congruencia de distancias. Su estructura es que la elipse es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es constante, lo cual responde a un modelo estático. Dada la importancia de las *nomías para el desarrollo del pensamiento matemático de profesores y alumnos y de lo escasas que pueden llegar a ser en una clase de matemáticas a diferencia de las *logías, *grafías y *metrías, se van a presentar las pocas que se encontraron en las 14 clases. Se debe precisar lo siguiente sobre ellas como lo expresa Vasco (2021):[61]

> Las *nomías no tienen sustrato ni estructura todo lo contrario al modelo mental, sino que son ya representaciones discursivas en acto que se pueden formular lingüísticamente por escrito

[60] Asesorías con Carlos Vasco. 4 de octubre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.
[61] Asesorías con Carlos Vasco. 15 de septiembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

> como leyes, regularidades, normas, esquemas que se repiten, "expectativas fundadas", "deber-seres", predicciones, conjeturas, etc. Las *nomías son expresiones referidas a leyes o normas, no son modelos mentales. Cuando un sujeto expresa en sus enunciados nomías, tal vez podría estar empleando una ley, una norma con respecto al objeto y, por lo tanto, quizás estar en un nivel más complejo de la comprensión del objeto.

Empero, cuando el profesor o el alumno expresan *nomías sí nos dan pistas sobre el modelo mental que está empleando. O sea, que para el desarrollo de pensamiento matemático los modelos estáticos son también importantes. Veamos en la Tabla 8 todas las *nomías encontradas en las 14 clases, posteriormente un análisis sobre la caracterización de los modelos mentales empleados.

Tabla 8. *nomías encontradas en el registro de 14 clases de matemáticas de Geometría Analítica

| **Clases** | ***nomías** (sin en el contexto del pasaje comunicativo) | **Características de los modelos mentales toponómicos** |
|---|---|---|
| Clase 1. 16-08-17. | Eh4: seño la del °()° ↓ debe ser menor de 90°<br>P: la del °()°↓ debe ser menor de 90° // ¿qué más?// cómo se obtiene la hipérbola<br><br>Em:… / este perímetro de la circunferencia °()° su longitud es tres / es aproximadamente 3,14 (()) la medida de su diámetro / entonces/ longitud es igual a 3,14 por 20 / como diámetro es igual a dos radio/ entonces la longitud de la circunferencia/ es igual al doble de dos por su radio/ es decir/ la longitud/ es igual a dos por pi por 20/ que vendría siendo/ 125,66 | Como se puede notar en la selección de las *nomías, una característica de los modelos mentales toponómicos es que se apoyan más en las *logías y en las *metrías y no tanto en las *grafías.<br><br>Los modelos mentales toponómicos emergen con mayor frecuencia en la aplicación de reglas sobre magnitudes de la espacialidad y de patrones de magnitudes de la espacialidad. |
| Clase 3. 06-09-17. | Em: que la distancia que hay del centro a esos puntos es la misma. | |
| Clase 4. 13-09-17. | P: ¿Qué quiere decir que sea tangente?/ la tangente corta al eje de las x y al eje de las y en un punto/ Mari tu hablaste de la recta tangente a una circunferencia. | |
| Clase 5. 20-09-17. | P:… ¿Por qué se llama eje de simetría?/ porque divide a la parábola en dos porciones igualitas/ (la profesora procede a realizar la construcción de una parábola que abre hacia arriba) | |
| Clase 11. 01-11-17. | P: ¿Qué dice la definición de elipse?/ que es el lugar de todos los puntos del plano/ que cumple ¿con que condición?/ que la distancia que hay / que la suma de la distancia del punto a los focos siempre va a ser la misma/ que la distancia a esta distancia siempre va a ser la misma / la distancia que hay de este punto aquí/ más la distancia que hay de aquí a aquí / siempre va a ser la misma /…<br>P: y que dice/ que la distancia que hay de este punto a este/ siempre va a ser una constante / miren/ si me pongo aquí/ la suma va a ser la misma/ una constante/…<br>P:… / todos los puntos que yo tome en adelante van a cumplir con esa condición /…<br>P:… /¿Qué me da?/ la longitud de toda la pita / y esa longitud de la pita va a concordar/ que la distancia de aquí a aquí es la misma longitud de la pita/ ósea que la distancia que hay de vértice a vértice/ es la misma distancia que va a ser la suma / esa distancia la vamos a llamar 2a…<br>P:… bueno/// hay un elemento también importante/ de la elipse que se llama lado recto/ y es la perpendicular/ que pasa por el foco/ perpendicular al eje mayor/ que pasa por el foco/ el foco siempre/ ósea el eje mayor es siempre donde están los focos/ y el eje menor/ pues el otro/ | |
| Clase 13. 15-11-17. | P: la distancia que hay del foco al vértice/ es la misma distancia que hay del vértice a la directriz/ | |

Al analizar las *nomías anteriores, vemos que:

- ✓ Hay rasgos de modelos dinámicos que están relacionados con el análisis de una vuelta completa de una rueda y la relación de la medida de una circunferencia con respecto a la medida de su diámetro y su estructura es que el perímetro de la circunferencia es aproximadamente 3,14 la medida de su diámetro, es decir, que las *nomías también están asociadas a modelos estáticos.
- ✓ Con la ecuación general de la circunferencia, la pertenencia de puntos a la circunferencia y la representación gráfica del proceso mismo.
- ✓ Con el análisis de la tangente, cortes de la tangente a un eje, eje *x* y eje *y*, punto en el plano cartesiano y tangencia a una circunferencia
- ✓ Con el análisis de la ecuación de la parábola, la gráfica que abre hacia arriba o hacia abajo, el eje de simetría y la división de la gráfica
- ✓ Con el análisis de la elipse, partes de una elipse, distancias de un punto a dos focos, congruencia de distancias, propiedades de los ejes, mayor y menor

No obstante, dichos modelos también están alojados en la subdisciplina de la topografía, donde no hay movimiento. En todos estos casos "se pierde el tiempo", se paraliza la dinámica. Así, los modelos estáticos son modelos tópicos con sus componentes y relaciones estáticas. Un ejemplo de ello son todas *grafías que se muestran en los anexos 40 y 41.

Analicemos ahora las *grafías. Si cualquier representación final o instantánea de una *grafía es la representación de un modelo estático entonces el proceso que genera su creación o su transformación posterior corresponde a expresiones semióticas de un modelo mental dinámico. Así cualquier movimiento en la *grafía, hacer un trazo, corregir algo, etc., implica el paso de un modelo estático a un modelo dinámico. Para un modelo estático tenemos representaciones fijas, detenidas en el tiempo, pero que son importantes para analizar sus propiedades o características; por ejemplo, cuando inicialmente una alumna hace una representación de una elipse y se la presenta a la profesora para que ella la analice. En ese instante la *grafía hace parte de un modelo estático, que obviamente fue producto de un modelo dinámico, luego la profesora da unas instrucciones y la alumna procede a ajustar su *grafía como se muestra en la figura 25, activando nuevamente un modelo dinámico para realizar los ajustes.

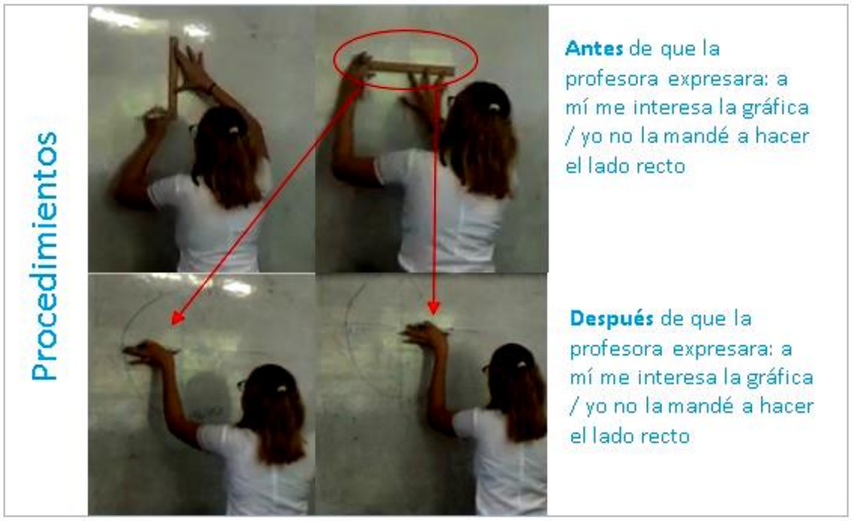



Figura 26. Algunas representaciones de los procedimientos[62] de Em1 antes y después de las instrucciones de la profesora.

Los modelos dinámicos tienen sus pistas o rasgos en los procesos, en las acciones (que es lo mismo que los gestos)[63] al hacer *grafías y cálculo de *metrías, son modelos crónicos con sus componentes y cambios relacionados en el tiempo. Así, identificar los rastros en

[62] La alumna usa su cuarta por primera vez en la figura 1, luego se lleva la mano abierta, mantiene la cuarta, y hace una especie de traslado de la medida, como se muestra en la figura 2. Esto lo hace para tratar de conseguir simetría en la *grafía que va a realizar de una elipse cuyos extremos del eje menor son los puntos B1(-8,0) y B2(8,0).

[63] La observación que hizo el profesor Carlos Vasco, sobre el uso que había hecho de la palabra “representación”, bien vale la pena colocarla aquí como nota de pie de página: “Los modelos estáticos tienen también “sus representaciones” en los procesos, acciones (que no es lo mismo que “gestos”) en las *grafías, las *metrías y en las *nomías. En este momento del análisis puede ser mejor hablar de que en todo esto aparecen pistas de lo que estamos buscando, pero una cosa es si estamos buscando huellas externas de los distintos aspectos de los modelos estáticos y dinámicos, o de la forma como los operadores operan sobre los elementos, o de la manera como los estudiantes y la profesora operan sobre sus modelos mentales (necesariamente dinámicos, crónicos y tópicos) o de los artificios que usan para externalizar esos nuevos modelos y esos cambios. Un buen ejemplo puede ser los artificios que usan los caricaturistas para representar que un niño está corriendo, que es el pelo suelto y levantado, los pies por encima del piso y unas líneas horizontales detrás de la cabeza, que no existen “en la realidad”. Asesorías con Carlos Vasco. 5 de octubre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

un modelo dinámico es centrar nuestra atención en el acto resolutivo de cualquier actividad matemática. Todo lo que implica movimiento son representaciones de modelos dinámicos y por lo tanto están vinculadas a las subdisciplinas del Crono*. Ejemplo de ello, además de los procesos que conllevaron a la realización de cada una de las *grafías también son todos los procesos que conllevan a mediciones. Estos procesos se caracterizan porque son operaciones de modelos mentales que se realicen en el tiempo. Las operaciones de los modelos dinámicos están relacionadas con acciones en el tiempo como: trazar, mover, girar, explicaciones empleando gestos, todos los procesos imaginativos sobre el objeto de aprendizaje o de enseñanza, etc. En cuanto a los gestos, queremos insistir de su importancia en educación matemática, no solo para la constitución de patrones, como lo plantean Arzarello & Edwards (2005), Radford (2003, 2005) y Vergel (2015), sino además porque ellos son una actividad semiótica de nuestros modelos mentales. A lo largo de las 14 clases registradas se pudieron identificar diversos gestos, ellos hacen parte también de formas de expresión de los modelos mentales cronotópicos de profesores y alumnos. Los gestos también hacen parte de las operaciones de los modelos dinámicos.

Algunos pasajes comunicativos entre la profesora y alumnos evidenciaron rasgos relacionados con modelos mentales dinámicos, donde hubo empleo de gestos por parte de ambos agentes; se pueden encontrar, por ejemplo, en el pasaje comunicativo que se tomó de la Clase 9. 18-10-2017. Existe una relación que compara apreciaciones o valoraciones cualitativas entre cuatro objetos; los tres primeros están presentes en el aula de clases, el cuarto objeto no está físicamente dentro de ella sino en la mente una alumna y los gestos son los que lo representa. La alumna piensa en una curva que está sobre la superficie cóncava de una taza circular. Es una asociación espontánea de la alumna que le sirve de comparación, como lo muestra la secuencia de las figuras 26 y 27, que proviene de un modelo mental dinámico con énfasis en lo topográfico que al parecer se da por compartido entre los agentes del aula de clases.

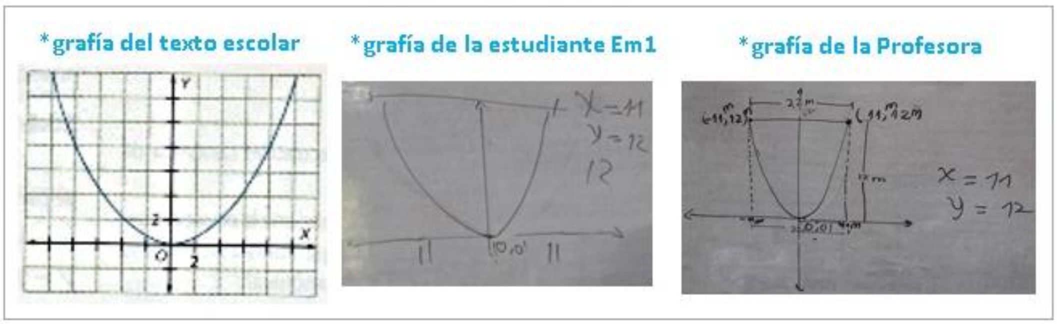


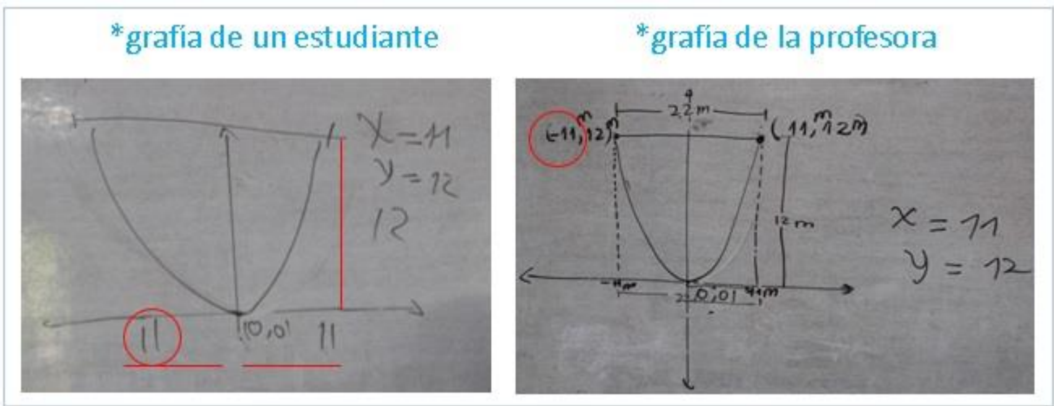

Figura 27. Representaciones en el plano de una antena parabólica

La alumna no está pensando en la taza completa; está pensando en una línea que representa uno de sus infinitos cortes verticales, como se aprecia en el gesto de su mano, podría ser un corte frontal o una curva interna, que podemos ver en la figura 27. Es un claro ejemplo de que el modelo mental de la alumna es homomórfico con el de la profesora, es decir, sus modelos mentales no llegan a ser isomórficos en torno al saber matemático que está en juego.

a b

Figura 28. Posibles curvas en las que piensa una alumna para asociar con una antena parabólica.
Fuente de 27b: https://www.youtube.com/watch?v=pUGnCz0qLKM&t=1697s

Un ejemplo más de la identificación de operaciones en los modelos dinámicos con ayuda de gestos: Una alumna realizó en el tablero, a mano alzada, la *grafía de una parábola que abre hacia arriba. La alumna expositora hizo una representación de la antena, lo que Mariotti (1995a) interpretaría como “un dibujo”, que puede llegar a compartir con el concepto y también la generalidad misma de la antena. Vale la pena precisar que el tablero no está cuadriculado, no presenta una escala y no hay un instrumento geométrico apropiado para realizar la *grafía, por ejemplo, una regla de 50 cm, ver figura 28.




a b

Figura 29. Comparación de una *grafía de un alumno (figura 28a) con una *grafía de la profesora (figura 28b) sobre un mismo objeto.

En tanto a la identificación de operaciones de modelos dinámicos al comparar las *grafías que ambas, la profesora y la alumna, realizaron sobre el mismo objeto matemático, se presentan los siguientes datos:

- En la *grafía de la alumna solo se marcaron valores positivos[64] para *x*, indistintamente si *x* está o no en el cuadrante ++ o en el – –.[65] Como el 11 se obtuvo de dividir 22 entre 2 debería ser lógico pensar que 22 = 11 + 11 y no tanto en que 22 = –11 + 11. Por ello se marcaron estos valores en cada *grafía.

- Mientras que la alumna emplea solo valores positivos para x, 2x = el ancho de la antena, que es una distancia, la profesora emplea valores tanto positivo como negativos para elementos caracterismos de la antena que son cuantificables por medio de distancias. La marcación de los valores –11 y 11 implican trazos o movimientos en el plano que muestran rasgos de operaciones de modelos dinámicos.

Veamos otro ejemplo: En la Clase 12. 08-11-2017, el objeto matemático de estudio es la *grafía de la elipse. Los términos métricos o vinculados a las *metrías que se emplearon fueron elipse, eje, escoba, regla, gráfica y lado recto; algunos de ellos fueron empleados como herramientas y otros como resultado. Estos términos métricos muestran la secuencia de un proceso que determina las posibilidades reales de la mediación semiótica entre artefactos y modelos mentales con énfasis en lo topométrico de alumnos y la profesora sobre el desarrollo de una *grafías en función de sus *metrías. Esta secuencia se podría representar por medio de la figura 29 y que se podría denominar *secuencia grafométrica*.

[64] "Los alumnos siempre prefieren los valores absolutos y no solo para las distancias. Lo grave es que los profesores sí los prefieren para las distancias, pero no se dan cuenta de que siempre son positivas. Si usamos el microscopio de los morfismos, vemos que la profesora confunde 'x=11" para el punto en el eje horizontal y para la primera coordenada de la pareja (11, 12) y también la usa para toda la línea vertical que va de (11, 0) a (11, 12) y para toda la línea horizontal de abajo que va de (0, 0) a (11, 0) y usa 2x=22" para toda la línea horizontal de arriba que va de (–11, 12) a (+11, 12), pero 2x sería igual a –22 si está en el cuadrante – +." Asesorías con Carlos Vasco. 5 de octubre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

[65] Recordemos que estos cuadrantes se clasifican como ++, +–, –+, – –, y regularmente en clases de matemáticas, en el contexto colombiano, se acostumbra a llamar cuadrante positivo, cuadrante positivo para x y negativo para y, cuadrante negativo para *x* y positivo para *y*, y cuadrante negativo, respectivamente.


Figura 30. Secuencia grafométrica en la construcción de la gráfica de una elipse.

La secuencia grafométrica también muestra cómo la profesora puede intervenir en las formas de operar de los modelos dinámicos de sus alumnos; por ejemplo, al ella expresar "*a mí me interesa la gráfica, yo no la mandé a hacer el lado recto*",[66] la alumna Em1 decide no usar la regla y traza a pulso el eje menor y la linealidad de la gráfica se pierde. También se puede notar que Em1 decide no usar la regla para medir la longitud entre el centro de la elipse y uno de los extremos del eje menor, para ello usa como patrón de longitud los extremos de su dedo pulgar y del dedo medio con la mano abierta, la cuarta. Esta longitud es "transferida" del otro lado del eje menor marcando su otro extremo, el punto (8,0). En la figura 30, se puede ver, al lado derecho, la corrección de la *grafía. La profesora no acepta el uso de la escoba, pero avala el uso de medidas de tipo antropométricas. Todo ello son representaciones de formas de operación de modelos dinámicos tanto de la profesora como de los alumnos.

[66] La profesora no está haciendo alusión a una sección cónica sino a un eje del plano cartesiano. No se trata de un lado de la elipse sino uno o ambos ejes de coordenadas.

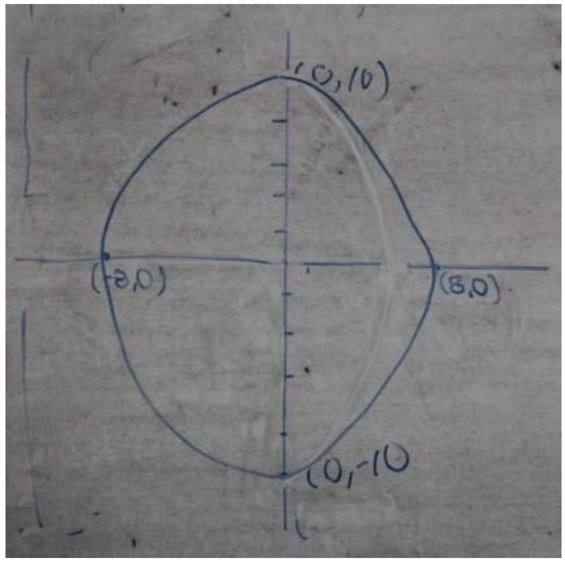



Figura 31. *grafías corregidas por Em1. Representación final de $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

Cuando se instala una *nomía, podríamos decir que se instala un modelo estático sobre el objeto matemático, y cuando estamos desarrollando una *grafía o estamos haciendo una medición, estamos empleando modelos dinámicos. En el papel de los modelos estáticos y dinámicos en la comunicación y sus formas de expresión, ahora analicemos que sucede con las *metrías. Las acciones y actividades de producción de *metrías son el segundo oasis de lo crónico y por ende su empleo da pistas del uso de modelos dinámicos, el primer oasis son las acciones y actividades de producción de *grafías. Los rasgos más característicos de los modelos dinámicos con énfasis en lo topométrico es que implican abstracciones más complejas.

En los registros de datos o en los pasajes aparecen pocas manifestaciones de *metrías de manera explícita, no obstante, sabemos que toda *nomía tiene implícitas una o varias *metrías; por ejemplo, una logía que parezca estática tiene implícita una *metría. En las

Clases 2, 3, 6, 7, 8, 11, 13 y 14 no se pudo identificar el empleo de *metrías explícitas por parte de los alumnos; caso contrario sucedió con la profesora, como se puede ver en los anexos del 12 al 25, *red de códigos de las clases*. La frecuencia de las *metrías estudiantiles fue mayor cuando los alumnos hicieron un examen o cuando les tocaba hacer exposiciones en el tablero. El Anexo 42, muestra los códigos sobre *metrías que fueron encontrados en las demás Clases.

Nos podemos aventurar a decir que según los rasgos que se aprecian cuando se expresan modelos dinámicos con énfasis en la fase de *metrías, aparecen tres tipos de modelos que son caracterizados de la siguiente manera:

1. Unos modelos que tienen registro semiótico en lenguaje oral, por ejemplo, todo lo que expresa la profesora o los alumnos, verbalmente, y sin registro simbólico sobre procesos que impliquen medición.
2. Unos modelos que tienen registro semiótico de lenguaje escrito, por ejemplo, todo lo representado por la profesora, los alumnos y los mismos textos, en clase de matemáticas, sobre procesos que impliquen medición. Fue más evidente mediante lenguaje escrito que oral dichas formas de expresión, caso contrario sucede con la profesora que los expresa más por medio de lenguaje escrito.
3. Unos modelos que se expresan por medio de procesos externos, por ejemplo, usando partes del cuerpo para medir algo, tal como usó *la cuarta* la alumna para verificar la simetría del eje menor de una elipse, lo cual desemboca en una relación entre *grafías y *metrías, pero también con gestos, precisando que no todas las *grafías tienen de manera consciente *metrías y que no todas las *metrías tienen *grafías asociadas.

En síntesis, se describió la importancia de la comunicación para que emerjan rasgos que permitan identificar modelos mentales [cronotópicos] y de cómo hay diversos procesos o registros semióticos que evidencia formas de expresión en *grafías, *metrías, *nomías y gestos. Por último, se presenta el tercer momento de este capítulo que donde se escribirán y caracterizarán algunos modelos mentales [cronotópicos] de la profesora y algunos de sus alumnos.

## 4.3. Descripción y caracterización de algunos modelos mentales [cronotópicos] de una profesora y sus alumnos

La caracterización de modelos mentales [cronotópicos] de la profesora y algunos de sus alumnos se desarrolló en función de las actividades semióticas del cronotopo. El *Anexo 4: Descripción de las 14 sesiones de clases que fueron registradas audiovisualmente en los dos periodos académicos que comprendieron el semestre 2017-2*, presenta cuáles fueron los temas que se desarrollan; de las 14 clases observadas y con la ayuda del Atlas.ti8, fueron analizados 169 pasajes de la profesora y/o de los alumnos que se describen en el *Anexo 5: Resultados de codificación de las transcripciones de las 14 clases. Tabla de códigos-documentos*. De estos pasajes se escogieron cinco. Se presenta a continuación un resumen de ello en la Tabla 9.

Tabla 9. Resumen de los temas desarrollados en las 14 clases observadas

| Clase | Tema |
|---|---|
| 1 | Fórmulas de binomios y trinomios cuadrados perfectos, secciones cónicas y la circunferencia. |
| 2 | Ecuación de segundo grado |
| 3 | Ecuación general de la circunferencia. |
| 4 | Aplicaciones de la ecuación de la circunferencia. |
| 5 | La parábola. |
| 6 | La parábola. |

| | |
|---|---|
| 7 | La parábola. |
| 8 | La parábola. |
| 9 | Aplicaciones de la ecuación de la parábola. |
| 10 | Examen sobre la parábola. Introducción a la elipse. |
| 11 | La elipse. |
| 12 | La elipse. |
| 13 | Repaso de Trigonometría. |
| 14 | Examen final. |

Como se puede notar en la Tabla 9, uno de los temas que más fue estudiado en las clases fue el de la parábola, ocupando el 39% de las clases observadas, y de estas clases, la Clase 9 fue una de las que más información proporcionó. De esta Clase, se escogieron expresiones verbales cronotópicas porque claramente hacen referencia al espacio, al tiempo o ambos, todas ocurren en el espacio-tiempo y se refieren directa o indirectamente a él, así, podemos destacar que, en algunas de ellas, dan mayores rasgos de las concepciones témporo-espaciales de un agente noético-semiótico, como es el caso de la profesora y los alumnos cuando en conjunto resuelven una actividad matemática y a continuación se presentarán.

### 4.3.1. Expresiones verbales cronotópicas seleccionadas

Cada expresión verbal cronotópica y su contexto y acciones puede ser más tópica que crónica o viceversa. Siendo así, se puede establecer que una expresión verbal cronotópica es aquella cuyo concepto está relacionado con *grafías, *logías, *metrías y *nomías y por ende consideramos trae consigo relaciones con aspectos témporo-espaciales de quien la enuncia. Las expresiones verbales cronotópicas del pasaje seleccionado de Clase 09. C9. 18-10-17, son las siguientes:

> *Antena parabólica, 22 metros, metros, metros de ancho, ancho, 12 metros, metros de alto, alto, figura, ubicación, antena, plano cartesiano, altura, dividir, ancho, ancho de la antena, mitad, vértice, parábola, simétrica, lado izquierdo, exactamente igual, lado derecho, eje de simetría, divide exactamente, gráficas iguales, partes iguales, hacia arriba, coordenadas, distancia, foco, taza, igualito.*

En este conjunto de palabras o expresiones verbales cronotópicas se puede notar dos subconjuntos, uno que está en el registro del lenguaje natural o común como lo clasificó Duval (1993, 2004a): *exactamente igual, divide exactamente, taza e igualito*. Según lo planteado por Vasco (2014), ellas y su contexto podrían ubicarse dentro de modelos dinámicos. En estas *logías, provenientes de modelos dinámicos de representación oral o escrita, podemos encontrar expresiones como *exactamente igual* y *divide exactamente* o el matiz apreciativo que se le da al *igual* con el diminutivo "-ito", *igualito*. Este matiz como las expresiones previas parece hacer énfasis en la semejanza de una representación comparativa de la antena con una taza o en las características de una antena parabólica, cuyos significados al parecer se dan por compartidos entre la profesora y alumnos, como, por ejemplo:

> Eh: seño/ porque la parábola es simétrica
> P: es simétrica/ y el lado izquierdo va a ser exactamente igual al lado derecho/ y el eje de simetría la divide exactamente en dos gráficas iguales/ en dos partes iguales/

En el anterior pasaje se da un enunciado afirmativo de una cualidad métrica de la parábola, donde el ejercicio de estimación métrica obedece al enunciado legaliforme de que dicha sección cónica *es simétrica*; por ello se apela a un modelo dinámico con énfasis a lo topográfico y que al parecer se da por compartido; para Wartofsky (1979) sería una selectiva o abstracta duplicación de algunos aspectos del mundo. Si agregamos un turno de habla más de una alumna, el pasaje quedaría de la siguiente forma:

> Eh: seño/ porque la parábola es simétrica
> P: es simétrica/ y el lado izquierdo va a ser exactamente igual al lado derecho/ y el eje de simetría la divide exactamente en dos gráficas iguales/ en dos partes iguales/ ¿entonces?
> Em: entonces como la parábola abre hacia arriba

Mientras que el modelo mental de la profesora y de un alumno relaciona el *ancho de la antena* con su simetría a partir del eje de simetría, emerge en la conversación un modelo mental de una alumna que relaciona la simetría con la característica de que la parábola *abre hacia arriba.*

El uso de estas palabras y sus contextos o expresiones métricas pueden revelar modelos estáticos, que emplean expresiones o palabras como longitud, área, temperatura, carga eléctrica y volumen[67], o ser dinámicas como distancia, velocidad y lentitud, duración, aceleración y frenado. El otro subconjunto de palabras o expresiones cronotópicas pertenecen a un lenguaje que podemos denominar *disciplinar*. Así, hay un subregistro disciplinar que utiliza palabras técnicas como: *parabólica, metros, ancho, alto, figura, plano cartesiano, parábola, simétrica, eje de simetría*, etc.[68]

Sobre este conjunto de expresiones verbales cronotópicas empleado en la resolución de la actividad descrita, podemos decir que algunas de ellas refieren a magnitudes de longitud o distancia como por ejemplo: *alto, ancho de la antena, mitad, hacia arriba*; *22 metros, 11 metros, hacia arriba,* o procesos e medición prenuméricos como: *exactamente*

[67] Somos conscientes que los conjuntos de palabras que se han presentado expresan nombres, otras cualidades, otros adverbios de modo de tiempo, de lugar, otras expresan acciones como los verbos, etc. Pero al analizar sus contextos consideramos que poder das pistas del tipo de modelos mental empleado, dinámico o estático.
[68] Somos conscientes que las palabras metros, ancho, figura, plano, tienen usos en la lengua natural bastante polisémicos, pero si las analizamos en conjunto y no por separados, de inmediato ese conjunto nos ubica en un área del conocimiento, en nuestro caso, en la Geometría Analítica.

*igual, divide exactamente, partes iguales*; pero no hay ninguna palabra que se refiera a las demás magnitudes geométricas ni físicas. En el subregistro disciplinar de la Geometría Analítica, al parecer, la profesora no ve por qué mencionar otras magnitudes físicas de la mecánica, el electromagnetismo o la termodinámica. En general, en ningún pasaje comunicativo seleccionado de las 14 clases se encontraron rastros de las magnitudes sobre la masa, la carga eléctrica, la densidad, la temperatura, la velocidad, la aceleración y la energía, lo que nos da una huella sobre el tipo de modelos mentales [cronotópicos] que se emplearon en clases de un curso de Geometría Analítica en la educación media de Colombia. Por la restricción al plano, ni siquiera se mencionan el volumen y la capacidad. Incluso habría pistas sobre la enseñanza de algunas de estas magnitudes pues existe la creencia que estas solo se deben enseñar en física. Las magnitudes que sí se encontraron en los pasajes comunicativos, teniendo en cuenta un proceso de codificación basado en la teoría fundamentada, Strauss y Corbin (2002), fueron sobre longitud, distancia, área y duración. Lo anterior se puede notar en la tabla 10.

Tabla 10. Proceso de codificación sobre el tema *metrías en clases.

<table>
<tr><td rowspan="4">Sub temas</td><td colspan="2" rowspan="2">*metrías en clases.</td><td colspan="5">Magnitudes</td><td rowspan="2">Códigos</td></tr>
<tr><td></td><td>Longitud</td><td>Distancia</td><td>Área</td><td>Duración</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cantidades</td><td rowspan="2">Marcadores de operacionalización del código</td><td>Medidas de ancho, largo, alto, espesor, profundidad, profundidad, etc.</td><td>Estimaciones lineales de ancho, largo, alto, espesor, profundidad, profundidad, etc.</td><td>Medidas de superficies o regiones</td><td>Medidas del tiempo desde el principio hasta el fin de algo</td><td>*metrías de la profesora: Representación de magnitud y su cantidad.<br>*metrías del alumno: Representación de magnitud y su cantidad.</td></tr>
<tr><td>Procesos de medición</td><td>Prenúmericos</td><td colspan="4">Vasco (2021)[69], plantea lo siguiente: En una clase de Geometría Analítica la mayoría de las representaciones gestuales, de las grafías y sobre todo de las palabras que dicen los estudiantes en una clase de geometría (que técnicamente en nuestra terminología es una denominación muy imprecisa, que incluye las cuatro subdisciplinas: geo*grafía, geo*logía, geo*metría y geo*nomía) son anuméricas y puramente cualitativas, como corresponde a la escala nominal (“nominal” viene del latín para “nombre”, “nombrar”, “nominar”, “denominar”), como: recta, curva, parábola, elipse, círculo, flecha, punto, radio, diámetro, lado, base, vértice, ángulo, etc.<br>La mayoría de las palabras que corresponden a la escala ordinal son anuméricas, porque la definición misma de una magnitud (lo contrario sería algo como “parvitud, del latín “magnus-magna” o “parvus-parva”, grandeza o pequeñez) o de la de cualquiera de sus cantidades o cuantidades o cuantificaciones exige que se trate de una cualidad susceptibles de aumento y disminución, lo que se refleja en las expresiones verbales relacionales que se contienen las palabras anuméricas “más” o “menos” o “lo mismo” o “lo mismo de” o “lo mismo que”; “mayor que”, “menor que” o “igual de” o “igual a”, etc., que son ya de escala ordinal: más (o menos o igual de) grande, más pequeño,</td><td>*metrías de la profesora: representación de un proceso de medición anumérica.<br>*metrías del alumno: representación de un proceso de medición anumérica.</td></tr>
</table>

[69] Asesorías con Carlos Vasco. 20 de julio del 2021 (El 20 de julio es el día de la independencia de Colombia, en el 2021, desarrollaba esta tesis con la mitad de mi mente pues la otra mitad estaba puesta en participaciones en las protestas en el marco del Paro Nacional. Fueron momentos difíciles de asesinatos, desapariciones, mutilaciones y violaciones de derechos humanos. Un meme mío se había viralizado en Facebook con más de 104.000 compartidos y que tomó como referencia uno de los comunicados del profesor Vasco: 

). Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | *más chiquito, más ancho, más angosto, más alto, más bajito, más gordo, más flaquito, más pando, más hondo, más profundo, más amplio, más estrecho, etc.* | |
| | | **Numéricos** | Escala nominal | | Identificación de representaciones o acciones que muestren una etiqueta, atributo o clasificación de magnitudes. | *metrías de la profesora: representación de un proceso de medición numérico. Escala nominal.<br>*metrías del alumno: representación de un proceso de medición numérico. Escala nominal. |
| | | | Ordinal | | Identificación de representaciones o acciones que muestran propiedades de datos nominales y tiene sentido el orden o jerarquía de las magnitudes. | *metrías de la profesora: representación de un proceso de medición numérico. Ordinal.<br>*metrías del alumno: representación de un proceso de medición numérico. Ordinal. |
| | | | De intervalo | | Identificación de representaciones o acciones que tienen las propiedades de los datos ordinales, pero a su vez la separación entre las variables tiene sentido. Dichas representaciones siempre son numéricas. | *metrías de la profesora: representación de un proceso de medición numérico. De intervalo.<br>*metrías del alumno: representación de un proceso de medición numérico. De intervalo. |
| | | | De razón | | Identificación de representaciones o acciones que tienen todas las propiedades de los datos de intervalo, y la proporción entre ellos tiene sentido. Para esto se requiere que el valor cero de la escala indique la ausencia de la propiedad a medir. | *metrías de la profesora: representación de un proceso de medición numérico. De razón.<br>*metrías del alumno: representación de un proceso de medición numérico. De razón. |
| | **Artefactos de medición** | | No calibrados | | Curvígrafo, palo de escoba, visual, la mano o partes del cuerpo | *metrías de la profesora: empleo de artefactos de medición no calibrados.<br>*metrías del alumno: empleo de artefactos de medición no calibrados. |
| | | | Calibrados | | Regla, escuadras, transportadores, fórmulas, reloj, cronometro, entre otros. | *metrías de la profesora: empleo de artefactos de medición calibrados.<br>*metrías del alumno: empleo de artefactos de medición calibrados. |
| | **Resultados de medición** | | | | Explícitos (numéricos) o implícitos (literales, expresiones algebraicas) | *metrías de la profesora: resultados de medición.<br>*metrías del alumno: resultados de medición. |

Una clasificación más detallada permitió caracterizar rasgos de modelos que son dinámicos con énfasis en algunas subdisciplinas de la Cronotopía. Esta clasificación se presenta a continuación.

**4.3.2. Modelos dinámicos con énfasis en lo topométrico**

Los rasgos de un modelo mental que identifica el ancho de una parábola indicando su mitad, sin dar medidas o escalas numéricas, sino planteando perceptualmente un valor anumérico o prenumérico, es decir, que tiene énfasis en lo cronométrico si nos referimos al proceso que determina el ancho de la antena, que va de un punto a otro, y que al final conlleva a la magnitud longitud, se puede evidenciar en el siguiente pasaje comunicativo entre la profesora y una alumna.

> P: ¿Dónde está el ancho?// muéstrame el ancho/ de dónde a dónde/ aja /// y/ ¿Por qué es 11 y no 10 y 12?
> Em: porque es la mitad

El empleo de la palabra *ancho* acompañado de la acción de la profesora indica un rasgo del modelo mental; se soporta en la identificación de dicha característica del objeto parábola, por medio de la acción enfática: *de dónde a dónde*, y la respuesta de una alumna de que *es la mitad*, que es operador de la dinámica y supone el nivel métrico. Así, podemos caracterizar pistas del empleo de un modelo mental [cronotópico] de la profesora que identifica una parábola mostrando los extremos de su ancho, basado en lo topométrico. Los rasgos de un modelo mental con un nivel científico, basado en lo topométrico que se refiere a la magnitud longitud, *el 12 como altura*, se pueden evidenciar en el siguiente pasaje comunicativo entre la profesora y una alumna.

> P: a ver/ ¿de dónde sacaste tú el 11 y el 12?
> Em: el 12 es la altura/ y el 11 y el 11 / es de dividir el 22
> P: ¿y qué es el 22?
> Em: es el ancho de la antena

Dichos rasgos están sugeridos por las acciones de: ¿de dónde sacaste tú el 11 y el 12? y ¿y qué es el 22? y las expresiones: 12 es la altura, el 11 y el 11 / es de dividir el 22, es el ancho de la antena, entonces vemos pistas de un modelo mental [cronotópico] de una alumna que identifica una parábola por “la medida de su ancho”.

### 4.3.3. Modelos dinámicos y/o estáticos con énfasis en lo topográfico y toponómico

En el pasaje anteriormente seleccionado no aparece expresamente el tiempo, no hay evidencias de rasgos de actividades semióticas del cronotopo en tanto a representaciones cronográficos o cronométricos, pero si hay rasgos sobre modelos mentales que están en los niveles de lo topográfico debido a las medidas numéricas que se expresan; también se podrán advertir rasgos sobre lo toponómico. Los rasgos topográficos se pueden evidenciar en las *grafías que emplearon una alumna y la profesora, figura 31, estas son:

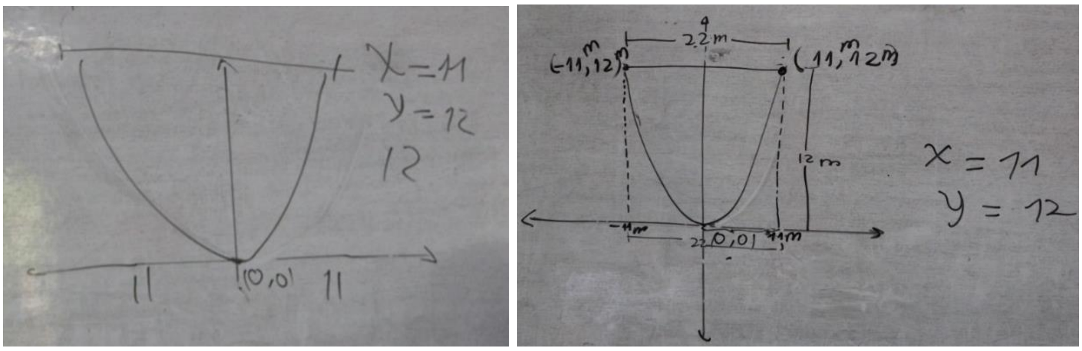



Figura 32. *grafías empleadas por una alumna y la profesora en representación de una misma parábola.

