



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Sobre el número de los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n

Dzoara Selene Núñez Ramos

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Bogotá, Colombia
2020

Sobre el número de los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n

Dzoara Selene Núñez Ramos

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de: Matemática

Directora:

MSc. Verónica Cifuentes Vargas

Co-director:

MSc. Pedro Fernando Fernández Espinosa

Grupo de Investigación TERENUFIA-UNAL
Semillero de Investigación ITENUA

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Bogotá, Colombia
2020

Nota de aceptación:

Firma del Director

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Dedicatoria

A la memoria de mis padres Mary Eugenia Niño Sánchez y Gabriel Núñez Ramos.

A mi tía María Cristina Niño de Sánchez y mi prima Yazmín Sánchez, quienes me mostraron la humildad y el amor de familia.

A Luisa Sánchez quien sin saberlo, me motivó a iniciar este camino con su ejemplo.

A mi profesora Verónica Cifuentes y mi profesor Pedro Fernández, quienes confiaron en mí y me acompañaron en los momentos críticos de este largo camino.

Agradecimientos

Hace algunos años, cuando ingresé a la universidad, no imaginé si quiera la posibilidad de culminar mi pregrado, sin embargo, hoy me encuentro escribiendo estos párrafos, y quisiera aprovecharlos para agradecer el acumulado de aprendizajes, que cada persona que me acompañó en este proceso, me brindó. Por eso, quiero comenzar diciendo que en realidad este no es un trabajo mío, este es el producto del amor, la confianza, humildad, trabajo duro y mancomunado, de quienes hicieron presencia total o parcialmente durante este camino.

En ese sentido, primero quiero agradecerle a la profesora Verónica Cifuentes, quien me mostró el mundo de las matemáticas como una madre y quién confió en mí, aún sabiendo, que tal vez en su momento no era la más disciplinada, le agradezco el haberme abierto el camino con personas que hoy son fundamentales académica y emocionalmente, en el proceso que termina y porqué no decirlo, en el que comienza.

También quiero agradecerle al profesor, compañero y amigo Pedro Fernando Fernández Espinosa por su incondicionalidad, infinita paciencia y cariño con el me ha guiado no solo en el camino académico sino con sus enseñanzas de vida, que me han transformado como persona y ahora, como profesional. Para mi es un honor seguir sus pasos y aprender, como él dice: con humildad.

Así mismo, le agradezco al profesor Agustín Moreno Cañadas por permitirme aprender de su valiosa y extensa experiencia, y que gracias a sus palabras en cada sesión de seminario, he logrado entender que detrás de toda la teoría, hay cosas profundas que terminarán siendo el motor de la vida misma. Además le agradezco por recibirme en el grupo de investigación y familia TERENCE-UNAL y del semillero de investigación, así como a los integrantes de dichos espacios académicos, quienes con su ejemplo me han motivado a seguir este camino.

Ahora, quiero agradecer a mi familia, que estaba perdida en el espacio, pero que junto con este logro, se hicieron realidad. En particular quiero agradecerle a mi tía María Cristina Niño de Sánchez por su infinito amor con el que me acogió y mi prima Yasmín Sánchez por su incondicional apoyo y paciencia, si bien no estuvieron desde el inicio de este proceso, si hacen parte de la culminación y el alcance de este sueño.

También quiero mencionar a mi compañera Daniela Bermúdez, una mujer que me encontré en algún semestre de la carrera y quien se convirtió en mi apoyo y soporte en los últimos años y con quien entendí el significado de "juntas hasta el final". Agradezco a cada compañera y compañero que hizo presencia en esta batalla, incluídas quienes me enseñaron a tener una perspectiva crítica de la realidad y a entender que el amor es la certeza de la vida y dá sensación de inmortalidad.

Y no puedo terminar estas palabras sin agradecerle a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, mi casa, mi hogar, hoy y siempre.

Resumen

La teoría inclinante es considerada en la actualidad una herramienta esencial en el estudio de muchas áreas de las matemáticas incluyendo: teoría de representaciones, teoría algebraica de grupos, geometría algebraica conmutativa y no conmutativa. En particular, en la teoría de representaciones la teoría inclinante fue originada con el estudio de los funtores de reflexión. De hecho, uno de los conceptos más importantes en este caso fue el de módulo inclinante introducido por Brenner y Butler y axiomatizado por Happel y Ringel en [12]. En este trabajo se dará la definición de módulo inclinante, algunas de sus propiedades más importantes y en particular se presentará una biyección entre los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n y los árboles planares binarios con $2n + 1$ vértices vía el retículo de Tamari [1, 8, 15].

Abstract

Tilting theory is now considered an essential tool in the study of many areas of mathematics including: representation theory, algebraic group theory, commutative and non-commutative algebraic geometry. In particular, in representation theory the inclining theory originated with the study of reflection functors. In fact, one of the most important concepts in this case was the inclination modulus introduced by Brenner and Butler and axiomatized by Happel and Ringel in [12]. In this work we will give the definition of inclining module, some of its most important properties and in particular a bijection between the inclining modules in quivers of the type \mathbb{A}_n and the binary planar trees with $2n + 1$ will be presented vertices via the Tamari lattice [1, 8, 15].

Introducción

La teoría inclinante es una de las áreas más importantes de la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita, de hecho, probablemente su aparición data de 1973 en [4] cuando Bernstein, Gelfand and Ponomarev probaron de manera alternativa la clasificación para álgebras hereditarias dada por Gabriel. En el contexto de módulos finitamente generados sobre álgebras de Artin esta teoría fue introducida y estudiada por Brenner y Butler en [5], Happel y Ringel en [12] y Happel en [9]. Además Miyashita en [17] estudió esta teoría para módulos finitamente generados asociados a anillos asociativos y posteriormente extendido por Angeleri-Hügel y otros para módulos arbitrarios sobre anillos asociativos [10, 11].

Dentro de los conceptos más importantes desarrollados en la teoría inclinante aparecen los módulos inclinantes, que han sido estudiados y caracterizados bajo distintas perspectivas como se evidencia en [14]. Particularmente el estudio de estos módulos en álgebras de caminos de tipo Dynkin, han sido ampliamente desarrollados en [6] y [15] entre otros. De hecho, el estudio de los módulos inclinantes en álgebras hereditarias de tipo Dynkin tienen un gran impacto en la actualidad ya que tienen importantes conexiones y aplicaciones en álgebra y otras áreas de las matemáticas como geometría algebraica, combinatoria, análisis topológico de datos, teoría de categorías entre otros. Por ejemplo, Krause en [15] establece una relación entre este tipo de módulos y los elementos en el retículo de Tamari introducido por Tamari en [21], del mismo modo Hille en [13] muestra la relación con árboles planares binarios y este año Flores y otros en [7] establecieron relaciones entre este tipo de módulos y las bien conocidas estructuras quasi-hereditarias introducidas por Scott en [19].

El principal objetivo de este trabajo es describir en detalle las conexiones entre los módulos inclinantes en álgebras hereditarias de tipo Dynkin \mathbb{A}_n y algunas estructuras combinatorias como las planteadas anteriormente y de paso aportar a la descripción de algunas relaciones no exploradas explícitamente en la literatura. Para ser más precisos, en este trabajo se presenta una descripción detallada de las biyecciones existentes entre tres retículos bien conocidos como el retículo de Tamari, el retículo de los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n y el retículo de los árboles planares bianrios (ver Figura **0-1**).

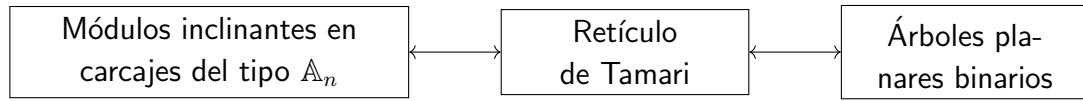


Figura 0-1: Biyecciones existentes entre las estructuras respectivas.

Para realizar lo anteriormente descrito, este trabajo se dividirá en dos capítulos, en el primero incluiremos los preliminares básicos de la categoría de representaciones de carcajes de tipo \mathbb{A}_n , sus propiedades y el funtor Hom . En el segundo introduciremos el concepto de módulo inclinante y su estructura reticular, de manera similar estudiaremos en detalle el comportamiento reticular de árboles planares binarios y los elementos en el retículo de Tamari. Finalmente probaremos e ilustraremos por medio de ejemplos detallados las respectivas biyecciones entre los tres retículos.

Contenido

Introducción	viii
1. Representaciones de carcajes	2
1.1. Categorías	2
1.2. Carcajes, representaciones y morfismos	5
1.3. Sucesiones exactas	12
1.3.1. Kernel y cokernel de un morfismo entre representaciones	13
1.3.2. Secciones, retracciones y sucesiones que se dividen	15
1.4. El carcaj de Auslander-Reiten.	17
1.4.1. Algoritmo de tejimiento para carcajes de tipo \mathbb{A}_n	30
2. Algunos aspectos combinatorios de los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n	34
2.1. Módulos Inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n	34
2.2. Los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n y el retículo de Tamari	38
2.3. Los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n y los árboles planares binarios	47
Bibliografía	53

Capítulo 1

Representaciones de carcajes

En éste capítulo presentaremos los conceptos básicos de la teoría de representaciones de carcajes y aspectos necesarios de la teoría de categorías que utilizaremos durante el desarrollo de éste trabajo. Nuestras principales referencias seran [20] y [3], cuyos conceptos se presentarán en un sentido autocontenido y ejemplificado.

1.1. Categorías

En esta sección pretendemos definir formalmente el concepto de categoría y la manera de asociarlas entre ellas, con el fin de entender de manera precisa la categoría de representaciones de un carcaj Q que será descrita posteriormente en la Sección 1.2.