Toda realización de una *grafía trae consigo movimiento y otros procesos que tienen duración y que se representan en la continuidad de externalización de cada trazo: de los ejes del plano cartesiano, de las curvas de la parábola, de la marcación de las longitudes entre puntos incluso de las líneas que se emplean para decir *de aquí a acá van 22 m*. o *12 m*. La producción de la *grafía en el tablero o cuaderno sí implica procesos (no “de duración” sino “que tienen duración”), pero la atención debe estar en si esos movimientos revelan algo sobre el modelo mental.[70] El proceso de producción de la *grafía de la

[70] Asesorías con Carlos Vasco. 13 de septiembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

parábola y la *grafía misma ya producida, que es estática, ambas dan pistas del modelo mental.

En cuanto al énfasis a lo toponómico, se pueden notar en dicho pasaje algunos enunciados legaliformes:

> Eh: seño/ porque la parábola es simétrica
> P: es simétrica/ y el lado izquierdo va a ser exactamente igual al lado derecho/ y el eje de simetría la divide exactamente en dos gráficas iguales/ en dos partes iguales/ ¿entonces?

Estos rasgos toponómicos, que se representan por ciertos tipos de enunciados,[71] son los siguientes:

> La parábola es simétrica
> El lado izquierdo va a ser exactamente igual al lado derecho
> El eje de simetría la divide exactamente en dos gráficas iguales.

Así, hay pistas de un modelo mental [cronotópico] de una alumna y de la profesora que al parecer comparten rasgos similares, homomórficos, al identificar que la parábola debe ser simétrica y que el modelo mental [cronotópico] de la profesora considera que el eje de simetría divide exactamente la gráfica de la parábola en otras dos gráficas iguales, cuyas gráficas también se pueden llamar *lados* de la gráfica de la parábola. Los agentes comparten lo que se suele llamar "la posición estándar" de la parábola, con el vértice hacia abajo y las dos ramas hacia arriba a lado y lado de la vertical central.

Al profundizar el análisis en modelos dinámicos énfasis en lo toponómico, se encuentran enunciados legaliformes que sugieren en su mayoría rasgos estáticos de los modelos de la profesora y de solamente dos alumnos; esto no parece sorprendente debido a la función de institucionalización del saber por parte del profesor (Margolinas, 2009). Al analizar diversas representaciones o acciones, mediante los procesos metodológicos descritos en

[71] Las acciones son procesos o subprocesos que no deben confundirse con los gestos.

los turnos de habla, y teniendo en cuenta los instrumentos de análisis, vemos que se pudo realizar un proceso de codificación sobre las toponomías empleadas en clases que a continuación presenta la Tabla 11.

Tabla 11. Proceso de codificación sobre el tema *nomías en clases.

| | ***nomías en clases** | | | **Códigos** |
|---|---|---|---|---|
| **Subtemas** | **Leyes** | Marcadores de operacionalización del código | “siempre que…”, “siempre se cumple…”, “es lo mismo”, etc. o sus equivalentes. | *nomías de la profesora: leyes sobre magnitudes de la espacialidad.<br>*nomías del alumno: leyes sobre magnitudes de la espacialidad. |
| | **Regularidades** | | “es…”, “se repite…”, etc. o sus equivalentes. | *nomías de la profesora: reglas de magnitudes de la espacialidad.<br>*nomías del alumno: reglas sobre magnitudes de la espacialidad. |
| | **Patrones** | | “si se cumple…entonces”, “cuando haya…entonces”, “si se da…entonces”, etc. o sus equivalentes. | *nomías de la profesora: regularidades de magnitudes de la espacialidad.<br>*nomías del alumno: regularidades de magnitudes de la espacialidad. |
| | **Reglas** | | “dado que…”, “sea…”, “si…”, etc. o sus equivalentes. | *nomías de la profesora: patrones de magnitudes de la espacialidad.<br>*nomías del alumno: patrones de magnitudes de la espacialidad. |

Se encontró que las *nomías, como representantes de modelos estáticos, tienen otras características como:

- ✓ Pueden emerger cuando se indaga por lo que es un objeto matemático.
- ✓ Al comparar como mínimo dos objetos matemáticos, las *nomías son fundamentales para diferenciar sus características.
- ✓ Hay *nomías institucionalizadas en los textos guías, pero ello no limita en absoluto que los alumnos y profesor puedan crear las suyas.
- ✓ Hay *nomías que se crean en el aula de clases y se dan por compartidas tanto por alumnos como el profesor; pero hay *nomías propias, como una especie de *nomías subjetivas que pueden operar como obstáculos o favorecer el aprendizaje de las matemáticas, es decir, lo que supone o la creencia del agente noético-semiótico sobre un objeto matemático.
- ✓ Las *nomías son progresivas según la forma en que se vaya estudiando el objeto matemático en los grados escolares sucesivos. Así, el objeto matemático *pendiente de una recta* tiene sus *nomías que va desde las *logías, *grafías y

*metrías asociadas al concepto de *inclinación* hasta el *límite del cociente incremental*.
- ✓ Plantear públicamente *nomías sobre un objeto matemático puede implicar que quienes escuchen expresen sus propias *nomías sobre el mismo objeto matemático. De ahí la importancia para establecer cuál o cuáles *nomías al final quedarán institucionalizadas o dadas por compartidas.

¿La anterior clasificación que se hizo sobre modelos dinámicos con énfasis en algunas subdisciplinas de la Cronotopía, dejan de lado todo lo crónico? Pensamos que no. A continuación, se presenta una respuesta a dicha pregunta.

### 4.3.4. Enseñanza de la Geometría Analítica y lo crónico

Las actividades matemáticas desarrolladas en la asignatura de Geometría Analítica en la educación media, tal como está hoy día en Colombia, hace prácticamente énfasis en las subdisciplinas del Topo*. Sin embargo, en los procesos de producción o desarrollo de *grafías y de medición para el cálculo de *metrías se evidencian subdisciplinas del Crono*. Analicemos el concepto de longitud, lo cual no nos aleja del Crono*. La longitud es una magnitud métrica. Pensar en la longitud nos conduce a rumiar sobre conceptos como la recta, la curva, el recorrido, el valor numérico del recorrido. Si estas representaciones geométricas son diferenciables deberíamos reconocerlas con facilidad en un ejemplo concreto. Intentemos hacer eso tomando una secuencia de fotos de una alumna que dibujó en el tablero una parábola que “abre hacia arriba”, que ella realizó con un movimiento hacia abajo inicialmente. A diferencia del PowerPoint el Word aún no permite insertar vídeos que el lector pueda ver ese instante, esto sería lo ideal y nos ayudaría mucho en lo que pretendemos mostrar. En el quinto pantallazo (screenshot ) de la figura 33, se colocaron algunos puntos de referencia que nos servirán para el análisis que se hará.

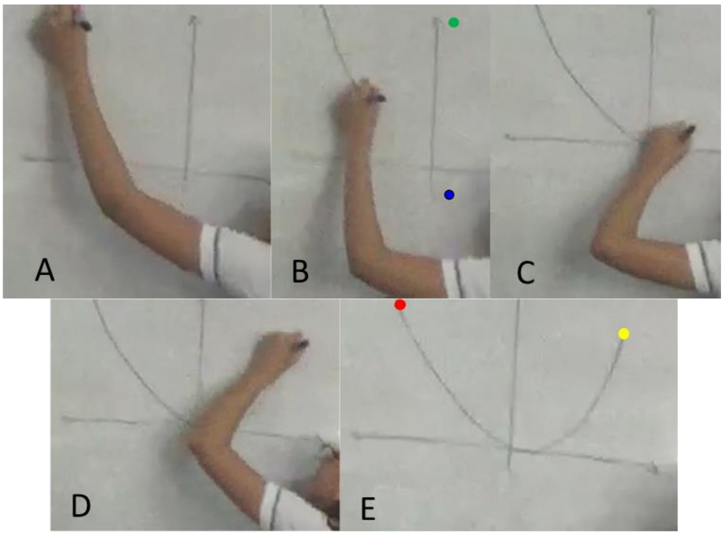



Figura 33. Pantallazos de un vídeo que muestra el proceso de graficación de una parábola hecha por una alumna.

La distinción básica entre una línea curva y una línea recta es el camino recto y el camino curvo, que también podemos llamar traza o trazado. Esta distinción lo que nos muestra son dos tipos de caminos. Lo común en las líneas curvas o líneas rectas, vistas como caminos, es que son cualitativas, no son cuantitativas, así se usan para los trazos o líneas que representan caminos y por lo tanto son claramente cronotópicos. Es decir, el camino es la construcción progresiva que va dejando una huella, una línea recta o una línea curva y todas sus posibles combinaciones, que va fijando una representación gráfica de un proceso que está siendo "pasado al presente"; o sea, la *grafía como producto final estático de un proceso previo de producción de la *grafía como proceso dinámico.

El camino hace de proa en el presente gráfico y la distancia del camino toma en cuenta el inicio del pasado hasta esa proa. Gráficamente, la distancia del camino puede ser finita como muestran los puntos rojo y amarillo en el pantallazo E, pero puede ser potencialmente infinita como lo muestran los puntos desde el azul hasta el verde, pues el punto verde se prolonga infinitamente debido a la simbolización del eje como una semirrecta.

La distancia recorrida en el camino es lo prenumérico es la antesala de la longitud y de la duración del recorrido. La secuencia de pantallazos [A (pasado), B, C, D y E (presente)] representa la duración, pero también muestra un camino que deja una huella de una línea curva que representa una parábola, que una vez terminada, es una *grafía que ya no “se abre” hacia arriba, pues es estática. Pasar de A a E nos muestra el tipo cualitativo de camino, en este caso curvo; pero ahora, en ese instante de finalización del camino, deja de ser cualitativo y se convierte en cuantitativo: el proceso finalizado es el que hace emerger la duración del camino, con alguna medida o métrica temporal, lo Crono*, y a la vez hace emerger la longitud del camino, con alguna medida o métrica espacial, lo Topo*. Por lo anterior es que hemos insistido en que las acciones y actividades de producción de las *grafías y *metrías están en el *oasis del Crono**, en este caso de la Cronometría, pero sobre ellas y sus aspectos temporales no se hace énfasis en la enseñanza de la Geometría Analítica.

#### 4.3.4. El retorno a las *logías.

Los modelos descritos en 4.3.1, 4.3.2. y 4.3.3, nos retornan a las *logías. Todas las teorías expresadas por la profesora y sus alumnos permiten a una clasificación de modelos mentales [cronotópicos] según ciertos tipos de *logías. Teniendo en cuenta a Duval (1993, 2004a, 2016), esta clasificación estaría mediada por registros semióticos en: lengua natural, lenguaje aritmético, lenguaje algebraico y lenguaje figural; con representaciones orales, escritas, simbólicas o figurales asociadas con las *logías o teorías sobre modelos mentales cronotópicos. Así, se podría caracterizar los modelos estáticos que se emplearon para el desarrollo de las *nomías organizadas en la Tabla 11 de la siguiente forma:

- ✓ *Modelos mentales cuyas teorías son provenientes de un registro semiótico de lengua natural que producen representaciones orales.*

- ✓ *Modelos mentales cuyas teorías provenientes de un registro semiótico de lengua natural que producen representaciones escritas.*

- ✓ *Modelos mentales cuyas teorías provenientes de un registro semiótico de lenguaje algebraico que producen representaciones simbólicas.*

- ✓ *Modelos mentales cuyas teorías, en registro semiótico de lengua natural que producen representaciones orales, van acompañadas de gestos expresivos que dan pistas adicionales sobre ellos.*

- ✓ *Modelos mentales cuyas teorías, en registro semiótico de lengua natural que producen representaciones escritas, van acompañadas de gestos expresivos que dan pistas adicionales sobre ellos.*

- ✓ *Modelos mentales cuyas teorías, en registro semiótico de lengua natural que producen representaciones figurales, van acompañadas de gestos expresivos que dan pistas adicionales sobre ellos.*

- ✓ *Modelos mentales cuyas teorías, en registro semiótico de lengua natural que producen representaciones simbólicas, van acompañadas de gestos expresivos que dan pistas adicionales sobre ellos.*

Como cada *logía es un evento específico que es parte de la teoría que se va completando, aclarando, retomando o aun contradiciendo a lo largo de cada clase, por ejemplo, en las interacciones entre profesor y estudiantes (como evento comunicativo) se manifiestan o se expresan teorías por parte de la profesora y de sus alumnos.[72]

En los pasajes hay una tipología de modelos mentales donde unos se representan por medio de la lengua natural (oral, escrita y gestual[73]) y otros simbólicos. Las *nomías que se encontraron están sujetas a definiciones tanto institucionalizadas[74] como las establecidas por modelos mentales [cronotópicos] de alumnos o de la profesora.

---

[72] Asesorías con Dora Calderón y Carlos Vasco. 30 de noviembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

[73] Ya reconocimos la importancia de los gestos en cuanto a la generalización de patrones en las clases de matemáticas, gracias a las investigaciones de Arzarello & Edwards (2005), Radford (2003, 2005), Vergel (2015).

[74] Cuando nos referimos a "institucionalizadas" esta idea abarca cualquier contexto sociocultural, sea un ambiente escolar, una comunidad indígena, en una práctica artesanal, etc. Sin embargo, en esta tesis la atención está puesta en un ambiente escolar.

A nuestro juicio, el resultado de la actividad matemática noético-semiótica genera, refina, echar a andar modelos mentales acompañados y guiados por las teorías. Por ejemplo, se puede notar en el empleo de *grafías y *metrías, tal como lo señala Vasco (2014), un conjunto de operaciones, transformaciones o transiciones que construimos mentalmente para reparar los cortes y congelamientos temporales y recuperar el dinamismo de los procesos; como también es fácil notar en estas dos actividades semióticas las transformaciones y movimientos en el tiempo. Vamos a dar razones sobre lo anterior con el siguiente momento que muestra la relación de las teorías de la profesora y algunos de sus alumnos con la topografía y cronografía.

### 4.3.5. Las teorías (*logías) y su vínculo con la topografía y cronografía.

Empecemos por tratar de identificar algunos rasgos desde la topografía y la cronografía, lo que nos puede conducir a identificar pistas y del manejo de modelos dinámicos por parte de la profesora y sus alumnos. El oasis de lo Crónico, del tiempo, está en las acciones y las actividades de producción de *grafías y en el proceso de hacer mediciones. Para realizar una *grafía se necesita movimiento, operaciones, transformaciones: hacer trazos, mover el lápiz, el mouse, el marcador, de un lado para otro. Se podría dejar la punta del lápiz fija y mover la hoja con la otra mano, pero al final es el modelo mental el que opera. Las *grafías se producen en un contexto, es decir son contextualizadas. Si el contexto es la clase de Geometría Analítica, como las que fueron observadas en 14 sesiones, las *grafías producidas serán alusivas a temas constitutivos de Geometría Analítica, lo mismo sucedería por ejemplo en una clase de Química o las *grafías que hacen los niños jugando a la Peregrina son alusivas a este juego, las *grafías son contextualizadas. En el Anexo 40, se puede ver un significativo conjunto de *grafías que fueron producidas por la profesora y en el Anexo 41, se puede ver gran parte de las *grafías producidas por los alumnos. Todas ellas alusivas a objetos matemáticos desarrollados en un curso de Geometría Analítica, todas ellas son representaciones de un aspecto de modelos dinámicos empleados por la profesora o por los alumnos.

Cuando recurrimos a una *grafía para representar un objeto matemático, la topografía, inicialmente, y la cronografía, posteriormente, nos dicen que las *grafías pueden llegar a ser auxiliares, en el sentido de las representaciones auxiliares de Duval (2016), como indicativas de un objeto matemático, más no es una representación del objeto, es decir, ellas sirven de apoyo para describir una actividad matemática o comprender un objeto matemático. Un rasgo que tienen las *grafías auxiliares es que se pueden sustentar de manera espontánea en la experiencia personal de quien la exprese, a lo que Vasco (2014) llamaría "modelos explicativos" porque posibilitan dar explicaciones teóricas de los cambios que se modelan. Por ejemplo, la alumna que estuvo encargada de la exposición sobre la trayectoria del avión alrededor de la torre de control, de manera espontánea recurrió a un gesto, sin acompañamiento de *logías, para representar dicha trayectoria:

> Em: "…entonces dice que/ de cualquier punto que se encuentre va a empezar a hacer un círculo (Em simula una circunferencia con el marcador que sostiene con su mano)"

A ese gesto, en la interpretación de un modelo dinámico lo podemos denominar una operación porque actúa sobre el modelo en el proceso de resolver una actividad de Geometría Analítica, por ejemplo, como el que se puede ver en la figura 24.

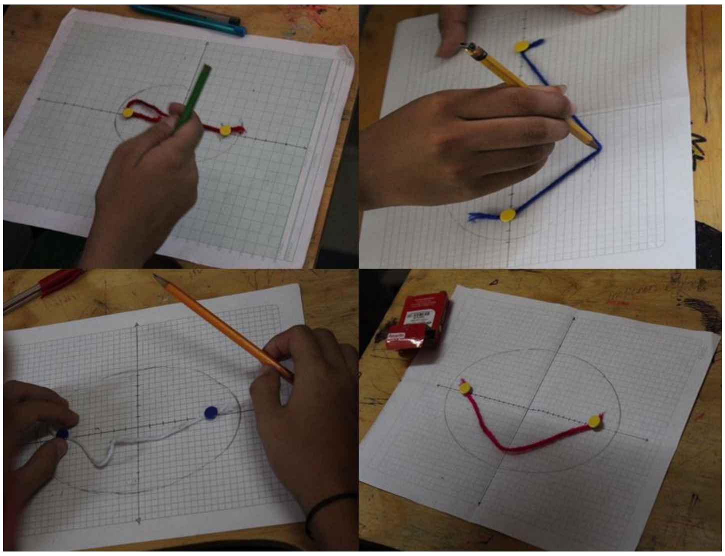


Figura 34. Clase 11. C11. 01-11-17. Gráficas de elipses realizadas por algunos alumnos en una actividad matemática diseñada por la profesora.

En el caso de la profesora, ella empleó gestos y dibujos en el tablero, acompañados de *logías, lo que hizo explícito aquello que quería representar con sus manos:

> P: yo le quito esta área pequeña/ ¿Qué me queda?/ el área de la arandela/ (()) como una dona /como una dona/ qué parte de la dona (()) a la parte hueca/ sí o no/ o como el trululu/ exactamente como el trululu/ el área que uno se come es el bordecito/ o sea/ completo porque hay un hueco/ hay un hueco/ uno no se come toda un área completa/ porque hay un hueco/ entonces/ para yo poder hallar el área qué me como/ tengo que restarle el huequito/ eso es exactamente lo que viene siendo allí / entonces/ cuál es el área de esta/ ¿Cuál será el área solamente de las partes esta de acá? /
> (Clase 4. 13-09-17.)

¿En el pasaje anterior qué se revela del modelo dinámico de la profesora? Del pasaje anterior se pueden encontrar algunos rasgos en las siguientes expresiones:

- ✓ *yo le quito esta área pequeña/¿Qué me queda?*
- ✓ *el área que uno se come*
- ✓ *hay un hueco*
- ✓ *uno no se come toda un área completa*
- ✓ *para yo poder hallar el área qué me como/tengo que restarle el huequito*
- ✓ *cuál es el área de esta*

Si nos damos cuenta, el concepto principal de expresión de la profesora es el de área. Un área que en algunas ocasiones es tratada como superficie cuando se acompaña con el gesto de señalar una región sombreada: *yo le quito esta área pequeña*. Así, hay una pista del empleo de un modelo mental que confunde la superficie con el área de una figura geométrica y tiene énfasis en lo topográfico. Para estas expresiones escogidas existe una combinación entre *grafías y *metrías, cuando el área es interpretada como superficie y magnitud, *para yo poder hallar el área qué me como/tengo que restarle el huequito*. Es una afirmación que propone una acción para medir áreas como se puede notar en la figura 34, y esa acción es crónica, tiene movimiento, pero aquí solo la podemos tomar como un indicio de que el modelo mental que está manejando la profesora es dinámico y que lo modifica mentalmente agregando o quitando pedazos, aunque en el tablero no pueda romper el disco interno.[75]

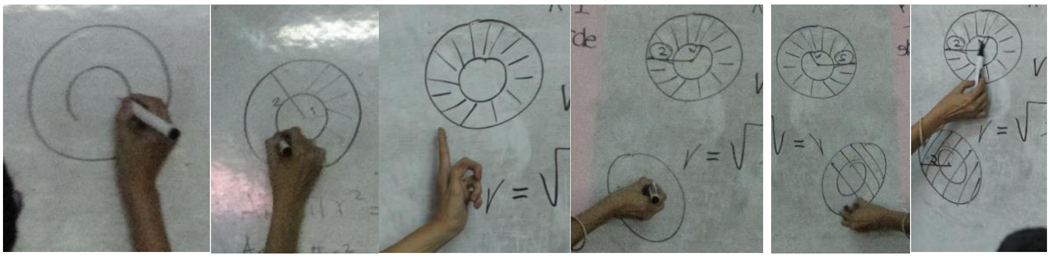


Figura 35. Una secuencia fotográfica que muestra acciones de modelos mentales que hace énfasis en *grafías y *metrías para la medición de áreas.

A medida que la profesora va expresando su modelo mental sobre el problema de aplicación del círculo, va expresando (teorías) sus operaciones y transformaciones, que le permiten resolver el problema, es así como va sombreando, haciendo trazos, marcando radios, señalando con la punta del marcador o con el dedo, etc. Desde el punto de vista noético-semiótico, un borrado o una prolongación sería un *tratamiento* dentro del mismo registro figural. Una *conversión*, en este caso, es cuando pasa de una ecuación en un registro algebraico a un registro figural. De ello, emerge entonces otro rasgo de las *grafías: pueden ser auxiliares y pueden ser espontáneas y basarse en la experiencia personal de la persona que la produce (*el área de la arandela/ (()) como una dona/ como*

[75] Asesorías con Carlos Vasco. 30 de noviembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

*una dona/ qué parte de la dona (()) a la parte hueca/ sí o no/ o como el trululú/ exactamente como el trululu/*), o pueden ser no tan espontáneas sino condicionadas por la actividad matemática aprendida previamente. Es decir, los modelos dinámicos estarían sujetos a una acción espontánea del agente noético-semiótico, pero también podrían ser condicionados por la actividad escolar que plantea un profesor y las rutinas del aula de matemáticas.

Si bien el papel de los instrumentos puede expresar la presencia de un modelo más dinámico, el tipo de enunciados y propuestas de cómo proceder y qué hacer revelan un pensamiento dinámico con respecto a cómo obtener una medida numérica.[76] Los modelos dinámicos, a diferencia de los estáticos, pueden emplear instrumentos en sus operaciones o transformaciones. No fue así el caso anterior, donde la profesora, al usar *grafías auxiliares, las dibujó a mano alzada. Si alumnos o profesores al hacer una *grafía piensan con y a través del instrumento que emplean para realizar dicha *grafía, entonces instrumento-*grafía es una pareja inseparable que produce dicha *grafía. Es el caso de la regla y el compás en Euclides. Los instrumentos juegan pues un destacado papel semiótico en las representaciones de las *grafías y por ende en los modelos dinámicos que las producen. No se pretende profundizar ahora en las teorías de la génesis instrumental, aunque sí es conveniente introducir en el aparte siguiente una primera aproximación a la interacción entre las formas de expresión de modelos mentales y la disponibilidad de instrumentos y artefactos de la vida cotidiana o de la vida escolar.

[76] Asesorías con Dora Calderón. 20 de julio del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

**4.3.6. El papel de los artefactos culturales en la expresión de modelos mentales [cronotópicos]**

En las clases de matemáticas las formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos] están mediadas por artefactos, como los llamaría Radford (2006). Estos artefactos pueden ser tangibles, como un compás; o simbólicos, como los números naturales. Cuando la profesora o un alumno emplea un instrumento para hacer un cálculo, sea cronométrico o topométrico, se suele hablar de "instrumentación" del artefacto por parte del usuario. La instrumentalización es el efecto que va teniendo en el usuario el aprendizaje del manejo del artefacto y las repetidas instrumentaciones, proceso que lo va transformando como matemático y como maestro.

Analicemos un breve pasaje entre dos alumnos y la profesora para dar inicio a esta discusión. Veamos un pasaje de la Clase 12, (*Clase 12. C12. 08-11-2017*), que involucra el papel de un instrumento no institucional como la escoba que se tiene disponible en el salón de clases para barrer la basura:

> Eh2: coge la escoba (la profesora levantó la escoba que estaba en el piso y la ubicó en un rincón del salón de clases).
> P: ¿Por qué va a coger la escoba?/
> Eh3: seño porque es una regla
> P: no señor
> Em2: ¿seño y si yo le presto una regla?
> P: préstele la regla
> Eh2: ey!, coge la escoba
> Eh3: ¿seño y la escoba no sirve?
> (Clase 12. 08-11-2017)

Se puede ver el impulso de Eh2 de recomendarle a Em1 que tome la escoba (instrumento no institucionalizado), lo cual Harré (2004) interpretaría como un proceso de abstracción e idealización de un objeto que tiene la propiedad de ser lineal en una de sus partes, para sustituir la función de la regla (instrumento institucionalizado en clase de matemáticas) y ayudarle a dibujar la intersección de los ejes de la elipse sobre el tablero. Se externaliza así, del modelo estático del alumno, una acción que identifica en un objeto no institucionalizado características que pueden ser usados en las clases de Geometría Analítica. Se trata de un significado que le ha dado Eh2 a la escoba, el cual advierte cuando la profesora la levanta del suelo y la coloca en un rincón del salón. Pero más allá de si el instrumento es adecuado o no, cuando se piensa en cómo proceder y en la necesidad de emplear un instrumento de referencia para trazar rectas y medir sus longitudes,[77] se piensa en la instrumentación.

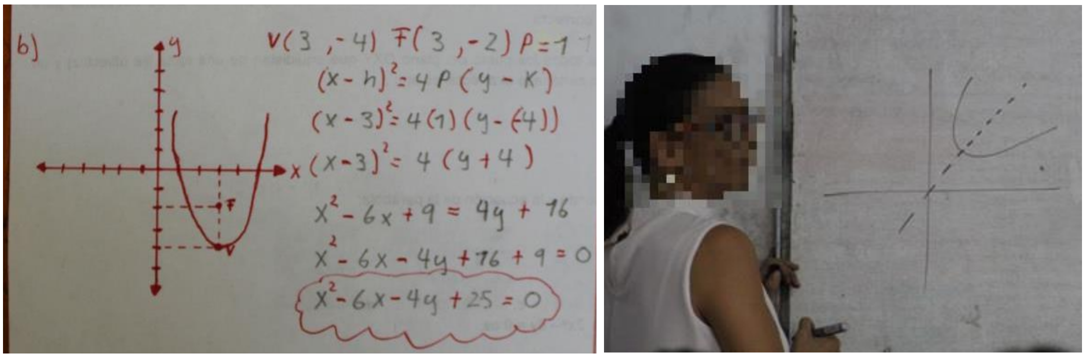
Trouche (2005) considera que un instrumento es lo que el sujeto construye a partir de un artefacto. Con esta base es posible decir que Eh2 no vio una escoba (artefacto) que la profesora levantaba del suelo, sino que el rasgo distintivo de su modelo mental es que vio una regla. Otros alumnos, como Eh3, también vieron una regla y no una escoba, como lo indica el reclamo: *seño, porque es una regla*; o sea, que los modelos dinámicos de este grupo de alumnos que vieron simultáneamente una regla en la escoba son isomórficos, pero no para la profesora, pues ella asume que la escoba no es una regla. Sin embargo, también podríamos pensar que se trata de una manifestación de un aspecto relacionado con la operatoria en el modelo mental y con la necesidad de contar con instrumentos para producir *grafías y hacer mediciones. Y con esta base, se puede considerar en el artefacto escoba una posibilidad de utilizarla como instrumento. En general, no es tanto que vean o no una regla, sino que detecten y comparan la posible función de los artefactos culturalmente disponibles como instrumentos.

Ante los modelos dinámicos de los alumnos la escoba es un instrumento, que tiene una característica de rectilinealidad en una de sus partes; se trata de un modelo mental que hace énfasis en la subdisciplina topográfica, pero que no es compartida por la profesora,

[77] Asesorías con Dora Calderón. 14 de septiembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

*P: no señor*. Es decir, las operaciones que pueden emplear los modelos dinámicos de los alumnos, e incluso las transformaciones, no necesariamente serán aceptadas por el modelo dinámico de la profesora que ella usualmente emplea para resolver la misma actividad. No obstante, en la alumna la escoba no es solo un conocimiento trivial, pues al reconocer una de sus partes como una regla es también un rasgo distintivo de un modelo dinámico que hace énfasis en lo topográfico. Debe observarse, que en términos de modelos mentales que se manifiestan en contextos de resolver tareas en Geometría Analítica, aparece el tema del uso de instrumentos de trazado de gráficas y de efectuar medidas, que aprovecha artefactos culturales presentes como la escoba. Lo interesante en términos de modelo mental, es la necesidad de guiar el trazo y de medir longitudes, de realizar esa acción como instancia que permitirá facilitar el logro de su propósito.

Hay un rasgo en un tipo de *grafías empleadas en las actividades matemáticas y es que ellas no tienen exactitud. Se debe precisar que toda *grafía es necesariamente aproximada e irregular en sus bordes, y toda *metría es necesariamente imprecisa e inexacta pues las interacciones del sujeto y el instrumento de medición con el proceso físico cercano tiene necesariamente umbrales e intervalos de incertidumbre. ¿Cuál actividad social, distinta a la que se hace en los laboratorios, produce *grafías y *metrías exactas? No es sorprendente la inexactitud de las *grafías en clases de matemáticas, sobre todo aquellas que son realizadas a mano libre o a mano alzada, como las que se ven en la figura 35a, es una manera de proceder en actividades que realizan personas en diversos contextos, que hace parte de la experiencia matemática de la humanidad, de sus modelos dinámicos, y del desarrollo tecnológico en el cual están inmersas las personas que las producen, como se puede evidenciar en Rabardel (1995). De la experiencia matemática de las personas hace parte el empleo de artefactos para el desarrollo de conocimiento matemático (Radford, 2006) y estos artefactos, algunos institucionalizados y otros no, producen exactitudes o no en las *grafías. La figura 35a es un ejemplo de una *grafía de una parábola, hecha por un alumno, que no tiene exactitud. Sin embargo, la profesora también produjo *grafía inexacta como la que se muestra en la figura 35b. Es decir, las *grafías y *metrías empleadas por modelos dinámicos, en una clase de matemáticas, no son exactas por lo expuesto anteriormente.




a b

Figura 36. Figura 35a. Gráfica inexacta realizada por un alumno en un examen sobre la parábola. (Clase 10. C10. 25-10-2017). Figura 36b. Dibujo realizado por la profesora en respuesta de Em. (Clase 5. C5. 20-09-17).

La inexactitud en las *grafías en el aula de clases de matemáticas es una constante; se trata por lo general del tipo de instrumentalización que se desarrolla, lo cual es un tema propio de las *metrías. Estas inexactitudes en muchos casos se deben al tipo de instrumento tangible que se emplea, y que de paso se constituye en un contraejemplo de la rigurosidad y exactitud de las matemáticas. Así, el papel que juegan los artefactos institucionalizados y no institucionalizados en la en la actividad matemática externa y pública de modelos dinámicos con énfasis en lo topográfico estará mediado por tres factores:

1. Por los objetivos que se persiguen en la actividad (con el enorme riesgo de generar obstáculos didácticos); es decir, si se trata de hacer la *grafía —por ejemplo de una parábola— de inmediato se activan modelos dinámicos con énfasis en lo topográfico/topométrico, o topografométrico; pero si se trata solo de hacer un esbozo de la parábola para mostrar alguna de sus partes, las *metrías se anulan y emerge un modelo dinámico con énfasis en lo topográfico.

2. Por los artefactos que se emplean en el diseño, gráficas o dibujos de un objeto matemático; es decir, dependiendo de los recursos con los cuales se cuenta en el

aula de clases. En las clases observadas regularmente hubo más formas de expresión de modelos dinámicos con énfasis en el Topo* de alumnos y que estaban mediados por artefactos no institucionalizados que rasgos de modelos mentales topográficos mediados por artefactos institucionalizados.

3. Por lo crónico o lo alusivo al Crono* emerge en la medida que las operaciones y trasformaciones del modelo dinámico empleen artefactos para el desarrollo de la actividad matemática, especialmente en el diseño de *grafías y el cálculo de *metrías.

Son estas pues algunas caracterizaciones de modelos mentales [cronotópicos] que se encontraron en el análisis de la información, donde volvemos a hacer énfasis que no agotan las características de dichos modelos.

# Capítulo 5. Conclusiones, limitaciones y recomendaciones de la investigación

Este capítulo estará conformado por tres dimensiones: las conclusiones, las limitaciones y finalmente las recomendaciones de la investigación.

En las conclusiones se van a presentar los siguientes momentos:

- ✓ *Respuesta a la pregunta central de investigación*
- ✓ *Cumplimiento de objetivos específicos de investigación*
- ✓ *Otras conclusiones*

Por su parte, las limitaciones desarrollarán los siguientes tres temas:

- ✓ *Limitaciones con respecto a la metodología.*
- ✓ *Las limitaciones didácticas.*
- ✓ *Limitaciones logísticas.*

Las recomendaciones desarrollarán dos temas:

- ✓ *Un currículo cronotópico para la enseñanza de la Geometría Analítica de la educación media en Colombia*
- ✓ *Recomendaciones para otros estudios o investigadores*

## 5.1. Conclusiones

El Programa Cronotopía es una alternativa para analizar las diversas representaciones témporo-espaciales de los alumnos y de los profesores y sus formas de expresión, no solo en clases de Geometría Analítica, sino en cualquier clase de matemáticas. El Programa Cronotopía brinda un método didáctico para comprender cuándo un profesor o alumnos producen conocimiento que se pueda denominar matemático. Se trata de ir analizando las diferentes actividades semióticas del agente en sus modelos mentales [cronotópicos], denominadas *grafías, *logías, *metrías, *nomías y gestos acompañantes, siendo las *nomías las más complejas de todas las actividades semiótica de un agente noético-semiótico, por tratarse de que el agente debe producir enunciados legaliformes que incluyen las tres anteriores (*grafías, *logías y *metrías).

En esta investigación también se avanzó en el desarrollo teórico de dicho Programa Cronotopía, en la medida que se iban presentando retos metodológicos y problemáticos. A continuación, se presentarán los momentos ya descritos que conforman las conclusiones.

### 5.1.1. Respuesta a la pregunta central de investigación

La pregunta central de investigación que nos formulamos fue: ¿Cuáles son y cómo se expresan los modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesores cuando desarrollan actividades en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica por medio de representaciones cartesianas en el plano? En las formas de expresión de los modelos mentales se identificaron dos tipos de modelos, los estáticos y los dinámicos. Las características principales de ambos modelos es que para identificar los rastros de un modelo dinámico es necesario centrar la atención en el proceso resolutivo de cualquier actividad matemática, mientras que las representaciones de un modelo estático se evidencian en la representación final o instantánea de una *grafía, *metría o *nomía. Para poder comprender sus rasgos, de los modelos dinámicos o estáticos, fue necesario analizar sus representaciones mediante las actividades semióticas del cronotopo, dejaremos de lado las *logías, sabiendo que ellas ocupan todo tipo de lenguaje, para hacer énfasis en las *grafías, *metrías, *nomías y gestos. Sobre la importancia de los modelos estáticos se pudo concluir que ambos son necesarios para el desarrollo de pensamiento matemático; por una parte, los modelos dinámicos estuvieron siempre asociados a las acciones y procesos de producción de *grafías y de mediciones que conllevan a *metrías. Todo lo que implica movimiento son representaciones de modelos dinámicos y por lo tanto están vinculadas a las subdisciplinas del Crono*. Las operaciones de los modelos dinámicos están relacionadas con acciones en el tiempo como: trazar, mover, girar, explicaciones empleando gestos, todos los procesos imaginativos sobre el objeto de aprendizaje o de enseñanza, etc. A esto lo llamamos “activar”, “poner en marcha”, “echar a andar” (o “correr”, “run” en inglés) los modelos mentales [cronotópicos]. Activar modelos dinámicos en clases de matemáticas es de mucha importancia al aprender, hacer y enseñar matemáticas, pues les permite a los alumnos poner en marcha sus imágenes, sus conceptos, sus nociones, sus creencias, sus obstáculos y las instrucciones y rutinas que recuerdan de años anteriores; en fin, todo lo que esté al servicio de la solución de una actividad matemática escogida personalmente o propuesta por el profesor o el libro de texto. Esto es muy claro cuando el objeto de estudio requiere producir construcciones gráficas auxiliares y gestos acompañantes para comunicarlos al profesor o a los compañeros. Por su parte los modelos estáticos, que también son importantes para la educación matemática, están asociados a las *grafías acabadas, a las *metrías finalizadas y a las *nomías establecidas.

Estos modelos mentales [cronotópicos], teniendo en cuenta las observaciones de las 14 clases, se pudieron encontrar mucho más en las disciplinas de lo Topo* (Topografía, Topología, Topometría y Toponomía), no tanto de lo Crono*, debido a la forma actual de organización de las clases del curso de Geometría Analítica que se observaron durante la investigación. Sin embargo, en las acciones y actividades de producción de las *grafías y *metrías, típicas representaciones de los rasgos de los modelos dinámicos, los modelos mentales están alojados también en las subdisciplinas de lo Crono*, especialmente de la Cronografía y de la Cronometría.

En las formas de expresión de los modelos mentales con énfasis en las *grafías, empezamos concluyendo que la representación final o instantánea de una *grafía es la representación de un modelo estático; pero sus procesos de creación o su transformación de nuevas expresiones semióticas se relacionan con un modelo mental dinámico.

Las *grafías están detenidas en el tiempo, y, a diferencia de los gestos acompañantes, estas son susceptibles de nuevas interpretaciones de sus propiedades o características a partir de la huella que han dejado en un instante del tiempo. Esto es aplicable, no solo en Educación Matemática, sino en cualquier campo del conocimiento. El hacer *grafías implica la activación de un modelo tópico y crónico con sus componentes, operaciones y cambios relacionados en el tiempo. En este proceso, junto con la medición o producción de *metrías, algunas subdisciplinas del Crono* pueden activarse de manera consciente por parte del alumno, y si el profesor de matemáticas logra activarlas en sus estudiantes, tendríamos una forma novedosa de organizar las clases de matemáticas que podría conllevar al desarrollo de pensamiento matemático por parte los alumnos y aun a nuevos aprendizajes por parte del profesor.

En cuanto a las formas de expresión de modelos mentales con énfasis en las *metrías, concluimos que se caracterizan por expresarse mediante un registro semiótico en lenguaje oral o en lenguaje escrito, donde se destaca más el oral por parte de los alumnos y, caso contrario, el lenguaje escrito de la profesora fue el que predominó en sus formas de expresión.

En estas formas de expresión se pudo también identificar el empleo de artefactos tangibles, institucionalizados o no, como fue el caso de la escoba del salón de clases (no institucionalizado), que reemplazó temporalmente una regla (institucionalizado), fueron mediadores para estas formas de expresión de modelos mentales con énfasis en lo métrico. En general fueron pocas las *metrías encontradas durante las 14 clases, y de ellas la mayoría fueron expresadas por la profesora. Hacer mediciones, es decir, el cálculo de *metrías, implica el empleo de modelos tópicos y crónicos con sus componentes y cambios relacionados en el tiempo, o sea, que los modelos dinámicos también tienen sus pistas o rasgos en los procesos de medición. Todo lo que implica movimiento son representaciones de modelos dinámicos y ello es una característica del cálculo de *metrías, aunque el producto del proceso de medición es una *grafía estática con constantes numéricas.

En las formas de expresión de los modelos mentales con énfasis en las *nomías, concluimos que son las más complejas e importantes de las actividades semióticas del cronotopo. Hacer *nomías significa desarrollar matemáticas escolares en su nivel más complejo y abstracto, pues se trata de crear enunciados legaliformes. A pesar de las anticipaciones del investigador, el trabajo de campo mostró que fueron pocas las *nomías que se realizaron en las clases y que su principal protagonista fue la profesora y no los alumnos, que poco las desarrollaron. Estas pocas *nomías son las que regularmente se encuentran en los textos escolares; es decir, no hubo *nomías espontáneas producidas ni por la profesora ni por los alumnos al desarrollar las actividades de clase.

No hubo ningún modelo mental con énfasis en lo crononómico; los pocos que se caracterizaron fueron modelos mentales toponómicos, que emergieron en la aplicación de reglas sobre magnitudes de la espacialidad y de patrones de magnitudes de la espacialidad. Es decir, tal como está organizado y desarrollado el curso de Geometría Analítica que se observó, no se crearon condiciones para que la subdisciplina de la Crononomía apareciera. Aquellos alumnos que participaron en las clases o que por lo menos desarrollaron representaciones que pudieron ser analizadas, lograron desarrollar muy pocas *nomías; de hecho, hubo clases donde no se desarrolló ninguna *nomía por parte de ellos.

Con respecto a las formas de expresión de los modelos mentales con énfasis en los gestos, se pudo observar como los alumnos y la misma profesora, utilizan partes de sus cuerpos para externalizar sus modelos mentales [cronotópicos], para medir algo, por ejemplo, usando la cuarta y los dedos. También los modelos dinámicos tienen sus pistas o rasgos en las acciones, que es lo mismo que los gestos, y emplean, con sus componentes y cambios relacionados, en el tiempo.  La importancia de los gestos en Educación Matemática, además de su uso para la constitución de patrones, son una actividad semiótica de nuestros modelos mentales y espacialmente de los dinámicos. Se concluyó que los gestos también hacen parte de las operaciones de los modelos dinámicos.

### 5.1.2. Cumplimiento de objetivos específicos de investigación

Los tres objetivos específicos de la investigación se pueden resumir en que se pretendió caracterizar los modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y una profesora, determinar sus formas de expresión y establecer relaciones entre ellas.

*Con respecto al objetivo específico número uno.* Recordemos cuál fue dicho objetivo:

> Caracterizar modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesor que emergen en el análisis de actividades geométricas de 3d, cuyas representaciones se hacen en plano.

La caracterización de los modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y la profesora, se logró en función de las actividades semióticas del cronotopo, *grafías, *logías, *metrías, *nomías y gestos acompañantes. Se concluyó que las expresiones verbales cronotópicas son aquellas que están relacionadas con aspectos témporo-espaciales de quien las enuncia. Estas expresiones verbales cronotópicas dan mayores rasgos de las concepciones témporo-espaciales de un agente noético-semiótico. El empleo de expresiones verbales cronotópicas y sus contextos pueden revelar rasgos del empleo de modelos estáticos o modelos dinámicos.

Fueron diversos los modelos mentales [cronotópicos] que se caracterizaron en su forma operativa cuando la actividad matemática implicaba el análisis de magnitudes como distancia, longitud y área y en pocas ocasiones duración. Es decir, el curso de Geometría Analítica, en sus objetivos de aprendizaje, sigue diseñado para privilegiar las subdisciplinas del Topo* (más relacionadas con modelos o rasgos estáticos e incluso con el aplanamiento de la imaginación, al solo desarrollar actividades en dos dimensiones) que las subdisciplinas del Crono* (más relacionadas con modelos o rasgos dinámicos y la espacialización de la imaginación en el desarrollo de las actividades en tres dimensiones). Estos rasgos dinámicos muestran un aprendizaje más completo y profundo del objeto matemático, porque no se someten a la reproducción de *nomías memorizadas o que se encontraron como referencia en los textos escolares, sino a la creatividad que dan las acciones y procesos de producción de las *grafías y *metrías por los estudiantes como agentes noético-semióticos. No se está desconociendo que las acciones o procesos de producción de *grafías y de medición o cálculo de *metrías no se hayan empleado en el curso de Geometría Analítica; lo único es que debe advertirse el potencial didáctico que tienen estos dos procesos en la solución de actividades matemáticas y particularmente cuando se analicen situaciones solo en 2d, cuando en la cotidianidad están en 3d.

La caracterización de los modelos mentales [cronotópicos] también mostró aspectos generales de la forma de organización del curso de Geometría Analítica, en el sentido, de cuáles magnitudes físicas fueron estudiadas y cuáles no; por ejemplo, no hubo referencias a magnitudes físicas de la mecánica, el electromagnetismo o la termodinámica; en ningún pasaje comunicativo seleccionado  se encontraron rastros de las magnitudes sobre la masa, la carga eléctrica, la densidad, la temperatura, la velocidad, la aceleración y la energía, en cambio, si hubo varias referencias, cuando se trataba de presentar aplicaciones de las Secciones Cónicas, sobre longitud, distancia, área y duración. Por la ausencia de trabajo en 3d, no aparecen ni el volumen ni la capacidad.

*Con respecto al objetivo específico número dos.* Recordemos cuál fue dicho objetivo:

> Determinar formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesor asociadas al tipo de actividades descritas en el objetivo anterior.

Son diversos procesos los que emergen en las formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos]. Por ejemplo, comenzamos analizando cada palabra que se empleó en una Clase, y nos dimos cuenta que ella por sí sola no proporciona muchas pistas sobre el modelo mental [cronotópico] que se está expresando, no obstante al ser la unidad semántica básica para la composición de una expresión lingüísticamente organizada, ella sola daba pistas sobre algún modelo mental empleado, por ejemplo, cuando se usa la palabra *simétrica.*

Seguimos avanzando, y ahora el turno era de una frase corta compuesta como mínimo por tres palabras. Así emerge una expresión que podría ser una *expresión verbal [cronotópica]* al tener ciertas características relacionadas con manifestaciones de lo témporo-espacial. Estas expresiones son mucho más fuertes que una palabra aislada, en el sentido que pueden dar más rasgos sobre los modelos mentales empleados que se activan para la solución de las actividades matemáticas y que también dan pistas de las formas de expresión de los alumnos o el profesor, sobre todo de los recursos lingüísticos que ambos agente noéticos-semióticos emplean.

Hay dos métodos que brinda el Programa Cronotopía para indagar las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos]. El primero de ellos es analizar las situaciones conflictivas de comunicación que propicia fundamentalmente el profesor de matemáticas con sus alumnos. En estas situaciones conflictivas de comunicación hay dos momentos, el desacuerdo y el acuerdo, donde emergen formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de ambos agentes, los cuáles no son tan fáciles de identificar, sobre todo en los desacuerdos en la comunicación que se da entre ellos al momentos de resolver una actividad matemática. La dificultad es que prácticamente hay que "adivinar" ambos modelos mentales de los participantes en desacuerdo, hacer conjeturas y tener la oportunidad de hacer preguntas en el momento mismo del desacuerdo. Más tarde, cuando el investigador tiene que limitarse a ver los vídeos de los registros de la clase en donde se dieron los desencuentros entre los alumnos y la profesora, es difícil identificar precisamente en dónde estaba el desacuerdo y por qué se dio, y ya no hay oportunidad de indagar más a fondo por medio de preguntas, ejemplos y propuestas. Cuando hay acuerdos en la comunicación, se puede inferir que hay isomorfismos entre los modelos mentales [cronotópicos], y cuando el acuerdo es parcial, que hay homomorfismos entre dichos modelos; pero cuando no hay acuerdo en la comunicación, simplemente no hay homomorfismos entre los modelos de los interlocutores y es muy difícil determinar en qué pueden todavía coincidir parcialmente los dos modelos mentales y en qué elementos, relaciones u operaciones precisas no se está dando ese acuerdo.

El segundo método que ofrece el Programa Cronotopía consiste en que en las formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos] se puede también investigar cómo ellos operan sobre sus modelos mentales. Ello se evidencia en el paso continuo que hay entre modelos estáticos y modelos dinámicos o al contrario. Para poner en acción este segundo método se debe rastrear en las distintas expresiones verbales, gestuales y gráficas, la identificación de rasgos de modelos estáticos, el paso de estos a modelos dinámicos o viceversa y en la identificación de operaciones mentales de los modelos dinámicos sobre los componentes del modelo mental, elementos, relaciones y operaciones.

Con respecto a representaciones icónicas del espacio, vemos que los rasgos de expresiones semióticas sobre *grafías han sido sobre 2d y no tanto en 3d. En cuanto a representaciones icónicas del tiempo, no fue fácil encontrar rasgos de expresiones sobre *grafías alusivas al tiempo. En tanto a aspectos analógicos de la comunicación topológica, sin duda hubo varios rasgos de expresiones sobre *logías relativas al espacio, especialmente de la profesora. Con respecto a aspectos analógicos de la comunicación cronológico, los rasgos de expresiones sobre *logías alusivas al tiempo fueron escasos. Sobre el tránsito de la distancia prenumérica a la numérica, hubo muchos rasgos sobre la metrización, tato de alumnos como de la profesora. En cuanto a la metrización del tiempo y la duración, los rasgos fueron escasos. Con respectos a enunciados legaliformes sobre el espacio, en tanto a leyes o normas que rigen sobre el espacio exterior o sobre su propio espacio mental, fueron más expresadas por la profesora que por los alumnos. Sobre enunciados legaliformes del tiempo, en particular de leyes o normas que rigen sobre el tiempo o sobre su propio tiempo, no se encontraron ejemplos.

*Con respecto al objetivo específico número tres.* Recordemos cuál fue dicho objetivo:

> Comparar las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesor que emerjan en el objetivo anterior con las actividades matemáticas planteadas en aula de clase.

En los procesos de comparación de las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] entre los agentes noéticos de las clases de Geometría Analítica, se avanzó por medio de la búsqueda de homomorfismos e isomorfismos. De estos últimos fueron pocos los encontrados, donde las evidencias, pudieran demostrarnos que efectivamente tanto la profesora como algún alumno, compartieran la estructura del modelo mental sobre un objeto matemático. Las comparaciones de las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] entre los de la profesora y de los alumnos es posible en la medida que ellos se comuniquen o emerjan situaciones conflictivas de comunicación donde se puedan analizar los acuerdos o desacuerdos entre ellos. Es decir, la externalización de los modelos mentales puede permitir, tanto al profesor de matemáticas como al alumno, determinar qué tan homomórficos o isomórficos son entre ellos. Esta advertencia tiene un gran potencial para la Educación Matemática, pues le puede permitir al profesor hacer los ajustes didácticos para el desarrollo de las clases para facilitar la comprobación mutua de los isomorfismos y los aspectos específicos en que difieran los modelos homomórficos. Cuando estas situaciones conflictivas de comunicación surgieron, se pudo advertir que en su gran mayoría los modelos mentales [cronotópicos] entre la profesora y algunos alumnos eran homomórficos, es decir, que compartían parte de la estructura de sus modelos mentales y por ello podían estar parcialmente de acuerdo sobre el objeto matemático o los procesos resolutivos de la actividad matemática. Lo difícil es precisar en qué no coinciden.

La comparación de las formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos] de la profesora con algunos de sus alumnos, permitió establecer que mientras la profesora emplea palabras o expresiones verbales [cronotópicas] referidas al lenguajes o procesos establecidos en el texto escolar, los alumnos recurrían a formas de expresión asociadas a su entorno o experiencia. Si tenemos en cuenta el segundo método para indagar formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos], se podría concluir que fue la profesora quien más pudo transitar de manera espontánea de un modelo estático a uno dinámico o viceversa. En su mayoría las acciones o procesos empleados por los alumnos, en este sentido, eran condicionados por la obligatoriedad de hacer una exposición pública de algún tema o de resolver una actividad en el cuaderno o en el tablero del salón de clases.

### 5.1.4. Otras conclusiones

- ✓ Hay mucha desconexión de lo que se está enseñando en clases de Geometría Analítica con los acontecimientos o fenómenos de la vida cotidiana o social de los alumnos. Un buen referente en ello es lo que ya advirtió Bishop (2005), en el sentido de que para muchos alumnos en el mundo, las ideas geométricas que se les está enseñando en la escuela son consecuencia de una forma de ver el mundo espacial que es completamente distinta de la forma como se ve esa realidad en su "cultura familiar". Las 14 sesiones de clases que fueron analizadas no incluyeron esa conexión con la cultura familiar, excepto algunas comparaciones con las arandelas y el caramelo llamado *trululú*. Los alumnos fueron los que introdujeron las tazas en los intentos de comprender la antena parabólica. Esta desconexión con la cultura local no responde a una omisión consciente del profesor de matemáticas; se trata del conocimiento didáctico tradicional, y habría que buscar cómo cambiar la tradición de la forma de organización o preparación de las clases de matemáticas, pues desde la perspectiva del Programa Cronotopía, y específicamente en el caso de la Geometría Analítica, el profesor debería indagar mucho más sobre esa "cultura familiar" que caracteriza el entorno sociocultural de su escuela en su ciudad y las regiones vecinas.

- ✓ Los capítulos 3, 4 y 5 complementan un conjunto de herramientas para la recolección y análisis de información que permiten analizar en primera instancia los modelos mentales de lo Topo* y las acciones y procesos de producción de *grafías y *metrías, referidas a lo Crono*. Así, cada uno de los planes de recolección o análisis de información ofrecen herramientas analíticas que permiten conocer la coexistencia de múltiples cronotopos de alumnos y profesores que interactúan en el aula de clases. Valorar estas experiencias pone en jaque la mirada hegemónica, en términos de imponer una sola representación que circula en los textos escolares y por ello se desconoce la potencia de otras que circulan en el aula de clases.

- ✓ Contextualizando el planteamiento de Duval (2017) sobre la importancia de la conversión como un tipo de transformación donde los alumnos y profesores toman conciencia del funcionamiento representativo específico de cada registro, diremos que la toma de conciencia sobre las cuatro actividades semióticas del cronotopo y de sus procesos de tratamiento y sobre todo las conversiones de una a otra, implican dar lugar a que los alumnos puedan expresar con espontaneidad y en su propio lenguaje sus modelos mentales [cronotópicos].

- ✓ Las formas de organización y desarrollo de las clases permitirán que alumnos y el mismo profesor puedan expresar alternativa y repetidamente sus modelos mentales cronotópicos. A medida que las clases de matemáticas estén más centradas en el objeto matemático a través de las distintas representaciones semióticas, más se enriquecerán las comprensiones de cada uno y se multiplicarán las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] de los alumnos y del profesor.

- ✓ Para que emerjan las representaciones relativas a las subdisciplinas de lo Crono*, es necesario proceder con el diseño y validación de situaciones didácticas que permitan el estudio del movimiento de diversos procesos; es decir, para darle el lugar que se merecen los modelos dinámicos, en las acciones y procesos de producción de *grafías y *metrías, tan importantes para la Educación Matemática.

- ✓ Una palabra por sí sola no proporciona muchas pistas sobre el modelo mental [cronotópico] que se está expresando, pero es la unidad semántica básica para la composición de una expresión lingüísticamente organizada como enunciado. Sin embargo, hay muchos casos donde una sola palabra da pistas sobre el modelo mental empleado, por ejemplo, *simétrica.*

- ✓ Una expresión verbal que se puede agrupar por ciertas características que se comparten, que hemos denominado *expresiones verbales cronotópicas*, también puede dar rasgos sobre los modelos mentales empleados que se activan para la solución de las actividades matemáticas y que dan pistas de las formas de expresión de los alumnos o el profesor, en particular de los recursos lingüísticos que ellos emplean.

- ✓ Las formas de expresión de los modelos mentales [cronotópicos] no son tan fáciles de identificar en los desacuerdos en la comunicación que se presentan entre alumnos y la profesora al resolver una actividad matemática, pues hay que adivinar ambos modelos mentales y conjeturar en dónde está el desacuerdo y por qué se da.

- ✓ La manera como la persona opera sobre sus modelos mentales se puede rastrear en las distintas expresiones verbales, gestuales y gráficas, en la identificación de rastros de modelos estáticos, de su paso a modelos dinámicos o viceversa y en la identificación de operaciones de modelos dinámicos.

- ✓ La externalización de los modelos mentales [cronotópicos] le puede permitir al profesor de matemáticas determinar qué tan homomórficos y aún isomórficos son sus modelos de un objeto matemático con respecto a las comprensiones de sus alumnos sobre el mismo objeto. Expresiones como: *así es, igualito, como lo dijo él,* etc., podrían ser evidencias de que la comunicación entre el profesor de matemáticas y sus alumnos avanza en el camino de la comprensión del objeto matemático.

- ✓ Pero también puede suceder lo contrario: en el interés del alumno de comunicar una comprensión, una interpretación, etc., al profesor o a la clase lo que ha comprendido del objeto matemático, puede el profesor comprobar que no hay isomorfismo entre los modelos.[78] Este puede ser un efecto de la comprensión de

[78] Asesorías con Dora Calderón. 15 de septiembre del 2021. Reuniones tutoriales. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

los modelos mentales que posiblemente expresan los estudiantes en sus representaciones y expresiones. Esto es de suma importancia para la educación matemática pues le puede permitir al profesor corregir sus diseños didácticos de enseñanza y buscar maneras de que los alumnos modifiquen sus modelos mentales.

- ✓ Las no coincidencias isomórficas o los homomorfismos muy parciales entre modelos mentales, se deben a lo que se denominó "desacuerdos" en la comunicación entre la profesora y algunos de sus alumnos. Lamentablemente, el profesor de matemáticas solo puede experimentar este proceso con aquellos alumnos que deciden participar en la clase; pero, además de ello, que decidan expresarse verbalmente, con gestos y con dibujos. Como efecto didáctico, puede recomendarse proponer que el profesor intente que la actividad matemática propenda por mayor experiencia de construcción y manejo de modelos mentales, no tanto de mirar símbolos y gráficas y reproducirlas, o de escuchar y repetir palabras, sino intentar fomentar mayores oportunidades de tratar de comunicar a los demás alumnos y al profesor esos modelos mentales que vayan surgiendo en cada uno de los participantes, y los resultados de sus transformaciones motivadas por las discusiones, aclaraciones y explicaciones sobre los desacuerdos.

- ✓ El riesgo de los modelos mentales es que a veces pueden convertirse en creencias arraigadas que no acostumbramos a autocriticar y simplemente siguen guiando las acciones del sujeto que las posee sin posibilitarles aprender de las críticas y que inhiben la autoevaluación y la autocrítica.

## 5.2. Limitaciones.

Consideramos que las limitaciones de la investigación son las siguientes:

### 5.2.1. Limitaciones con respecto a la metodología

Puesto que el principal método de recolección de la información fue la observación no participante, surgieron limitaciones, como el procesamiento de datos en el sentido que fue más descriptivo e interpretativo y no se pudo dar razón de las formas de operación de los modelos mentales [cronotópicos]. Conocer las razones de las actividades semióticas del cronotopo, que es difícilmente aprehensible, el por qué se transita de un modelo estático a un modelo dinámico o viceversa, en otros aspectos, implica que se deban emplear entrevistas semiestructuradas, grupos focales y diseño de situaciones didácticas, tal vez así, nos podamos acercar más a la comprensión del cronotopo de las personas y especialmente a la razón de las formas de expresión de sus modelos mentales.

### 5.2.3. Limitaciones logísticas

Se requiere avanzar más en el estudio de los modelos mentales y en las posibilidades metodológicas para su abordaje. Esta investigación es una primera propuesta. Desde lo logístico, para mitigar esta limitación  se puedes colocar diferentes videocámaras en el salón de clases, una de ellas que se centre en el registro audiovisual de las expresiones de la profesora y otras cámaras que se centren en las expresiones grupales de la clase y otra(s) en grupos focales de alumnos.

## 5.3. Recomendaciones

### 5.3.1. Un currículo cronotópico para la enseñanza de la Geometría Analítica de la Educación Media en Colombia

Nuestra propuesta de un currículo cronotópico para la enseñanza de la Geometría Analítica está ligada con las investigaciones que se realizan por distintos Grupos de Investigación, especialmente con tesis de maestría y doctorales. Por ello, ahora solo se presentan dos aspectos, uno sobre el curso de Geometría Analítica y otro sobre los avances de tesis de maestría o doctorales sobre este curso y su currículo.

*Sobre el curso en sí de Geometría Analítica*. Para dar nuestro punto de vista sobre las recomendaciones a partir de la investigación realizada, pensemos un poco qué es la Geometría Analítica. En Colombia la Geometría Analítica se ha anclado en el estudio, en muchos casos algebrizado, de la línea recta, la ecuación de segundo orden y de las secciones cónicas y sus aplicaciones. Es decir, la Geometría Analítica puede ser mucho más, donde se incluya la curiosidad y la felicidad de los alumnos al analizar los problemas geométricos que las comunidades tienen en la sociedad actual, en el diario vivir, en la vida cotidiana, en la familia, en el barrio. Para que ello sea posible es necesario que la Geometría Analítica en la educación media deje de "aplanar la imaginación" de los estudiantes analizando todo en 2d e incluya una nueva coordenada espacial y el tiempo. El aplanamiento de la imaginación de los alumnos y profesores en el aula de clase es restrictiva y no se abre a un mundo que se rige bajo el modelo de trabajo en d, 2d, 3d y *t*[79]*+3d* como, por ejemplo, se plantea en el Programa Cronotopía (Vasco, 2000, 2011, 2014, 2019). Se podría incluso pensar en una enculturación del currículo como lo plantea Bishop (2005). Para abrirnos a ese mundo, se puede optar por activar de forma consciente todas las subdisciplinas del Crono* mediante actividades que impliquen el paso de 2d a 3d o viceversa, con el empleo de actividades de acciones (gestos) y producción de *grafías o de procesos de medición que conlleven a obtener *metrías. Sin embargo, el fin último del Programa Cronotopía es que los alumnos puedan construir y poner a prueba sus propias *nomías.

Al incluir una nueva dimensión en Geometría Analítica de grado 10° se abre paso a las coordenadas esféricas y cilíndricas, como lo recomienda el Ministerio de Educación Nacional (2006). Con las coordenadas esféricas se pueden diseñar actividades de diversas representaciones de ubicación u orientación sobre la Tierra, porque a ellas se liga también el GPS u otros adelantos tecnológicos, al igual que diversas formas de orientación de comunidades de prácticas o laborales. Como las coordenadas cilíndricas son un sistema que define la posición de un punto del espacio mediante un ángulo, una distancia con respecto a un eje y una altura en la dirección del eje, se esperaría establecer cuáles aplicaciones hay de este sistema en la cotidianidad de alumnos y profesores. Se

[79] Siendo aún un problema de investigación la vinculación del tiempo en situaciones didácticas de enseñanza de la Geometría Analítica en la educación media.

necesitaría que el profesor de Geometría Analítica contextualice sus actividades matemáticas conociendo el entorno sociocultural próximo de su Institución Educativa.

Después de dimensionar lo que implicaría establecer el Programa Cronotopía para el curso de Geometría Analítica de grado 10, consideramos que ello demanda tres fases de intervención en aula de clases: 1. Fase descriptiva de lo que sucede en el aula de clases y análisis de la información. 2. Fase de diseño de actividades matemáticas que impliquen el desarrollo de representaciones cronotópicas que permitan la emergencia del modelo 3d+t, la integración del Crono* con el Topo* y 3. Fase de desarrollo curricular donde se evalúa el impacto del desarrollo de la asignatura escogida.

*Sobre investigaciones de posgrado, especialmente de maestrías.* Dado que no se encontró ninguna tesis doctoral sobre dicho tema, las investigaciones a nivel de maestría que ya se han hecho en Colombia sobre la enseñanza de la Geometría Analítica, y que procuran un mejor aprovechamiento del sistema coordenado, sea conceptual o didácticamente, deberían ser incluidas en una reforma de la enseñanza de este curso.

Por ejemplo, en la actualidad se encontraron investigaciones como las de Trujillo-Tovar (2017), quien analizó el desarrollo de habilidades para la interpretación de figuras cónicas usando TIC; Barrios-Peña (2016) analizó la aplicación de las leyes de Kepler como alternativa pedagógica para la enseñanza de las secciones cónicas. Garzón-Muñoz (2013) plantea una propuesta didáctica para la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas por medio de la metodología de resolución de problemas; Rodríguez-Díaz (2011) hizo una caracterización en aula de clases de la elipse como lugar geométrico: Pérez-Bernal (2011) planteó un propuesta de enseñanza y aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas; Niño-Cubillos (2011) estableció un conjunto de transformaciones geométricas del plano como herramientas para generar familias de cónicas. Estas investigaciones ponen como centro de investigación el aprendizaje del objeto matemático, pero para la Geometría Analítica de grado 10° se necesita una mayor conexión social del objeto matemático con la vida cotidiana y el entorno cultural de los profesores y de los alumnos de tal manera que ellos puedan expresar sus modelos mentales cronotópicos.

La reflexión histórica, el análisis de datos, las nuevas tesis de maestría y doctorales más las reflexiones sobre un nuevo currículo de Geometría Analítica de la educación media en Colombia, motivan a considerar que las condiciones están dadas para un cambio. Este cambio tomaría forma con una nueva fase de investigación, que no se contempla en esta tesis, y es sobre el diseño de actividades matemáticas para un currículo cronotópico de Geometría Analítica de la educación media, esto implica elaboración, ejecución, análisis de datos y validación de las actividades y la producción de recursos pedagógicos como textos, materiales manipulativos, software, entre otros, que tengan en cuenta los resultados de esta investigación.

### 5.3.2. Recomendaciones para otros estudios o investigadores

Una primera recomendación, en tanto a formación de maestro, para transitar en las actividades semióticas del cronotopo, desde *grafías hasta *nomías, la soportamos en Duval. Duval (2017, p. 70) planteó que se necesita de un entrenamiento fluido de conversión para que haya aprendizaje matemático para la mayoría de los alumnos, esto implica que hay que hacer un entrenamiento para que alumnos y profesores puedan pasar de una *grafía hasta llegar a una *nomía de un mismo objeto matemático. Con lo anterior, se espera que los agentes noético-semióticos, alumnos y profesores, puedan operar sobre sus modelos mentales privados, y que además hagan, ojalá todos, un proceso de externalización de dicho modelos, que participen en clases, que hablen, que escriban, que representen, que transformen sus representaciones, que el profesor provoque que cada uno de sus alumnos participe en clases y que lo hagan a través de procesos de tratamiento y conversión de las actividades semióticas del cronotopo, de representaciones semióticas internas y externas.

Otra recomendación que planteamos es prestar mucha más atención a lo que hacen los alumnos cuando comparan la medición de objetos con su propio cuerpo. Para ello se puede tener en cuenta lo que plantea Lowrie, Logan y Scriven (2012), quienes manifiestan lo siguiente:

> La comunicación durante la medición se considera una herramienta valiosa para desarrollar el uso del lenguaje matemático por parte de los estudiantes (Thom, 2002) y consolidar la comprensión conceptual. De hecho, la National Numeracy Review (CoAG, 2008) recomendó: Que todos los profesores de matemáticas enseñen explícitamente el lenguaje y la alfabetización de las matemáticas reconociendo que el lenguaje puede constituir una barrera formidable tanto para la comprensión de los conceptos matemáticos como para proporcionar a los estudiantes acceso a los elementos de evaluación destinados a obtener una comprensión matemática. (pág. xiii) (p. 79).

Asumimos la cita anterior como recomendación porque debería tenerse en cuenta en futuros estudios y más aún cuando estos mismos autores plantean lo siguiente: Varios investigadores (incluido MacDonald, 2010; Bobis, Mulligan & Lowrie, 2009) han demostrado que los estudiantes comparan naturalmente la medición de los objetos con su propio cuerpo. Hay otras observaciones de dichos autores, que deben ser objeto de investigadores de la educación matemática, como:

> No sólo se ha eliminado del currículo de matemáticas el término espacio (y su posición independiente como una rama de contenido), sino que se ha descuidado un poco el énfasis subyacente en el razonamiento espacial y visual. (Ibid, p.81)

> Las experiencias de aprendizaje deberían incluir la presentación simultánea de conceptos (por ejemplo, perímetro-área; área-volumen; volumen-capacidad) para brindar oportunidades para participar en investigaciones ricas y abiertas. (Ibid, p.84)

Dichas observaciones las asumimos como el descuido en Geometría Analítica de la enseñanza de actividades matemáticas que vinculen lo relativo a lo Crono*, especialmente sobre las acciones y procesos de producción de *grafías y *metrías, que vinculen situaciones de la vida cotidiana de los profesores y de los alumnos.

Por último, se dejan abiertas ventanas de investigación para futuros proyectos y acciones que se pueden realizar en el corto tiempo:

- ✓ ¿Cuáles fueron las relaciones de lo enseñado por los tres profesores con respecto al Decreto 080 de 1974, que planteaba cómo debió ser el Programa de Geometría Analítica? y ¿cuáles fueron las relaciones con la Resolución 2343 de junio 5 de 1996, MEN (1996), que regulaba los lineamientos generales de los procesos curriculares y los indicadores de logros curriculares para la educación formal?.
- ✓ Analizar un mayor número de textos escolares de matemáticas para la educación media desde 1950 hasta hoy, estableciendo más y mejores criterios de selección; en ellos se puede avanzar en recoger y analizar los problemas de aplicación que se propongan después de estudiar cada sección cónica.
- ✓ Analizar la transposición didáctica de cada autor de texto al traducir los aspectos más técnicos de las matemáticas puras a las distintas presentaciones y aplicaciones de las secciones cónicas que seleccionó para estos grados escolares.
- ✓ La restricción aparente de los tratamientos y problemas sobre las secciones cónicas solo a unos pocos temas clásicos y la distancia con los temas actuales de georreferencia, localización satelital, GPS.
- ✓ Analizar un poco más qué entendemos actualmente y qué entiende cada autor por “problema de matemáticas”, “problema de aplicación”, “aplicación de los temas

seleccionados" y su relación con las "motivaciones" para estudiarlos y resolverlos que suelen aparece al comienzo de los capítulos respectivos.

- ✓ Una investigación sobre la validación de diseños de situaciones didácticas que promuevan más aún las expresiones espontáneas de los modelos mentales [cronotópicos]de los alumnos.
- ✓ Un estudio más profundo, desde el análisis del discurso y la lingüística, sobre el uso, clasificación y frecuencia de las expresiones verbales [cronotópicas] que se emplean en cada clase de matemáticas.
- ✓ La creación de la Línea de investigación en el Programa Cronotopía en por lo menos un Grupo de Investigación de Educación Matemática de Colombia. 4.

Después de siete años de investigación continua, he aquí nuestro informe de tesis que espera sea de su agrado y esperamos cause un impacto significativo en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica de la Educación Media de Colombia.

## Referencias bibliográficas


Aroca, A. (2009). *Geometría en las mochilas arhuacas. Por una enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva cultural*. Cali: Programa Editorial Universidad del Valle.

Aroca, A. (2013). Análisis de los diseños de los hipogeos del parque arqueológico de Tierradentro, Cauca, Colombia. *Rev. U.D.C.A. Act. y Div. Cient.*, *16*(2), 525-534.

Arzarello, F.; Edwards, L. (2005). Gesture and the construction of mathematical meaning. En H.L. Chick.; J.L. Vincent. (Eds.), *Proceedeings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 123-154). Melbourne: PME.

Bajtín, M. (1989). *Teoría y estética de la novela*. Madrid: Taurus.

Balzer, W., Moulines, C. U. (1996). Structuralist Theory of Science: Focal Issues, New Results. Berlin/New York: Walter de Gruyter.

Balzer, W., Moulines, C. U., y Sneed J. D., (1987). An Architectonic for Science. The Structuralist Program. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Barrantes, H., Ruiz, A. (2013). *La Historia del Comité Interamericano de Educación Matemática. Colección Enríquez Pérez Arbeláez No. 13*. Bogotá: Academia colombiana de ciencias exactas, físicas y naturales.

Barrantes, H., Ruiz, A. (2013). *La Historia del Comité Interamericano de Educación Matemática.* Colección Enríquez Pérez Arbeláez No. 13. Bogotá: Academia colombiana de ciencias exactas, físicas y naturales.

Barrios-Peña, H. (2016). *Aplicación de las Leyes de Kepler como alternativa pedagógica para la enseñanza de las secciones cónicas. Estudio de caso: I. E. Ismael Perdomo Borrero.* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia.

Beltrán, L., Rodríguez, B.P. & Dimaté, M. (1997). *Matemáticas con tecnología aplicada.* Bogotá: Prentice Hall.

Bishop, A. (2005). *Aproximación Sociocultural a la Educación Matemática*. Cali: Programa Editorial Universidad del Valle.

Bloom, B.S., Krathwohl, D. R. (1956). Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals, by a committee of college and university examiners. Handbook I: Cognitive Domain. New York: Longman, Green.

Bourbaki, N. (1969). Formas cuadráticas. Geometría elemental. En: J. Hernández. (Ed.), *Elementos de historia de las matemáticas* (pp. 173-191). España: Alianza Editorial.

Cabrera, A., Rodríguez, I. (2017). El Museo Nacional de Artes Decorativas y la colección oriental del Museo Arqueológico Nacional. En J. Rodrigo del Blanco. (Ed.), *La Exposición Histórico-Natural y Etnográfica de 1893* (pp. 271-277). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Calderón, D. (2005). *Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas.* Tesis doctoral. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Carrillo, M., Hamit, A., Benjumea, D., Segura, M. (2017). Conceptualización de La Interacción Comunicativa y Su Caracterización. *Revista MED, 25*(2), 105-116.

Chávez, H.H.; Castiblanco, S.G. (2000). *Matemáticas 10.* Bogotá: Editorial Santillana.

Chevallard, Y. (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 1, 146-157.

Cocho, F. (1985). El Programa de Erlangen. Felix Klein. *Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación, 2*(49),1-3.

D'Amore B. (2001). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 38*(2), 143-168

D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno. Didáctica de las matemáticas,* 35, 90-106.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática.* Bogotá: Editorial Magisterio.

D'Amore, B. (2017a). Algunos elementos relevantes de la didáctica de la matemática interpretados en clave sociológica. En B. D'Amore; L. Ralford. (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 29-42). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B. (2017b). Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos: conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética. En B. D'Amore; L. Ralford. (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 69-96).. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Dallemole, J.J. (2010). *Registros de Representação Semiótica: uma experiência com o ambiente virtual SIENA.* (Tesis de maestría). Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

Dallemole, J.J. & Oliveira, C.L. (2013). A geometria analítica e algumas tendências metodológicas para seu processo de ensino e aprendizagem. *VI congresso internacional de Ensino da Matemática.* ULBRA – Canoas – Rio Grande do Sul Recuperado de http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/902/12.

Devlin, K. (2012). Introduction to Mathematical Thinking. Recuperado de http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/curso-Devlin.pdf

Dieudonné, J. (1964). Prólogo del libro Álgebra lineal y geometría elemental. En Piaget, J.; Choquet, G.; Dieudonné, J.; Thom, R. (Eds.), La enseñanza de las matemáticas modernas. Madrid: Alianza Editorial.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros (Parra, M., trad. Graphiques et equations L'Articulation de deux registres, 1988). En E. Sánchez. (Ed.) *Antología de la Educación Matemática* (pp.125-139). México: Cinvestav IPN.

Duval, R. (1993). Registres de representations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuel, Suisse: Peter lang Publishing.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (Obra original publicada en francés en 1995. Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. (M. Vega Restrepo, Trad. 1 ed.). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar de registro de representación. *La Gaceta de la RSME., 9*(1), 143-168.

Duval, R. (2006b). *La conversión des représentations: Un des deux processus fondamentaux de la pensée*. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval; A. Sáenz-Ludlow. (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations.* Berlin, New York, etc.: Springer-Verlag.

Duval, R., Saénz-Ludlow, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Fleron, J., Hotchkiss, P., Ecke, V. & von Renesse, C. (2013). Discovering the Art of Mathematics Patterns. Recuperado de https://www.artofmathematics.org/books/patterns

Gadamer, H-G. (1999). *Verdad y método.* Vol. I. Salamanca: Ediciones Sígueme.

García, L.I. y Osorio A.M. (2008). Modelos mentales sobre el concepto de medida. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 4*(2), 135-150.

Garzón-Muñoz, A. L. *(2013). Propuesta didáctica para la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas por medio de la metodología de resolución de problemas.* (Tesis de Maestría en Educación Matemática, no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/39621/

Gascón, J. (2001). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático. Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales, Madrid, Universidad Nacional de Educación a Distancia, 28, 1-20.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA, Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, 39, 13-25.

Gerdes, P. (1996). *Women, Culture and Geometry in Southern Africa.* Mozambique: Lulu.

Gerdes, P. (1999). *Geometry from Africa: Mathematical and Educational Explorations.* USA: The mathematical Association of America.

Gerdes, P. (2014). *Sona geometry from Angola. Mathematics of an African tradition.* Mozambique: ISTEG-University, Mozambique & Lulu.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D.. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J.D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME), Recife (Brasil).

Godino, J.D.; Gonzato, M.; Cajaraville, J.; Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 2*(30), 109-130

Grupo Val.Es.Co. (2014). Las unidades del discurso oral. La propuesta de segmentación de la conversación (coloquial). *Estudios de Lingüística del Español, 35*(1), 11-71.

Henríquez, C. & Montoya-Delgadillo, E. (2016). El Trabajo Matemático de Profesores en el Tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*(54), 45-66.

Hernández, R.; Fernández, C.; Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Howson, A.G. (1973). Developments in Mathematical Education. *Proceedings of the Second lnternational Congress on Mathematical Education*. Cambridge U. P., Cambridge.

Johnson- Laird, P. (1983). *Mental Models. Towards a Cognitive Science of Language, Inference, and Consciousness*. Cambridge: Harvard University Press.

Johnson- Laird, P. (1985). Mental Models. In A.M. Aitkenhead, J. M. Slack. (Eds). *Issues in cognitive Modelling* (pp. 81-99). Ciudad: Open University Press.

Johnson- Laird, P. (1987). Modelos mentales en ciencia cognitiva. En D. Norman. (Ed.), *Perspectivas de la ciencia cognitiva. Cognición y desarrollo humano* (179-232). Barcelona: Ed. Paidós.

Johnson- Laird, P. (1990). *El Ordenador y la Mente. Introducción a la Ciencia Cognitiva. Cognición y desarrollo humano.* Barcelona: Ed. Paidós. Barcelona.

Johnson- Laird, P. N. (1988). How is meaning mentally represented? *International Social Science Journal, 40*(1), 45-61.

Johnson- Laird, P. N. (1989). Analogy and the exercise of creativity. In S. Vosniadou, A. Ortony. (Eds). *Similarity and Analogical Reasoning* (pp. 313-331). Cambridge Mass: Cambridge University Press.

Johnson- Laird, P. N. (1989). Mental Models. In M. Posner. (Ed.), *Foundations of Cognitive Science.* Cambridge, Mass: MIT Press. Recuperado de http://cognet.mit.edu/book/foundations-of-cognitive-science

Johnson- Laird, P. N. (1993). La théorie des modèles mentaux. En M.F. Ehrlich.; H. Tardieu.; M. Cavazza. (Eds.). *Les modèles mentaux. Approche cognitive des representations* (pp. 1-22) Francia: Masson.

Johnson- Laird, P. N. (1994). Mental models and probabilistic thinking. *Cognition*, 50, 189-209.

Johnson- Laird, P. N. (1996). Images, Models and Propositional Representations. In M. De Vega.; M.J. Intons-Peterson.; P.N. Johnson- Laird.; M. Denis.; M. Marschark.

(Eds). *Models of Visuospatial Cognition* (pp. 90-127). Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Johnson- Laird, P. N. Y Byrne, R. (1998). The Cognitive Science of Deduction. In P. Thagard. (Ed.), *Mind Reading* (pp. 29-58). Cambridge: MIT. Press.

Jones, K.; Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez.; Leder, G.; P. Boero. (Eds.), The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues (pp. 109-149). Rotterdam: Sende.

Junca, G. (2015). Caracterización de la competencia matemática de modelación analítica en economía: El concepto de marginalidad asociado al estudio de la derivada. (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco de José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Kline, M. (1980). El fracaso de las matemáticas modernas. Por qué Juanito no aprendió a sumar. Decimoactava edición. México: Siglo XXI editores.

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Relime*, 9(3), 361-382.

Lehmann, C. (1989). Geometría Analítica. Edición 13. México: Editorial Limusa.

Leithold, L. (1998). El cálculo. Séptima edición. México: Oxford University Press- Harla.

Lluis, E. (1986). Enseñanza de geometría en América Latina. En Morrys, E. (Ed.). *Enseñanza de geometría*. Vol. 5. Uruguay: Oficina Regional de Ciencia y Tecnología de la Unesco para América Latina y el Caribe - ROSTLAC.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI, Revista de Educación*, *4*, 167-179.

Lowrie, T.; Logan, T.; Scriven, B. (2012). Perspectives on Geometry and Measurement in the Australian Curriculum: Mathematics. In B. Atweh, M. Goos, R. Jorgensen & D. Siemon, (Eds.). Engaging the Australian.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas.* Bucaramanga: Editorial Universidad Industrial de Santander.

Mariotti, M.A. (1995a). Le reppresentazioni grafiche e l'apprendimiento della geometría. En B. D'Amore. (Ed.), Insignare ad apprendere la Matemática in aula: situazioni e prospettive (pp. 47-58). Memorias del homónimo Congreso Nacional, Castel San Pietro Terme. Bologna: Pitagora.

Martínez, F.A. (2007). *Aciertos matemáticos 10.* Bogotá: Grupo Editorial Educar.

Mejía, V. (2006). ¿Cuál es la importancia de las leyes científicas? En la Concepción Estructuralista de la Ciencia. *Páginas*, (75), 49-56.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1974). Decreto 080 de 1974. Por el cual se deroga el Decreto número 045 de 1962 y se dictan otras disposiciones sobre Educación Media. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-104657_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1975). Decreto 080. Por la cual se adoptan unos Programas de estudio para la Educación Media. Recuperado de https://drive.google.com/drive/folders/1qhJuFpXyOgB8-4FjDr1Agwp6EOUfBiMd

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1994a). Ley General de Educación. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1994b). Decreto 1860. Por el cual se reglamenta parcialmente la Ley 115 de 1994, en los aspectos pedagógicos y organizativos generales. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-172061_archivo_pdf_decreto1860_94.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1996). Serie documentos especiales. Resolución número 234 de junio 6 de 1996. Por la cual se adopta un diseño de lineamientos generales de los procesos curriculares del servicio público educativo y se establecen los indicadores de ogros curriculares para la educación formal. Bogotá: Departamento de Arte. El espectador.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1998a). Indicadores de logros curriculares. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf11.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN. (1998b). Lineamientos curriculares en matemáticas. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (1951). Decreto 2550 de 1951, por el cual se introducen algunas modificaciones en el Plan de Estudios de Enseñanza Secundaria, y se deroga una disposición. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-103340_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (1962). Decreto 45 de 1962, por el cual se establece el Ciclo Básico de Educación Media, se determina el Plan de Estudios para el Bachillerato, y se fijan Calendario y Normas para evaluar el trabajo escolar. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-103679.html?_noredirect=1

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (1978). Decreto 1419 de 1978, por el cual se señalan las normas y orientaciones básicas para la administración curricular en los niveles de educación pre-escolar básica (primaria y secundaria) media vocacional e intermedia profesional. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/normatividad/1753/w3-article-102770.html

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (1984). Decreto 1002 de 1984, por el cual se establece el Plan de Estudios Para la Educación Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional de la Educación Formal Colombiana. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-103663.html?_noredirect=1

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Documento No. 3. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (2016). Derechos básicos de aprendizaje. Bogotá: Panamericana Formas E Impresos S.A.