Definición 1.1. Una **categoría** \mathcal{C} consiste de una clase de objetos $Ob(\mathcal{C})$ y una clase de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}$ tal que cada morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}$ tiene una única fuente X y un único objetivo Y en $Ob(\mathcal{C})$. Se dice entonces que f es un morfismo de X a Y , y se escribe $f : X \rightarrow Y$. La clase de todos los morfismos de X a Y en \mathcal{C} se denota como $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Entonces \mathcal{C} se dice **categoría** si dados $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$, existe una operación binaria:

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

que llamaremos *composición de morfismos* tal que 1_X es el morfismo identidad en la categoría \mathcal{C} y además cumple las siguientes propiedades:

1. Si $f : W \rightarrow X$, $g : X \rightarrow Y$ y $h : Y \rightarrow Z$ son morfismos, entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

2. Para cada objeto X existe un morfismo $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$, llamado el morfismo identidad sobre X tal que para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y cada $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, X)$ se tiene

$$f \circ 1_X = f \quad \text{y} \quad 1_X \circ g = g$$

Para el estudio de los morfismos en una categoría arbitraria se presentará el concepto de kernel y cokernel.

Definición 1.2. Sean \mathcal{C} una categoría, $X, Y \in \mathcal{C}$ y sea $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Entonces el **kernel** de g es un morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L, X)$ tal que $gf = 0$, y dado cualquier morfismo $v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X)$ tal que $gv = 0$, entonces existe un único morfismo $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, L)$ tal que $fu = v$. Lo anterior es equivalente a que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & \swarrow \exists u & \downarrow v & & \\ L & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

De manera similar, sea $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L, M)$. El **cokernel** de f es un morfismo $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ tal que $gf = 0$, y dado cualquier morfismo $v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, V)$ tal que $vf = 0$, existe un único morfismo $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, V)$ tal que $ug = v$.

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & \searrow v & & \downarrow \exists u \\ & & & & V \end{array}$$

En tal caso, se dice que v se factoriza a través de g .

Definición 1.3. Una **suma directa** de objetos $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{C}$ es un objeto $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ de \mathcal{C} junto con morfismos:

$$u_j : X_j \longrightarrow X_1 \oplus \dots \oplus X_n$$

para $j = 1, \dots, n$, tales que, para cada objeto $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y para cada conjunto de morfismos $f_1 : X_1 \longrightarrow Z, \dots, f_n : X_n \longrightarrow Z$ en \mathcal{C} , existe un único morfismo

$$f : \bigoplus_{i=1}^n X_i \longrightarrow Z$$

tal que $f_j = f \circ u_j$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Definición 1.4. Sea k un campo algebraicamente cerrado, y considere a \mathcal{C} una categoría. Se dice que \mathcal{C} es **abeliana** si cumple que:

1. \mathcal{C} es una k -categoría, es decir que $\text{Hom}(X, Y)$ es un k -espacio vectorial para todo $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ tal que la composición de morfismos es bilineal.

2. \mathcal{C} es aditiva, es decir, que para cada conjunto finito de objetos $X_1, \dots, X_n \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existe una suma directa $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$, y existe un objeto $0 \in \mathcal{C}$ tal que el morfismo identidad $1_0 \in \text{Hom}(0, 0)$ es el cero del espacio vectorial $\text{Hom}(0, 0)$.
3. Cada morfismo $f : M \rightarrow N$ en \mathcal{C} tiene un kernel $i : L \rightarrow M$ y un cokernel $p : N \rightarrow K$ tal que el cokernel de i es isomorfo al kernel de p .

Para relacionar dos categorías dadas, introduciremos el concepto de *functor covariante* y *functor contravariante* con la siguiente definición.

Definición 1.5. Sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' dos categorías. Un **functor covariante** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es una aplicación tal que:

- (a) a cada objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ le asocia un objeto $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$,
- (b) a cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} le asocia un morfismo $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ en \mathcal{C}' , tal que $F(1_X) = 1_{F(X)}$ y $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para todo objeto $X \in \mathcal{C}$ y todo morfismo $f, g \in \mathcal{C}$.

Un **functor contravariante** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es una aplicación tal que:

- (a.) A cada objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ le asocia un objeto $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ y
- (b.) A cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} le asocia un morfismo $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$ en \mathcal{C}' ,

tal que $F(1_X) = 1_{F(X)}$, y $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ para todos los objetos X y todos los morfismos $f, g \in \mathcal{C}$.

Dos funtores particulares de la anterior definición son el functor $\text{Hom}(X, -)$ y el functor $\text{Hom}(-, X)$, que serán de gran importancia para este trabajo.

Definición 1.6. Sean el functor $\text{Hom}(X, -)$ y el functor $\text{Hom}(-, X)$ tal que $X \in \mathcal{C}$. Estos se definen como:

- $\text{Hom}(X, -)$, el functor *covariante* de la categoría \mathcal{C} a la categoría de los k -espacios vectoriales, el cual envía un objeto $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ al espacio vectorial $\text{Hom}(X, Y)$ de todos los morfismos de X a Y , y a un morfismo $f : Y \rightarrow Z$ en \mathcal{C} a la aplicación $f_* : \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$ tal que $f_*(g) = f \circ g$:

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 g \downarrow & \searrow f \circ g & \\
 Y & \xrightarrow{f} & Z
 \end{array}$$

La aplicación f_* es llamada el *push forward* de f .

- $\text{Hom}(-, X)$, el funtor *contravariante* de la categoría \mathcal{C} a la categoría de los k -espacios vectoriales, el cual envía un objeto $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ al espacio vectorial $\text{Hom}(Y, X)$ de todos los morfismos de Y a X y un morfismo $f : Y \rightarrow Z$ en \mathcal{C} a la aplicación $f^* : \text{Hom}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}(Y, X)$, tal que $f^* = g \circ f$:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow^{g \circ f} & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

La aplicación f^* es llamada el *pullback* de f .

1.2. Carcajes, representaciones y morfismos

En ésta sección introduciremos los conceptos de carcaj, sus representaciones y el espacio de morfismos entre ellas con el fin de definir la categoría de representaciones asociada a un carcaj arbitrario [20].

Definición 1.7. Un **carcaj** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es una cuádrupla que consiste de dos conjuntos y dos funciones: Q_0 un conjunto de vértices o puntos, Q_1 un conjunto de elementos que serán llamados flechas, una aplicación $s : Q_1 \rightarrow Q_0$ que asocia a cada flecha $\alpha \in Q_1$ su punto inicial $s(\alpha) \in Q_0$, y una aplicación $t : Q_1 \rightarrow Q_0$ que asocia a cada flecha $\alpha \in Q_1$ su punto terminal $t(\alpha) \in Q_0$.

Se representa a un elemento $\alpha \in Q_1$ dibujando una flecha de su punto inicial a su punto terminal de la forma que sigue:

$$s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$$

Cabe recordar, que a diferencia de un grafo finito dirigido, los carcajes aceptan múltiples flechas de un vértice a otro.

Ejemplo 1.8. Considere el siguiente carcaj:

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4,$$

donde: $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ y s, t están definidas por:

$$s(\alpha) = 1, \quad s(\beta) = 2, \quad s(\gamma) = 3,$$

$$t(\alpha) = 2, \quad t(\beta) = 3, \quad t(\gamma) = 4.$$

Ejemplo 1.9. Sea Q el carcaj dado por:

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n$$

Este carcaj tiene como conjuntos: $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ y $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$, en donde $t(\alpha_i) = i + 1$ y $s(\alpha_i) = i$ con $i = 1, \dots, n - 1$. En adelante nos referiremos al anterior carcaj Q como $\overrightarrow{\mathbb{A}_n}$.

Los carcajes que se considerarán en este documento serán finitos, esto es, que los conjuntos Q_0 y Q_1 siempre serán finitos. Ahora, fijemos un campo k algebraicamente cerrado y bajo esto, introduciremos el concepto de representación de un carcaj.

Definición 1.10. Una **representación** $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ de un carcaj Q es una colección de k -espacios vectoriales M_i , uno para cada vértice $i \in Q_0$, y una colección de k -transformaciones lineales

$$\varphi_\alpha : M_{s(\alpha)} \rightarrow M_{t(\alpha)},$$

para cada flecha $\alpha \in Q_1$.

Definición 1.11. Una representación M se dice de **dimensión finita** si cada uno de los espacios vectoriales M_i son de dimensión finita. Cuando una representación M es de dimensión finita, entonces tiene **vector dimensión** $\underline{\dim} M = (\dim M_i)_{i \in Q_0}$ asociado a las dimensiones de cada uno de los espacios vectoriales M_i . Un **elemento** de una representación M es una n -tupla $(m_i)_{i \in Q_0}$ con $m_i \in M_i$.

Ejemplo 1.12. Considere Q el carcaj $\mathbb{A}_4: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$. Entonces:

$$M = k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k,$$

$$M' = k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} k,$$

$$M'' = k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k^3,$$

$$M''' = k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} k,$$

son representaciones de Q . Los vectores de dimensión son:

$$\underline{\dim} M = (1, 1, 1, 1), \quad \underline{\dim} M' = (1, 1, 1, 1), \quad \underline{\dim} M'' = (1, 0, 0, 3), \quad \text{y} \quad \underline{\dim} M^{(3)} = (1, 2, 2, 1).$$

Ahora se definirá el concepto de morfismo entre dos representaciones.

Definición 1.13. Sea Q un carcaj y sean $M = (M_i, \varphi_\alpha)$, $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)$ dos representaciones de Q . Un **morfismo** de representaciones $f : M \rightarrow M'$ es una colección $(f_i)_{i \in Q_0}$ de aplicaciones lineales

$$f_i : M_i \rightarrow M'_i,$$

tal que para cada flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$ en Q_1 , el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_j \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_j \\ M'_i & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_j \end{array}$$

esto es, que para todo elemento $m \in M_i$:

$$\varphi'_\alpha \circ f_i(m) = f_j \circ \varphi_\alpha(m).$$

Proposición 1.14. *Sea Q un carcaj. Las representaciones de dimensión finita de Q junto con los morfismos de representaciones forman un categoría, la categoría de representaciones (de dimensión finita) del carcaj Q , y será denotada por $\text{rep } Q$.*

Demostración. Sea Q un carcaj. Entonces se denotará por $Ob(\text{rep } Q)$ al conjunto de las representaciones finitas de Q , y por $\text{Hom}(\text{rep } Q)$ a los morfismos de tales representaciones, de acuerdo con la Definición 1.13.