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (2016a). Derechos Básicos de Aprendizaje para Matemáticas. Vol. 2. Bogotá: Panamericana Formas E Impresos S.A.

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (2016b). Documento Fundamentación Teórica de los Derechos Básicos de Aprendizaje, Vol. 2, y de las Mallas de Aprendizaje para el Área de Matemáticas. Medellín: Universidad de Antioquia.

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (1951). Decreto 0075 de 1951, por el cual se adopta el Plan de Estudios para la enseñanza secundaria y se dictan otras disposiciones. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-103400.html?_noredirect=1

Ministerio de Instrucción Pública, MIP. (1904). Decreto número 491 de 1904, por el cual se reglamenta la ley 89 de 1903, sobre instrucción pública. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-102515.html?_noredirect=1

Miranda, I.; Radford, L.; Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática, 19*(3), 5-30.

Morado, M. (2008). *El cronotopo polifónico. Una herramienta para la investigación social.* Buenos Aires: Prometeo Libros.

Moreno, M. & Restrepo, M. (2003). *ALFA 10 con estándares*. *Serie de MATEMÄTICAS para educación secundaria y media.* Norma: Bogotá.

Mosterín, J. (2002). *Teoría de la escritura.* Barcelona: Icaria Editorial S.A.

Moulines, C. U. (2006). El estructuralismo metateórico. *Universitas Philosophica*, (46), 13-25.

Moulines, U. (1982). *Exploraciones Metacientíficas.* Madrid: Alianza.

Moulines, U., & Díez, J. (1999). La medición en la ciencia. En U. Moulines.; J. Díez (Eds.), *Fundamentos de la filosofía de la ciencia* (pp. 173-217). Barcelona: Ariel.

National Curriculum: Mathematics – Perspectives from the Field. (pp. 71-88). Online Publication: Mathematics Education Research Group of Australasia.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Owens, K. (2015). *Visuospatial Reasoning. An Ecocultural Perspective for Space, Geometry and Measurement Education.* Switzerland: Springer.

Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future (pp. 83-115). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Patiño, G. (1977). *Fundamentos de matemática superior moderna: cursos quinto y sexto de enseñanza media.* Medellín: Bedout.

Phillips, H.B. (1948). *Geometría analítica*. México: Unión tipográfica editorial hispano-americana.

Piaget, J. (1967). *Biologie et connaissance.* París: Gallimard.

Piaget, J.; Choquet, G.; Dieudonné, J.; Thom, R.; et al. (1978). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza Editorial.

Pinxten, R.; Van Dooren, I.; Harvey, F. (1983). *The Anthropology of Space.* Pennsylvania: University Pennsylvania Press.

Piva, D.; Schefer, N.F. (2014). A geometria analitica do ensino medio um estudo com o software dinamico geogebra. En C. Peres. (Presidencia), *XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação*

*Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA)*, Bagé/RS, Brasil. Recuperado de https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/PO_PIVA_08561622997.pdf [con acceso 28/10/2017]

Postigo, L. (1964). *Matemáticas.* España: Editorial Ramón Sopena S.A.

Presidencia de la República de Colombia. (1974). Decreto 080 de 1974, por el cual se deroga el Decreto número 045 de 1962 y se dictan otras disposiciones sobre Educación Media. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-104657.html?_noredirect=1

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains. Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462

Radford, L.  (2005). ¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of objectification. En H. Chick.; J. Vincent, J. (Eds.), Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1. (pp. 143-145). Melbourne: University of Melbourne.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students Types of Generalization. Mathematical Thinking and Learning, núm. 5(1), pp. 37-70.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 1* (5), 37-70.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime, Número Especial*, 103-129.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial*, *9*(1), 103-129.

Radford, L. (2006b). Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*, 7-22.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (eds.). Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture (pp. 215-234). Rotterdam: Sense.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (eds.). Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture (pp. 215-234). Rotterdam: Sense.

Radford, L. (2014a). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educ Stud Math.*, (85),405–422

Radford, L. (2014b). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Radford, L. (2017). Réflexions sur l'éthnomathématique . In J. Adihou.; A. Giroux.; D. Guillemette.; C. Lajoie.; K. Mai Huy. (Eds.), *Actes du colloque du groupe de didactique des mathématiques du québec 2016* (pp. 168-177). Ottawa: GDM.

Reitz, F.A., Brandão, T.P., Heron, D., Almeida, R.A., da, Cardozo-Filho, L. (2013). Education for a Discussion of Analytical Geometry in High School Based

Vectors. *International conference ICT for Language Learning, Ed. 6*, Florence, Italy. Recuperado de https://conference.pixel-online.net/conferences/ICT4LL2013/common/download/Paper_pdf/019-ITL03-FP-Cardoso-ICT2013.pdf

República de Colombia-Ministerio de Educación Nacional de ColombiaMEN (1984). Marcos generales de los programas curriculares. Bogotá: MEN-Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos.

Riaño, C.A. (2017a). *Matemáticas 10. Guía del docente.* Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Riaño, C.A. (2017b). *Matemáticas 10. Guía del alumno.* Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Richit, A. & Maltempi, M.V. (2009). Tecnologias informáticas, constructivismo y enseñanza por Proyectos: perspectivas de formação inicial para profesores de Matemática. *Paradigma*, *30*(1), 183 – 204.

Rodríguez, V. (2011). Aspectos fundamentales del arte del tatuaje, cultura y sociedad. *Arte y movimiento*, 5, 51-62.

Rodríguez-Díaz, A. (2011). *Caracterización de la elipse como lugar geométrico: una experiencia de aula*. (Tesis de Especialización). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Rogenski, M.L.C. & Pedroso, S.M.D. (2014). *O ensino da geometria na educação básica: realidade e possibilidades.* Recuperado de http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44W4.pdf.

Sáenz-Ludlow, A., Gert Kadunz. (2016). Semiótica como herramienta para aprender matemáticas: Cómo describir la construcción, visualización y comunicación de conceptos matemáticos. Rotterdam: Sense Publishers.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Sáenz-Ludlow, A, Molina, Ó. (2016). A dilemma that underlies an existence proof in geometry. Educational Studies in Mathematics, 93(1), 35-50.

Santaló, L. (1980). Situación de la enseñanza de la geometría frente a las nuevas tendencias de la Educación matemática. *Revista de Bachillerato, suplemento,* (13): 23-28.

Sbaragli, S. (2004). Teachers' convictions on mathematical infinity. (Tesis doctoral). Bratislava Univerzita Komenského.

Secretaría de Educación. Distrito de Barranquilla. (2017). Boletín Estadístico – 2017. Recuperado de https://www.barranquilla.gov.co/educacion/actos-administrativos/informes/analisis-del-sector-educativo

Silva, C.R. (2006). *Explorando Equações Cartesianas e Paramétricas em um Ambiente Informático.* (Tesis de maestría). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Spradley, J. (1979). *The Etnographic Interview.* Nueva York: Holt, Rinehart and Winston.

Steen, L.A. (1988). The Science of Patterns. *SCIENCE,* 240, 611-616.

Strauss, A. L. & Corbin, J. (2002). Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundada (1. ed.). Medellín: Editorial Universidad de Antioquia.

Sullivan, M. (1997). *Trigonometría y geometría analítica*. Ed. 4. Pearson Prentice Hall: México.

Swokowski, E. & Cole, J. (2008). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica.* Versión abreviada. Ed. 11. Bogotá: CENGAGE Learning.

Thom, R- (1980). ¿Son las matemáticas modernas un error pedagógico y filosófico?, En Hernandez, J. (ed.).

Trouche, L. (2005). Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. Recuperado de http://profmath.uqam.ca/~maheuxjf/cours/doc865m/TroucheArtefactInstruments_partieB.pdf

Trujillo-Tovar, S. A. (2017). *Desarrollo de habilidades para la interpretación de figuras cónicas utilizando TIC con alumnos de décimo grado de la I.E. Esteban Rojas Tovar de Tarqui–Huila*. (Tesis de Maestría en Educación Matemática, no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia. Disponible de: http://www.bdigital.unal.edu.co/58384/

Tusón, A. (2002). El análisis de la conservación: entre la estructura y el sentido. *Estudios de sociolingüística: Lenguas, sociedades e culturas,* 3*(1),* 133-154.

Unesco. (1986). *Estudios en Educación Matemática. Enseñanza de geometría.* Vol. 5. En E. Morrys. (Ed.). Uruguay: Oficina Regional de Ciencia y Tecnología de la Unesco para América Latina y el Caribe - ROSTLAC.

Vasco, C. (1992). Geometría activa y geometría de las transformaciones. *Revista Integración*, 1(9), 7-11.

Vasco, C. (2000). El tiempo en la teoría general de procesos y sistemas. En J. Lopera. (Ed.), *El problema del tiempo* (pp. 215-240). Medellín: Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Vasco, C. (2006). Cronotopía: un "Programa de Bogotá" para lo que se suele llamar "geometría". En C. Ruiz.; J. Pérez.; C. Luque.; J. Luna.; A. Oostra. (Presidencia), *Memorias: XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones*. Conferencia llevada a cabo en *IV Encuentro de Aritmética*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. Recuperado de http://www.encuentrogeometria.com/memoria.htm

Vasco, C. (2007). La cronotopía, antes y después de la geometría. En A. Ruiz (Presidencia), Educación matemática: historia y prospectiva. *Duodécima Conferencia Inter-Americana de Educación Matemática (XII CIAEM),* Querétaro, México. Recuperado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6961/6647

Vasco, C. (2011a). La cronotopía, antes y después de la geometría. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 6*(9), 77-91.

Vasco, C. (2011b). *La interacción entre modelos y teorías en la enseñanza de la cronotopía. En P. Perry (Ed.), Memorias 20° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (pp. 15-35). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1747/1/2011Pr-PerryMemorias.pdf*

Vasco, C. (2013). La interacción entre modelos y teorías en la enseñanza de la Cronotopía. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *8*(11), 133-148.

Vasco, C. (2014). Procesos, sistemas, modelos y teorías en la investigación educativa. En C.J. Mosquera (Ed.), *Perspectivas educativas. Lecciones inaugurales. No. 1.* (pp. 25-79). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Doctorado Interinstitucional de Educación, DIE.

Vasco, C. (2015a). *¿Epistemología histórica o historia epistemológica de las Matemáticas?* En L. Recalde et al. (Eds.), *Historia de las matemáticas en ambientes culturales diversos.* Conferencia llevada a cabo en la Quinta Escuela Nacional de Historia y Filosofía de las Matemáticas ENHEM V, Bogotá, Colombia.

Vasco, C. (2015b). Matemáticas Modelo-Teoréticas: un programa neo-estructuralista para las matemáticas, su historia, su epistemología y su didáctica en el siglo XXI. En A. Ruiz (Presidencia), *XIV CIAEM-IACME,* Chiapas, México.

Vasco, C. (2017). Semiosis y pensamiento humano. Una bifurcación de no-retorno en la investigación en didáctica de las matemáticas. Prólogo al libro de Raymond Duval. En R. Duval. (Ed.), *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (pp. 7-15). Cali: Programa Editorial Universidad del Valle.

Vasco, C. E. (2019). El Programa Cronotopía: un enfoque modelo-teorético para las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *14*(18), 191-198.

Vasilachis de Gialdino, I.; Ameigeiras, A.; Chernobilsky, L.; Giménez, V.; Mallimaci, F.; Mendizábal, N.; Neiman, G.; Quaranta, G.; Soneira, A. (2009). Estrategias de investigación cualitativa. Barcelona: Editorial Gedisa, S.A.

Velasco, J. (2007). *Egipto eterno.* Madrid: Ediciones Nowtilus, S.L.

Vergel, R. (2015). El gesto y el ritmo en la generalización de patrones. UNO. Didáctica de las matemáticas, 73, 24-31.

# Anexos

Anexo 1. Materiales recolectados durante la obtención de información en aula de clases. Periodo 2017-2.

| Materiales recolectados 2017-2 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Clase**[80] | **Fotografías sobre el desarrollo de clases** | **Videos**[81] | **Audios**[82] | **Bitácoras** | **Páginas transcritas/ organizadas**[83] | **Cuadernos o carpetas. Fotos** | **Talleres. Fotos** | **Exámenes Finales. Fotos** |
| 1 | 0 | 0 | 3 | 1 | 20 | | | |
| 2 | 36 | 6 | 1 | 1 | 7 | 16 (Información periodo 2017-1) | | |
| 3 | 38 | 2 | 1 | 1 | 6 | | | |
| 4 | 156 | 3 | 1 | 1 | 14 | | 42 (del periodo 2017-1) | 25 (Exámenes de los dos primeros periodos) |
| 5 | 163 | 5 | 1 | 1 | 11 | | 8 (del periodo 2017-2) | |
| 6 | 159 | 4 | 1 | 1 | 13 | | | |
| 7 | 34 | 3 | 1 | 1 | 5 | | 11 (del periodo 2017-2) | |
| 8 | 20 | 6 | 2 | 1 | 5 | | | |
| 9 | 53 | 1 | 1 | 1 | 9 | | 12 (del periodo 2017-2) | |
| 10 | 40 | 2 | 2 | 1 | 15 | | | 28 |
| 11 | 167 | 2 | 1 | 1 | 18 | | 39 (del periodo 2017-2) | |
| 12 | 179 | 1 | 1 | 1 | 16 | | | |
| 13 | 23 | 3 | 3 | 1 | 10 | | | |
| 14 | 40 | 0 | 0 | 0 | 39 | | | 40 (Examen final) |
| **Total:** | 1108 | 38 | 19 | 13 | 188 | 16 | 112 | 93 |

[80] Cada carpeta que se creaba para la respectiva clase se denominaba: Clase (Número de la clase). Fecha (día-mes-año)
[81] Los videos por cada clase nunca sumaron más de dos horas.
[82] Los audios por cada clase nunca sumaron más de horas.
[83] Decidimos llamarlas también organizadas, debido a que no solo en algunas clases se produjeron páginas que no solo tienen transcripciones, sino que también hay fotografías de talleres, exámenes, contenidos de cuadernos

Anexo 2. Procesamiento inicial de materiales obtenidos en la recolección de la información.

***Procesamiento inicial de fotografías sobre el desarrollo de clases***

En la primera clase hubo problemas técnicos con la cámara fotográfica y no fue posible hacer registro fotográfico. En las demás clases se procedió a organizar las fotografías en subcarpetas de la carpeta de cada clase. Las fotos automáticamente recibían un código por parte de la cámara. Se presionaba el obturador de la cámara, en el desarrollo de las clases, cada vez que percibíamos una respuesta visual a las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las *grafías que hacen tanto profesora como los alumnos, en el tablero, en carteleras, en el cuaderno o en talleres?
- ¿Hay gestos que acompañan sus expresiones de los modelos mentales cronotópicos?
- ¿Puede evidenciar el ambiente de la clase?

***Procesamiento inicial de los videos***

En la primera clase contábamos con la videocámara de la Institución Educativa, pero por un error involuntario de la persona que la tenía a su cargo borró los videos que se habían registrados y no fue posible recuperarlos. En las demás clases se procedió a organizar los videos en subcarpetas de la carpeta de cada clase. Los videos automáticamente recibían un código por parte de la videocámara. Para cada video, se tuvo la precaución que durará alrededor de 30 minutos para facilitar su envío por correo electrónico y procesamiento inicial en los computadores.

***Procesamiento inicial de los audios***

La grabadora fue colocada en la mesa de la profesora para que registrara información que no era audible desde la parte de atrás del grupo por medio de la videocámara. Los videos fueron etiquetados según los códigos que le eran asignado por la misma grabadora. Los audios por lo general tenían una duración de dos horas, en ciertas ocasiones de 30 minutos. Cada archivo de audio fue guardado en la respectiva carpeta correspondiente a la semana de registro de clases.

***Procesamiento inicial de las bitácoras***

Una bitácora representó en esta investigación las notas personales de los investigadores que reportan las observaciones, hipótesis, ideas, datos, obstáculos que puedan surgir en el momento de la recolección de la información en el salón de clases o actividades asociadas a ella. Decidimos llamarnos bitácoreros y tanto el investigador principal como la asistente de la investigación anotaban sus impresiones al respecto por separado, pero luego la bitácora se organizaba en un solo archivo. Las bitácoras fueron organizadas en una carpeta y etiquetadas según las fechas y las clases dadas. Se realizaron 13 bitácoras. Ver Anexo 2 donde están todas las bitácoras.

### *Procesamiento inicial de las páginas transcritas/organizadas*

No se dejó transcurrir más de 72 horas para la transcripción de los audios o registros audiovisuales. Se tenía como objetivo principal transcribirlos usando los signos Val.Es.Co., tal como se puede ver en los anexos o fragmentos citados. La idea de emplear dichos signos, según el mismo Grupo Val.Es.Co. (2014), consiste en que ella permite la segmentación de una conversación coloquial sin residuos, así como un adecuado tratamiento de diversos fenómenos conversacionales (actos truncados, solapamientos, elementos suprasegmentales o Códigos discursivos) que nos permitiera recrear un poco más la situación real en la cual se desarrolló la clase de matemáticas. Las páginas transcritas fueron etiquetas según

Puesto que la recolección de la información empezó a mitad del año escolar vimos la necesidad de revisar otras fuentes que aún permanecían "vivas" como las siguientes:

### *Procesamiento inicial de cuadernos*

Se les pidió a los 33 alumnos integrantes de 10D que trajeran sus cuadernos donde consignaban sus apuntes de clases. Notamos que mucho no escribían en clases, otros tomaban fotos con sus celulares y esto implicó que solo consiguiéramos 8 cuadernos. A cada uno de estos cuadernos les tomábamos fotos desde la página inicial hasta la página final de este instante. Estas fotos fueron etiquetadas en subcarpetas de las clases correspondientes.

### *Procesamiento inicial de talleres y exámenes*

No fue posible quedarnos con algún taller o examen de los alumnos dado que ellos eran motivo continuo de revisión por parte de la profesora. Por eso recurrimos, al igual que con los cuadernos, a hacer el registro fotográfico.

Anexo 3. Sistematización inicial de fotografías sobre el desarrollo de clases, de los videos, audios y páginas transcritas, de cuadernos, talleres y exámenes. Empleo del Atlas.Ti8

### *Sistematización inicial de fotografías sobre el desarrollo de clases*

Los criterios de selección de las fotografías respondieron a los siguientes enunciados:

Que el o los alumnos o la profesora plasmaran *grafías en el cuaderno, en una cartelera o en el tablero. El proceso anterior de selección arrojó los resultados que se presentan a continuación:

*Número de Fotografías que muestran el desarrollo de *grafías sea por alumnos o la profesora*

| Clase | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número | 0 | 0 | 1 | 6 | 27 | 37 | 17 | 3 | 14 | 0 | 98 | 106 | 10 | 0 |
| Total | 319 | | | | | | | | | | | | | |

Es decir, de las 1108 fotografías que fueron tomadas del ambiente de desarrollo de las clases, fueron seleccionadas inicialmente 349. En este informe de tesis se incluyeron unas pocas de dichas seleción. Este último criterio de selección se puede evidenciar al momento de incluir una fotografía en el informe final, las fotografías también fueron objeto de análisis por medio del *ATLAS.ti.8*

### *Sistematización inicial de los videos, audios y páginas transcritas*

El *ATLAS.ti.8* ayuda a identificar temas, patrones, significados en diversas fuentes como videos, audios y textos escritos, como los materiales aquí descritos. Así que se procedió a usar el *ATLAS.ti.8* para facilitar los análisis cualitativos de algunos materiales recolectados para la obtención de los primeros datos a partir de un proceso de codificación.

### *Sistematización inicial de cuadernos, talleres y exámenes*

Puesto que, para este tipo de materiales, cuadernos, talleres y exámenes, se hizo el registro a partir de fotografías se prefirió hacer la sistematización inicial a partir de la observación y en los tres casos se buscaba: 1. Solo *grafías y 2. *grafías acompañadas de texto explicativo sobre ella.

Anexo 4. Descripción de las 14 sesiones de clases que fueron registradas audiovisualmente en los dos periodos académicos que comprendieron el semestre 2017-2.

## Clase 1.

*Temas*: Fórmulas de binomios y trinomios cuadrados perfectos, secciones cónicas y la circunferencia.

*Forma de organización de la clase:* Fue asignada una exposición a una alumna quien a su vez tomó la información del texto de matemáticas y lo expuso. Presentó además un video de YouTube sobre el tema y lo presentó.

## Clase 2.

*Temas:* Ecuación de segundo grado

*Forma de organización de la clase:* Desarrollo algebraico del tema, se hizo énfasis en la obtención de la ecuación general de la circunferencia.

La figura 5 muestra un ambiente de la clase.

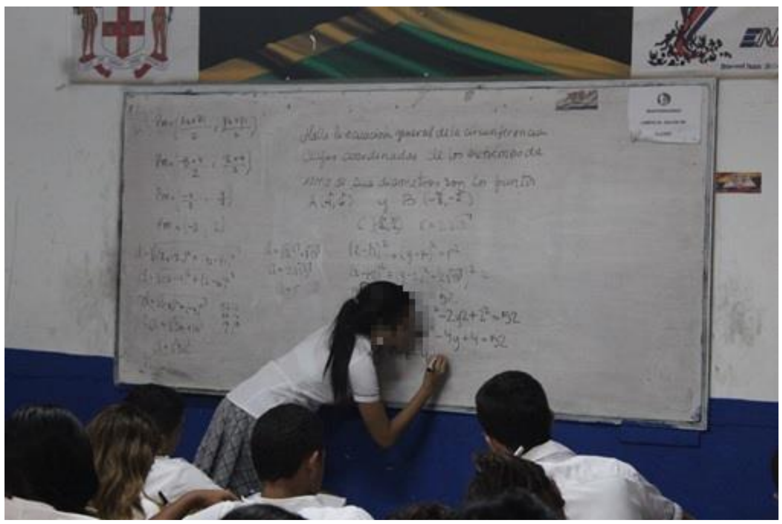


Figura 37. Apartes del ambiente del desarrollo de la Clase 2.

## Clase 3.

*Temas:* Ecuación general de la circunferencia.

*Forma de organización de la clase:* Inicia con la obtención de la ecuación general de la circunferencia dato el centro y radio. Luego se pasa a la solución de un sistema de ecuaciones de 2x2. Se resuelven tres ejercicios más del mismo tipo. La figura 6 muestra un ambiente de la clase.

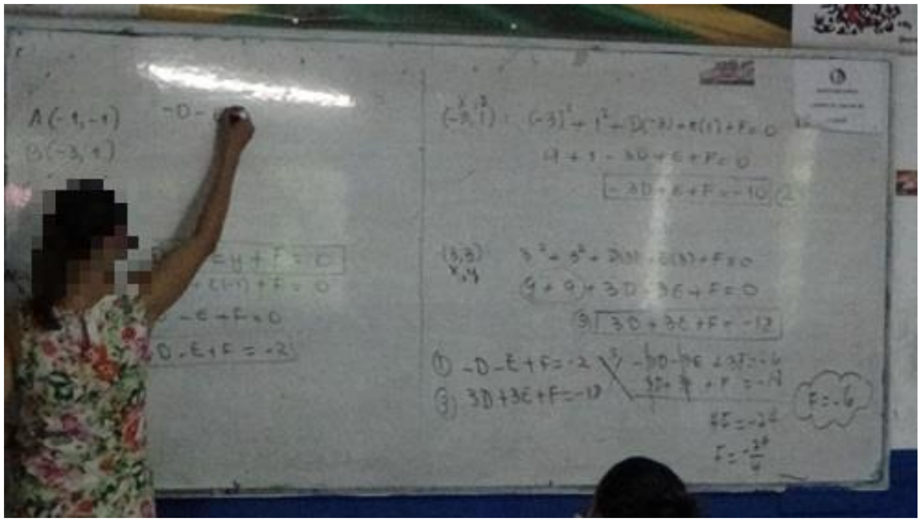


Figura 38. Apartes del ambiente del desarrollo de la Clase 3.

## Clase 4.

*Temas:* Aplicaciones de la ecuación de la circunferencia.

*Forma de organización de la clase:* Se hacen cuatro exposiciones de alumnos sobre aplicaciones de la ecuación de la circunferencia.

La figura 7 muestra un ambiente de la clase.

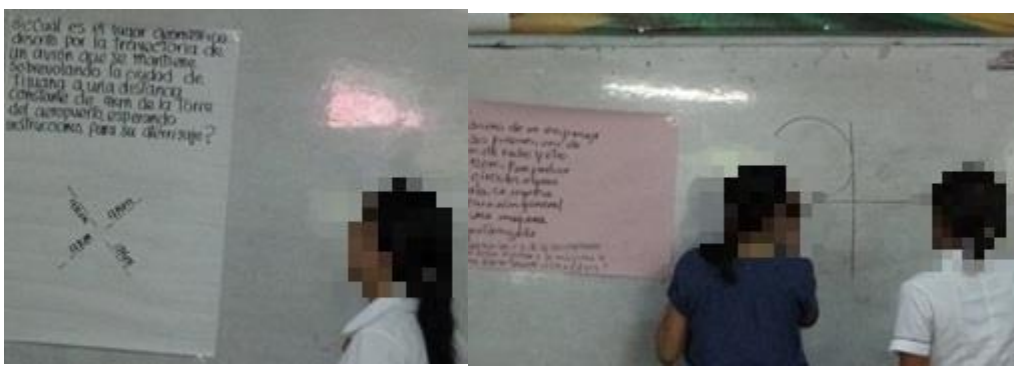


Figura 39. Apartes del ambiente del desarrollo de la Clase 4.

## Clase 5.

*Temas:* La parábola.

*Forma de organización de la clase:* Se basó en la demostración de la ecuación general de la parábola, la explicación geométrica de los elementos de la parábola acompañada de la figura 1-B, su lugar geométrico en el plano y la obtención de ecuaciones canónicas de parábolas dados algunos datos como el vértice y el foco.

La figura 8 muestra un ambiente de la clase.

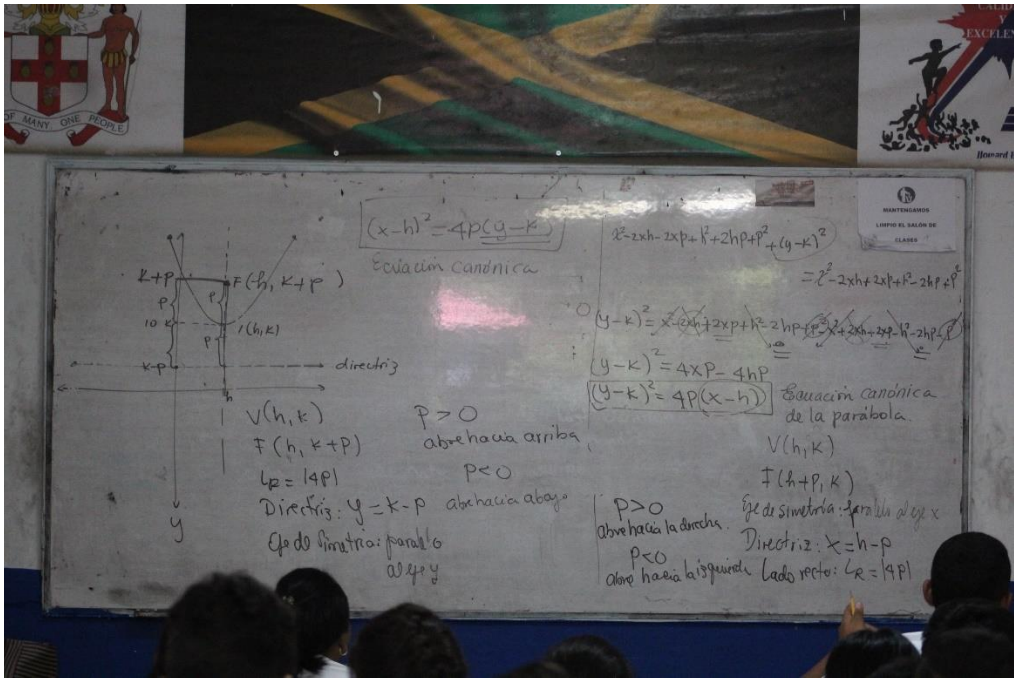



Figura 40. Apartes del ambiente del desarrollo de la Clase 5.

## Clase 6.

*Temas*: La parábola.

*Forma de organización de la clase:* Dedicada a actividades algebraicas sobre la parábola, calcular su ecuación general y calcular elementos como el foco, vértice, directriz y lado recto.

La figura 9 muestra un ambiente de la clase.

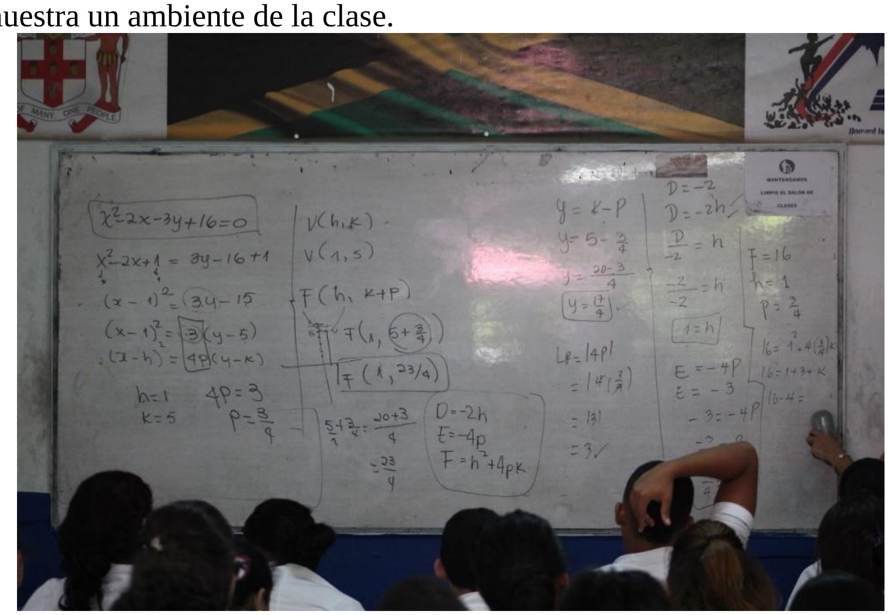



Figura 41. Apartes del ambiente del desarrollo de la Clase 6.

## Clase 7.

*Temas:* La parábola.

*Forma de organización de la clase:* Los alumnos desarrollaron un taller que se dividió en dos actividades: 1. Hallar la ecuación general de la parábola dados algunos elementos; y 2. Encontrar los elementos de dos ecuaciones de parábola.
La figura 10 muestra un ambiente de la clase.

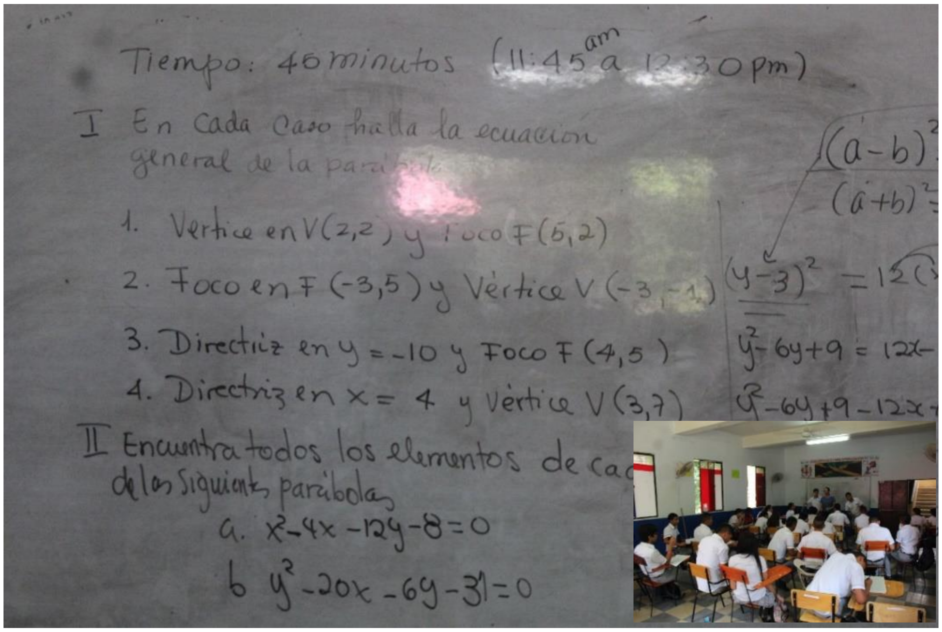



Figura 42. Apartes del ambiente del desarrollo de la Clase 7.

## Clase 8.

*Temas:* La parábola.
*Forma de organización de la clase:* Hacer refuerzos sobre hallar la ecuación de la parábola y encontrar algunos de sus elementos dadas algunas ecuaciones generales y también la realización de un taller.
La figura 11 muestra un ambiente de la clase.

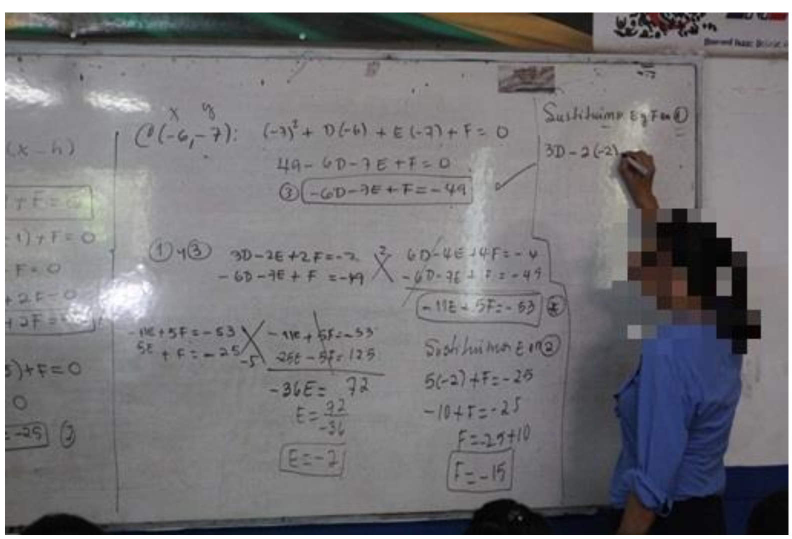



Figura 43. Apartes del ambiente del desarrollo de la Clase 8.

## Clase 9.

*Temas:* Aplicaciones de la ecuación de la parábola.

*Forma de organización de la clase:* Consistió en exposiciones hechas por alumnos sobre problemas de aplicación de la ecuación de la parábola.

La figura 12 muestra un ambiente de la clase.

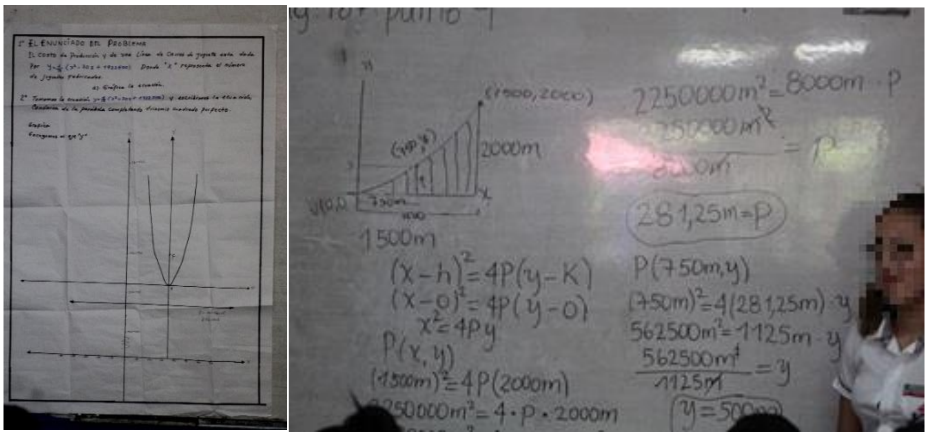


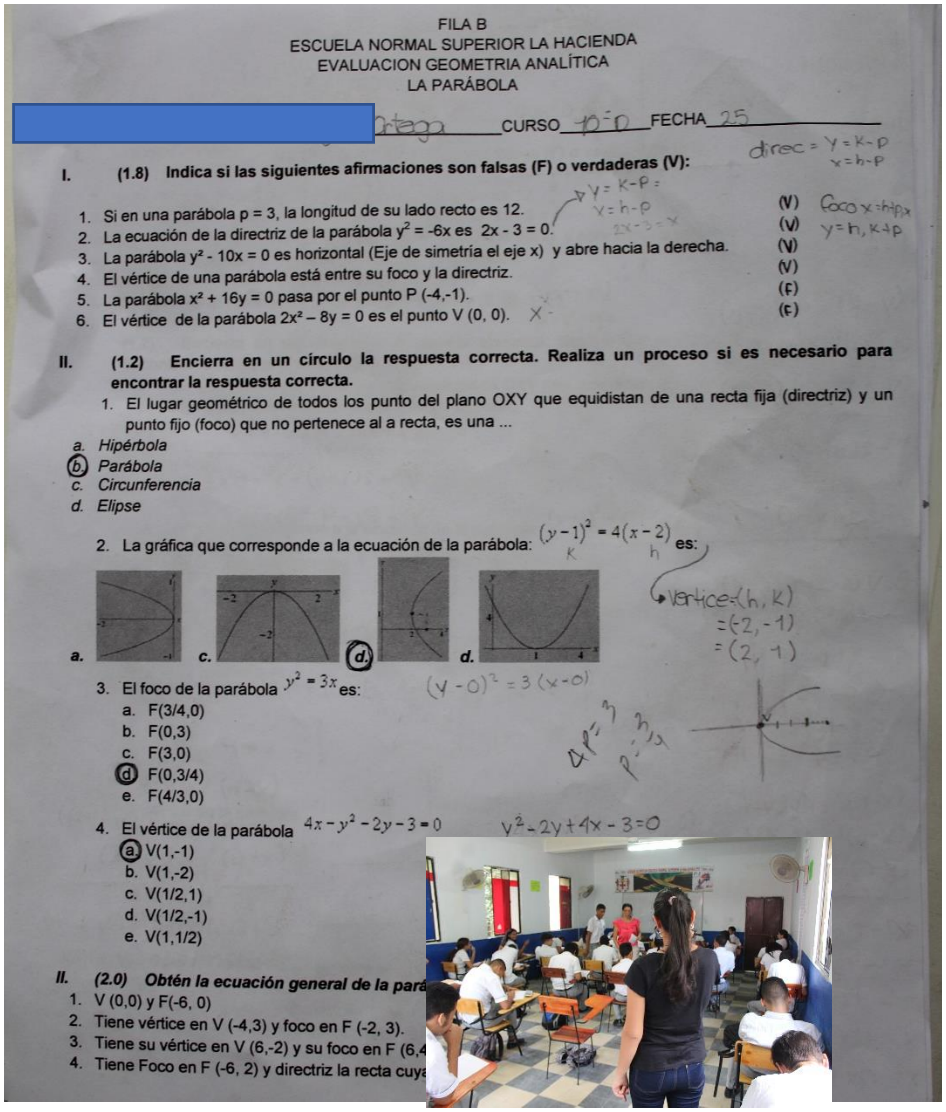

Figura 44. Apartes del ambiente del desarrollo de la Clase 9.

## Clase 10.

*Temas:* Examen sobre la parábola. Introducción a la elipse.

*Forma de organización de la clase:* Examen sobre la parábola y al final de la clase se colocó una tarea sobre la elipse.

La figura 13 muestra un ambiente de la clase.


FILA B
ESCUELA NORMAL SUPERIOR LA HACIENDA
EVALUACION GEOMETRIA ANALÍTICA
LA PARÁBOLA

[redacted] Ortega CURSO 10-D FECHA 25

**I. (1.8) Indica si las siguientes afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V):**

1. Si en una parábola p = 3, la longitud de su lado recto es 12. (V)
2. La ecuación de la directriz de la parábola $y^2 = -6x$ es $2x - 3 = 0$. (V)
3. La parábola $y^2 - 10x = 0$ es horizontal (Eje de simetría el eje x) y abre hacia la derecha. (V)
4. El vértice de una parábola está entre su foco y la directriz. (V)
5. La parábola $x^2 + 16y = 0$ pasa por el punto P (-4,-1). (F)
6. El vértice de la parábola $2x^2 - 8y = 0$ es el punto V (0, 0). (F)

**II. (1.2) Encierra en un circulo la respuesta correcta. Realiza un proceso si es necesario para encontrar la respuesta correcta.**

1. El lugar geométrico de todos los punto del plano OXY que equidistan de una recta fija (directriz) y un punto fijo (foco) que no pertenece al a recta, es una ...
   a. *Hipérbola*
   b. *Parábola*
   c. *Circunferencia*
   d. *Elipse*
2. La gráfica que corresponde a la ecuación de la parábola: $(y-1)^2 = 4(x-2)$ es:
   a. c. d. d.
3. El foco de la parábola $y^2 = 3x$ es:
   a. F(3/4,0)
   b. F(0,3)
   c. F(3,0)
   d. F(0,3/4)
   e. F(4/3,0)
4. El vértice de la parábola $4x - y^2 - 2y - 3 = 0$
   a. V(1,-1)
   b. V(1,-2)
   c. V(1/2,1)
   d. V(1/2,-1)
   e. V(1,1/2)

**II. (2.0) Obtén la ecuación general de la pará**
1. V (0,0) y F(-6, 0)
2. Tiene vértice en V (-4,3) y foco en F (-2, 3).
3. Tiene su vértice en V (6,-2) y su foco en F (6,4
4. Tiene Foco en F (-6, 2) y directriz la recta cuya

Figura 45. Apartes del ambiente del desarrollo de la Clase 10.

## Clase 11.

*Temas:* La elipse.

*Forma de organización de la clase:* La estrategia de la profesora fue traer implementos como puntillas para anclar un hilo de lana en sus extremos y así generar una representación de la elipse como se muestra en la siguiente figura.

La figura 14 muestra un ambiente de la clase.

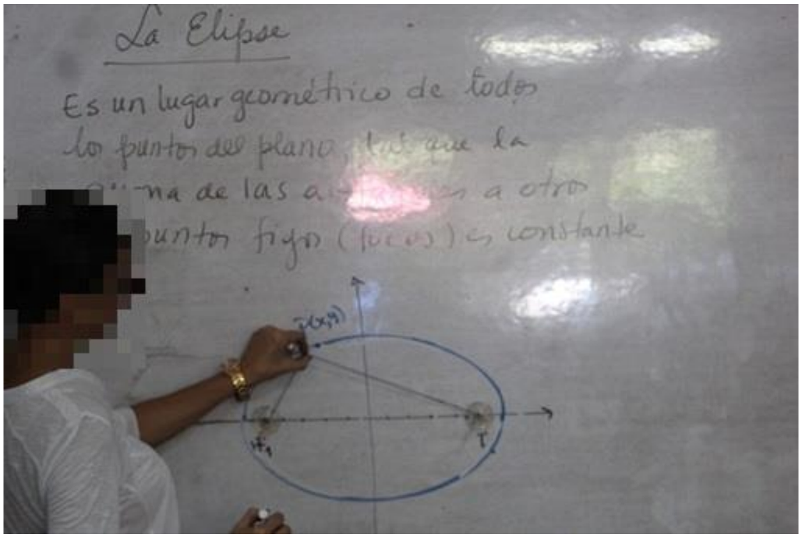



Figura 46. Apartes del ambiente del desarrollo de la Clase 11.

## Clase 12.

*Temas:* La elipse.

*Forma de organización de la clase:* Se estudió gran parte la demostración de la ecuación de la elipse con centro (h, k), eje focal paralelo al eje *x* y ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, con a>b. Primero, algunos alumnos realizaron ejercicios para encontrar la ecuación general de la elipse dados algunos de sus elementos.

La figura 15 muestra un ambiente de la clase.

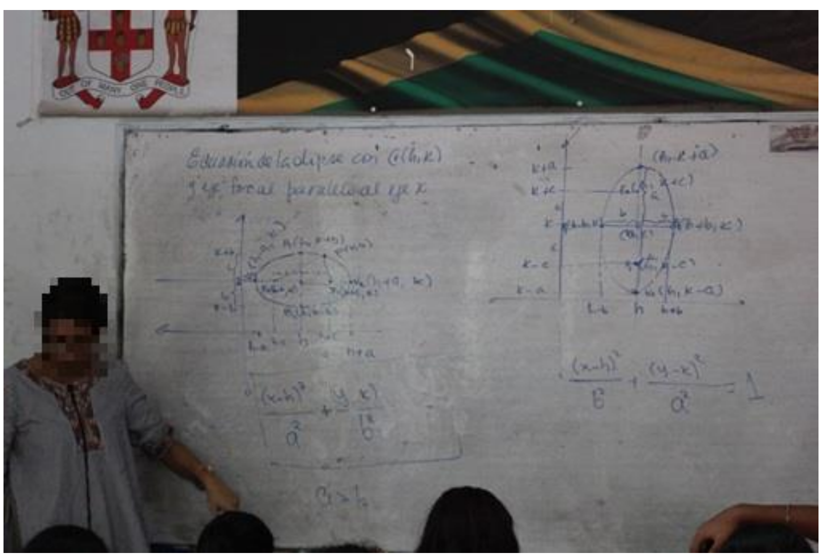


Figura 47. Apartes del ambiente del desarrollo de la Clase 12.

## Clase 13.

*Temas:* Repaso de Trigonometría.

*Forma de organización de la clase:* Fue para explicar el examen que se había realizado en clase de Trigonometría (no fue de nuestro interés esta clase por no tratarse de Geometría Analítica).

La figura 16 muestra un ambiente de la clase.

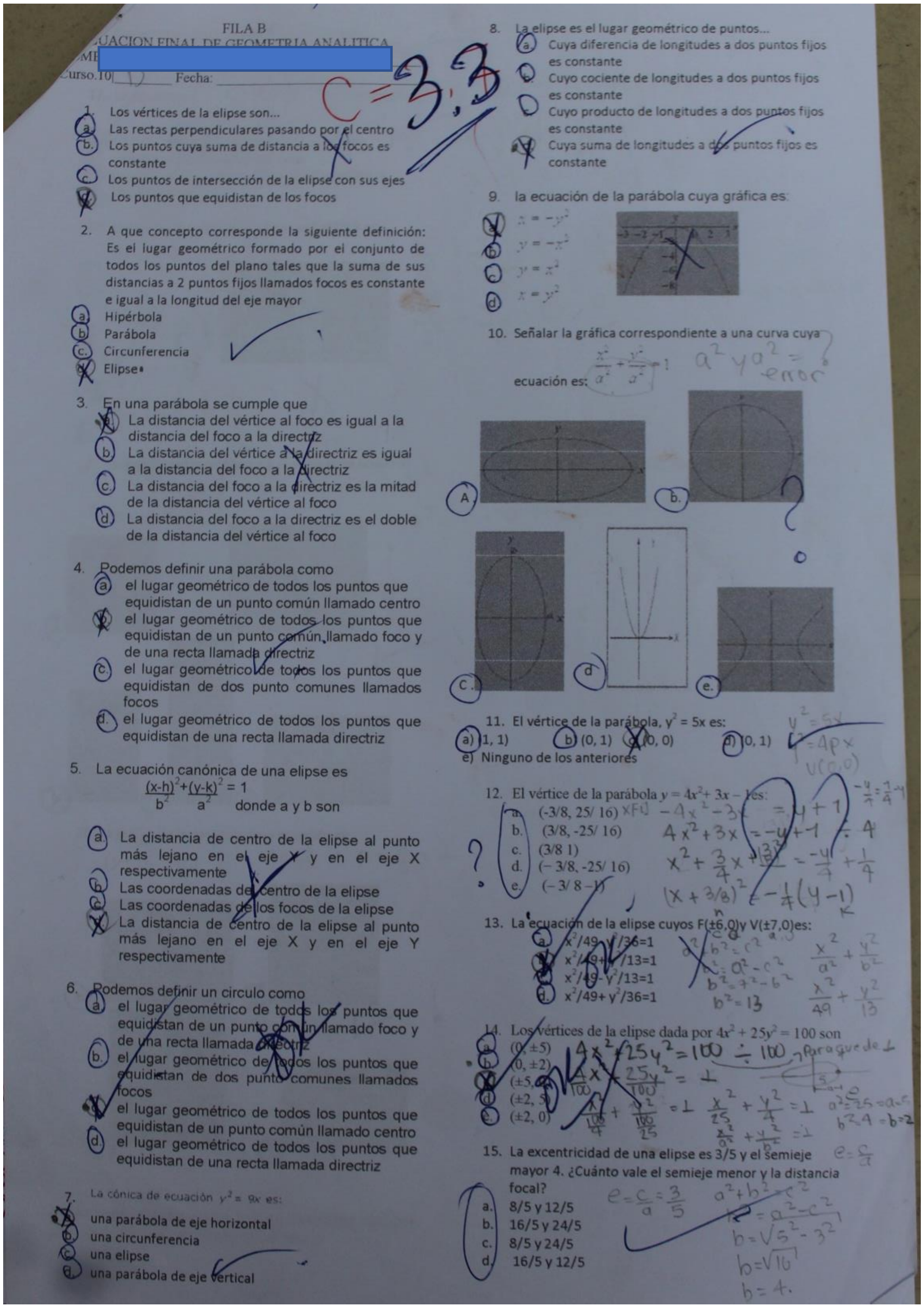
Figura 48.  Apartes del ambiente del desarrollo de la Clase 13.

## Clase 14.

*Temas:* Examen final.

*Forma de organización de la clase:* Desarrollo del examen.

La figura 17 muestra un examen realizado y calificado.



FILA B
EVALUACION FINAL DE GEOMETRIA ANALITICA
Nombre: [redacted]
Curso.10 Fecha:

C = 3,3

1. Los vértices de la elipse son…
a. Las rectas perpendiculares pasando por el centro
b. Los puntos cuya suma de distancia a los focos es constante
c. Los puntos de intersección de la elipse con sus ejes
d. Los puntos que equidistan de los focos

2. A que concepto corresponde la siguiente definición: Es el lugar geométrico formado por el conjunto de todos los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a 2 puntos fijos llamados focos es constante e igual a la longitud del eje mayor
a. Hipérbola
b. Parábola
c. Circunferencia
d. Elipse

3. En una parábola se cumple que
a. La distancia del vértice al foco es igual a la distancia del foco a la directriz
b. La distancia del vértice a la directriz es igual a la distancia del foco a la directriz
c. La distancia del foco a la directriz es la mitad de la distancia del vértice al foco
d. La distancia del foco a la directriz es el doble de la distancia del vértice al foco

4. Podemos definir una parábola como
a. el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto común llamado centro
b. el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto común llamado foco y de una recta llamada directriz
c. el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de dos punto comunes llamados focos
d. el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de una recta llamada directriz

5. La ecuación canónica de una elipse es $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ donde a y b son
a. La distancia de centro de la elipse al punto más lejano en el eje X y en el eje X respectivamente
b. Las coordenadas del centro de la elipse
c. Las coordenadas de los focos de la elipse
d. La distancia de centro de la elipse al punto más lejano en el eje X y en el eje Y respectivamente

6. Podemos definir un circulo como
a. el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto común llamado foco y de una recta llamada directriz
b. el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de dos punto comunes llamados focos
c. el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto común llamado centro
d. el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de una recta llamada directriz

7. La cónica de ecuación $y^2 = 9x$ es:
a. una parábola de eje horizontal
b. una circunferencia
c. una elipse
d. una parábola de eje vertical

8. La elipse es el lugar geométrico de puntos…
a. Cuya diferencia de longitudes a dos puntos fijos es constante
b. Cuyo cociente de longitudes a dos puntos fijos es constante
c. Cuyo producto de longitudes a dos puntos fijos es constante
d. Cuya suma de longitudes a dos puntos fijos es constante

9. la ecuación de la parábola cuya gráfica es:
a. $x = -y^2$
b. $y = -x^2$
c. $y = x^2$
d. $x = y^2$

10. Señalar la gráfica correspondiente a una curva cuya ecuación es: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$a^2$ y $a^2$ error

A. b. c. d. e.

11. El vértice de la parábola, $y^2 = 5x$ es:
a) (1, 1) b) (0, 1) c) (0, 0) d) (0, 1)
e) Ninguno de los anteriores

$y^2 = 5x$
$y^2 = 4px$
$V(0,0)$

12. El vértice de la parábola $y = 4x^2 + 3x - 1$ es:
a. (-3/8, 25/ 16)
b. (3/8, -25/ 16)
c. (3/8 1)
d. (– 3/8, -25/ 16)
e. (– 3/8 –1)

13. La ecuación de la elipse cuyos F(±6,0)y V(±7,0)es:
a. $x^2/49-y^2/36=1$
b. $x^2/49+y^2/13=1$
c. $x^2/49-y^2/13=1$
d. $x^2/49+ y^2/36=1$

$b^2 = a^2 - c^2$
$b^2 = 7^2 - 6^2$
$b^2 = 13$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$
$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{13}$

14. Los vértices de la elipse dada por $4x^2 + 25y^2 = 100$ son
a. (0, ±5)
b. (0, ±2)
c. (±5, 0)
d. (±2, 5)
e. (±2, 0)

$4x^2+25y^2=100 \div 100$
$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$
$a^2=25=a=5$
$b^2=4=b=2$

15. La excentricidad de una elipse es 3/5 y el semieje mayor 4. ¿Cuánto vale el semieje menor y la distancia focal?
a. 8/5 y 12/5
b. 16/5 y 24/5
c. 8/5 y 24/5
d. 16/5 y 12/5

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$
$a^2+b^2=c^2$
$b^2=a^2-c^2$
$b=\sqrt{5^2-3^2}$
$b=\sqrt{16}$
$b=4.$

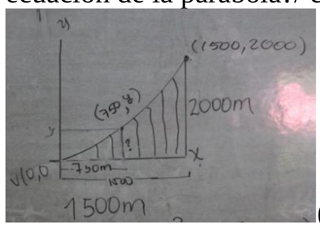
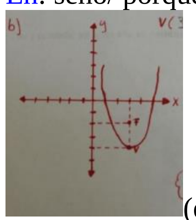
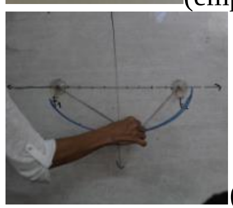
Figura 49. Examen realizado en la Clase 14.

Anexo 5. Resultados de codificación de las transcripciones de las 14 clases. Tabla de códigos-documentos.

| | **Transcripción Clase 1. C1. 16-08-17.** | **Transcripción Clase 2. C2. 30-08-17.** | **Transcripción Clase 3. C3. 06-09-17.** | **Transcripción Clase 4. C4. 13-09-17.** | **Transcripción Clase 5. C5. 20-09-17.** | **Transcripción Clase 6. C6. 27-09-17.** | **Transcripción Clase 7. C7. 04-10-17.** | **Transcripcion Clase 8. C8. 11-10-17.** | **Transcripción Clase 9. C9. 18-10-17.** | **Transcripción Clase 10. C10. 25-10-17. Examen.** | **Transcripción Clase 11. C11. 01-11-17.** | **Transcripción Clase 12. C12. 08-11-17.** | **Transcripción Clase 13. C13. 15-11-17.** | **Transcripción Clase 14. C14. Examen de recuperación. 22-11-17.** | **Totales** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ● *grafías de la profesora: representaciones o acciones sobre gráficas. | 0 | 0 | 1 | 4 | 7 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 7 | 5 | 3 | 0 | 31 |
| ● *grafías del estudiante: representaciones o acciones sobre dibujos. | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| ● *grafías del estudiante: representaciones o acciones sobre gráficas. | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 7 | 0 | 3 | 7 | 1 | 4 | 0 | 0 | 31 |
| ● *grafías del texto | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 15 |
| ● *metrías de la profesora: empleo de artefactos de medición calibrados. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| ● *metrías de la profesora: empleo de artefactos de medición no calibrados. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| ● *metrías de la profesora: Representación de magnitud y su cantidad. | 2 | 0 | 0 | 3 | 7 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 0 | 19 |
| ● *metrías de la profesora: representación de un proceso de medición numérico. De intervalo. | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| ● *metrías de la profesora: representación de un proceso de medición prenumérica. | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 | 0 | 9 |
| ● *metrías del estudiante: empleo de artefactos de medición calibrados. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| ● *metrías del estudiante: empleo de artefactos de medición no calibrados. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 0 | 2 | 0 | 0 | 7 |
| ● *metrías del estudiante: Representación de magnitud y su cantidad. | 3 | 0 | 0 | 4 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 17 |
| ● *metrías del estudiante: representación de un proceso de medición numérico. De intervalo. | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| ● *metrías del estudiante: representación de un proceso de medición prenumérica. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| ● *nomías de la profesora: leyes sobre magnitudes de la espacialidad. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| ● *nomías de la profesora: otros temas | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| ● *nomías de la profesora: patrones de magnitudes de la espacialidad. | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| ● *nomías de la profesora: reglas de magnitudes de la espacialidad. | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| ● *nomías del estudiante: leyes sobre magnitudes de la espacialidad. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| ● *nomías del estudiante: patrones de magnitudes de la espacialidad. | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| ● *nomías del estudiante: reglas sobre magnitudes de la espacialidad. | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **Totales** | 9 | 1 | 4 | 26 | 22 | 7 | 7 | 2 | 20 | 15 | 17 | 18 | 16 | 5 | 169 |

Anexo 6. Algunas representaciones o acciones cronotópicas de los agentes noéticos-semióticos durante el desarrollo de las clases observadas.

| Fase de análisis | Códigos | Algunas representaciones o acciones cronotópicas |
|---|---|---|
| ***grafías** | Representaciones o acciones icónicas del espacio. | Remitimos al lector a las figuras 17 y 18, allí se encontrarán todas las *grafías desarrolladas por la profesora y los alumnos durante las 14 clases observadas y una muestra de otros materiales como talleres, exámenes y cuadernos. |
| ***metrías** | Representaciones o acciones de metrización de la distancia. | • Eh: ¡eh! / El radio es la distancia. Em: desde /la distancia Eh?: ¡eh¡ desde el centro/ desde el punto del centro al / al / al/<br>• Em1: ok/ se conoce como circunferencia/ a la línea cerrada por puntos y de apariencia plana/ en la cual los puntos son equidistantes con su punto central // equidistantes significa que tienen la misma distancia /<br>• P: entonces qué quiere decir/ que con estos dos/ el punto de intercepción es /(-4,4) / y como me dice que tiene el centro en la intercepción, entonces el centro va a ser (-4,4) ///<br>• P: bien/ mi pregunta es/ ¿qué quiere decir?/ ósea/ cuando a ustedes le piden el lugar geométrico/ ¿Qué les estarán pidiendo? // ¿Por qué una circunferencia y no otra cosa?/// ¿Por qué asumió que era una circunferencia y no?. Em: no porque/ no porque dice que el avión se mantiene volando ee/ alrededor de la torre/ a una distancia de ella de cuatro kilómetros/ porque mantiene una distancia constante/ no cambia/ y porque (()) del otro extremo y la distancia es igual en todos lados<br>• Em: ↑ ¡34! Es mayor que 16/ lo que quiere decir que está afuera de la circunferencia / porque es un número mayor a 16/. P: ¿está claro? /// si hubiese quedado/ menor que 16/ ¿Qué quería decir eso?/ Em: ¡que está dentro de la circunferencia!<br>• P: bueno / les explico para la pregunta que hice/ de aquí a aquí habría 12 unidades/ y si la miramos aquí/ aquí sería 12 pero de lado negativo de las x/ entonces sería aquí/ esto sería aquí -12/ y hacia arriba/ esto es la misma distancia que hasta aquí/ la coordenada de este punto -12 coma 12/ el radio perpendicular a la recta (()) la distancia que hay del centro a cualquier punto en este caso/ el punto tangencia es 12 porque es el radio/. Eh: bueno/ la distancia/ se pone siete siete/ siete coma siete/ porque el radio / el 7 es perpendicular/ P: (()) al punto tangencia/ donde / hacia el otro lado/ ahí es siete/ y hacia abajo/ hacia el punto tangencia/ también es siete porque es del centro cualquier punto. Em: eso era lo que yo estaba preguntando al principio/ porque el radio estaba para este lado/ P: no el radio puede estar en cualquier parte/ el radio él lo puede señalar en cualquier parte/ porque es la distancia/ que hay del centro a cualquier punto de la circunferencia/ en este |

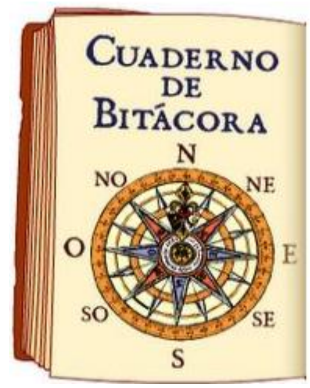
| | | |
|---|---|---|
| | | caso se facilita ser el punto tangencia/ como es perpendicular/ la distancia que hay de aquí a aquí/ es la misma/<br>• Eh: ↓ una parábola es una sección cónica de excentricidad igual a 1/. P: entonces/ sección cónica con excentricidad igual a 1. Eh: resultante de cortar un cono recto con un plano °()° se define/ también como el lugar geométrico con los puntos del plano/ que equidistan de una recta llamada directriz °()°<br>• P: porque el eje de la parábola es paralelo a el eje de la y / entonces/ ¿Qué debo obtener para hallar la ecuación de la parábola?/ el vértice y P que es la distancia que hay de vértice a el foco/<br>•   (medidas ubicadas en la *grafía)<br>• P: ¿y por qué es la mitad? §: (La mayoría de los alumnos hablan) (()) P: puede estar en cualquier vértice. Eh: seño/ porque la parábola es simétrica<br>•  (empleo de artefactos institucionalizados para medir)<br>•  (empleo de artefactos no institucionalizados para medir)<br>• P: los vértices son V1/ V2/ B1 y B2/// la distancia que hay de V1 a V2 dijimos que era 2a // la distancia que hay de B1 a B2 dijimos que era 2b / que la distancia que hay de foco a foco/ la llamamos 2c /<br>• P: bueno/ el sexto// podemos definir un círculo como /// el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto común llamado centro/ esa era la respuesta/<br>• Entre otras *metrías, remitimos a los anexos 7 al 20. |

| | | |
|---|---|---|
| ***nomías**[84] | Leyes o normas que rigen sobre el propio espacio de la profesora y los alumnos. | • P: el ejercicio se los iba a poner en un taller/ el taller va a quedar para la casa/ el ejercicio dice así// determina/ la ecuación general / el centro y el radio/ de la circunferencia/ a la que pertenece cada uno de estos puntos/ A(-1,-1)/ B(-3,1)/ C(3,3)// ¿Qué quiere decir?/ que estos puntos pertenecen a la circunferencia / están en la circunferencia/ o podemos decir que la circunferencia toca esos puntos/ ¿entendido? / ¿Gráficamente como sería? / ¿Qué tendríamos que hacer para tener un bosquejo más o menos de la situación?// lo ubicamos en el plano/ y hacemos una circunferencia que pase por / los tres puntos/// ¿Qué quiere decir que los puntos están sobre la circunferencia?/. Em: que la distancia que hay del centro a esos puntos es la misma.<br>• P: buena esta si no la vamos a demostrar/ pero con lo que ya hicimos/ vamos a ((encontrar)) la ecuación de la parábola que abre hacia arriba o hacia abajo/ pero aquí tenemos que aprender algo/ ¿Por qué se llama eje de simetría?/ porque divide a la parábola en dos porciones igualitas/ (la profesora procede a realizar la construcción de una parábola que abre hacia arriba)<br>• Eh: seño/ porque la parábola es simétrica. P: es simétrica/ y el lado izquierdo va a ser exactamente igual al lado derecho/ y el eje de simetría la divide exactamente en dos gráficas iguales/ en dos partes iguales/<br>• P: ¿Qué dice la definición de elipse?/ que es el lugar de todos los puntos del plano/ que cumple ¿con que condición?/ que la distancia que hay / que la suma de la distancia del punto a los focos siempre va a ser la misma/ que la distancia a esta distancia siempre va a ser la misma (La profesora emplea el marcador para tensar la cuerda de lana y mover así el punto sobre el tablero sin dejar huella, es decir, el punto es el vértice que se forma en la cuerda de lana. Muestra que la suma de las distancias del foco F1 hasta ese punto + la posición de dicho punto hasta el foco F2, permanece constante) / la distancia que hay de este punto aquí/ más la distancia que hay de aquí a aquí / siempre va a ser la misma /<br>• P: y que dice/ que la distancia que hay de este punto a este/ siempre va a ser una constante / miren/ si me pongo aquí/ la suma va a ser la misma/ una constante/ ¿está claro? (La profesora hace referencia a la distancia del foco 1, F1, a la de un punto que está en el perímetro de la elipse y la de este punto a el foco 2, F2) / yo voy a tomar un punto aquí / de coordenadas (x, y) /<br>• Entre otras *nomías, remitimos a los anexos 7 al 20. |

[84] Se resaltan en gris aquellas expresiones de la profesora o alumnos que consideramos son reglas, patrones, regularidades o leyes, lo cual constituyen las *nomías.

Anexo 7. Una fotografía sobre un ambiente de las clases.

Anexo 8. Un ejemplo de una bitácora.




**BITÁCORA SOBRE LOS REGISTROS AUDIOVISUALES.**

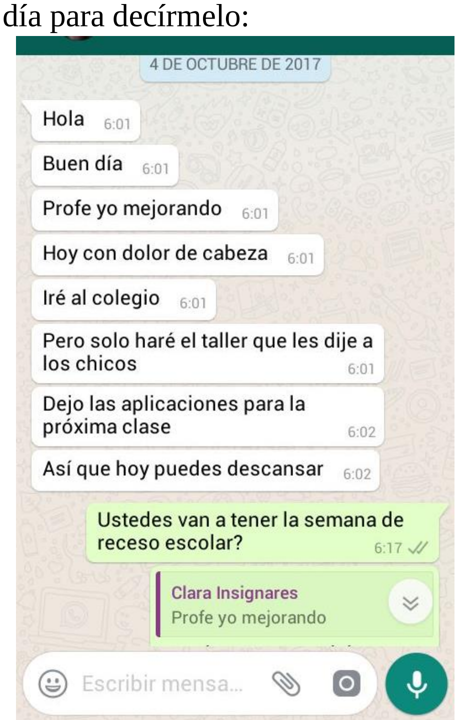
*Bitácora 7. Sobre clase 7, 04-10-17*

**Directores:** Dora Calderón y Carlos Vasco.
**Bitacoreros:** Armando Aroca y María Mejía.

**Proyecto de Investigación:** Formas de operación y de comunicación de los modelos mentales de un grupo de alumnos de grado 10 que emergen de sus cronotopos en la resolución de problemas de Trigonometría y Geometría Analítica en una Institución Educativa de la Costa Atlántica de Colombia[85].

***Impresiones de los Bitacoreros:***

1. La clase inició a las 11:24 a.m.
2. La profesora cuando nos vio llegar se sorprendió, de hecho hasta abrió la boca por dos o tres segundos, sorprendida, yo supongo que iba a entregar un taller a los alumnos y les ofrecería excusas y se iría. Me manifestó que se sentía mal, con dolor de cabeza, incluso que me escribió a las 6:00 a.m. de este día para decírmelo:




[85] Para este momento, este era el título que tenía el Proyecto de Investigación doctoral.

Sin embargo, la profesora al vernos en el colegio decidió hacer la clase. Esta fue mi impresión pues me insistió que ella nunca había fallado a clases.

También pienso que la profesora en su buena fe quiso que no fuéramos al colegio porque hay brotes de varias enfermedades contagiosas como conjuntivitis, paperas, gripas y hasta uno de los aseadores tiene tuberculosis. Recordemos que el Colegio es una reserva natural y hay varios tipos de animales: vacas, patos, iguanas, ardillas, muchas aves, etc.

3. Creo que María y yo debemos dejar de secretearnos tanto, esto lo hacemos con el objetivo de ajustar técnicas o procedimientos a la hora de filmar o de tomar notas para la bitácora, por un lado me preocupa lo que llegue a pensar la profesora con este comportamiento de María y yo y por otro lado María se ríe por cualquier cosa.

---

1. La clase inicio a las 11:23 am, hora que llego la profesora.
2. Al llegar la profesora, tomé la cámara de video para empezar el registro audiovisual, y por la rapidez del momento no me dio tiempo de mirar el reloj para ver la hora en que empezó la clase para ponerlo en la bitácora. Mi primera reacción fue preguntarle con señas al profesor Armando. Debo tener mucho cuidado con esto, pues la profesora puede creer que le estamos controlando el tiempo.
3. El profesor Armando y yo estuvimos muy inquietos durante nuestra estadía en el colegio en el día de hoy, debido que hay una virosis de conjuntivitis, papera, varicela, gripa, fiebre, diarrea y vómito; no queríamos tocar nada y estuvimos todo el tiempo atentos si alguien tosía para no respirar cerca. Personalmente lo que más me impresiono fue enterarme que uno de los trabajadores se contagió de tuberculosis muy probablemente en el colegio.
4. La profesora realizó un taller para el cual dio 45 minutos, de 11:45 am a 12:30 pm; pero el desarrollo del taller ocupo toda la clase.

Anexo 9. Un ejemplo de páginas transcritas u organizadas. Transcripción de la Clase 5. 20 de Septiembre del 2017.

## Transcripción de registros audiovisuales de clases de la Institución Educativa 1.

Geometría Analítica, grado 10.
20 de Septiembre del 2017, miércoles, de 11:00 a.m. a 1:00 p.m.

---

**Proyecto de investigación doctoral (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, UD-FJC, Doctorado Interinstitucional de Educación énfasis Educación Matemática):** Formas de operación y de expresión de los modelos mentales [cronotópicos]de un profesor y sus alumnos cuando desarrollan actividades que vinculan el uso de coordenadas en el plano y en el espacio, en clase de Geometría Analítica de grado 10°.
**Alumno**: Armando Aroca Araújo

**Proyecto de Trabajo de Grado (Universidad del Atlántico, Licenciatura en matemáticas)**: Aspectos cronotopométricos en la comunicación entre profesor y alumnos en la clase de geometría analítica
**Alumno**: María Alejandra Mejía Pérez

---

### TRANSCRIPCIÓN

§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())
P: vean chicos/ vamos a abrir la ventana/ hace mucho calor/
§: (La mayoría de los alumnos hablan, se pide silencio con shhh) (())
P: espero no pase como en la clase pasada/ que habíamos quedado no hablar más de la cuenta/ demasiado// les voy a agradecer/ que tengamos el mejor comportamiento/ por lo menos dejar que nos escuchemos/// la vez pasada muchos gritos para podernos escuchar// entonces vamos a hacer el favor de colaborar con esa parte/ hoy no voy a gritar/ voy a hablar bien bajito/// para el día de hoy yo deje una tarea / ¿cierto?/
§: ¡Si ii!
P: ¡ok!/
Eh: ¿Qué es la parábola?/ ↓ la parábola es el (()) (Eh lee de su libreta la definición de parábola)
P: ¿Qué mas? / ¿Qué dice?/// de acuerdo lo que me dijo voy a hacer otra pregunta/
Eh: ↓es una curva abierta/ formada por dos líneas (())(Eh lee de su libreta la definición de parábola)
P: ↓ ¿a cuál definición se le pareció a la que nosotros vimos? /
Em: eh/ la sección cónica/
P: él está hablando de las secciones/ cónicas/ (()) cómo obtener la parábola/ cómo obtener la elipse/ y cómo obtener la circunferencia/ ¿de acuerdo?// todas esas se llaman secciones cónicas/ bien/ él ha dicho algo que tiene coordenadas/ (()) ¿Qué le paso?/ ¿se le olvidó?/ ¿Qué pasó?/// vamos a el libro a la página 182/ tenemos el libro/ ¿Por qué no consultamos?/ no necesariamente tenemos que irnos a internet para saber/// tenemos un

texto/ en mi época no había internet/ lo hacíamos con el texto/ a ver Eh / que encontró de una parábola/
Eh: ↓ seño lo mismo/
P: pero lee/ no importa/ la definición es única/
Eh: ↓ una parábola es una sección cónica de excentricidad igual a 1/
P: entonces/ sección cónica con excentricidad igual a 1
Eh: resultante de cortar un cono recto con un plano °()° se define/ también como el lugar geométrico con los puntos del plano/ que equidistan de una recta llamada directriz °()°
P: ok/ de que (()) de lo que ustedes están leyendo/ ¿Qué podemos destacar de esa definición?
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())
P: que tenemos una recta llamada directriz/ un punto fijo llamado foco/ ¿Cómo relacionamos nosotros ese foco/ esa directriz con la definición de ee
Eh: que tiene dos puntos que equidistan de la recta que es la directriz/ y que según corresponde °()°
P: mmm/ bueno yo / ¿Qué es lo que me está diciendo? / Ahí hay/ ¿Cuántos elementos por menos?
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())
P: el punto fijo/ foco y la directriz / y la excentricidad/ mi pregunta es con respecto a lo que dice Eh / ¿Cómo relacionamos nosotros/ ese punto fijo/ esa directriz/ para encontrar nosotros una parábola?/ hay todavía algo que no han concretado/ vuelve a leer la definición/ se define también como el lugar geométrico/ de los puntos de un plano/ tenemos/ en el plano tenemos infinitos puntos/ pero ahí nos dice que la parábola se forma de una manera/ ¿Cómo se forma?
Em: de los puntos de un plano que equidistan de un (Em no termina la idea)
P: de los puntos de un plano que equidistan ¿de dónde?/ de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz /// ¿Qué equidistan que quiere decir?/
Em: que tienen la misma distancia/
P: que tienen la misma distancia/ ¿Qué quiere decir que equidistan/ son todos los puntos/ del foco que equidistan de una recta fija llamada directriz?
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())
P: que la distancia/ la distancia del foco a la directriz/ es igual/ ↑ ¡no!/ la distancia del punto a la directriz debe ser igual a la del punto al foco/ ¿estamos de acuerdo?/ tenemos al plano/ un punto fijo tenemos el plano/ la distancia que hay de ese punto a la recta fija / equidistan/ ¿Qué es la directriz?/ es una recta que va a ser fija/ y además de fija/ tiene cualquier / vertical/ y horizontal si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo/ además de ser vertical/ u horizontal/ ¿Qué característica debe tener?/ perpendicular/ ¿a quién?/
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())
P: la directriz es perpendicular al eje de simetría/ también perpendicular a los ejes coordenados/ es perpendicular a la directriz/ si la recta es perpendicular al eje de simetría y viceversa / va a ser perpendicular a la directriz/ pero/ con la condición que va a pasar por el foco// ahora vamos a llevar a la forma y miremos si es cierto/ que está de acuerdo con la definición (la profesora atiende a una alumno diferente a los de la clase) bueno vamos a representar lo que estamos diciendo/ en relación a la definición/ tenemos / no vamos a tomar que me queden los ejes coordenado/ si no que me quede en cualquier parte/ vamos a tomar aquí

el foco/ este es el punto fijo/ y vamos a tomar la directriz aquí/ dijimos que era una recta perpendicular a el eje que pasaba por el foco/ que en este caso va a ser/ el eje de la parábola o el eje de simetría/ ¿entendido?/ vamos a tomar un punto cualquiera/ vamos a tomar este/ para facilidad/ vamos a tomar este punto/ en el plano/ por definición de parábola decimos que son todos los puntos del plano que van a estar a la misma distancia de un punto fijo llamado foco/ y una directriz/ podemos tomas aquí otro punto/ la distancia que hay de este punto/ al foco/ debe ser la misma distancia que hay de este punto a la directriz/ pero sabemos que yo de la directriz puedo coger cualquier distancia/ cierto/ la distancia de aquí a aquí/ nuevamente ¿Qué distancia vamos a tomar?/ la menor distancia/ que viene siendo la distancia/ per pen di cu lar/ ósea que la distancia que vamos a tomar/ del punto a la directriz/ es una distancia perpendicular donde se toma la menor distancia/ porque / hasta aquí hay una distancia de aquí a aquí/ hay infinitas distancias respecto a ese punto/ debo tomar la distancia perpendicular/ este sería/ vamos a tomar este punto/ vamos a tomar el foco aquí/ y decimos/ por definición de parábola/ la distancia que hay del punto al punto fijo y a la directriz/ debe ser el mismo/ ósea que esta distancia/ tiene que ser igual a esta/ de pronto gráficamente no se ve/ pues porque hay que tomar las medidas /// vamos a tomar aquí otro punto/ y lo mismo/ la distancia que va a haber de aquí a aquí/ debe ser/ igual a la distancia que hay de aquí a aquí/ y así sucesivamente/ vamos tomando otro punto aquí/ y otro punto aquí/ y podemos comprobar que esa distancia va a ser la misma/ y todos estos puntos que cumplen con esa condición/ vamos a tener/ lo que llamamos el lugar geométrico de la parábola/ ¿estamos claros?// esta sería la parábola/ la distancia que hay de este punto a aquí/ debe ser igual a la distancia que hay de aquí a aquí / ¿alguna pregunta hasta allí? / Ya sabemos el concepto/ el lugar/ el lugar geométrico va a ser el conjunto de puntos/ que cumplen con la condición que la distancia que hay de cualquiera de esos puntos al foco es la misma distancia que hay de este a la directriz / hasta ahí tenemos el concepto claro / como la distancia que hay de este punto que es la intersección de la parábola/ con el eje de la parábola o el eje de simetría/ lo voy a llamar vértice/ este va a ser el vértice y este va ser el foco/ en pocas palabras decimos que la distancia que hay del vértice al foco/ es la misma distancia que hay del vértice a la directriz/ por la definición de parábola/ esta distancia la vamos a llamar P/ y se llama distancia focal/ como de aquí a aquí es la misma distancia que hay de aquí a aquí/ entonces la vamos a llamar P/ ¿alguna pregunta hasta allí? / Todo está claro/// bueno/ este punto en x lo vamos a llamar h/ y a este punto acá lo vamos a llamar k

Em: seño disculpe/ la están buscando otra vez/

P: gracias mija/// ahora si/ bueno/ les decía que la distancia/ aquí era p y la distancia aquí era / vamos a llamar esto vértice/ en x la íbamos a llamar h y en y la íbamos a llamar k / ósea que el vértice tendría coordenadas (h, k)/ y este punto aquí/ que coordenada/ ósea si de aquí a aquí hay P/ esto va a ser h+p/ ¿saben por qué?/ (()) si esto es h y de aquí a aquí hay P/ esto me da (h,p)/ bien/ si de aquí a aquí también hay P/ este punto será h-p/ estamos en el eje de las x/ preguntas/ este punto / ¿Qué coordenadas va a tener entonces?/

Em: (h, p)

P: va a tener la coordenada en x y ya coordenada en y/ la coordenada en x es h+p y la coordenada en y es k/ ahora/ h+p/ ya tengo las coordenadas del foco/ vamos a tomar/ un punto cualquiera aquí/ no vamos a ponerlo más adelante/ saben que esto es indefinido/ vamos a tomar este como x y este como y / sabemos que va a tener coordenadas (x,y)/ y

esto es un punto cualquiera de la parábola/ vamos a tomar un punto aquí/ sabemos que la distancia de aquí a aquí va a ser la misma de aquí a aquí/ del punto a la directriz/ vemos un punto en la directriz/ que ese punto ¿Qué coordenadas va a tener? / una coordenada en x y una coordenada en y/ (h-p, k) / ya tenemos las coordenadas del punto/ ¿preguntas hasta ahí? / ¿Me entendieron el gráfico?/ ahora si/ repíteme la definición tú para ver/ no/ ya te la debes saber/ ¿Qué es la parábola?/ un lugar geométrico que cumple con ciertas condiciones/ que todos estos puntos del plano que formaron este lugar geométrico/ ¿Qué deben cumplir? / ¿Qué deben cumplir cada uno de esos puntos?/ tú que dices Em
Em: que todos los puntos sean equidistantes
P: todos los puntos son equidistantes del punto fijo llamado foco/

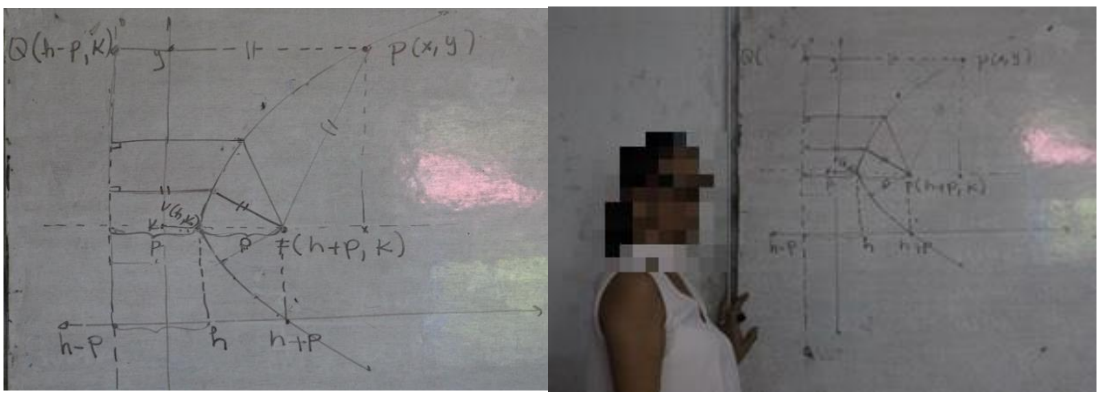



Figura 1: gráfica realizado por la profesora durante la explicación geométrica de los elementos de la parábola y su lugar geométrico en el plano

P: ok/ yo puedo decir entonces/ que esta distancia es igualita a esta distancia (Hace referencia a la distancia del foco a un punto de la parábola y de ese punto a la directriz) / (()) ¿Cómo hallamos nosotros esa distancia?/ distancia entre dos puntos / en general/ no/ vamos a hacerlo específicamente para este punto
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (()) (la profesora procede a realizar la explicación de la ecuación canónica de la parábola, utilizando la ecuación de distancia entre dos puntos $\overline{PF} = \overline{PQ}$ entonces, $\sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$; aplica procesos algebraicos y obtiene $(y-k)^2 = 4p(x-h)$)
P: esta parábola abre hacia la izquierda o hacia la derecha y esta ecuación canónica de la parábola representa a la parábola que tiene vértice en (h, k)/ para cualquiera // el foco es (h+p, k) / ¿Cuál es el eje de simetría o el eje de la parábola?/
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())
P: es la recta que pasa por el foco y es perpendicular al eje x/ en este caso si la parábola abre hacia acá o hacia acá/ esta es paralela al eje x/ eje de simetría es paralelo al eje x/ ¿Cómo me doy cuenta yo de eso?/ aquí es $(y-k)^2$ y aquí es x-h /// cuando el eje de la parábola es paralelo al eje x/ aquí va a ser x-h /// aquí / ¿Qué me hace falta?/ ok/ ¿Cuál será la ecuación de la directriz?/$x = h - p$ / porque $x = h - p$ / porque cuando una recta es paralela al eje de las y/ decimos que es una recta cuya pendiente es indefinida y que los valores de x siempre van a ser/ ósea/ siempre va a ser el mismo independientemente de cómo sea y/ es decir que la directriz siempre va a tener/ en este caso/ $x = h - p$ / qué

otra cosa hay que saber / que a pesar que P es una distancia/ ustedes me van a decir / es positiva/ de acuerdo a el signo que tenga P / si P es positiva/ la parábola abre a la derecha/ pero si me sale –P/ la parábola abre a la izquierda/ el caso en que estuviera ubicada hacia acá/ el vértice fuera este y el foco está de este lado/ entonces sería –p/ entonces diríamos/ P>0 la parábola abre a la derecha/ y si p es negativo / P<0/ la parábola abre hacia la izquierda/ esto refiriéndonos a esta ecuación canónica de la parábola / ¿Qué otra cosa me falta?/ el lado recto/ el lado recto es una cuerda/ es una cuerda que pasa por el foco y es perpendicular a el eje de simetría/ entonces tengo lo siguiente/ ¿Cómo hallo yo la longitud del lado recto?/ lado recto lo vamos a llamar/ sabemos que la distancia que hay del foco a la directriz es la misma distancia del foco a cualquier punto / la distancia que hay de aquí a aquí es 2p/ del vértice aquí hay p y del vértice a aquí hay p/ entonces la distancia que hay del foco a la directriz en este caso/ sería 2p/ ósea que / (())

§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())

P: por la definición de parábola, la distancia que hay del foco (()) de aquí a aquí habría 2p/ entonces la distancia de aquí a aquí sería de 4p/ y vamos a tomarla valor absoluto / recuerden que es un segmento y su longitud es positiva/ por eso colocamos valor absoluto/ preguntas hasta allí/ bueno yo les voy a dar una ecuación de una parábola

Eh: seño/ y ¿no hay una manera más fácil?