Sean $f \in \text{Hom}(M, M')$, $g \in \text{Hom}(M', N)$, $h \in \text{Hom}(N, N')$, donde $M, M', N, N' \in \text{rep } Q$. En primer lugar, note que $h \circ (g \circ f) \in \text{Hom}(M, N')$ ya que

$$\begin{array}{ccccc} & & M_i & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_j \\ & & \downarrow f_i & & \downarrow f_j \\ M & & M'_i & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_j \\ f \downarrow & & \downarrow g_i & & \downarrow g_j \\ M' & & N_i & \xrightarrow{\psi_\alpha} & N_j \\ g \downarrow & & \downarrow h_i & & \downarrow h_j \\ N & & N'_i & \xrightarrow{\psi'_\alpha} & N'_j \\ h \downarrow & & & & \\ N' & & & & \end{array}$$

y se tiene que para todo $m \in M_i$

$$\psi'_\alpha h_i g_i f_i(m) = h_j g_j f_j \varphi_\alpha(m),$$

lo cual dice que el morfismo $h \circ (g \circ f)$ es un morfismo de M a N' , o lo que equivale a que $h \circ (g \circ f) \in \text{Hom}(M, N')$. Ahora se debe mostrar que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Por definición se tiene:

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= (h_i \circ (g_i \circ f_i))_{i \in Q_0} \\ &= ((h_i \circ g_i) \circ f_i)_{i \in Q_0} \\ &= (h \circ g) \circ f \end{aligned}$$

Ya que para todo $i \in Q_0$, f_i, g_i, h_i , son transformaciones lineales entre espacios vectoriales, y su composición es asociativa.

Por último, sea $M \in \text{rep } Q$, entonces siempre se tendrá un morfismo

$$\begin{array}{ccccc} M & & M_i & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_j \\ \mathbb{1} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mathbb{1} \\ M' & & M'_i & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_j \end{array}$$

Se afirma que $\mathbb{1} \in \text{Hom}(M, M)$ ya que $\mathbb{1} \circ \varphi_\alpha = \varphi_\alpha \circ \mathbb{1}$ para todo $\alpha \in Q_1$. Más aún, sea $f \in \text{Hom}(M, M')$ con $M' \in \text{rep } Q$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{1} \circ f &= (1 \circ f_i)_{i \in Q_0} = (f_i)_{i \in Q_0} = f, \\ f \circ \mathbb{1} &= (f_i \circ 1)_{i \in Q_0} = (f_i)_{i \in Q_0} = f. \end{aligned}$$

Así, $\text{rep } Q$ es una categoría. □

La siguiente proposición muestra que el conjunto de homomorfismos entre dos representaciones M y M' de un carcaj tiene estructura de espacio vectorial.

Proposición 1.15. *Sea Q un carcaj y sean $M, M' \in \text{rep } Q$. Entonces el conjunto $\text{Hom}(M, M')$ de todos los morfismos de M a M' es un k -espacio vectorial respecto a la adición y multiplicación por escalares usual entre funciones.*

Demostración. Sean $M = (M_i, \varphi_\alpha)$, $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha) \in \text{rep } Q$. Si $f = (f_i)_{i \in Q_0} \in \text{Hom}(M, M')$, entonces

$$\varphi'_\alpha \circ f_i(m) = f_j \circ \varphi_\alpha(m) \quad \forall m \in M_i,$$

si $g = (g_i)_{i \in Q_0} \in \text{Hom}(M, M')$, entonces su suma estará dada por

$$f + g = (f_i + g_i)_{i \in Q_0},$$

y si $a \in k$ entonces,

$$af = (af_i)_{i \in Q_0}$$

Con lo cual, si $m \in M_i$ se tendrá $(f_i + g_i)(m) = f_i(m) + g_i(m)$ y $(af_i)(m) = a \cdot f_i(m)$. El resultado se sigue ya que cada una de las funciones (f_i) y (g_i) son transformaciones lineales entre espacios vectoriales, y por ende, cumplen las propiedades deseadas para ser un k -espacio vectorial. □

Los siguientes ejemplos serán gran de importancia a lo largo de este documento, ya que ilustran cómo encontrar el conjunto de morfismos entre dos representaciones dadas.

Ejemplo 1.16. Sea Q el carcaj descrito en el Ejemplo 1.12, entonces,

$$\text{Hom}(M, M') \cong \{(a, 0, 0, 0) \mid a \in k\} \cong k,$$

ya que $\{(a, 0, 0, 0) \mid a \in k\}$ es un espacio vectorial de dimensión 1. Además se tendrá:

$$\text{Hom}(M', M)\{(0, 0, a, a) \mid a \in k\} \cong k.$$

Ejemplo 1.17. Consideremos las representaciones M y M''' del Ejemplo 1.12.

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & & k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{1} & k & \xrightarrow{1} & k \\
 \downarrow f & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\
 M''' & & k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & k^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} & k
 \end{array}$$

Calcularemos el $\text{Hom}(M, M''')$. Supongamos $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ un morfismo de M a M''' , es decir:

$$f_1 = k \rightarrow k, \quad f_2 = k^2 \rightarrow k, \quad f_3 = k^2 \rightarrow k, \quad f_4 = k \rightarrow k,$$

entonces f_1, f_2, f_3 y f_4 pueden ser escritos de forma matricial de tamaños $1 \times 1, 2 \times 1, 2 \times 1$ y 1×1 respectivamente de la forma

$$f_1 = [a], \quad f_2 = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}, \quad f_4 = [f],$$

donde $a, b, c, d, e, f \in k$, y como f es un morfismo de representaciones se tiene que

$$\varphi'_{\alpha_1} f_1 = f_2 \varphi_{\alpha_1}, \quad \varphi'_{\alpha_2} f_2 = f_3 \varphi_{\alpha_2}, \quad \varphi'_{\alpha_3} f_3 = f_4 \varphi_{\alpha_3},$$

es decir

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [a] = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} [1],$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} [1] \text{ y}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = [f] [1],$$

lo que implica que $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$ y que $[d] = [f]$. Es decir, $a = b = d = f$, $c = 0$ y $c = e$. Lo cual muestra que f es de la forma:

$$f = \left([a], \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, [a] \right),$$

y así

$$\text{Hom}(M, M''') \cong k.$$

Una de las propiedades que se tiene en la teoría de representaciones de carcajes, es la descomposición única de cualquier representación como suma de representaciones indecomponibles.

Definición 1.18. Sean $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)$ dos representaciones de Q un carcaj. Entonces la **suma directa** de M' y M es una representación de Q , denotada por $M \oplus M'$ y dada por:

$$M \oplus M' = \left(M_i \oplus M'_i, \begin{bmatrix} \varphi_\alpha & 0 \\ 0 & \varphi'_\alpha \end{bmatrix} \right).$$

Nota 1.19. De manera recursiva, también se puede definir a la suma directa de un número finito de representaciones $M_1, M_2, \dots, M_n \in \text{rep } Q$ por:

$$\begin{aligned} M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n &= (M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_{n-1}) \oplus M_n \\ &= (((M_1 \oplus M_2) \oplus M_3) \oplus \dots \oplus M_{n-1}) \oplus M_n \end{aligned}$$

Ejemplo 1.20. Sea Q el carcaj:

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4,$$

y considere las representaciones:

$$M : k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k,$$

$$M' : k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} k^2 \xrightarrow{[0]} 0,$$

la suma directa es la representación $M \oplus M'$ dada por:

$$k \oplus k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} k \oplus k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} k \oplus k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} k \oplus 0,$$

la cual es isomorfa a la representación:

$$k \oplus k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} k \oplus k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} k \oplus k^2 \xrightarrow{[1 \ 0 \ 0]} k.$$

Ejemplo 1.21. Considere el ejemplo anterior y la representación:

$$M' : k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}} 0.$$

Ésta representación es isomorfa a la suma directa de las representaciones:

$$N : 0 \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} 0,$$

$$N' : k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} 0.$$

Es decir

$$N \oplus N' : k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}} 0.$$

Se mostrará que M' y $N \oplus N'$ son representaciones isomorfas, es decir, se probará que el diagrama es conmutativo y que cada componente del vector de morfismos es biyectivo. Para esto, considere un morfismo entre M' y $N \oplus N'$ y de acuerdo con la Definición 1.13, se tiene que

$$\begin{array}{ccccccc} M' : & & k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 & \xrightarrow{0} & 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\ N \oplus N' : & & k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & k^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} & 0. \end{array}$$

Sea $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ el morfismo tal que:

$$f_1 = [a], \quad f_2 = \begin{bmatrix} b & c \\ d & e \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix}, \quad f_4 = [0],$$

y de los cuadrados conmutativos se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [a] = \begin{bmatrix} b & c \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c \\ d+e \end{bmatrix} \implies \begin{cases} a = d+e, \\ b = -c, \\ c = -b, \end{cases}$$

y también:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} b & c \\ d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f+g & f \\ h+i & i \end{bmatrix} \implies \begin{cases} b = f+g, \\ c = f, \\ d = h+i, \\ e = i, \end{cases}$$

y se obtiene: $a = h + 2i$, $b = g/2$, $c = -g/2$ así f estará dado por:

$$f = \left\{ f_1 = [h + 2i], f_2 = \begin{bmatrix} g/2 & -g/2 \\ h+i & i \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} -g/2 & g \\ h & i \end{bmatrix}, f_4 = [0] \right\}.$$

Ahora, como cada una de las matrices f_1 , f_2 y f_3 , asociadas al morfismo, tiene determinante distinto de cero, se deduce que son invertibles, luego cada f_i es biyectivo. Esto muestra que M y $N \oplus N'$ son isomorfos. Además, $\text{Hom}(M', M) \cong k^3$ en el sentido del Ejemplo 1.20 y del Ejemplo 1.17.

Definición 1.22. Una representación $M \in \text{rep } Q$ es llamada **indescomponible** si $M \neq 0$ y siempre que $M \cong N \oplus L$ con $N, L \in \text{rep } Q$, entonces $N = 0$ o $L = 0$.

Ejemplo 1.23. Las representaciones en el 1.12 son indescomponibles. En el Ejemplo 1.20, la representación M es indescomponible, en el Ejemplo 1.21 se muestra que M' no lo es.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores se puede presentar el objetivo principal de la teoría de representaciones de carcajes, el cual consiste en clasificar todas las representaciones de un carcaj Q dado y todos los morfismos entre ellas salvo isomorfismos.

Con el fin de cumplir el objetivo anteriormente descrito, el siguiente teorema muestra que es suficiente clasificar las representaciones indescomponibles y los morfismos entre ellas.