P: esto es fácil/ aquí lo que utilice fue la definición de parábola /yo les puedo dar las ecuaciones y decirles apréndanse esto/ apréndanse esto

Em: seño lo que pasa es que ahí hay muchas letras/

§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())

P: yo les puedo dar las fórmulas/ esto es para esto/ esto es para eso/ esto es para esto/ / pero el concepto no les está quedando porque no lo están aplicando/ el concepto de parábola/ pero/ que hicieron las personas/ que se dedicaron a encontrar estas ecuaciones/ a partir de una definición/ encontraron esto/ que nosotros estamos aprendiendo/ ellos no dijeron/ miren esto y lo colocaron en la mesa/ ajá y ustedes de dónde sacaron eso y por qué lo saco/ ¡no!/ entonces/ se han acostumbrado a que todo es/ apréndanse esto/ porque esto es lo pequeñito/ lo fácil/ ustedes vieron el libro/ hay no está todo este procesos/ pero ustedes tienen que ser capaz/ porque ustedes tienen unos fundamentos en matemáticas/ ahí gente que hizo esto hace muchos años/ y ustedes tienen que ser capaz de entender lo que ellos hicieron/ ahora/ ¿entendieron o no? //

§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())

P: buena esta si no la vamos a demostrar/ pero con lo que ya hicimos/ vamos a ((encontrar)) la ecuación de la parábola que abre hacia arriba o hacia abajo/ pero aquí tenemos que aprender algo/ ¿Por qué se llama eje de simetría?/ porque divide a la parábola en dos porciones igualitas/ (la profesora procede a realizar la construcción de una parábola que abre hacia arriba)

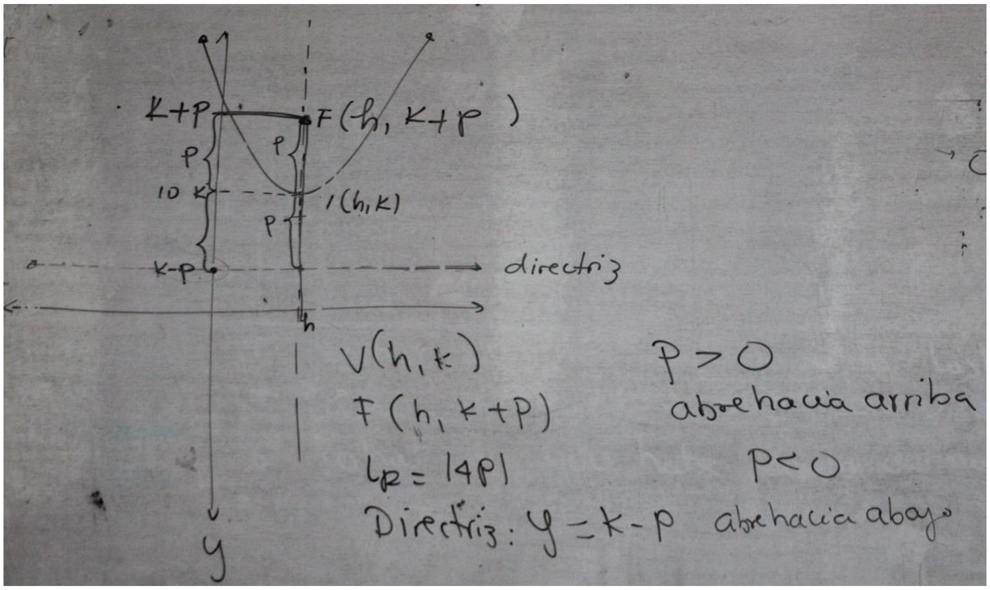


Figura 2: gráfica realizada por la profesora

P: tenemos que el vértice es (h, k) / que el foco es (h, k+p)/ y este que es el eje de simetría/ que es paralelo al eje de las y/ entonces/ el lado recto sería el valor absoluto de 4p/ y la directriz y=k-p/ si p es positivo la parábola abre hacia arriba y si p es negativo/ la parábola abre hacia abajo/ ahora sí vamos a hacer un ejercicio/ ahora sí vamos a la parte práctica/ bueno me falto decirles algo/ eje de simetría paralelo al eje de las $y$ / y vamos a tener que $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ /// ¿Qué cambio ahí?/ allá era $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ y acá que cambio/ el que está elevado al cuadrado es $(x-h)^2$ / y quedaría $(x-h)^2 = 4p(y-k)$/ y esto le está diciendo a ustedes que el eje de la parábola es el eje de las $y$ /// bien/ una pregunta/ ¿Qué pasa cuando el vértice de la parábola es (0,0)?/ queda $x^2 = 4py$ (La profesora toma el marcador y escribe en el tablero V(0,0) y Eh pasa a el tablero para hallar la ecuación de la parábola con dicho vértice)

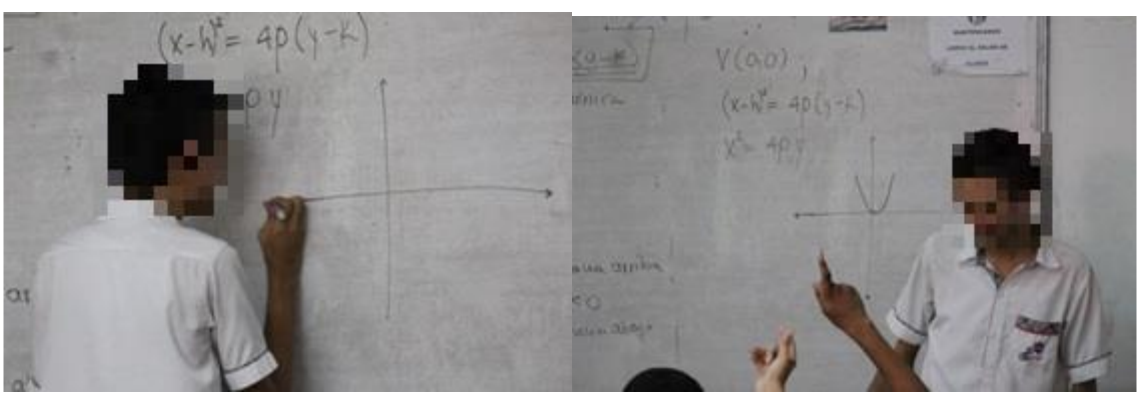


Figura 3: Eh realizando su representación de la parábola que abre hacia arriba y tiene como vértice el punto V (0,0) (Cuando Eh traza la parábola, uno de los alumnos realiza un chiflido que armoniosamente coincide con el trazo de Eh)

P: eso si P es positivo/ si P es negativo/
§: Abre hacia abajo oo
P: aquí quedaría algo así

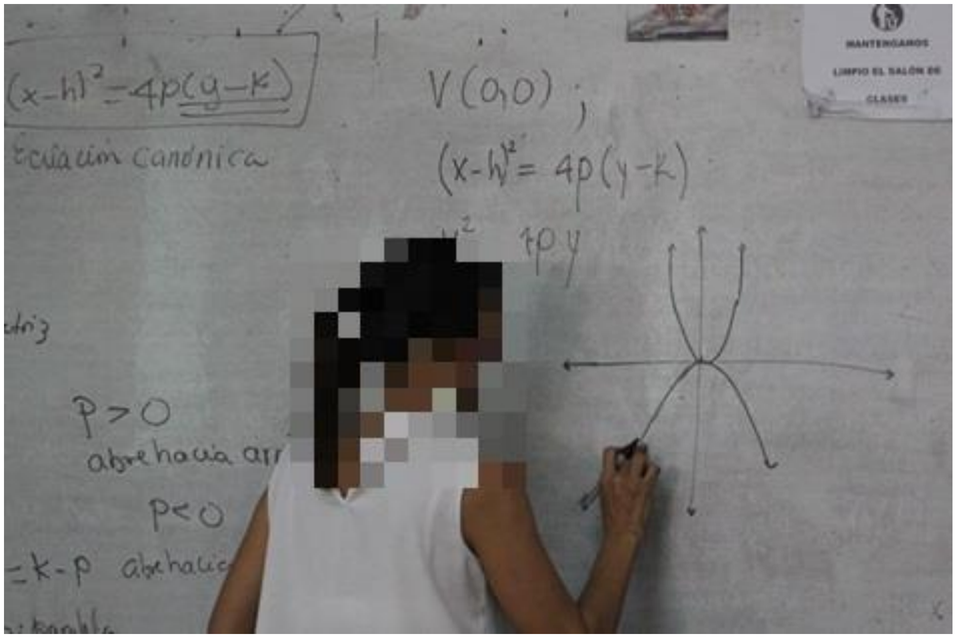



Figura 4: gráfica realizado por la profesora al referirse si P es negativo

P: (La profesora explica que en la ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, si el vértices es (0,0); entonces $(y)^2 = 4p(x)$) / si P es positivo abre hacia la derecha/ o si es negativo a la izquierda / algo así

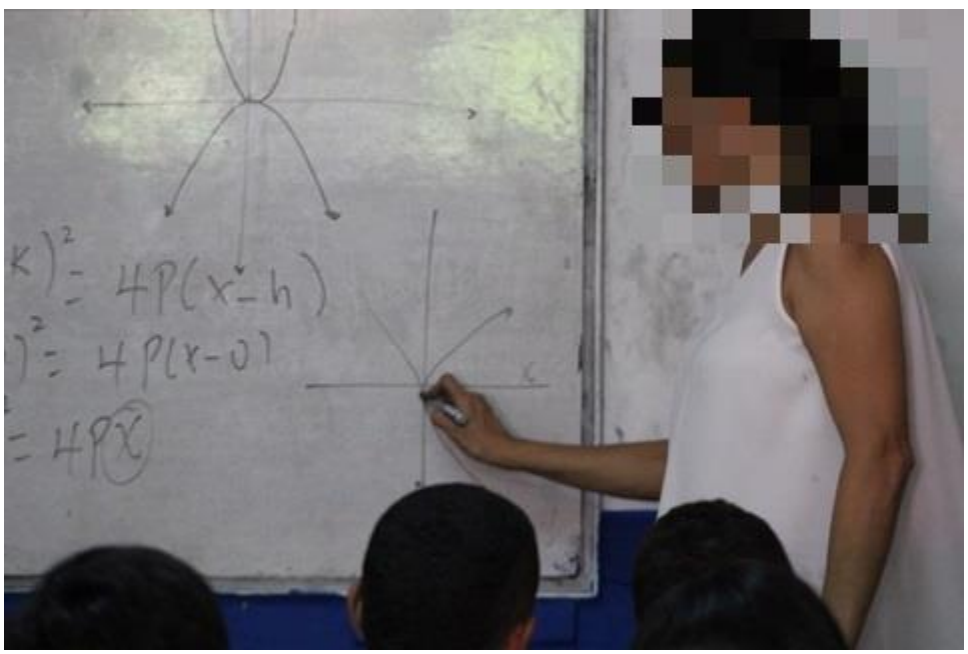



Figura 4: representación de la profesora de una parábola que abre hacia la derecha o izquierda (cuando la profesora traza la parábola uno de los alumnos realiza un chiflido que armoniosamente coincide con el trazo la profesora)

P: en la página 186/ Mari hazme el favor/ dicta cualquiera de los dos/

Em: ejercicio 2/ b// determine la ecuación canónica/ a partir de °()°/
P: determina la ecuación canónica/ me están dando el vértice (3,-2)/ y el foco (3,0)/ (La profesora procede a realizar la gráfica con los datos dados en el ejercicio)

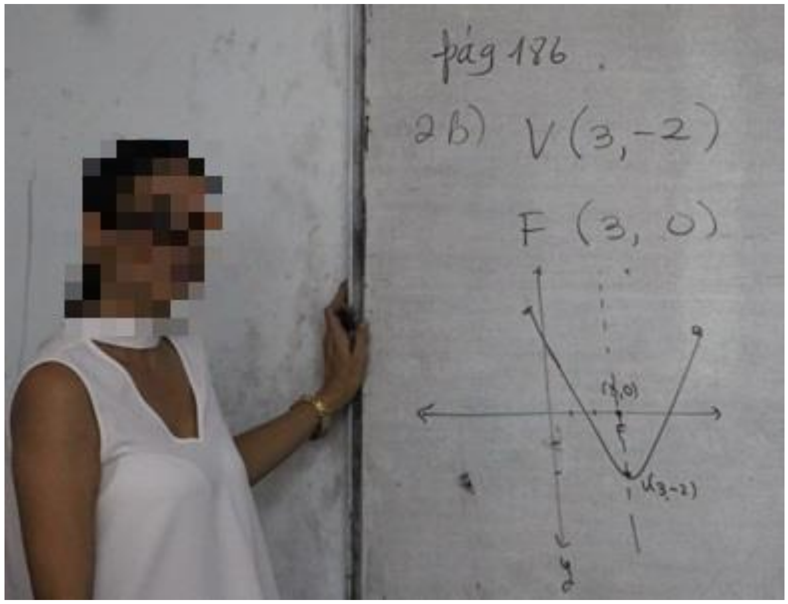



Figura 5: gráfica realizada por la profesora

P: ¿Cuál sería la ecuación? / la ecuación sería $(x-h)^2 = 4p(y-k)$/ ¿Cómo se yo / cual voy a usar?/ dependiendo de los datos/ dependiendo de la gráfica/ dependiendo como está ubicada/ cuando graficamos/ y además necesito h/k/ necesito P/ con el vértice ya sabemos que h vale 3 y k vale -2 // como la ecuación es así/ la forma que va a tener es/ si reemplazo el valor de k/ tenemos la distancia/ y ya tengo el foco y solamente reemplazo/ ósea que me queda/ $(x-3)^2 = 8(y+2)$/// bueno Em/ dame el otro ejercicio / el 2e/ vértice (2,3) y foco (5,3)/ (La profesora procede a realizar la gráfica del ejercicio )

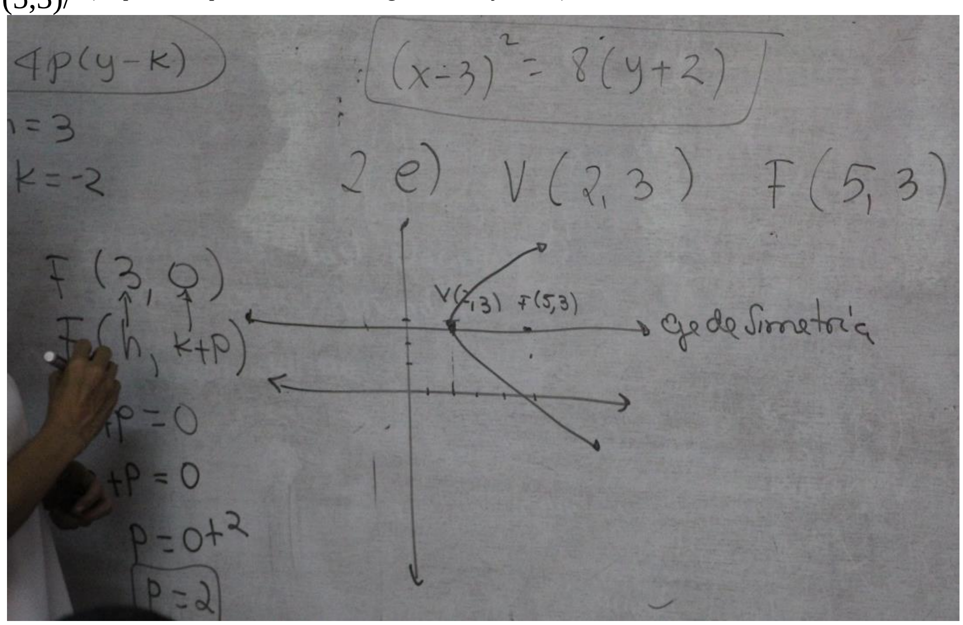


Figura 6: gráfica realizada por la profesora con los datos dados en el ejercicio 2e)

P: entonces es de la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ /// ya tengo h/ tengo k/ tengo p/ entonces/ ¿Cómo queda la ecuación?/ queda $(y-3)^2 = 12(x-3)$/// bueno/ con esto terminamos/ por fa/
§: (La mayoría de los alumnos hablan) (())
Em : seño / ¿la parabola puede quedar diagonal?
P: sí / si se puedes/ pero eso no lo vamos a ver/ puede quedar algo así

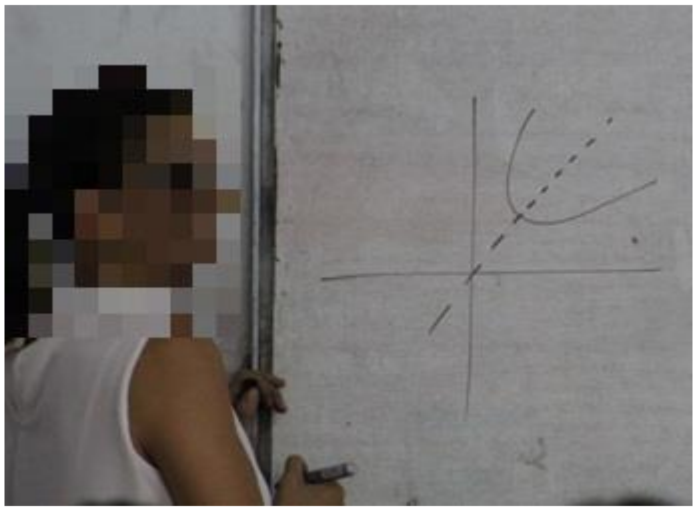


Figura 7: gráfica realizada por la profesora en respuesta de Em

P: ahora si Em, $(y-4)^2 = 42(x-3)$ me están dando esa ecuación y me están pidiendo que saque los elementos/ es decir/ el vertice/ el foco/ la directriz/ el lado recto/ (La profesora a través de procesos algebraicos halla los elementos de la parábola; h=3, k=4, P= -21/2, LP=42 y relaizá su respectivo gráfico)

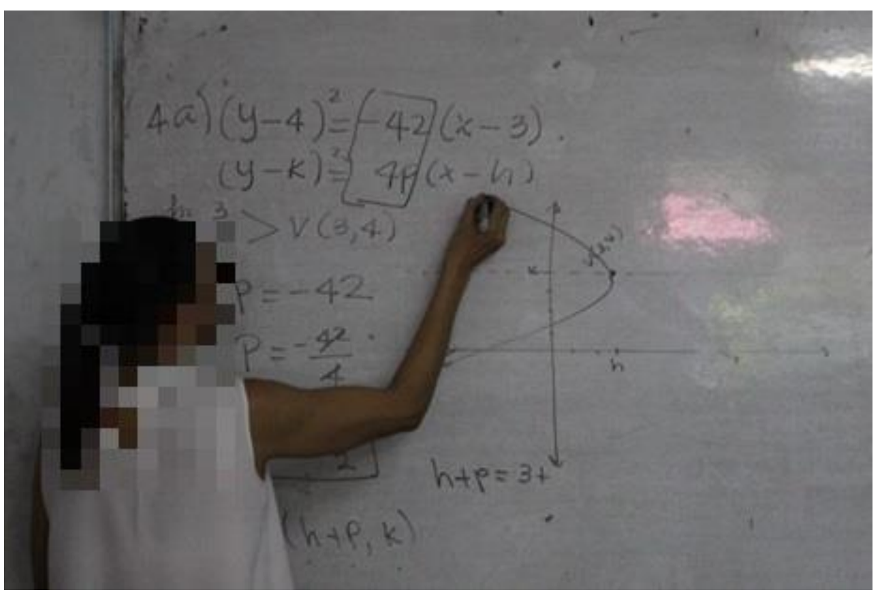
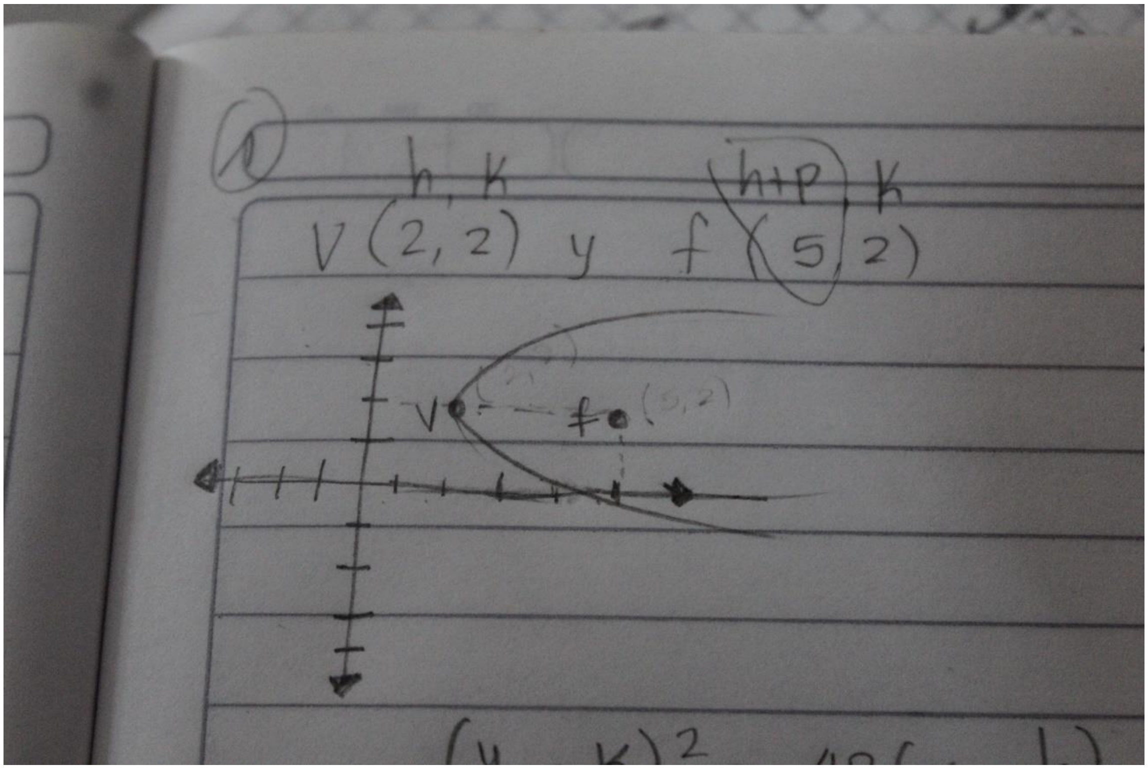



Figura 8: grafica del ejercicio anterior realizada por la profesora

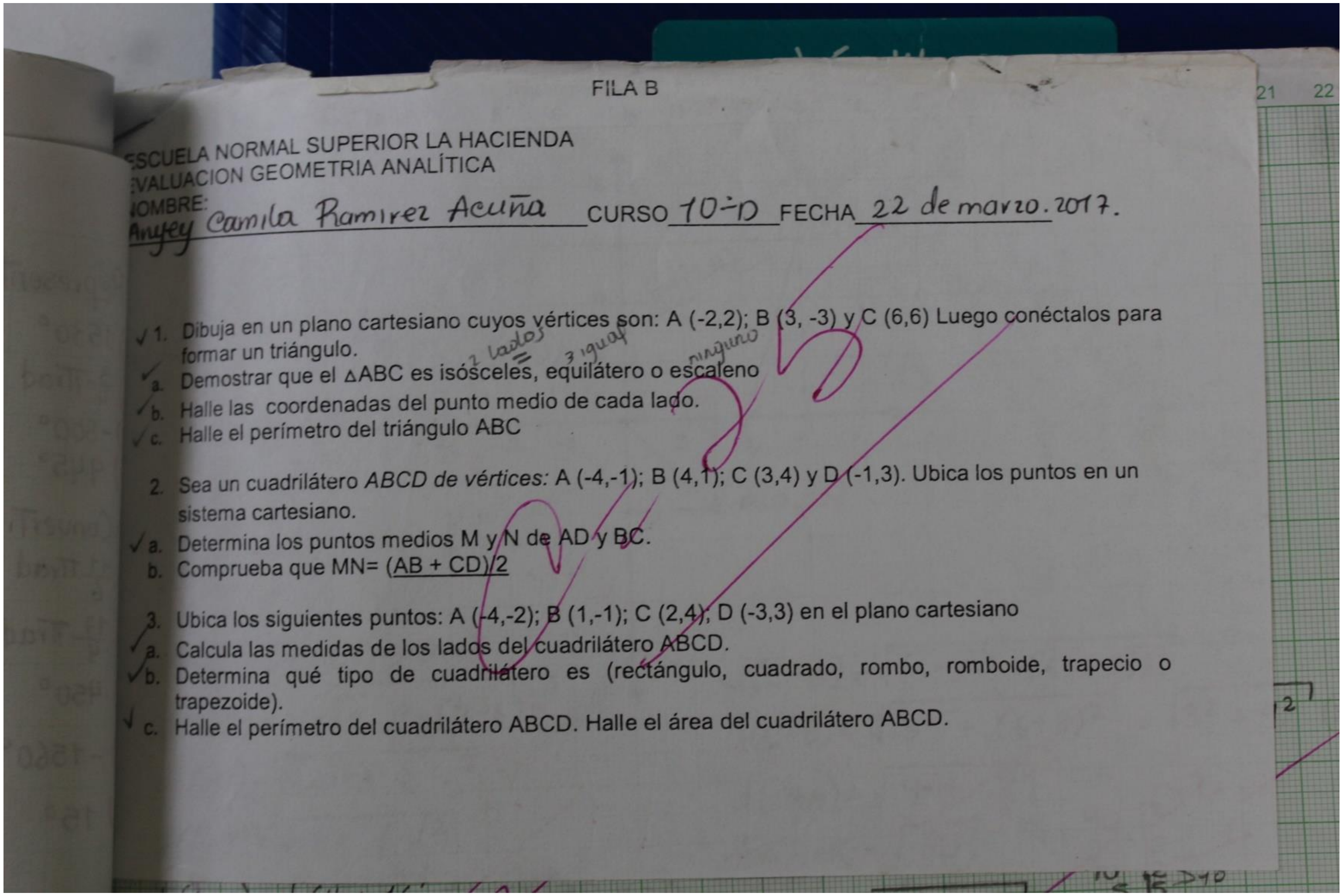
P: ahora van a hacer, el 2c / y el 4b/// las carpetas me hacen el favor y la van a colocar en aquella mesa (Los alumnos se levantan, colocan las carpetas en la mesa y proceden a resolver los ejercicios asignados por la profesora mientras la profesora llama a lista. Las carpetas fueron solicitadas a la profesora por el profesor Armando en la clase anterior sin que los alumnos lo supieran. El profesor Armando les tomó foto a todas las actividades que habían hecho los alumnos sobre Geometría Analítica)

P: van a hacer lo ejercicios 2) b, d, f; el 3) a, b, c; 4) f, g / solamente van a hacer esos ejercicios

Anexo 10. Un ejemplo de página de cuadernos revisados.



Anexo 11. Un ejemplo de un taller revisado.



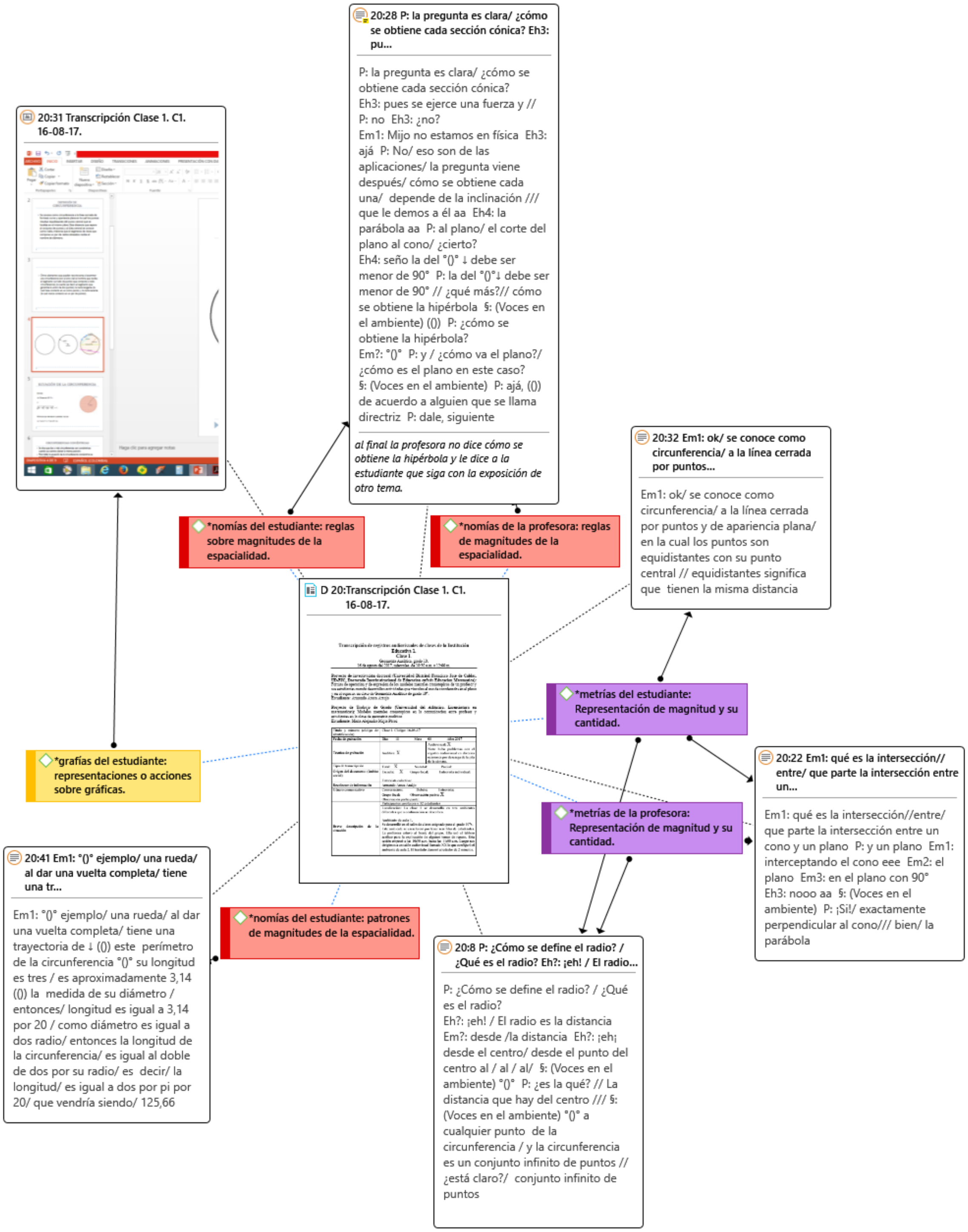
FILA B

ESCUELA NORMAL SUPERIOR LA HACIENDA
EVALUACION GEOMETRIA ANALÍTICA
NOMBRE: Anyey Camila Ramirez Acuña CURSO 10-D FECHA 22 de marzo. 2017.

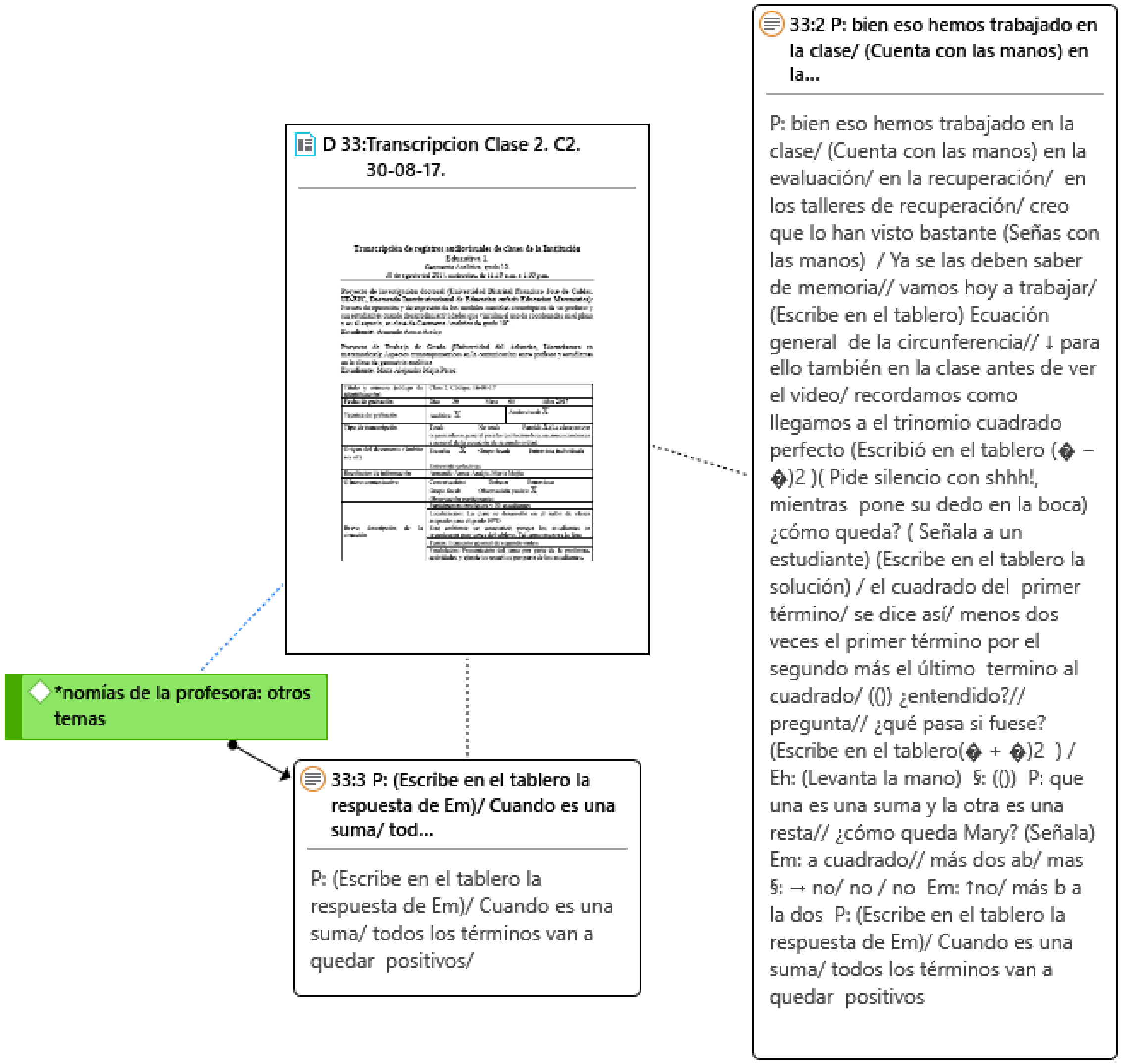
2,5

1. Dibuja en un plano cartesiano cuyos vértices son: A (-2,2); B (3, -3) y C (6,6) Luego conéctalos para formar un triángulo.
   a. Demostrar que el ΔABC es isósceles, equilátero o escaleno (2 lados =) (3 igual) (ninguno)
   b. Halle las coordenadas del punto medio de cada lado.
   c. Halle el perímetro del triángulo ABC
2. Sea un cuadrilátero *ABCD de vértices:* A (-4,-1); B (4,1); C (3,4) y D (-1,3). Ubica los puntos en un sistema cartesiano.
   a. Determina los puntos medios M y N de AD y BC.
   b. Comprueba que MN= (AB + CD)/2
3. Ubica los siguientes puntos: A (-4,-2); B (1,-1); C (2,4); D (-3,3) en el plano cartesiano
   a. Calcula las medidas de los lados del cuadrilátero ABCD.
   b. Determina qué tipo de cuadrilátero es (rectángulo, cuadrado, rombo, romboide, trapecio o trapezoide).
   c. Halle el perímetro del cuadrilátero ABCD. Halle el área del cuadrilátero ABCD.

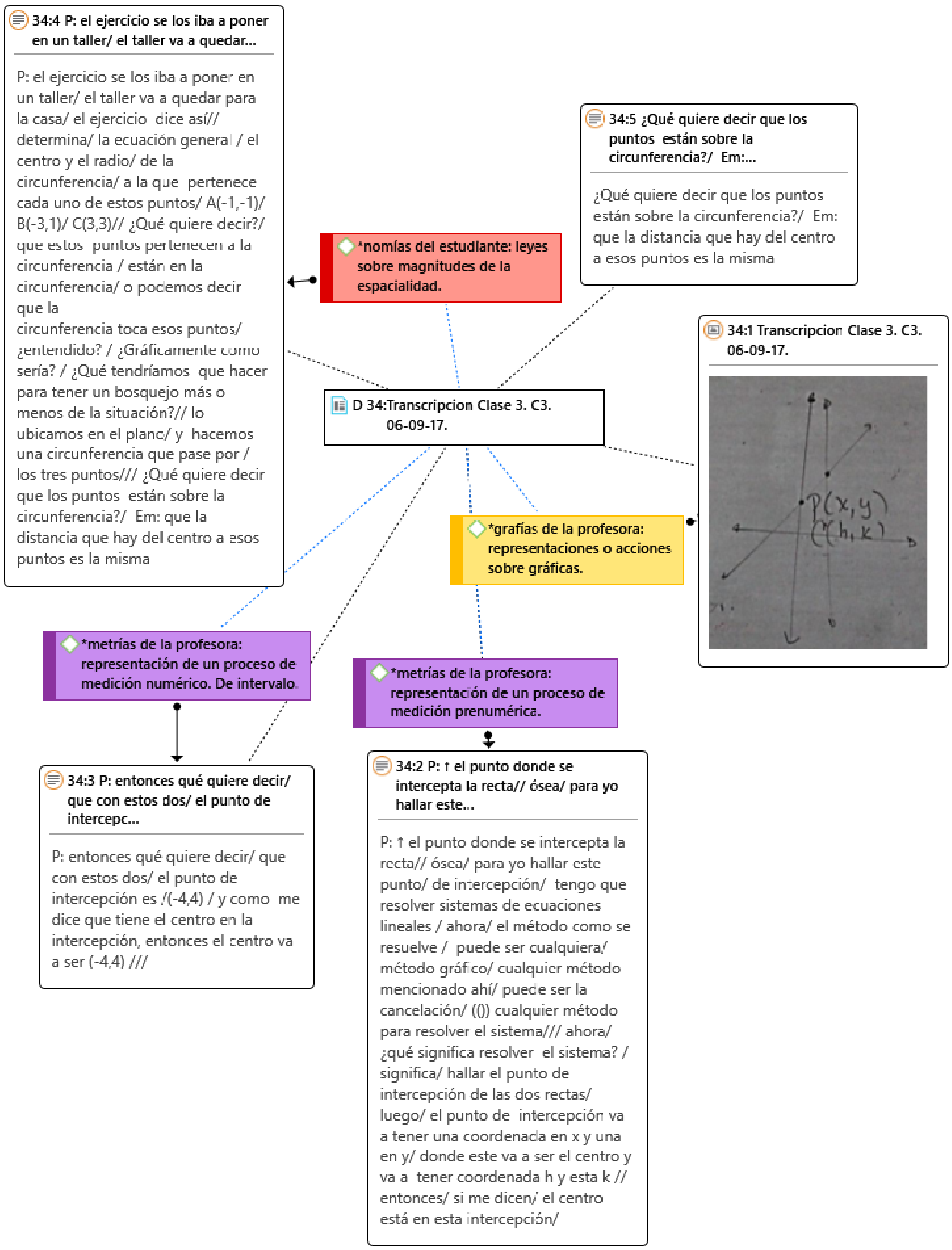
Anexo 12. Red de códigos de Transcripción Clase 1. C1. 16-08-17.