Teorema 1.24 (Teorema de Krull-Schmidt). *Sea Q un carcaj y sea $M \in \text{rep } Q$. Entonces,*

$$M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n,$$

donde $M_i \in \text{rep } Q$ es indescomponible para todo $i = 1, \dots, n$. Tal descomposición en sumandos directos es única bajo orden.

Demostración. La demostración de este teorema puede ser consultada en [20] y [3]. □

Ejemplo 1.25. En el Ejemplo 1.21, se describió a la representación M' de Q como suma directa de las representaciones indescomponibles N y N'' .

1.3. Sucesiones exactas

En esta sección se introducirá el concepto de sucesión exacta, para ello, se presentarán los conceptos de kernel, cokernel e imagen de un morfismo de representación. Además, se establece que tales representaciones cumplen las propiedades universales mencionadas en la Sección 1.1 y finalmente se describirán las sucesiones que se dividen.

1.3.1. Kernel y cokernel de un morfismo entre representaciones

Definición 1.26. Sean Q un carcaj, $M = (M_i, \varphi_\alpha)$, $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)$ dos representaciones de Q y $f = (f_i)_{i \in Q_0}$, $f \in \text{Hom}(M, M')$ un morfismo. Para cada vértice $i \in Q_0$, sea $L_i = \ker f_i$, y para cada flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$ en Q_1 , sea $\psi_\alpha : L_i \rightarrow L_j$ la restricción de φ_α a L_i . Esto es,

$$\psi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x) \text{ para todo } x \in L_i = \ker f_i.$$

El **kernel de f** es entonces la representación:

$$\ker f = (L_i, \psi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}.$$

Ejemplo 1.27. Sea Q el carcaj $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$ y considere las representaciones:

$$M : \quad k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k,$$

$$M' : \quad 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k,$$

junto con el morfismo $f : M \rightarrow M'$ dado por $f = (0, 1, 1, 1)$. Entonces:

$$\ker f = (\ker f_i, \psi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

Se obtiene que $\ker f_1 = \ker 0 = k$, $\ker f_2 = \ker 1 = 0$, $\ker f_3 = \ker 1 = 0$ y $\ker f_4 = \ker 1 = 0$. Para los morfismos, $\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{\ker f_1} = 0$, $\psi_\beta = \varphi_\beta|_{\ker f_2} = 0$ y $\psi_\gamma = \varphi_\gamma|_{\ker f_3} = 0$. Por tanto,

$$\ker f = \quad k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0.$$

La siguiente definición muestra de manera similar a la anterior, el concepto formal de cokernel de un morfismo entre representaciones.

Definición 1.28. Sea Q un carcaj, y sean M, M' dos representaciones de Q . Para cada vértice $i \in Q_0$, sea

$$N_i = \text{coker } f_i = M'_i / f_i(M_i),$$

y para cada flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$ en Q_1 , se define $\chi_\alpha : N_i \rightarrow N_j$ por

$$\chi_\alpha(m'_i + f_i(M_i)) = \varphi'_\alpha(m'_i) + f_j(M_j),$$

para cada $m'_i \in M'_i$. Entonces el **cokernel de f** será la representación:

$$\text{coker } f = (N_i, \chi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}.$$

Ejemplo 1.29. Considere el Ejemplo 1.34. Entonces, $\text{coker } f = (N_i, \chi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$. Así pues,

$$\text{coker } f_1 = 0/f(0) \cong 0/0 \cong 0,$$

$$\text{coker } f_2 = k/f(1) \cong k/k \cong 0,$$

$$\text{coker } f_3 = k/f(1) \cong k/k \cong 0,$$

$$\text{coker } f_3 = k/f(1) \cong k/k \cong 0.$$

Ahora, los morfismos serán cero, y así, $\chi_\alpha = 0$. Se puede ver de manera similar que $\chi_\beta = 0$, con lo que se ha mostrado que:

$$\text{coker } f : 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0.$$

Ahora se definirá el concepto de sucesión exacta, bajo las definiciones de kernel y cokernel, que serán de gran importancia para la construcción de las resoluciones inyectivas, proyectivas y los carcajes de Auslander-Reiten.

Definición 1.30. Una sucesión de morfismos $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ se dice **exacta en M** si $\text{im } f = \ker g$. De manera similar, una sucesión de morfismos

$$\cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow \cdots,$$

se dice **exacta** si es exacta en cada M_i , para $i \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.31. Una **sucesión exacta corta** es una sucesión exacta de la forma:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0. \quad (1-1)$$

Nota 1.32. Una sucesión de la forma (1-1) es exacta si y solo si f es inyectiva, es exacta en M y g es sobreyectiva.

Ejemplo 1.33. Teniendo en cuenta que existe un morfismo inyectivo $i : L \hookrightarrow M$, se le llama *representación cociente* a M/L que es el cokernel de i como vimos en la Definición 1.28, ahora, sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo en $\text{rep } Q$, entonces la sucesión:

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{u} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} \text{coker } f \longrightarrow 0,$$

donde u es la inclusión y p es la proyección indicadas en la Nota 1.33 es exacta. Además, la sucesión:

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{u} M \xrightarrow{q} M/\ker f \longrightarrow 0,$$

es exacta corta.

Ejemplo 1.34. Sea Q el carcaj $1 \longrightarrow 2$, y considere las representaciones:

$$S(2) : \quad 0 \longrightarrow k$$

$$M : \quad k \xrightarrow{1} k$$

$$S(1) : \quad k \longrightarrow 0$$

Entonces las siguientes son sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow S(2) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} S(1) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow S(2) \xrightarrow{f'} S(1) \oplus S(2) \xrightarrow{g'} S(1) \longrightarrow 0,$$

donde $f = (f_1, f_2) = (0, 1)$, $g = (g_1, g_2) = (1, 0)$ y $f' = (f'_1, f'_2) = (0, 1)$, $g' = (g'_1, g'_2) = (1, 0)$.

Note que en algunos de los conceptos presentados, el primer teorema de isomorfismo estará implícito, desde la perspectiva de la teoría de representaciones, es decir que para $f : M \rightarrow N$ un morfismo de representaciones de $\text{rep } Q$, se tiene que $\text{im } f \cong M/\ker f$.

1.3.2. Secciones, retracciones y sucesiones que se dividen

En esta sección daremos una definición formal de una sección y una retracción, con el fin de dar paso a los conceptos de sucesiones que se dividen, y brindar algunas propiedades de las mismas.

Definición 1.35. Un morfismo $f : L \rightarrow M$ se dice una **sección** si existe un morfismo $h : M \rightarrow L$ tal que $h \circ f = 1_L$. De manera similar, se dice que un morfismo $g : M \rightarrow N$ es una **retracción** si existe un morfismo $h : N \rightarrow M$ tal que $g \circ h = 1_N$.

Definición 1.36. Se dice que una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

se divide si f es una sección.

Nota 1.37. En el Ejemplo 1.34, la segunda sucesión corta se divide, ya que el morfismo

$$h' : S(1) \oplus S(2) \xrightarrow{(0,1)} S(2)$$

verifica que $h' \circ f' = 1_{S(2)}$. Siguiendo con este argumento, la primera sucesión exacta no se divide, ya que no hay un morfismo distinto de cero de M a $S(2)$; por tanto f no puede ser una sección.

La siguiente proposición permitirá caracterizar las sucesiones divididas por medio de secciones y retracciones. Más aún, dada una sucesión dividida, se podrá ver a M como un sumando directo de las demás representaciones en la sucesión.

Proposición 1.38. *Sea*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta en $\text{rep } Q$. Entonces,

1. f es una sección si y solo si g es una retracción.
2. si f es una sección, entonces $\text{im } f$ es un sumando directo de M .

Demostración. Ver ([20], p. 17). □

Corolario 1.39. Si la sucesión

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es dividida, entonces $M \cong L \oplus N$.

Demostración. Dado que f es inyectiva, se tiene que $L \cong f(L) \cong \ker g$, y ya que g es sobreyectiva, el primer teorema de isomorfismo implica que

$$N \cong M / \ker g$$

Usando la proposición anterior se obtiene que $M \cong L \oplus N$. □

A continuación definiremos los conceptos necesarios para comprender el Hom como un funtor de la categoría de las representaciones a la de los k -espacios vectoriales y algunas de sus principales propiedades que se relacionarán con las sucesiones exactas cortas.

Teorema 1.40. Sea Q un carcaj y $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ una sucesión en $\text{rep } Q$. Entonces esta sucesión es exacta si y solo si para cada representación $X \in \text{rep } Q$, la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(X, L) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(X, M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(X, N) \quad (1-2)$$

es exacta corta.

Demostración. Ver ([20], p. 21). □

Corolario 1.41. Una sucesión

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \quad (1-3)$$

en $\text{rep } Q$ es dividida si y solo si para cada $X \in \text{rep } Q$, la sucesión:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(X, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(X, M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(X, N) \longrightarrow 0 \quad (1-4)$$

es exacta.

Dualmente, se tienen resultados para el teorema y el corolario anterior, que utilizan $\text{Hom}(-, X)$.

Teorema 1.42. Sea Q un carcaj y $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión en $\text{rep } Q$. Entonces esta sucesión es exacta si y solo si para cada representación $X \in \text{rep } Q$, la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(N, X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(L, X)$$

es exacta corta.

Demostración. Se sigue un procedimiento análogo a la demostración del Teorema 1.10. (Anterior)

□

Corolario 1.43. *Una sucesión*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \quad (1-5)$$

en $\text{rep } Q$ es dividida exacta si y solo si para cada $X \in \text{rep } Q$, la sucesión:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(N, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(M, X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(L, X) \longrightarrow 0 \quad (1-6)$$

es exacta.

Nota 1.44. Si $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ no se divide, entonces f^* y g^* no son siempre sobreyectivas.

1.4. El carcaj de Auslander-Reiten.

Dentro de la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita, existen representaciones que son de especial importancia por su uso en la teoría de Auslander-Reiten y por su papel en la caracterización de módulos indescomponibles para un carcaj Q . Aquí resultan de carácter especial las representaciones proyectivas e inyectivas. En esta sección, presentaremos dichas representaciones, teniendo en cuenta que dada una representación $M \in \text{rep } Q$, podemos encontrar una representación proyectiva P_0 tal que existe un morfismo sobreyectivo:

$$p_0 : P_0 \twoheadrightarrow M$$

y de manera dual, podemos encontrar una representación I_0 inyectiva tal que existe un morfismo inyectivo:

$$i_0 : M \hookrightarrow I_0$$

y de esta manera, obtendremos bajo ciertas condiciones una sucesión exacta:

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

donde cada P_i es proyectivo, la cual será denominada una resolución proyectiva.

Dualmente, tenemos resoluciones inyectivas y así, sucesiones exactas de la forma

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_0} I_0 \xrightarrow{i_1} I_1 \xrightarrow{i_2} I_2 \longrightarrow \cdots,$$

donde cada I_i es una representación inyectiva. Estas representaciones coinciden con el término general de objeto simple, inyectivo y proyectivo en una categoría (ver [20], p.33).

En particular definiremos tres tipos de representaciones que se encuentran en la categoría de representaciones de Q : las representaciones simples, proyectivas e inyectivas para las cuales consideraremos los caminos al interior de un carcaj Q . Estas son de gran importancia, ya que resultan ser las representaciones indescomponibles del caso particular de \mathbb{A}_n y un estudio de ellas se puede hacer vía resoluciones proyectivas, es por ésto que presentaremos los conceptos de resolución proyectiva y resolución inyectiva en el contexto de la categoría de representaciones de un carcaj Q , con el objetivo de entrar a la definición del funtor Ext que nos permitirá en el siguiente capítulo determinar si el módulo indescomponible que elijamos es inclinante o no lo es.

Mostraremos también que dichas representaciones tienen una forma particular en carcajes sin ciclos orientados y haremos uso de esto para mostrar que cualquier subrepresentación de una representación proyectiva es proyectiva, o lo que es equivalente, que $\text{rep } Q$ es una categoría hereditaria.

Para finalizar, daremos una introducción corta a la construcción algorítmica del carcaj de Auslander-Reiten para un carcaj Q de \mathbb{A}_n , teniendo en cuenta que ésta no es la única (ver [20], p. 73).

Definición 1.45. Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un quiver, e $i, j \in Q_0$. Un **camino** de i a j de longitud l en Q es una sucesión

$$c = (i|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l|j)$$

con $\alpha_h \in Q_1$ tal que:

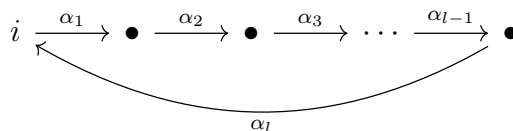
$$\begin{aligned} s(\alpha_1) &= i \\ s(\alpha_h) &= t(\alpha_{h-1}) \text{ para } h = 2, 3, \dots, l \\ t(\alpha_l) &= j \end{aligned}$$

Así pues, un camino de i a j es una forma de ir desde el vértice i hasta el vértice j siguiendo las flechas en el carcaj Q .

Definición 1.46. El **camino constante** $(i||i)$ en el vértice i es el camino de longitud $l = 0$ el cual permanece en el vértice i , y se denotará por e_i . Una flecha de longitud uno del vértice i al vértice i es llamada un **lazo** (o loop). Se representa de la siguiente manera:



Un camino de la forma:



dado por $(i|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l|i)$ se denomina **ciclo orientado**. Así pues, un lazo es un ciclo orientado de longitud 1.

Se procederá entonces a definir las representaciones simples, inyectivas y proyectivas para cada vértice $i \in Q_0$, donde Q es un carcaj sin ciclos orientados.

Definición 1.47. Sea Q un carcaj sin ciclos orientados y sea $i \in Q$ un vértice. La representación **simple** $S(i)$ es de dimensión uno en el vértice i y cero en cualquier otro vértice. Así,

$$S(i) = (S(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}, \text{ donde}$$

$$S(i)_j = \begin{cases} k & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \text{y}$$

$$\varphi_\alpha = 0 \text{ para todas las flechas } \alpha$$

De manera similar,

Definición 1.48. Dado un vértice $i \in Q$, se define

$$P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

donde $P(i)_j$ es el k -espacio vectorial cuya base es el conjunto de todos los caminos de i a j en Q , así que los elementos de $P(i)_j$ son de la forma $\sum_c \lambda_c c$, donde c recorre todos los caminos de i a j , y $\lambda_c \in k$. Además, si $j \xrightarrow{\alpha} l$ es una flecha en Q , entonces $\varphi_\alpha : P(i)_j \rightarrow P(i)_l$ es la aplicación lineal definida en la base al componer los caminos de i a j con la flecha $j \xrightarrow{\alpha} l$. De hecho, la flecha α induce una aplicación inyectiva entre las bases:

$$\begin{aligned} & \text{base de } P(i)_j \rightarrow \text{base de } P(i)_l \\ c = (i|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s|j) & \mapsto c = (i|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \alpha|l) \end{aligned}$$

y φ_α está definida por:

$$\varphi_\alpha \left(\sum_c \lambda_c c \right) = \sum_c \lambda_c c \alpha$$

$P(i)$ es llamada la **representación proyectiva** en el vértice i .

Definición 1.49. Sea $i \in Q$, se define:

$$I(i) = (I(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

donde $I(i)_j$ es el k -espacio vectorial cuya base es el conjunto de todos los caminos de j a i en Q ; así que los elementos de $I(i)_j$ son de la forma $\sum_c \lambda_c c$, donde c recorre todos los caminos de j a i , y $\lambda_c \in k$. Si $j \xrightarrow{\alpha} l$ es una flecha en Q , entonces $\varphi_\alpha : I(i)_j \rightarrow I(i)_l$ es la transformación lineal definida en la base al eliminar la flecha $j \xrightarrow{\alpha} l$ de aquellos caminos de j a i los cuales

comienzan con α y enviando a cero los caminos que no. De manera similar a la anterior definición, la flecha α induce una aplicación sobreyectiva entre las bases

$$\begin{aligned} & \text{base de } I(i)_j \rightarrow \text{base de } I(i)_l \\ c = (j|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s|i) & \mapsto \begin{cases} (l|\beta_2, \dots, \beta_s|i) & \text{si } \beta_1 = \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

y φ_α está definida por:

$$\varphi_\alpha \left(\sum_c \lambda_c c \right) = \sum_c \lambda_c f(c)$$

Se dice que $I(i)$ como definida anteriormente es la **representación inyectiva** en el vértice i .

Note que es necesaria la hipótesis de que Q no tenga ciclos orientados, porque si no se asume, podría existir un vértice i tal que $P(i)$ resulte de dimensión infinita; con lo cual no sería una representación en $\text{rep } Q$.

Nota 1.50. Sea Q un carcaj, $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$ la representación proyectiva en el vértice i , y c un camino tal que $s(c) = i$, es decir $c = (i | \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l | j)$. Entonces se puede definir la aplicación:

$$\varphi_c : P(i)_i \rightarrow P(i)_j \text{ tal que, } \varphi_c = \varphi_{\gamma_l \dots \gamma_2 \gamma_1}$$

como la composición de las aplicaciones en la representación $P(i)$ que están en el camino c . Más aún, se sigue de la definición de $P(i)$ que $\varphi_c(e_i) = c$.

En el siguiente ejemplo, se describen las representaciones proyectivas, inyectivas y simples del respectivo carcaj.

Ejemplo 1.51. Sea Q el carcaj

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

Entonces, las representaciones proyectivas de Q son:

$$P(1) = \begin{cases} P(1)_1 = \langle e_1 \rangle = k \\ P(1)_2 = \langle \alpha \rangle = k \\ P(1)_3 = 0 \\ P(1)_4 = 0 \end{cases} \implies P(1) \cong k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$P(2) = \begin{cases} P(2)_1 = 0 \\ P(2)_2 = \langle e_2 \rangle = k \\ P(2)_3 = 0 \\ P(2)_4 = 0 \end{cases} \implies P(2) \cong 0 \xrightarrow{0} k \xleftarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$P(3) = \begin{cases} P(3)_1 = 0 \\ P(3)_2 = \langle \beta \rangle = k \\ P(3)_3 = \langle e_3 \rangle = k \\ P(3)_4 = 0 \end{cases} \implies P(3) \cong 0 \xrightarrow{0} k \xleftarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$$

$$P(4) = \begin{cases} P(4)_1 = 0 \\ P(4)_2 = 0 \\ P(4)_3 = 0 \\ P(4)_4 = \langle e_4 \rangle = k \end{cases} \implies P(4) \cong 0 \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k ,$$

las representaciones inyectivas de Q son:

$$I(1) = \begin{cases} I(1)_1 = \langle e_1 \rangle = k \\ I(1)_2 = 0 \\ I(1)_3 = 0 \\ I(1)_4 = 0 \end{cases} \implies I(1) \cong k \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$I(2) = \begin{cases} I(2)_1 = \langle \alpha \rangle = k \\ I(2)_2 = \langle e_2 \rangle = k \\ I(2)_3 = \langle \beta \rangle = k \\ I(2)_4 = 0 \end{cases} \implies I(2) \cong k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$$

$$I(3) = \begin{cases} I(3)_1 = 0 \\ I(3)_2 = 0 \\ I(3)_3 = \langle e_3 \rangle = k \\ I(3)_4 = 0 \end{cases} \implies I(3) \cong 0 \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$$

$$I(4) = \begin{cases} I(4)_1 = 0 \\ I(4)_2 = 0 \\ I(4)_3 = 0 \\ I(4)_4 = \langle e_4 \rangle = k \end{cases} \implies I(4) \cong 0 \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{1} 0 \xrightarrow{0} k$$

y las representaciones simples de Q son:

$$S(1) = \begin{cases} S(1)_1 = \langle e_1 \rangle = k \\ S(1)_2 = 0 \\ S(1)_3 = 0 \\ S(1)_4 = 0 \end{cases} \implies S(1) \cong k \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$S(2) = \begin{cases} S(2)_1 = 0 \\ S(2)_2 = \langle e_2 \rangle = k \\ S(2)_3 = 0 \\ S(2)_4 = 0 \end{cases} \implies S(2) \cong 0 \xrightarrow{0} k \xleftarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$$

$$S(3) = \begin{cases} S(3)_1 = 0 \\ S(3)_2 = 0 \\ S(3)_3 = \langle e_2 \rangle = k \\ S(3)_4 = 0 \end{cases} \implies S(3) \cong 0 \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$$

$$S(4) = \begin{cases} S(4)_1 = 0 \\ S(4)_2 = 0 \\ S(4)_3 = 0 \\ S(4)_4 = \langle e_2 \rangle = k \end{cases} \implies S(4) \cong 0 \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} k \xrightarrow{0} k$$

Note que $P(2) = S(2)$, $P(4) = S(4)$, $I(3) = S(3)$ y $I(1) = S(1)$.