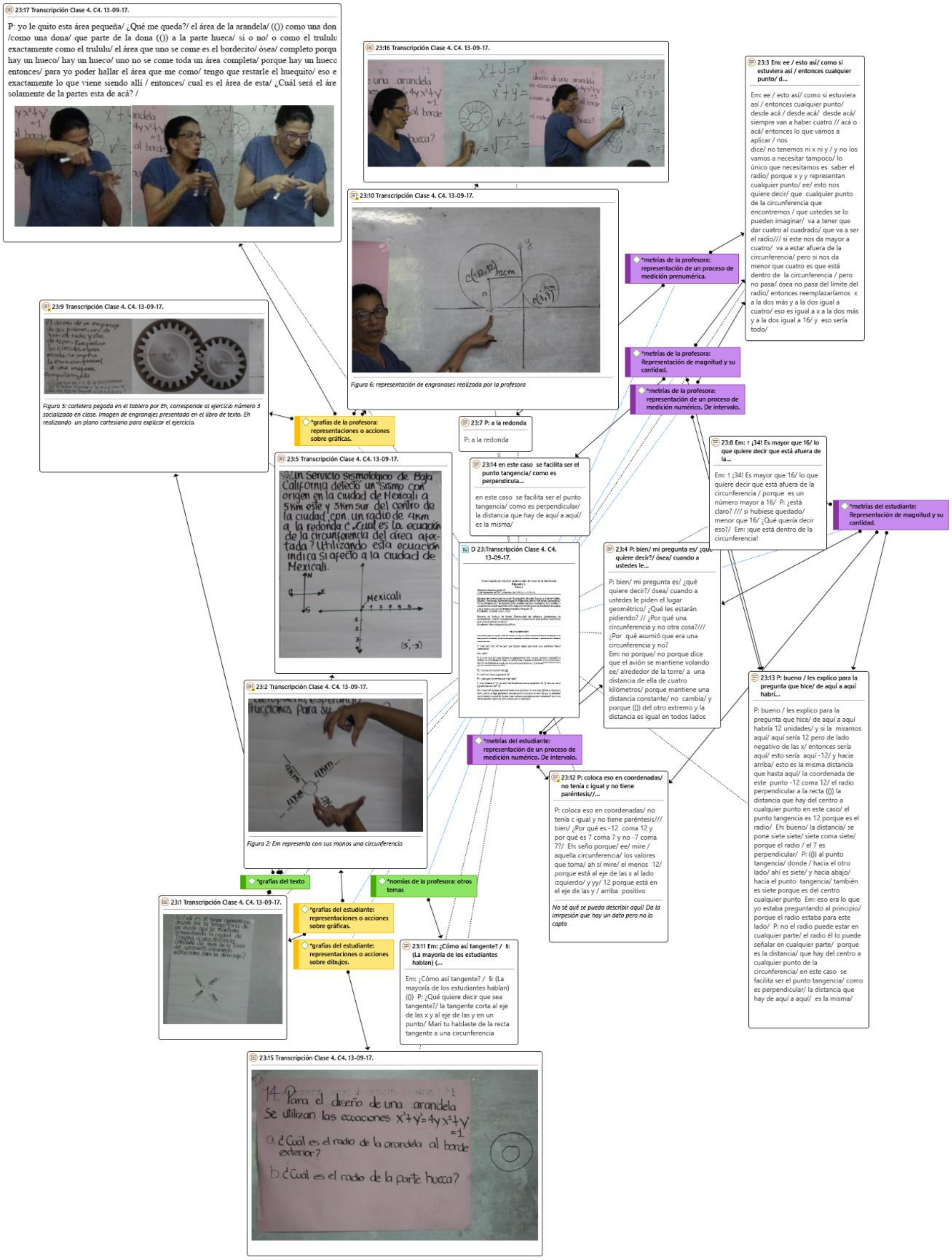
Anexo 13. Red de códigos de Transcripción Clase 2. C2. 30-08-17.



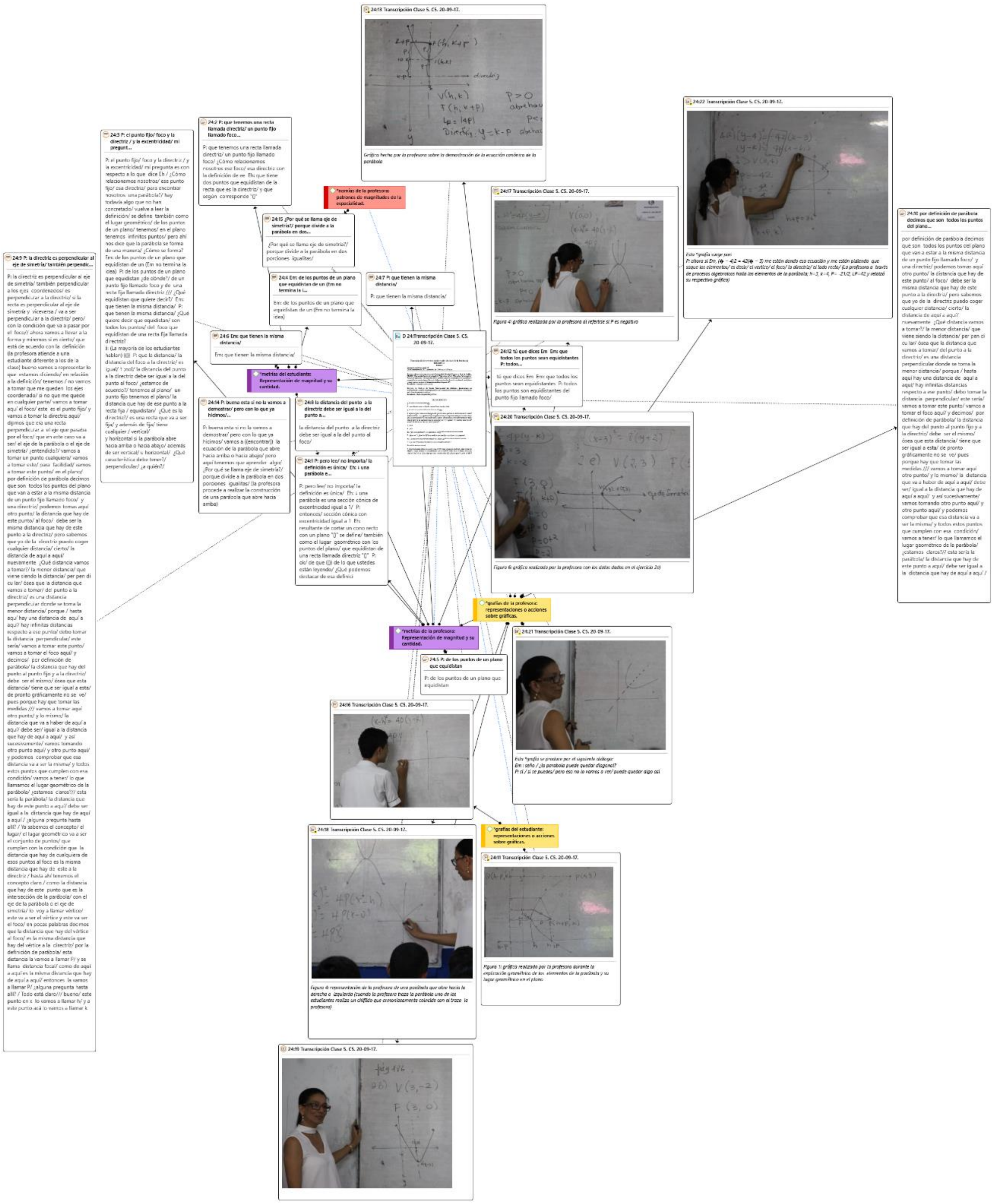
Anexo 14. Red de códigos de Transcripción Clase 3. C3. 06-09-17.



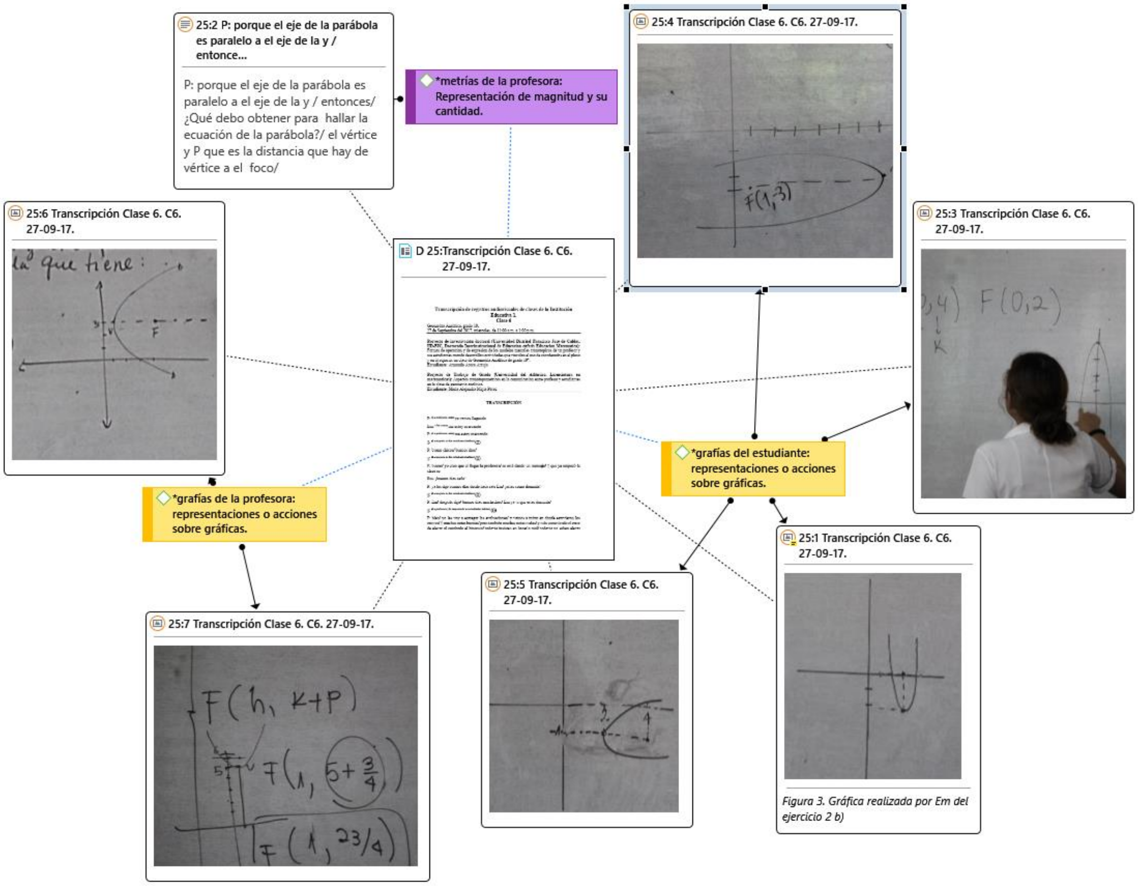
Anexo 15. Red de códigos de Transcripción Clase 4. C4. 13-09-17.



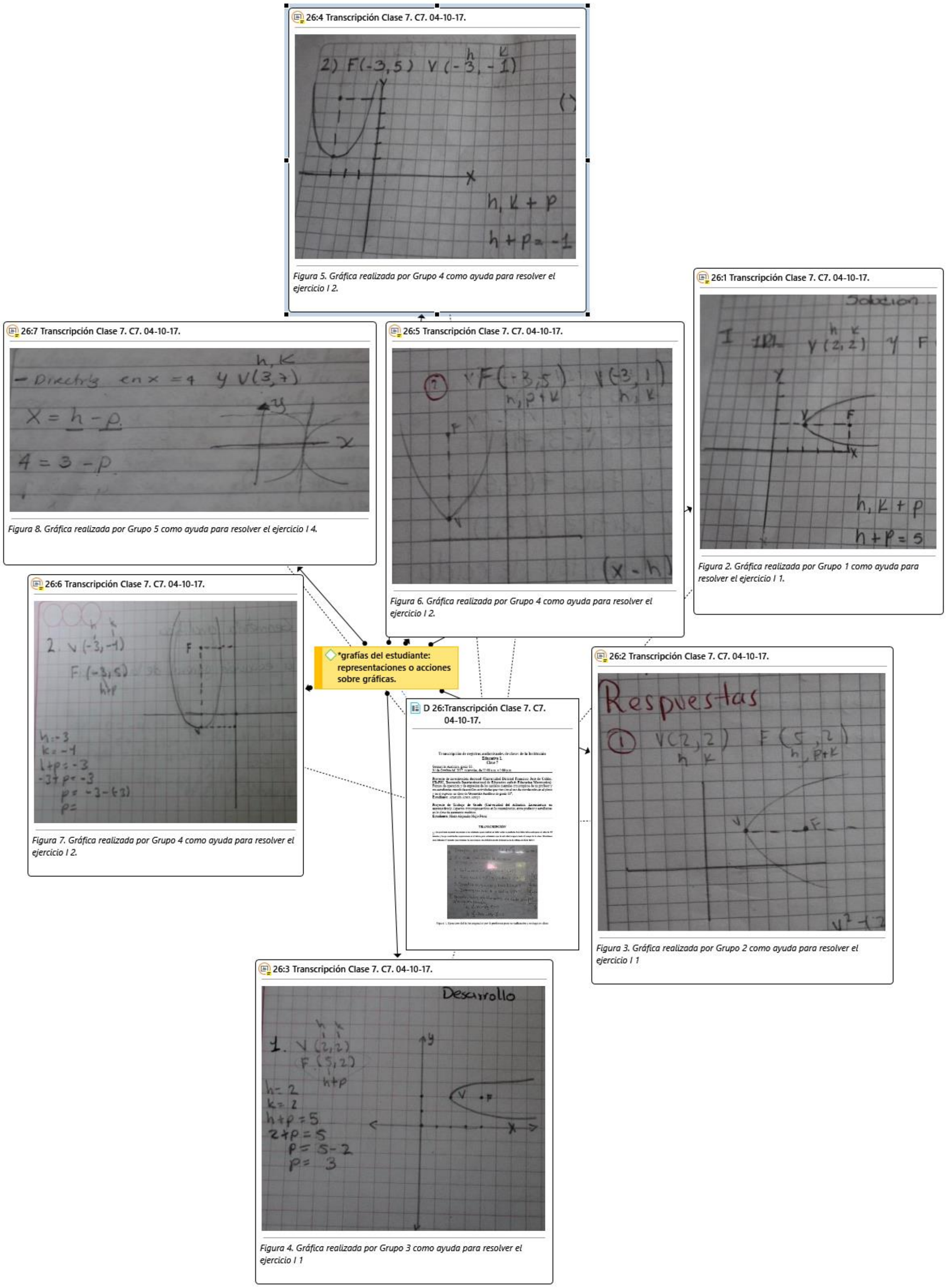
Anexo 16. Red de códigos de Transcripción Clase 5. C5. 20-09-17.



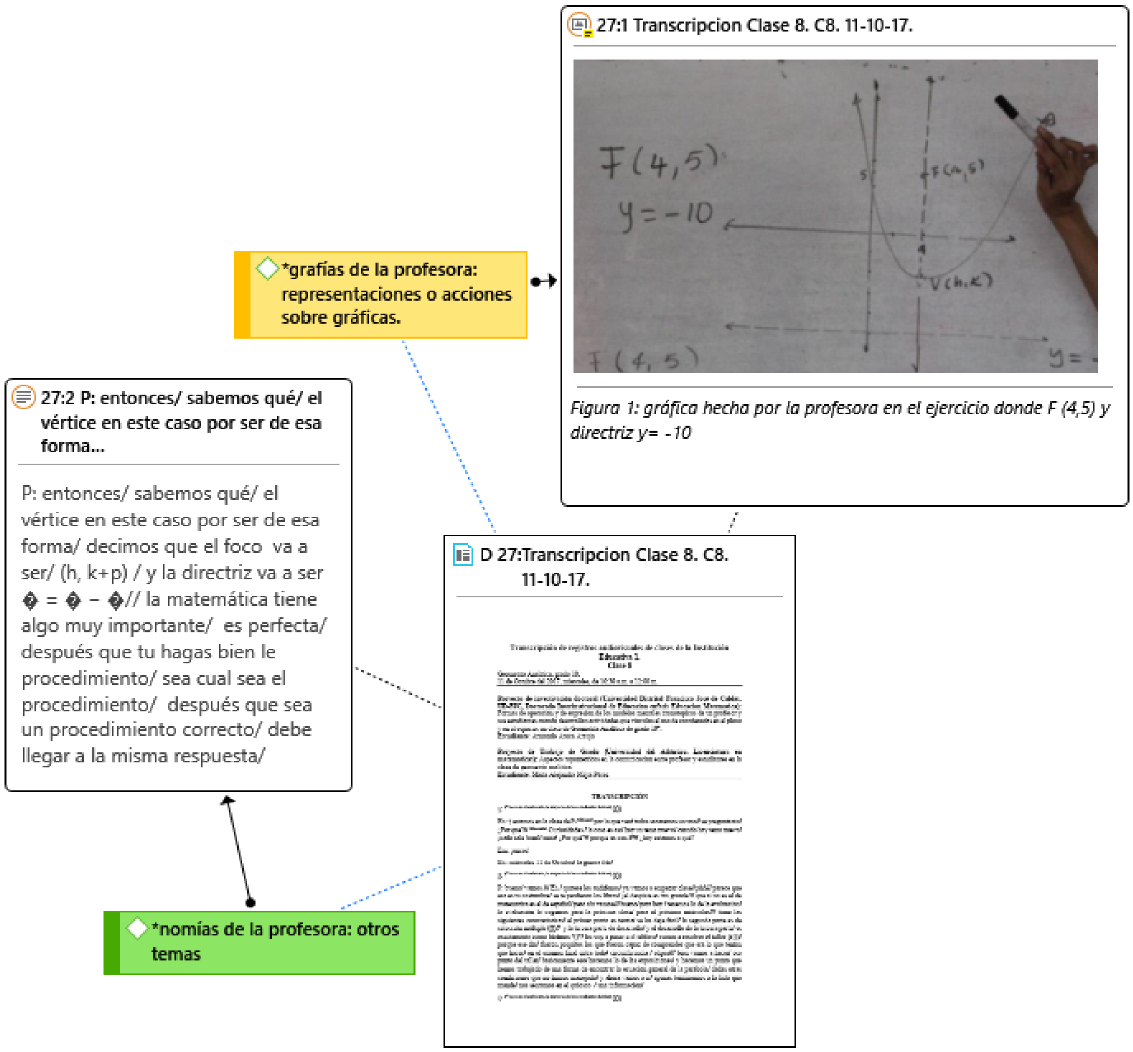
Anexo 17. Red de códigos de Transcripción Clase 6. C6. 27-09-17.



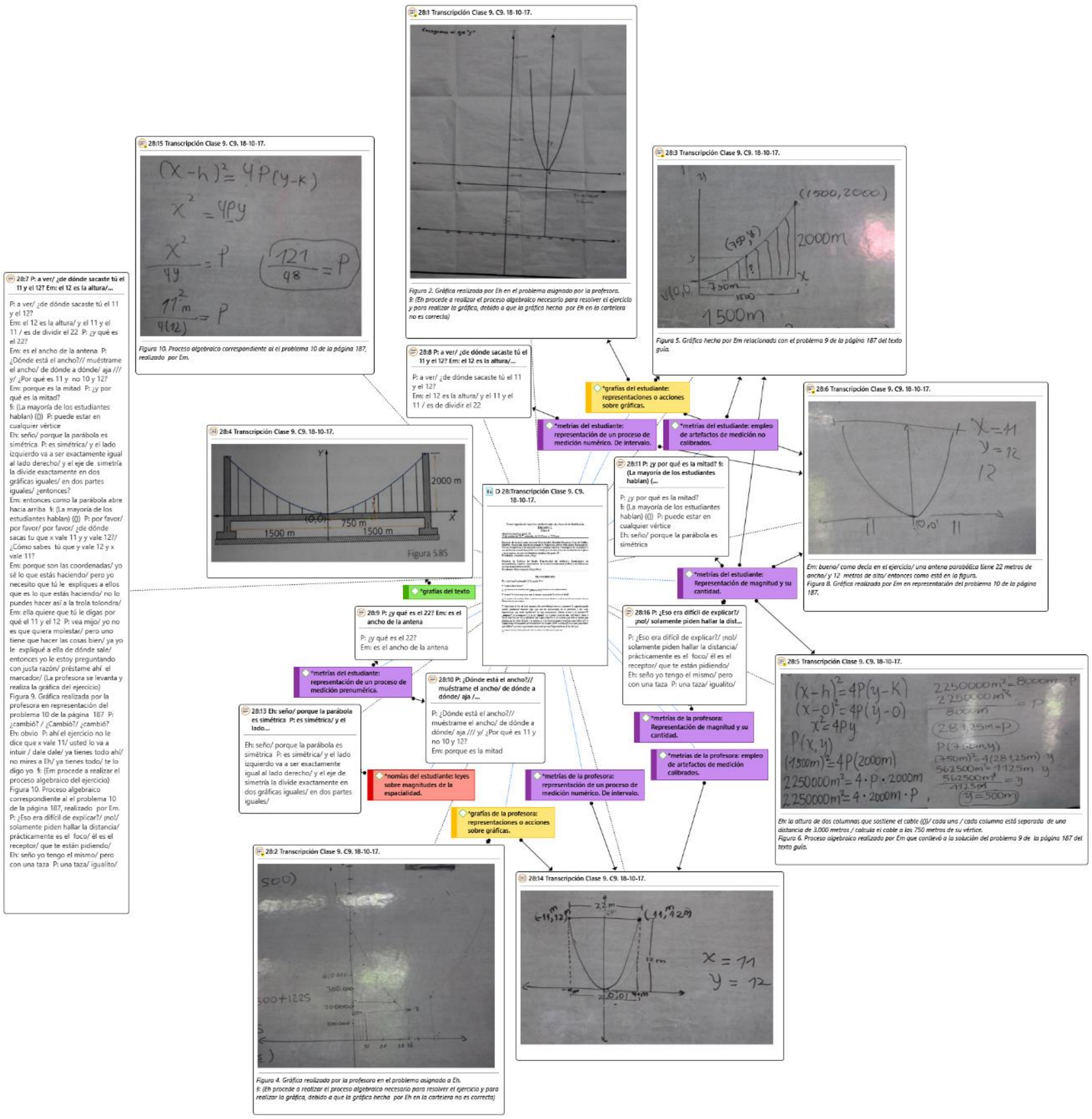
Anexo 18. Red de códigos de Transcripción Clase 7. C7. 04-10-17.



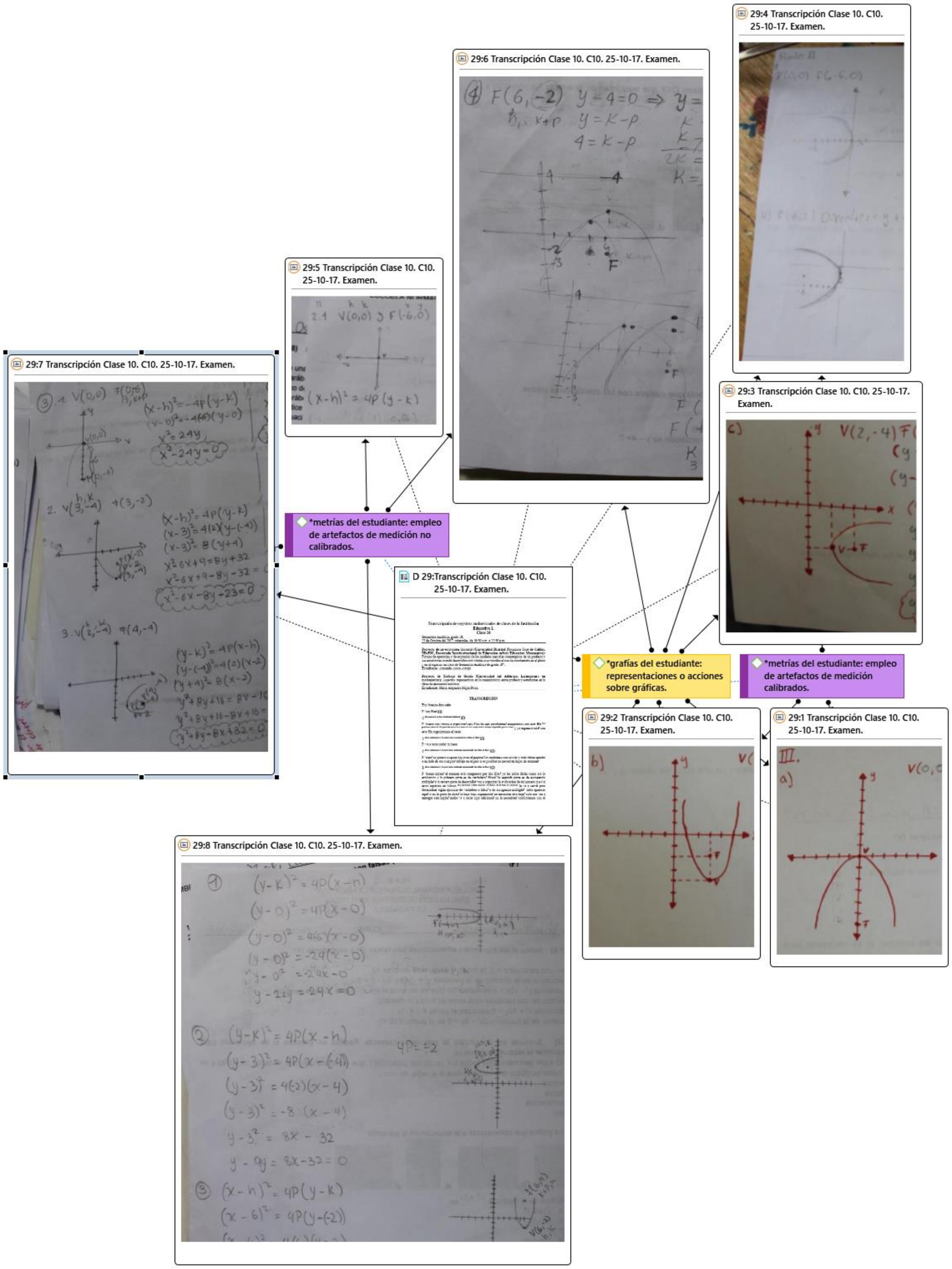
Anexo 19. Red de códigos de Transcripción Clase 8. C8. 11-10-17.



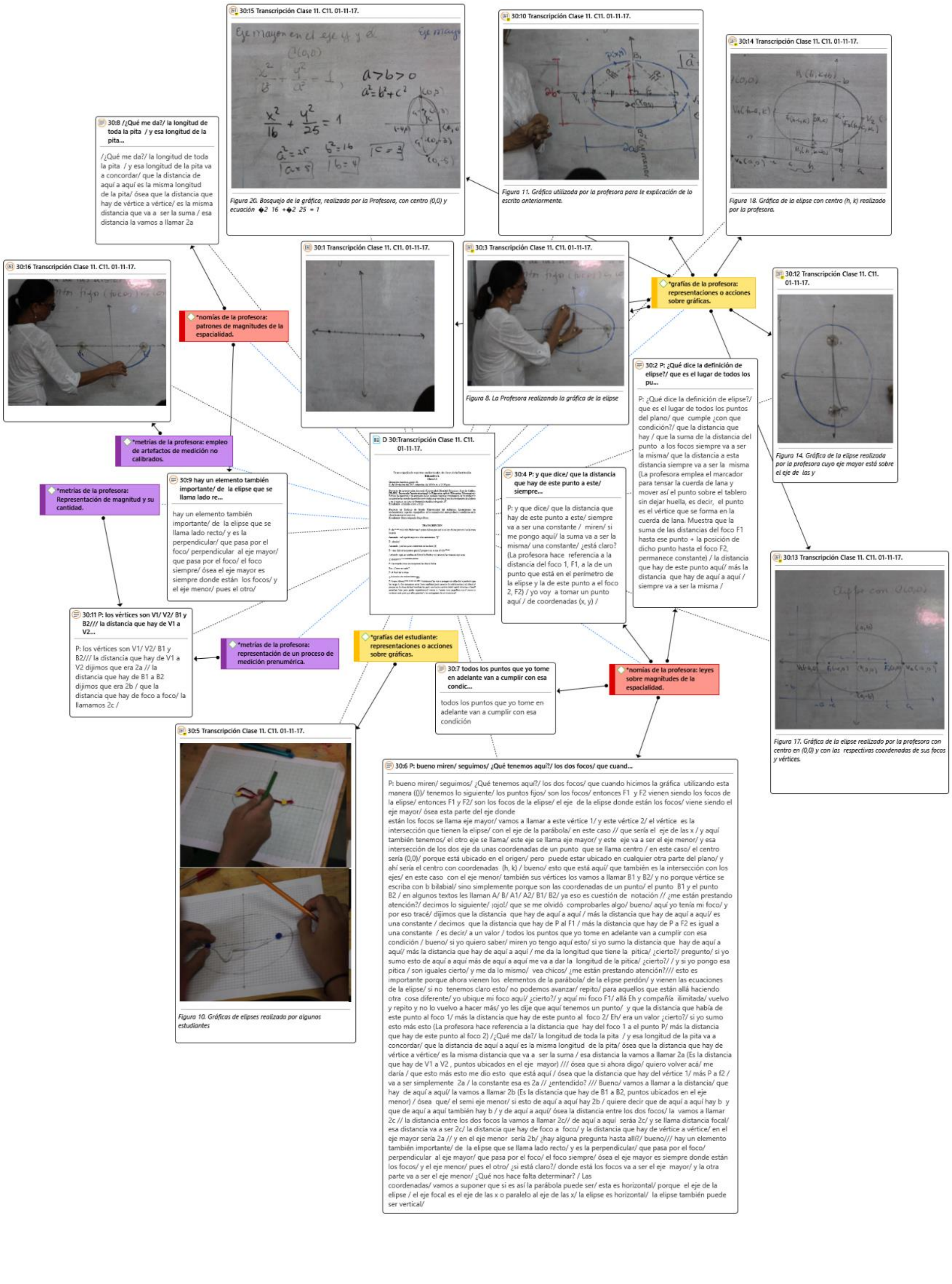
Anexo 20. Red de códigos de Transcripción Clase 9. C9. 18-10-17.



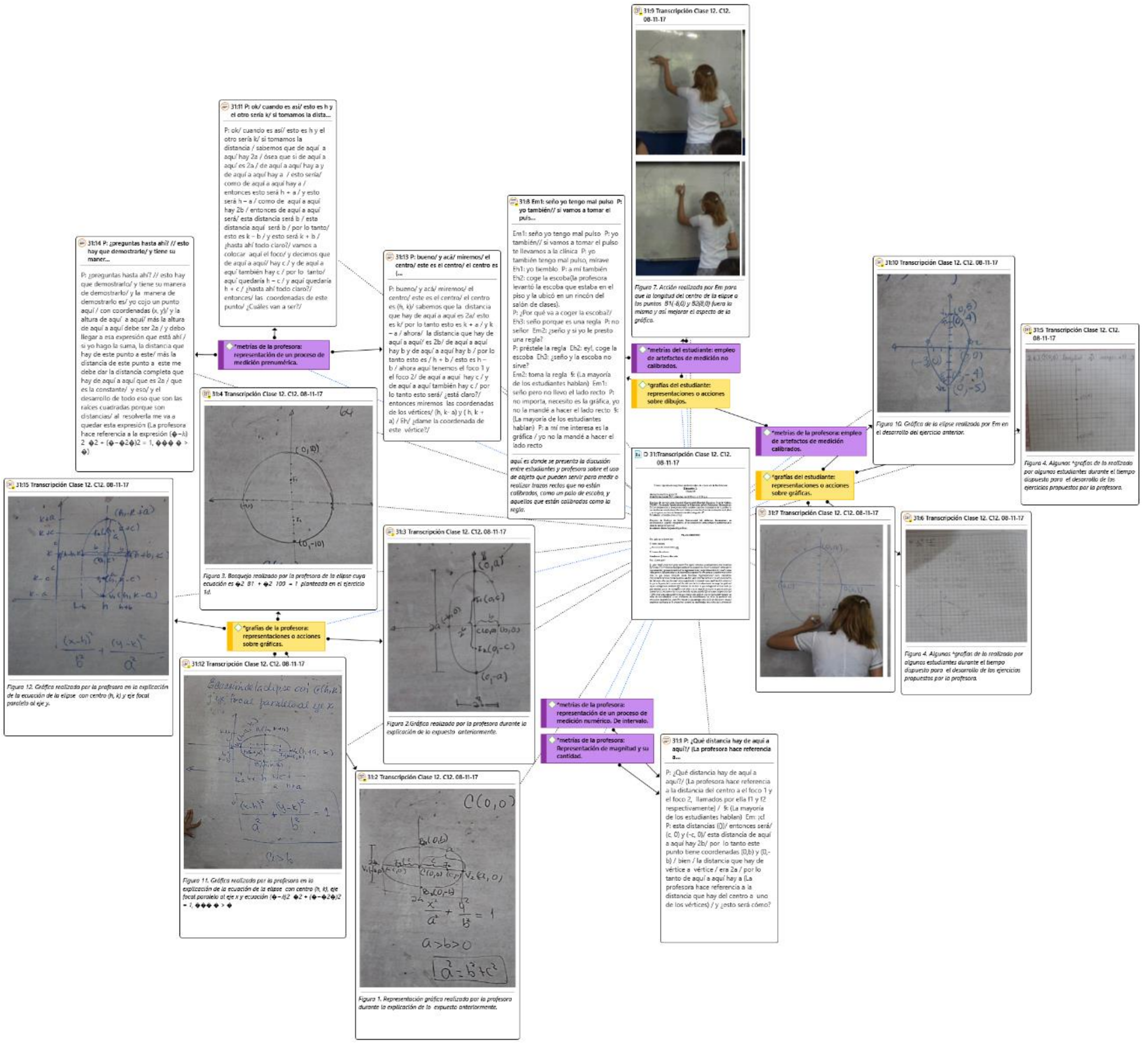
Anexo 21. Red de códigos de Transcripción Clase 10. C10. 25-10-17.



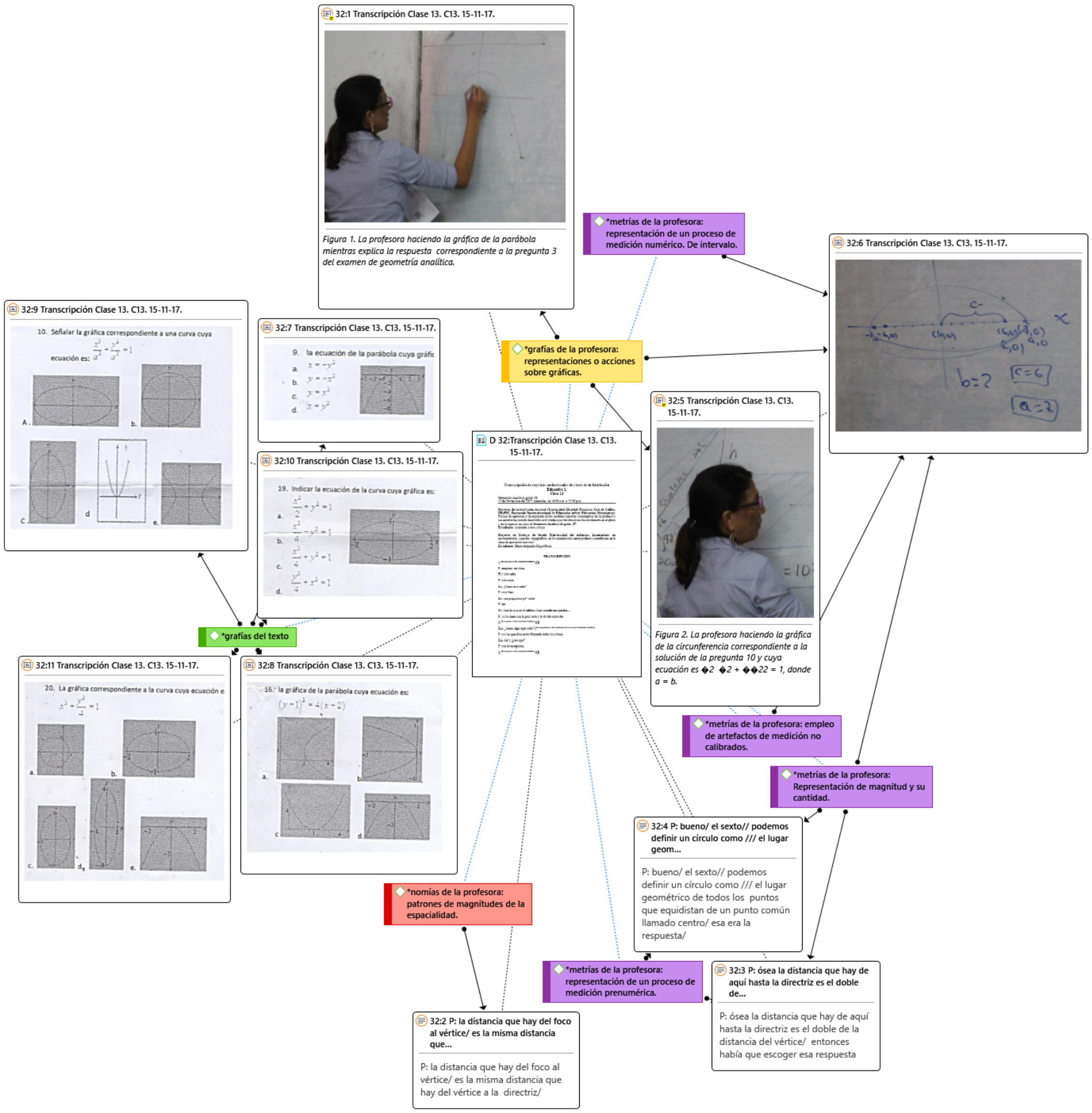
Anexo 22. Red de códigos de Transcripción Clase 11. C11. 01-11-17.