Note que un objeto **proyectivo** es un objeto P tal que el funtor $\text{Hom}(P, -)$ aplica morfismos inyectivos en morfismos inyectivos. La siguiente proposición muestra que las representaciones $P(i)$ satisfacen esta condición.

Proposición 1.52. *Sea $g : M \rightarrow N$ un morfismo sobreyectivo entre representaciones de Q , y sea $P(i)$ la representación proyectiva en el vértice i . Entonces la aplicación:*

$$g_* = \text{Hom}(P(i), M) \longrightarrow \text{Hom}(P(i), N)$$

es sobreyectiva. En otras palabras, si $f : P(i) \rightarrow N$ es cualquier morfismo, entonces existe un morfismo $h : P(i) \rightarrow M$ tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & P(i) & & \\ & \swarrow h & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmuta, esto es, $f = g \circ h = g_(h)$.*

Corolario 1.53. *Si P es proyectivo, entonces cualquier sucesión exacta de la forma:*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

es dividida.

Demostración. Se usa la Proposición 1.57 con el morfismo $f = 1_P$, y se obtiene entonces el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & & \parallel & & \\
 & \swarrow h & & & \\
 M & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Por lo tanto $1 = g \circ h$, así que g es una retracción. Con lo cual, la sucesión se divide por la Proposición 1.38. □

La siguiente proposición muestra que las representaciones $I(i)$ satisfacen esta condición.

Proposición 1.54. *Sea $g : L \rightarrow M$ un morfismo inyectivo entre representaciones de Q , y sea $I(i)$ la representación inyectiva en el vértice i . Entonces la aplicación:*

$$g^* : \text{Hom}(M, I(i)) \longrightarrow \text{Hom}(L, I(i))$$

es sobreyectiva. En otras palabras, si $f : L \rightarrow I(i)$ es cualquier morfismo, entonces existe un morfismo $h : M \rightarrow I(i)$ tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{g} & M \\
 & & \downarrow f & & \swarrow h \\
 & & I(i) & &
 \end{array}$$

conmuta, esto es, $f = h \circ g = g^(h)$.*

De manera similar, se tiene,

Corolario 1.55. *Si I es inyectivo, entonces cualquier sucesión exacta de la forma*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{g} M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

es dividida.

Demostración. Se usa la Proposición 1.54 con el morfismo $1_I : I \rightarrow I$ para obtener el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{g} & M \\
 & & \parallel & & \swarrow h \\
 & & I & &
 \end{array}$$

Lo anterior indica que $1 = h \circ g$ y g es una sección. Así la sucesión es dividida. □

El siguiente paso será entonces mostrar que las representaciones $P(i)$ e $I(i)$ son en efecto indecomponibles.

Proposición 1.56. *Las representaciones $S(i)$, $P(i)$ e $I(i)$ en $\text{rep } Q$ son indecomponibles.*

Demostración. Ver demostración en [20] p. 42. \square

De acuerdo con la Definición 1.13, la siguiente proposición muestra que las representaciones simples $S(i)$ forman un conjunto completo de objetos simples en $\text{rep } Q$ bajo isomorfismo.

Proposición 1.57. *Una representación de Q es simple si y solo si es isomorfa a $S(i)$, para algún $i \in Q_0$.*

Demostración. Dado $S(i)$ una representación simple, se puede ver que esta es simple, puesto que por construcción no existe representación contenida en $S(i)$. De manera recíproca, considere $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ cualquier representación de Q , con M simple. Se debe mostrar que existe un vértice i tal que $S(i)$ es una subrepresentación de M , y se escogerá tal vértice de la manera que sigue.

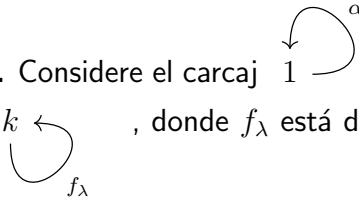
No se debe tener una función distinta de cero en la representación M que comience en el vértice i . Si i es un sumidero en el carcaj, se tiene lo que se desea; sin embargo, es necesario que la representación M sea distinta de cero en el vértice i (o todos los morfismos podrían ser cero). Así pues, sea $i \in Q_0$ tal que $M_i \neq 0$ y $M_j = 0$. Note que tal vértice existe puesto que Q no tiene ciclos orientados.

Escoja ahora una transformación lineal inyectiva: $f_i : S(i)_i \cong k \rightarrow M_i$ y extiéndase trivialmente al morfismo $f : S(i) \rightarrow M$ fijando $f_j = 0$ si $i \neq j$. Tal aplicación es un morfismo de representaciones puesto que el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & S(i)_i & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow f_i & & \downarrow \\
 M_l & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_i & \xrightarrow{\varphi_\beta} & 0
 \end{array}$$

conmuta, para flechas $l \xrightarrow{\alpha} i$ y $i \xrightarrow{\beta} j$ en Q . Ya que f es un morfismo inyectivo, lo anterior muestra que $S(i)$ es una subrepresentación de M , y por tanto, o $M \cong S(i)$ o M no es simple. Lo cual indica que M es isomorfo a una representación simple. \square

El siguiente ejemplo muestra que la anterior proposición puede no cumplirse si el carcaj Q tiene ciclos orientados, puesto que existirían representaciones simples que no son isomorfas a ningún $S(i)$.

Ejemplo 1.58. Considere el carcaj . Entonces, para cada $\lambda \in k$, existe una representación simple $k \leftarrow k$, donde f_λ está dada por la multiplicación por k . Note que Q tiene un

ciclo orientado de longitud 1.

El siguiente teorema brinda un resultado importante a la hora de hablar de los homomorfismos de un proyectivo en un vértice a una representación determinada. Más específicamente, indica que se puede ver a cada espacio vectorial de la representación como un morfismo de $P(i)$ a la representación dada.

Teorema 1.59. Sea $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ una representación de Q . Entonces, para cualquier vértice $i \in Q_0$ existe un isomorfismo de espacios vectoriales:

$$\text{Hom}(P(i), M) \cong M_i$$

Demostración. Ver prueba en [20] p. 44. □

Una consecuencia del Teorema 1.59 es que es posible describir los morfismos entre representaciones proyectivas como sigue:

Corolario 1.60. Sean i y j vértices en Q .

- El espacio vectorial $\text{Hom}(P(i), P(j))$ tiene una base que consiste de todos los caminos de j a i en Q . En particular,

$$\text{End}(P(i)) = \text{Hom}(P(i), P(i)) \cong k$$

- Si $A = \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)$, entonces el espacio vectorial $\text{End}(A) = \text{Hom}(A, A)$ tiene una base que consiste de todos los caminos en Q .

Finalmente, se brinda una caracterización adicional de las representaciones proyectivas simples por medio del espacio de homomorfismos entre representaciones proyectivas.

Corolario 1.61. La representación $P(j)$ es una representación simple si y solo si

$$\text{Hom}(P(i), P(j)) = 0 \text{ para todo } i \neq j$$

Demostración. La representación $P(j)$ es simple si y solo si j es un sumidero, lo cual implica que no hay flechas de j a algún otro vértice i , y según el corolario anterior $\text{Hom}(P(i), P(j)) = 0$. De manera recíproca, el resultado es similar. □

Definición 1.62. Sea M una representación de Q .

- Una **resolución proyectiva** de M es una sucesión exacta:

$$\cdots \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde cada P_i es una representación proyectiva.

- Una **resolución inyectiva** de M es una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_3 \longrightarrow \cdots$$

donde cada I_i es una representación inyectiva.

Teorema 1.63. Sea M una representación de Q . Entonces,

1. Existe una resolución proyectiva de M de la forma:

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

2. Existe una resolución inyectiva de M de la forma:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0$$

Demostración. Ver prueba en [20] p. 46. □

Ejemplo 1.64. Sea Q el carcaj $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$ y considere las representaciones

$$M = S(3) = 3 \quad M' = \begin{matrix} 1 & 3 \\ & 2 \end{matrix}$$

Para la representación M , y teniendo en cuenta que $d = (d_i) = (0, 0, 1)$:

$$P_1 = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} d_{s(\alpha)} P(t(\alpha)) = d_1 P(2) \oplus d_3 P(2) = P(2) = 2$$

$$P_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} d_i P(i) = d_1 P(1) \oplus d_2 P(2) \oplus d_3 P(3) = P(3) = 3$$

Por tanto, la resolución proyectiva de M es:

$$0 \longrightarrow 2 \longrightarrow \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \longrightarrow 3 \longrightarrow 0$$

Para la representación $M' = \begin{matrix} 1 & 3 \\ & 2 \end{matrix}$, se tiene que $d = (d_i) = (1, 1, 1)$ y

$$P_1 = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} d_{s(\alpha)} P(t(\alpha)) = d_1 P(2) \oplus d_3 P(2) = P(2) \oplus P(2) = 2 \oplus 2$$

$$P_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} d_i P(i) = d_1 P(1) \oplus d_2 P(2) \oplus d_3 P(3) = P(1) \oplus P(2) \oplus P(3) = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus 2$$

y la resolución proyectiva queda entonces:

$$0 \longrightarrow 2 \oplus 2 \longrightarrow \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus 2 \longrightarrow \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \longrightarrow 0$$

Sin embargo, tal resolución no es minimal dado que se puede eliminar el sumando directo $S(2) = 2$ en cada representación proyectiva, y se sigue obteniendo una resolución proyectiva:

$$0 \longrightarrow 2 \longrightarrow \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \longrightarrow 0$$

La anterior noción de minimalidad resulta ser abstracta en el sentido que no se puede saber cuando una resolución proyectiva cumple tal propiedad sino hasta cuando es descompuesta en sumandos directos. Las siguientes definiciones aparecen con la finalidad de aclarar el concepto.

Definición 1.65. Sea $M \in \text{rep } Q$. Un **cobrimiento proyectivo** de M es una representación proyectiva P junto con un morfismo sobreyectivo $g : P \twoheadrightarrow M$ con la propiedad de que, siempre que $g' : P' \twoheadrightarrow M$ es un morfismo sobreyectivo con P' proyectiva, entonces existe un morfismo sobreyectivo $h : P' \twoheadrightarrow P$ tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P' & & \\
 & & \downarrow g' & & \\
 P & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

(Note: A dashed arrow h points from P' to P in the original image.)

conmuta, esto es, $gh = g'$. Una **envolvente inyectiva** de M es una representación inyectiva I junto con un morfismo inyectivo $f : M \hookrightarrow I$ con la propiedad de que, siempre que $f' : M \hookrightarrow I'$ sea un morfismo inyectivo en una representación inyectiva I' , entonces existe un morfismo inyectivo $h : I \hookrightarrow I'$ tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 0 & \xrightarrow{g} & M & \xrightarrow{f} & I \\
 & & \downarrow f' & & \swarrow h \\
 & & I' & &
 \end{array}$$

(Note: A dashed arrow h points from I to I' in the original image.)

conmuta, es decir, $hf = f'$.

Con base en estas definiciones, entonces:

Definición 1.66. Una resolución proyectiva

$$\cdots \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

se dice **minimal** si $f_0 : P_0 \rightarrow M$ es un cubrimiento proyectivo de M y $f_i : P_i \rightarrow \ker f_{i-1}$ es un cubrimiento proyectivo, para cada $i > 0$. De manera similar, una resolución inyectiva:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_3 \longrightarrow \cdots$$

se dice **minimal** si $f_0 : M \rightarrow I_0$ es una envolvente inyectiva de M y, para cada $i > 0$, $f_{i-1} : \text{coker } f_{i-1} \rightarrow I_i$ es una envolvente inyectiva de $\text{coker } f_{i-1}$.

Una caracterización importante de los cubrimientos proyectivos y de las envolventes inyectivas es que son únicas bajo isomorfismo, y por ende, si existe una resolución proyectiva o inyectiva minimal, ésta es única ([20], pág 51). Los siguientes resultados son de interés porque caracterizan las representaciones proyectivas por medio de sumas directas de representaciones proyectivas.

Como lo dijimos al inicio de la sección, Q siempre denotará un carcaj sin ciclos orientados por tanto se darán anotaciones cortas acerca de los grupos Ext^1 .

Definición 1.67. Sea $M \in \text{rep } Q$ y considere una resolución proyectiva:

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

de M en $\text{rep } Q$, sea N cualquier representación en $\text{rep } Q$, entonces se puede aplicar el funtor $\text{Hom}(-, N)$ a esta resolución proyectiva, y como resultado se obtiene la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(P_1, N) \longrightarrow \text{Ext}^1(M, N) \longrightarrow 0$$

donde $\text{Ext}^1(M, N) = \text{coker } f^*$ es llamado el **primer grupo de extensiones** de M y N .

Nota 1.68. En categorías arbitrarias, las resoluciones proyectivas no necesariamente se detienen después de dos pasos; de hecho, pueden nunca parar. Así una resolución proyectiva en una categoría general es de la forma

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

y aplicando $\text{Hom}(-, N)$ se forma la llamada *cocadena de complejos*:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{f_0^*} \text{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{f_1^*} \cdots \xrightarrow{f_n^*} \text{Hom}(P_n, N) \longrightarrow \cdots$$

lo cual significa que $f_i^* f_{i-1}^* = 0$, para todo i . Se define el i -ésimo grupo de extensión $\text{Ext}^i(M, N)$ para $i \geq 1$ como el i -ésimo grupo de cohomología de este complejo, esto es,

$$\text{Ext}^i(M, N) = \ker f_{i+1}^* / \text{im } f_i^*$$

Tal definición no depende de la elección de la resolución proyectiva.

En la categoría $\text{rep } Q$ con los Q anteriormente trabajados, todos los grupos Ext^i , con $i \geq 2$ se anulan, puesto que las resoluciones proyectivas minimales son de la forma:

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

La intención será la de mostrar que el espacio vectorial $\text{Ext}^1(M, N)$ es isomorfo al espacio vectorial de extensiones de M por N .

Nota: Tengamos en cuenta que el funtor Ext es independiente a la resolución proyectiva.

Por último, se mostrarán dos propiedades importantes que caracterizan las representaciones inyectivas y proyectivas, relacionadas con el Ext y las cuales serán usadas anteriormente.

Lema 1.69. *Sea $P \in \text{rep } Q$. Entonces P es proyectivo si y solo si $\text{Ext}^1(P, N) = 0$ para toda representación N .*

Demostración. Suponga que P es proyectivo, y sea $N \in \text{rep } Q$. Se sabe que $\text{Ext}^1(N, P)$ es isomorfo al grupo de las extensiones de P por N , esto es, a las clases de equivalencia de sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

Ya que P es proyectivo, cada sucesión exacta corta se divide por el Corolario 2.4, así que la única extensión (salvo isomorfismo) es la extensión dividida. Entonces el grupo de extensiones es trivial, así que $\text{Ext}(N, P)$ también es trivial.

Ahora suponga que $P \in \text{rep } Q$ es tal que para cada $N \in \text{rep } Q$, se tiene que $\text{Ext}^1(N, P) = 0$.

Se toma una resolución proyectiva de P :

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

Entonces al aplicar el funtor contravariante exacto a izquierda $\text{Hom}(-, P_1)$ a esta sucesión se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(P, P_1) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(P_0, P_1) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(P_1, P_1) \longrightarrow \text{Ext}^1(P, P_1) \longrightarrow 0$$

Por hipótesis, $\text{Ext}^1(P, P_1) = 0$, así que f^* es sobreyectiva. En particular, existe un $h \in \text{Hom}(P_0, P_1)$ tal que $f^*h = hf = 1_{P_1}$. Esto es, la resolución proyectiva de P es dividida, lo cual implica que $P_0 \cong P \oplus P_1$. Así pues, P es una subrepresentación de una representación proyectiva, así que P es proyectivo por Teorema 2.24. \square

Lema 1.70. *Sea $I \in \text{rep } Q$. Entonces I es inyectivo si y solo si $\text{Ext}^1(N, I) = 0$ para toda representación N .*

El objetivo principal de la teoría de representaciones de carcajes es estudiar las representaciones indescomponibles y los morfismos irreducibles en $\text{rep } Q$ para un carcaj Q . Para ello, existe una herramienta gráfica denominada el carcaj de Auslander-Reiten, este es un nuevo carcaj

$\Gamma_Q = (\Gamma_0, \Gamma_1)$, en el que Γ_0 es el conjunto de vértices en Q , y está dado por las isoclases de representaciones indescomponibles. Igualmente, Γ_1 será el conjunto de flechas el cual está dado por los llamados morfismos *irreducibles*. De manera general, un morfismo irreducible entre dos representaciones indescomponibles es un morfismo que no es una sección ni una retracción, pero que tampoco se factoriza de manera no trivial a través de ninguna otra representación. A continuación mostraremos un algoritmo nos permitirá de forma recursiva el carcaj de Auslander-Reiten.

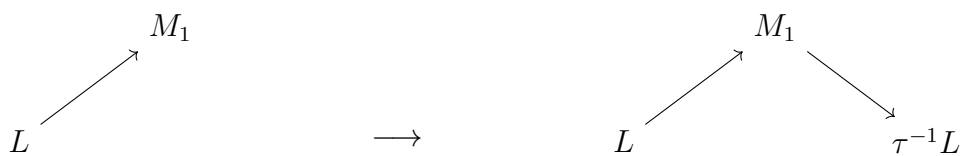
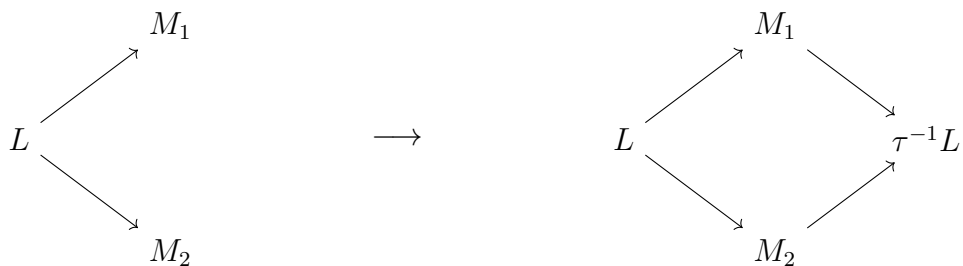
1.4.1. Algoritmo de tejimiento para carcajes de tipo \mathbb{A}_n .

Este algoritmo para la construcción del carcaj de Auslander-Reiten debe su nombre al hecho de que recursivamente construye una malla después de la otra, de izquierda a derecha. Para comenzar, se deben calcular las representaciones proyectivas indescomponibles las cuales están en el lado izquierdo del carcaj de Auslander-Reiten.

1. Se calculan las representaciones proyectivas indescomponibles(ver definición tal):

$$P(1), P(2), \dots, P(n)$$

2. Se dibuja una flecha $P(i) \rightarrow P(j)$ siempre que exista una flecha $j \rightarrow i$ en Q_1 , de tal forma que cada $P(i)$ se ubique en un nivel distinto.
3. Existen tres tipos de mallas. Complete cada malla como se muestra en la siguiente figura





de tal forma que:

$$\underline{\dim}L + \underline{\dim}\tau^{-1}L = \sum_{i=1}^2 \underline{\dim}M_i$$

4. Repita el paso 3 hasta que se obtengan enteros negativos en el vector dimensión.

Observe que cada vez que se usa el paso 3, las representaciones L y M_i ya han sido calculadas antes, y solo se desconoce $\tau^{-1}L$.