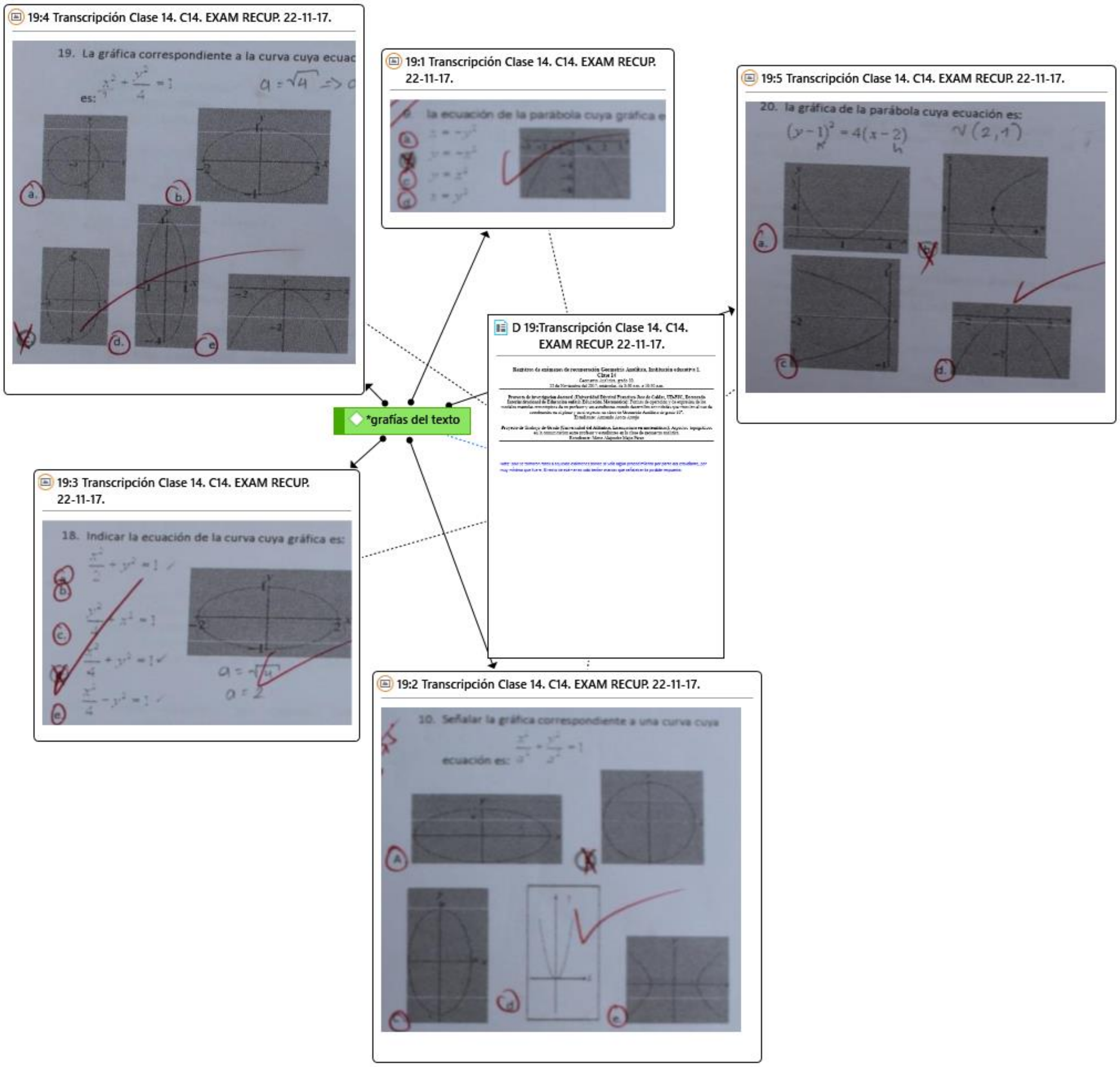
Anexo 23. Red de códigos de Transcripción Clase 12. C12. 08-11-17.



Anexo 24. Red de códigos de Transcripción Clase 13. C13. 15-11-17.

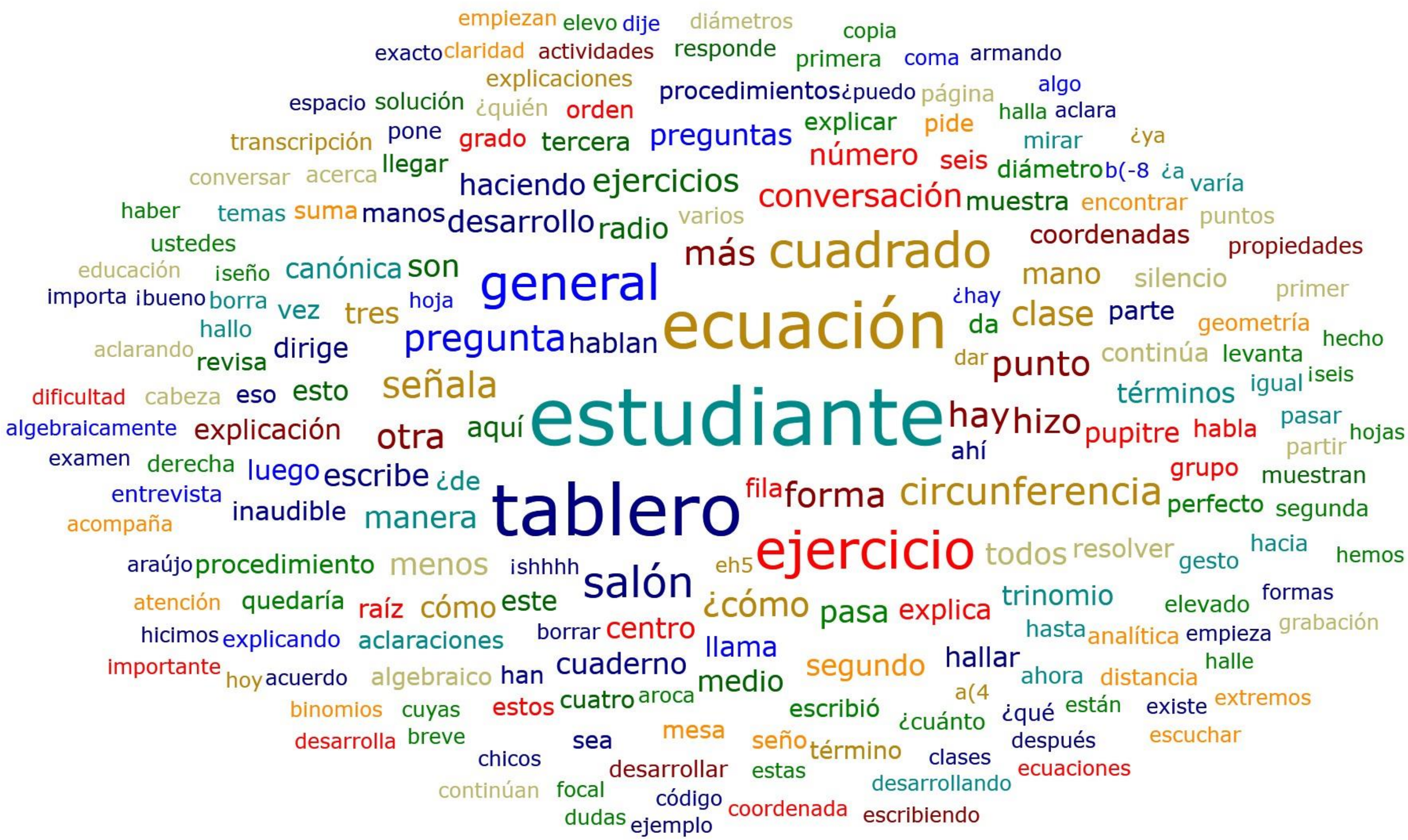


Anexo 25. Red de códigos de Transcripción Clase 14. C14. 22-11-17.



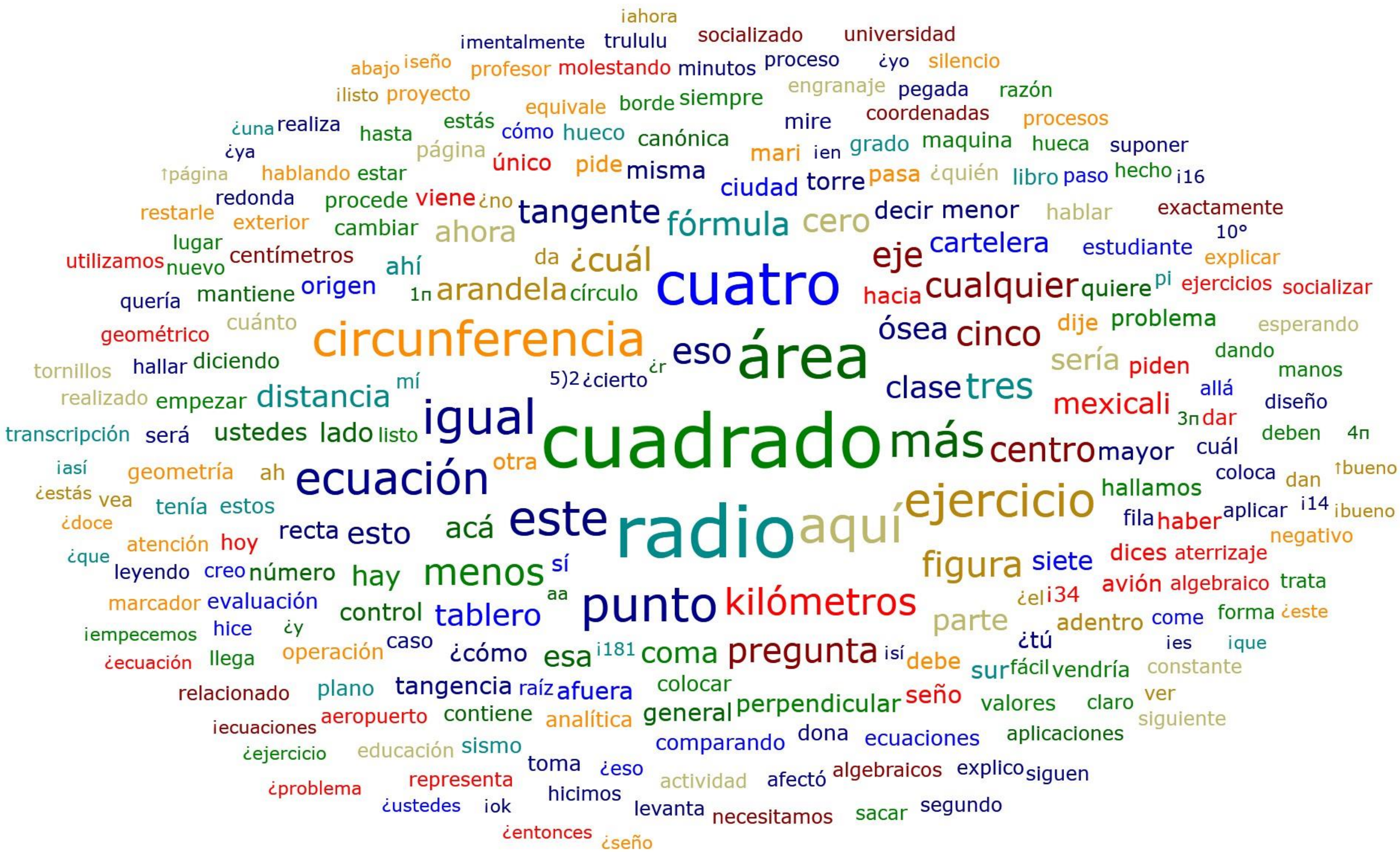
Anexo 26. Nube de palabras de la Transcripción Clase 1. C1.

Anexo 27. Nube de palabras de la Transcripción Clase 2. C2.



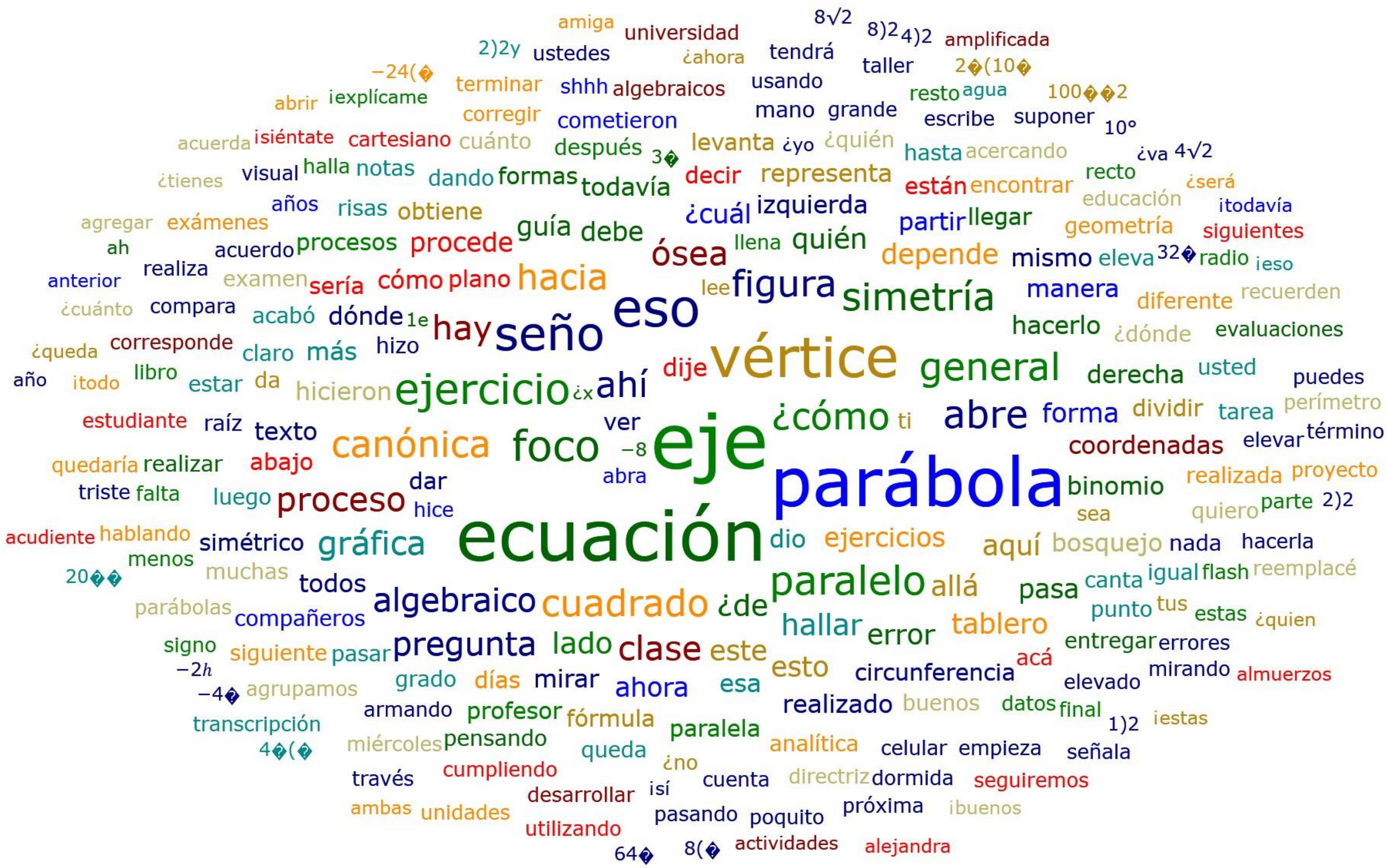
Anexo 28. Nube de palabras de la Transcripción Clase 3. C3.

Anexo 29. Nube de palabras de la Transcripción Clase 4. C4

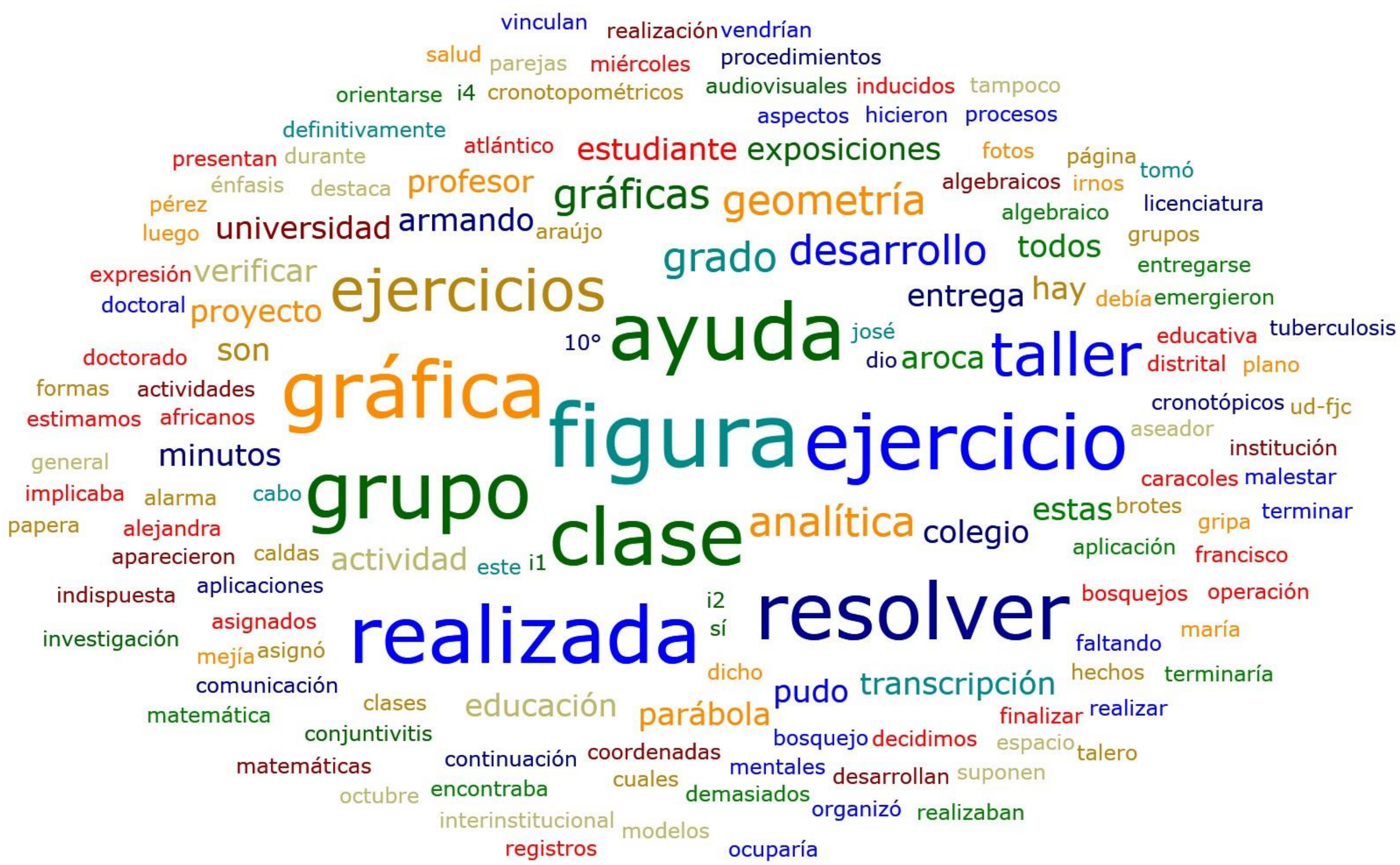


Anexo 30. Nube de palabras de la Transcripción Clase 5. C5.

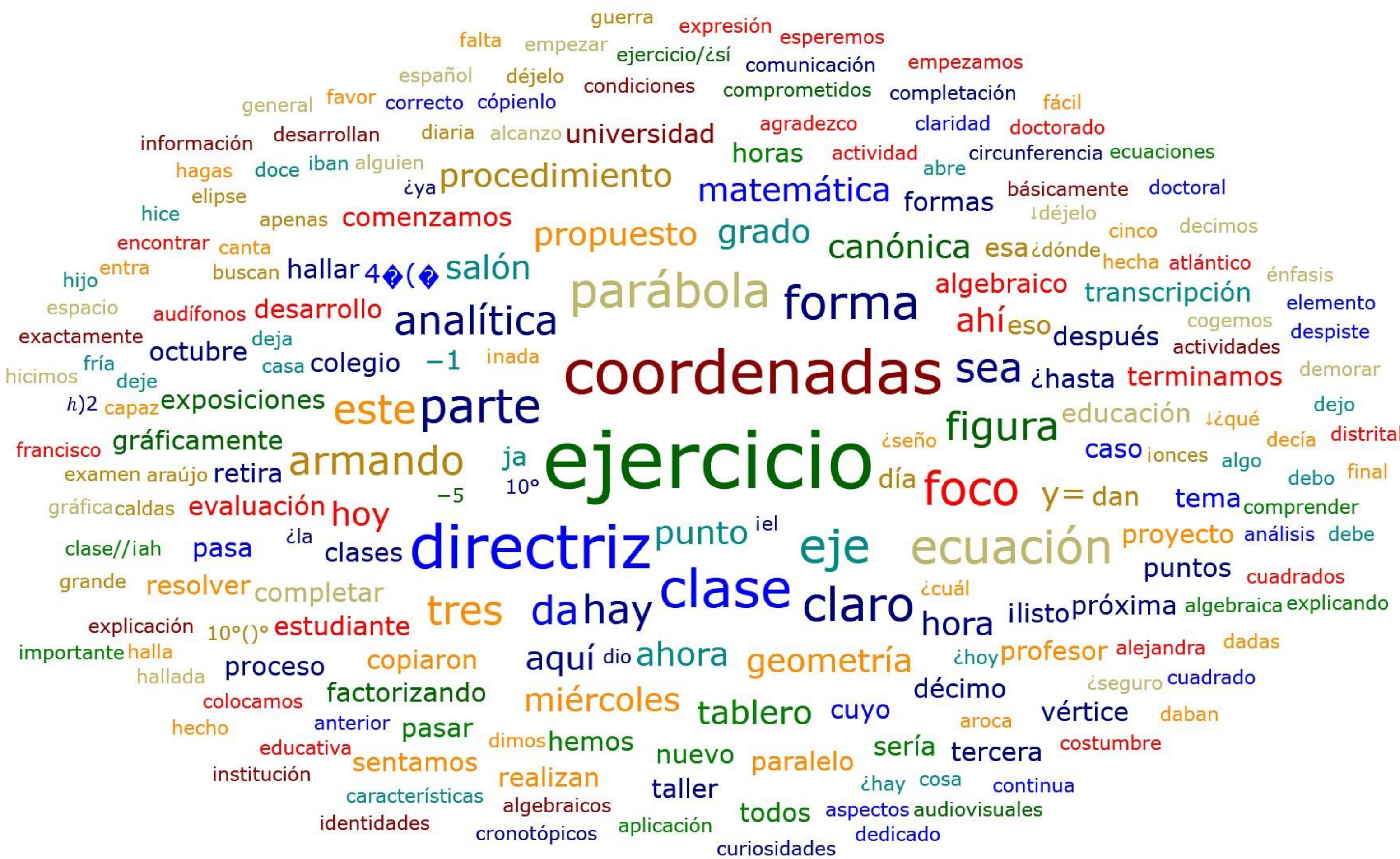
Anexo 31. Nube de palabras de la Transcripción Clase 6. C6.



Anexo 32. Nube de palabras de la Transcripción Clase 7. C7.



Anexo 33. Nube de palabras de la Transcripción Clase 8. C8.

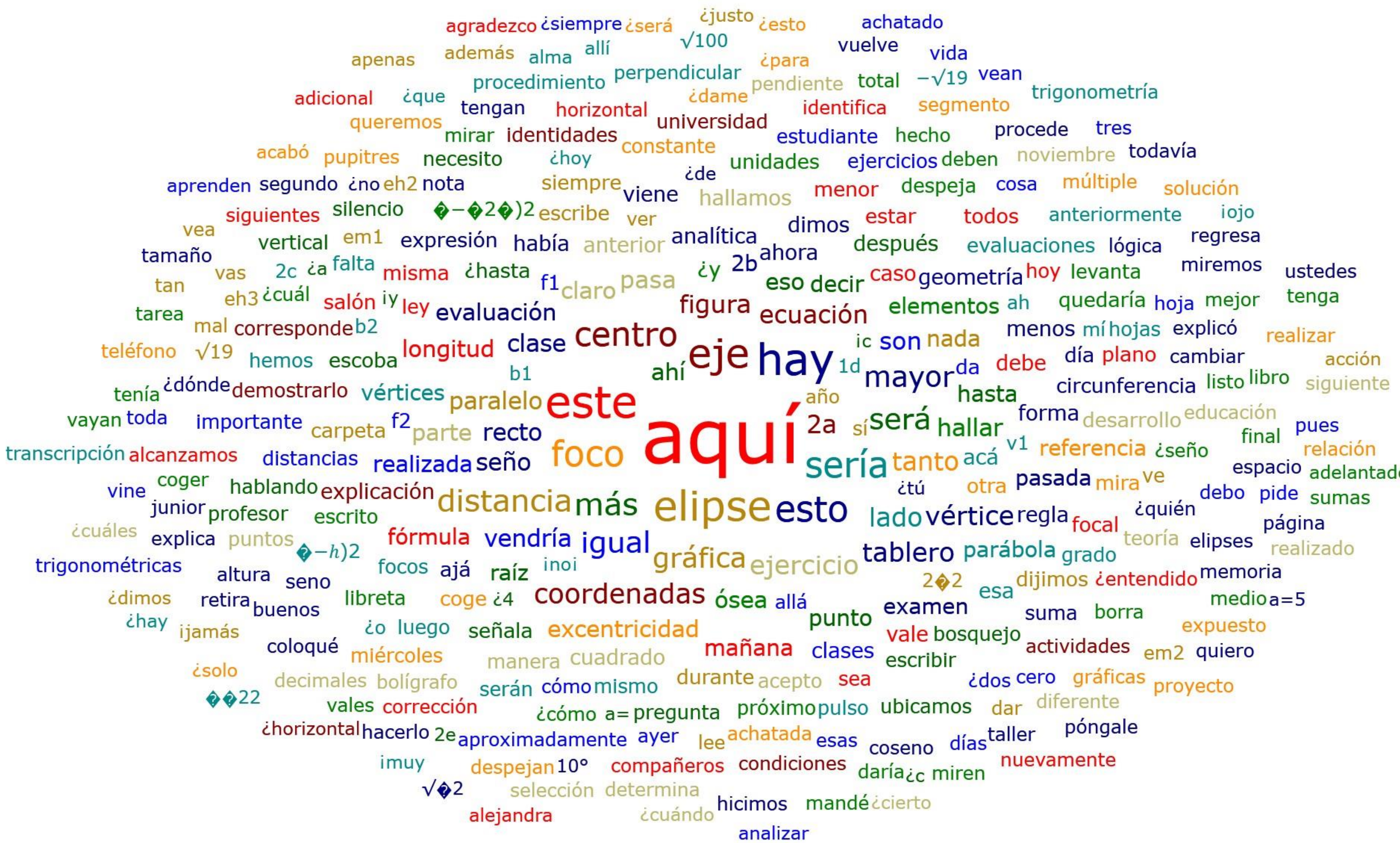


Anexo 34. Nube de palabras de la Transcripción Clase 9. C9.

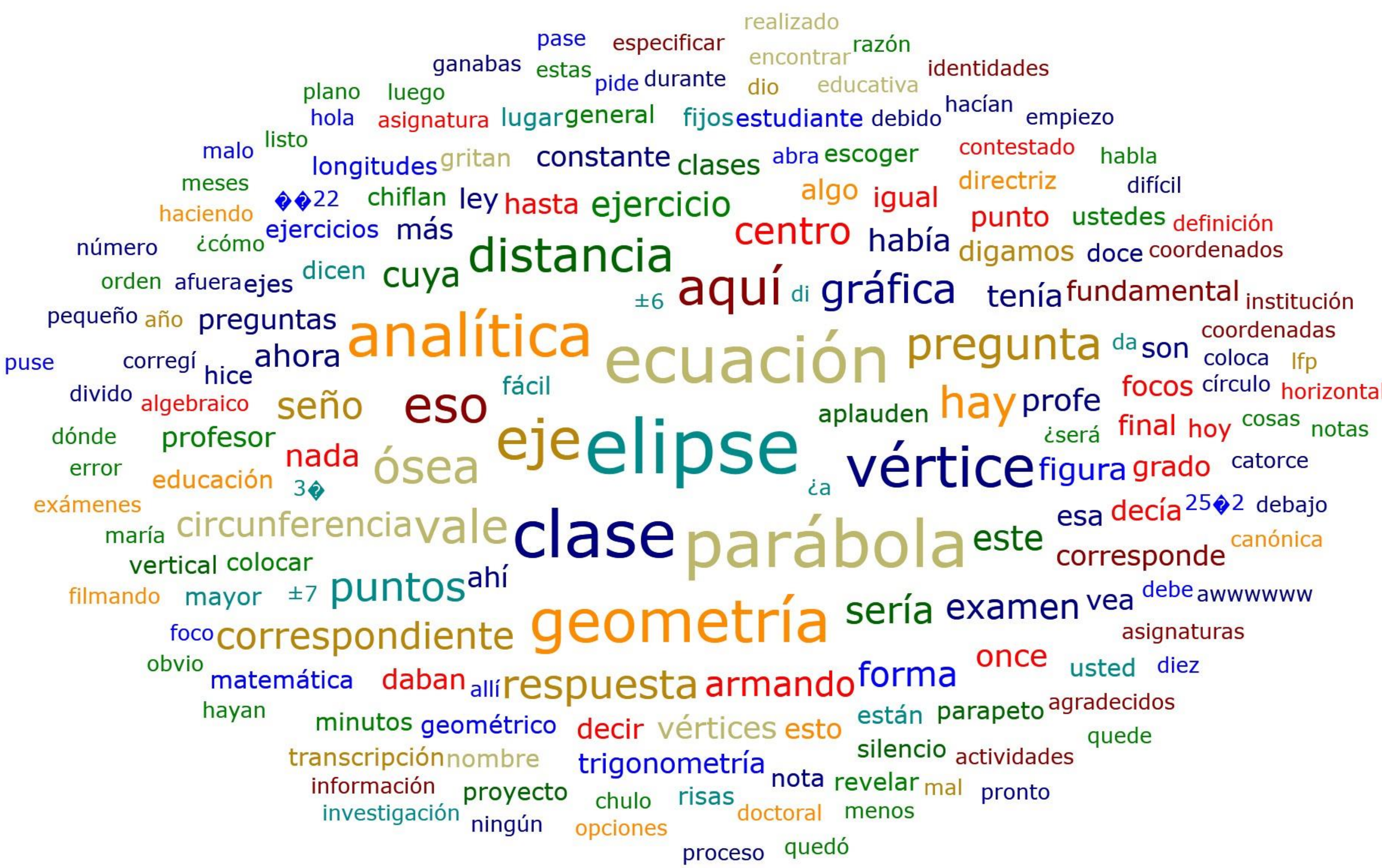
Anexo 35. Nube de palabras de la Transcripción Clase 10. C10.

Anexo 36. Nube de palabras de la Transcripción Clase 11. C11.

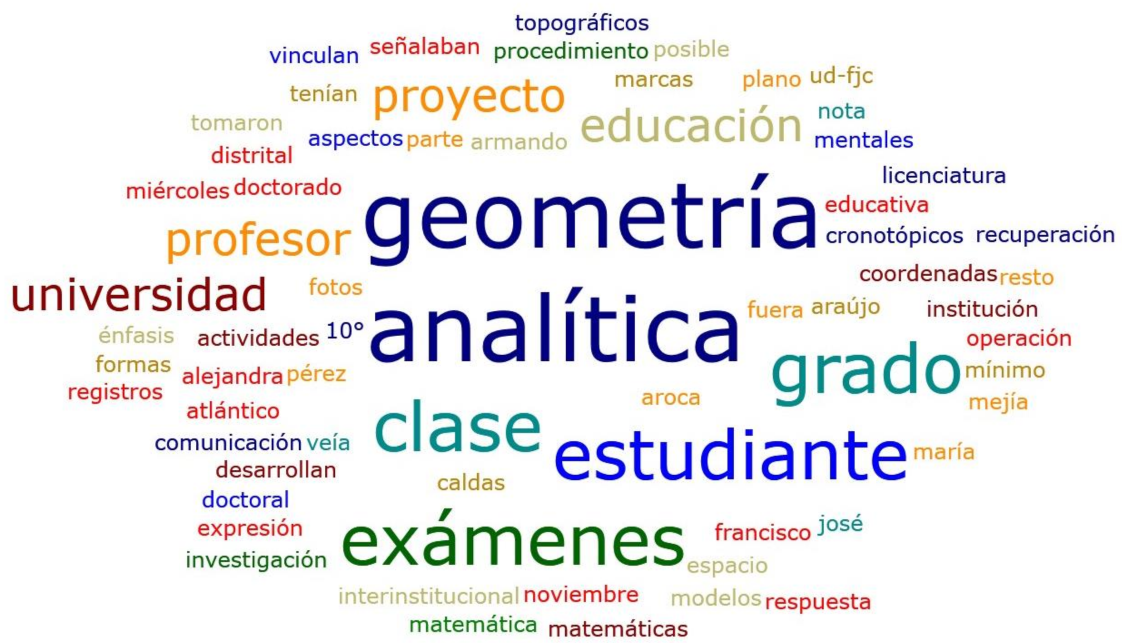
Anexo 37. Nube de palabras de la Transcripción Clase 12. C12.



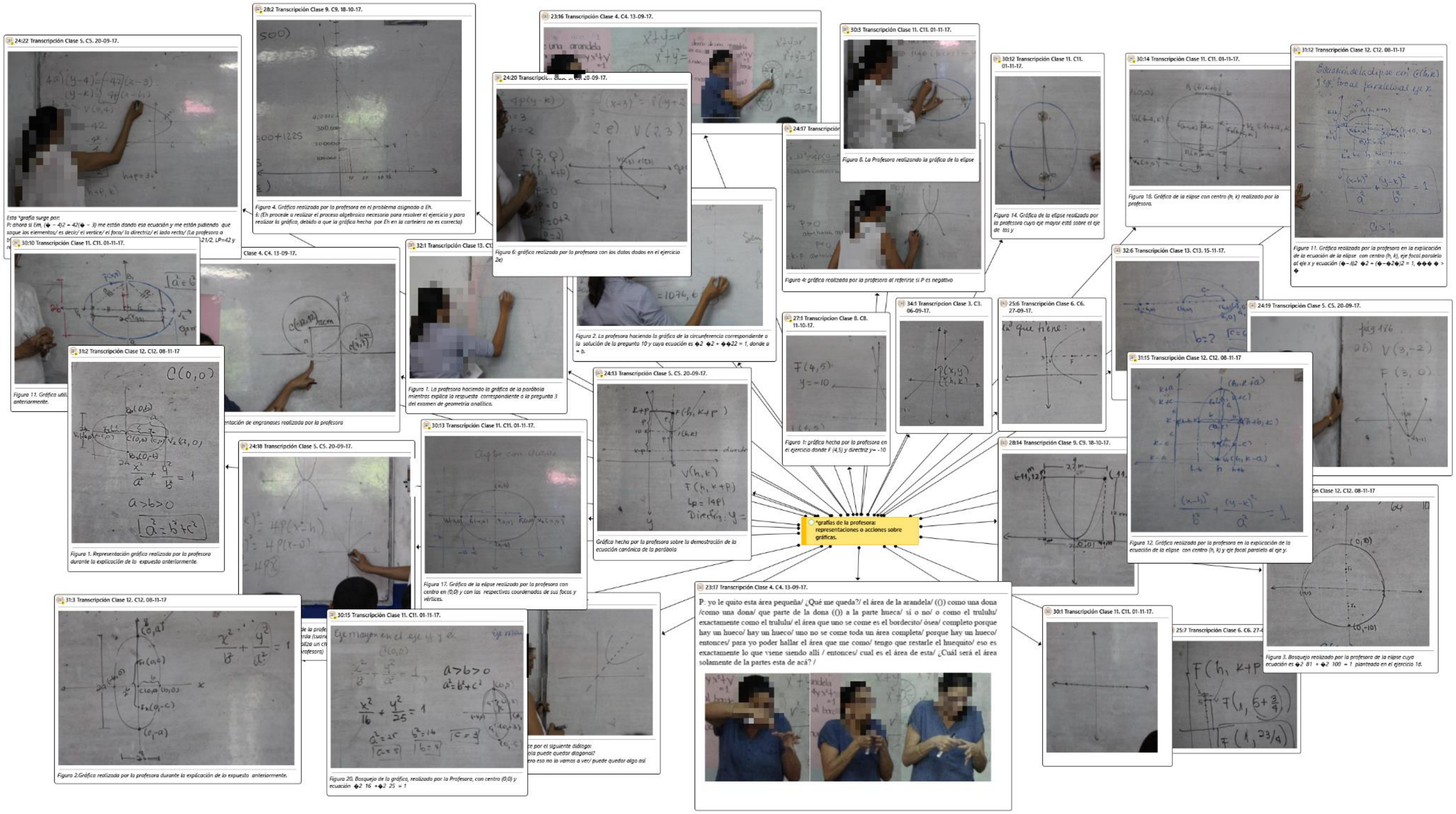
Anexo 38. Nube de palabras de la Transcripción Clase 13. C13.



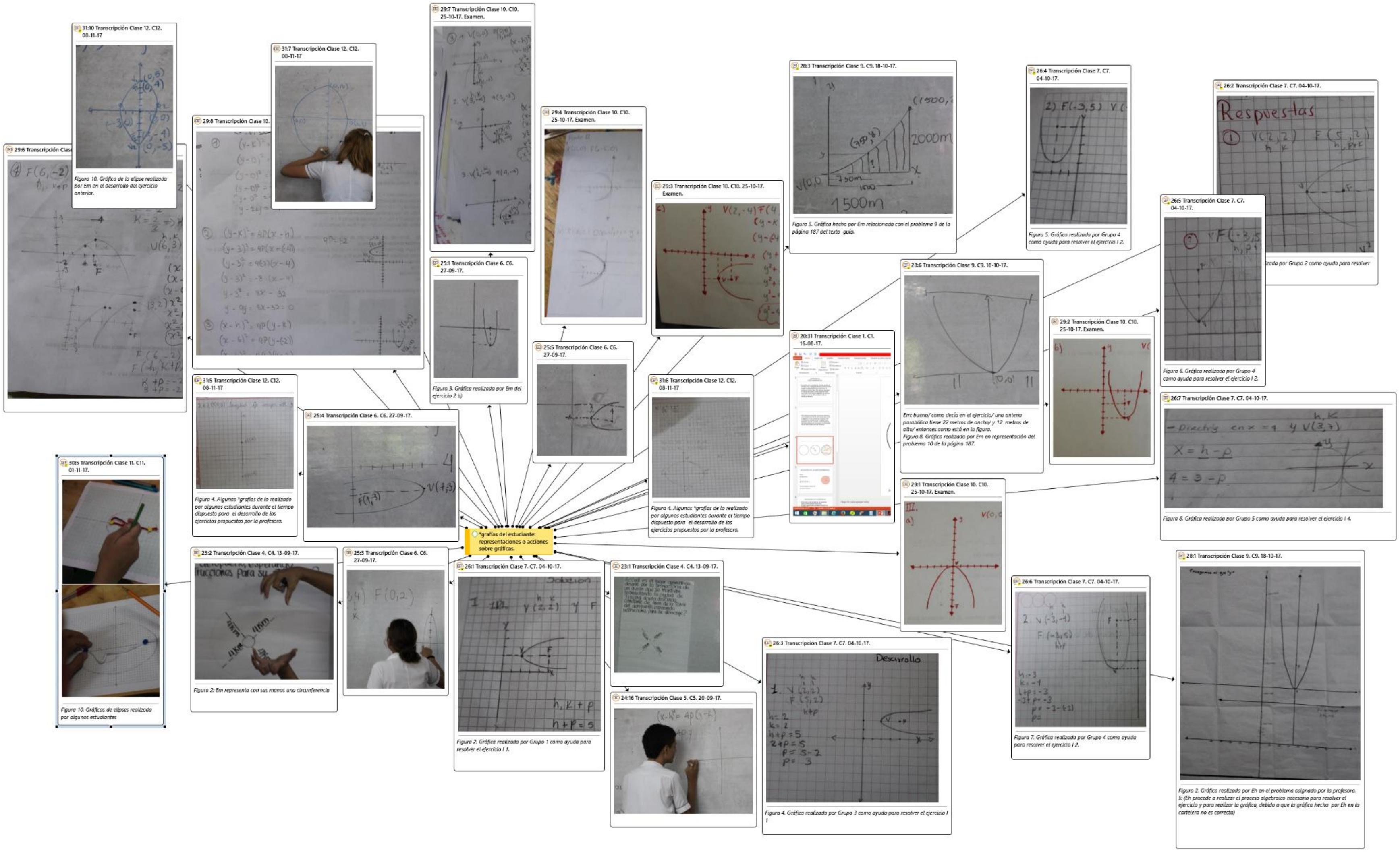
Anexo 39. Nube de palabras de la Transcripción Clase 14. C14.



Anexo 40. *grafías realizadas por la profesora en el periodo de observación.



Anexo 41.*grafías realizadas por los alumnos durante las 14 clases. Representaciones o acciones del alumno sobre gráficas.



Anexo 42. Expresiones de *metrías por parte de alumnos

| Clase | Código. [frecuencia] |
|---|---|
| Clase 1. C1. 16-08-17. | **metrías del alumno: representación de magnitud y su cantidad.* [3] |
| Clase 4. C4. 13-09-17. | **metrías del alumno: representación de magnitud y su cantidad.* [4]<br>**metrías del alumno: representación de un proceso de medición numérico. De intervalo.* [3] |
| Clase 5. C5. 20-09-17. | **metrías del alumno: representación de magnitud y su cantidad.* [5] |
| Clase 9. C9. 18-10-17. | **metrías del alumno: empleo de artefactos de medición no calibrados.* [1]<br>**metrías del alumno: representación de magnitud y su cantidad.* [5]<br>**metrías del alumno: representación de un proceso de medición numérico. De intervalo.* [2]<br>**metrías del alumno: representación de un proceso de medición prenumérica.* [2] |
| Clase 10. C10. 25-10-17. | **metrías del alumno: empleo de artefactos de medición calibrados.* [33[86]]<br>**metrías del alumno: empleo de artefactos de medición no calibrados.* [33 |
| Clase 12. C12. 08-11-17. | **metrías del alumno: empleo de artefactos de medición no calibrados.* [2] |

[86] En esta clase hubo un examen individual. Al finalizar el examen los alumnos debían entregar sus hojas de respuestas, en total eran 33 alumnos. Era necesario hacer *grafías y realizar algunas *metrías para representar parábolas y algunos datos. Algunos alumnos contaban con instrumentos geométricos otros no. Aquellos que tenían instrumentos geométricos no siempre los utilizaban.