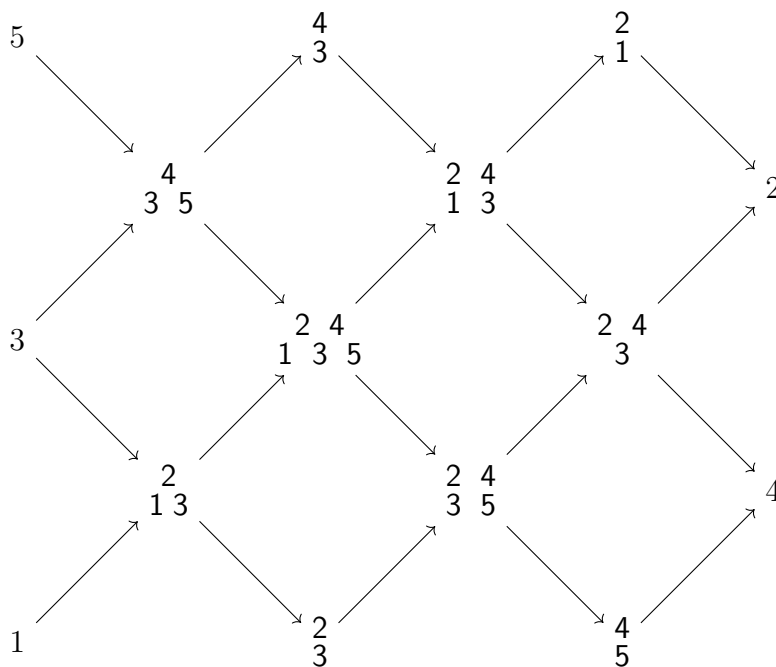
Ejemplo 1.71. Consideremos el siguiente carcaj

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow 4 \longrightarrow 5$$

Las representaciones proyectivas están dadas por:

$$P(1) = 1 \quad P(2) = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \quad P(3) = 3 \quad P(4) = \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix} \quad P(5) = 5$$

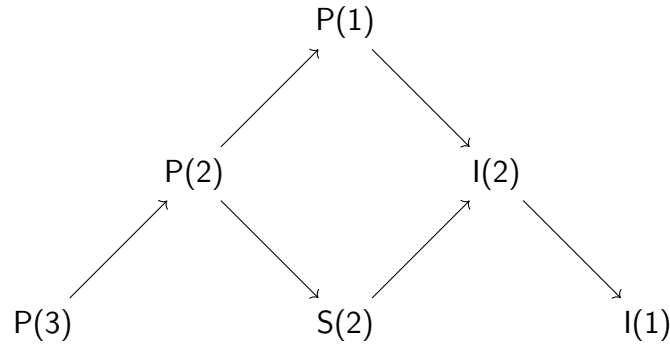
Con lo cual, su carcaj de Auslander-Reiten será:



Note que el carcaj de Auslander-Reiten termina con las representaciones inyectivas de Q .

El siguiente ejemplo lo presentaremos con el fin de ilustrar cómo es el carcaj de Auslander-Reiten asociado a un álgebra \mathbb{A}_n , que en el siguiente capítulo será de utilidad para obtener los módulos inclinantes.

Ejemplo 1.72. Sea \mathbb{A}_3 y consideremos el carcaj $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$ cuyas representaciones proyectivas son como en la Definición 1.10, entonces el carcaj de Auslander-Reiten asociado es:

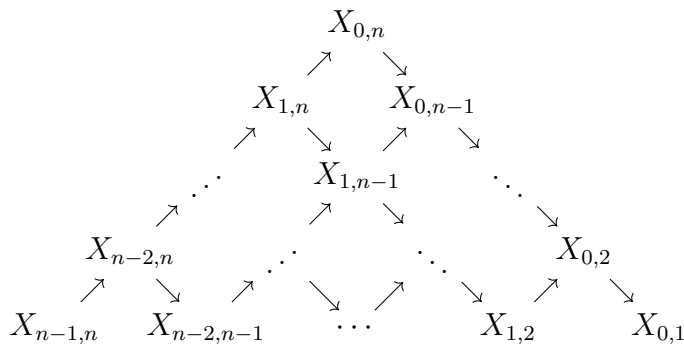


La siguiente definición, dada por Araya en [2] será de gran importancia en el siguiente capítulo, ya que servirá como una herramienta auxiliar para establecer una de las equivalencias fundamentales que utilizaremos para lograr el objetivo del presente trabajo.

Definición 1.73. Se considera el carcaj $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$:

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n.$$

Para cada par de enteros $0 \leq i < j \leq n$, se escribirá como X_{ij} a la representación indescomponible dada por $(0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \xrightarrow{i} k \xrightarrow{i+1} \dots \xrightarrow{j} k \xrightarrow{j+1} 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0)$. Entonces es conocido que $\Gamma_0 = \{X_{ij} \mid 0 \leq i < j \leq n\}$ y el carcaj de Auslander-Reiten Γ tiene la siguiente forma:



Donde, n módulos son proyectivos, $n - 1$ son inyectivos, $n - 2$ son simples y un número triangular $n - 3$ de representaciones adicionales, que llamaremos de tipo L . Además, cada una de estas representaciones tiene la siguiente forma:

- Proyectivas:

$$P(i) = 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \overset{i}{k} \rightarrow \dots \rightarrow k$$

- Inyectivas:

$$I(i) = k \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow \overset{i}{k} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0$$

- Simples:

$$I(i) = 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow \overset{i}{k} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0$$

- De tipo L : L_q^p

$$0 \rightarrow \dots \rightarrow \overset{p}{k} \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow \overset{q-1}{k} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0$$

donde, $p \geq 2$ y $p+2 \leq q \leq n$.

Nota 1.74. Existe una representación proyectiva e inyectiva : $P(1) = I(n)$, una proyectiva simple: $S(n) = P(n)$ y una simple inyectiva: $S(1) = I(1)$.

Capítulo 2

Algunos aspectos combinatorios de los módulos inclinantes en carcajes del tipo

\mathbb{A}_n

El objetivo de éste capítulo es mostrar la estrecha relación que existe entre el conjunto de los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n y los árboles planares binarios. Para esto, primero introduciremos el concepto de módulo inclinante definido por Schiffler en [20] y su relación con el retículo de Tamari por medio de una equivalencia que Krause introduce en [15]. Luego seguiremos la definición que Loday hace en [16] de los árboles planares binarios siguiendo los conceptos de Hille en [13], su relación con el retículo de Tamari, para finalmente culminar con el objetivo de este trabajo que es establecer relacionar objetos de la teoría de representaciones, en particular de la teoría inclinante y objetos de la combinatoria. El retículo de Tamari será la herramienta principal que nos ayudará a establecer dicha biyección, por tanto será un concepto transversal en el capítulo.

2.1. Módulos Inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n

En 1980 el concepto de módulo inclinante fue introducido por Brenner y Butler en [5] con el objetivo de utilizarlos como una de las herramientas principales en la teoría inclinante que sirve como método universal para construir equivalencias entre categorías. Luego en el 2005 fue axiomatizado por Happel y Ringel en [12] lo cual convirtió esta teoría en una de las más importantes en la teoría de representaciones además de otras ramas de la matemática. En esta sección utilizaremos la definición de módulo inclinante para encontrar una estrecha relación de ésta teoría con aspectos combinatoriales.

Definición 2.1. Sea Q un carcaj sin ciclos orientados, sea n el número de vértices y sea $A = kQ$ un álgebra. Un A -módulo T es llamado un módulo inclinante si:

- $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_n$ donde los T_i son pares no isomorfos de A -módulos indescomponibles.

- $\text{Ext}^1(T, T) = 0$.

Nota 2.2. El conjunto de todos los módulos inclinantes de un carcaj del tipo \mathbb{A}_n será denotado T_Λ .

Cuando calculamos los módulos inclinantes de un carcaj del tipo \mathbb{A}_n , obtenemos que para cada n la cantidad de módulos corresponde al n -ésimo número de Catalán y estos se pueden ordenar de varias formas, sin embargo estamos interesados en el orden definido por Happel y Unger en [9] dada en la siguiente definición.

Definición 2.3. Considere en los módulos inclinantes la categoría perpendicular a derecha

$$T^\perp = \{X \in \text{mod}\Lambda ; \text{Ext}_\Lambda^i(T, X) = 0, \forall i > 0\}$$

Sea T_Λ el conjunto de los módulos inclinantes y sean T y $T' \in T_\Lambda$ dos módulos inclinantes arbitrarios. Se define el **orden parcial** en T_Λ como $T < T'$ si $T^\perp \subseteq T'^\perp$.

A continuación presentaremos un ejemplo que permitirá entender las anteriores definiciones, utilizando toda la teoría mencionada en el Capítulo 1. Además, comenzaremos a abrir camino a nuestro objetivo en este documento.

Ejemplo 2.4. Consideremos el carcaj de \mathbb{A}_3 como en el Ejemplo 1.72, cuyos módulos indescomponibles son $P(1), P(2), P(3), S(1), S(3), I(1), I(2)$ salvo isomorfismos, en el sentido del Ejemplo 1.51 y por tanto los candidatos a módulos inclinantes son los siguientes:

- | | |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| ▪ $T_1 = P(1) \oplus P(2) \oplus P(3)$ | ▪ $T_{11} = P(2) \oplus P(3) \oplus S(2)$ |
| ▪ $T_2 = P(1) \oplus P(2) \oplus S(2)$ | ▪ $T_{12} = P(2) \oplus P(3) \oplus I(1)$ |
| ▪ $T_3 = P(1) \oplus P(3) \oplus I(1)$ | ▪ $T_{13} = P(1) \oplus S(2) \oplus I(1)$ |
| ▪ $T_4 = P(1) \oplus I(2) \oplus I(1)$ | ▪ $T_{14} = P(2) \oplus I(2) \oplus I(1)$ |
| ▪ $T_5 = P(1) \oplus I(2) \oplus S(2)$ | ▪ $T_{15} = P(2) \oplus I(2) \oplus S(2)$ |
| ▪ $T_6 = P(1) \oplus P(2) \oplus I(2)$ | ▪ $T_{16} = P(2) \oplus S(2) \oplus I(1)$ |
| ▪ $T_7 = P(1) \oplus P(2) \oplus I(1)$ | ▪ $T_{17} = P(3) \oplus I(2) \oplus I(1)$ |
| ▪ $T_8 = P(1) \oplus P(3) \oplus I(2)$ | ▪ $T_{18} = P(3) \oplus I(2) \oplus S(2)$ |
| ▪ $T_9 = P(1) \oplus P(3) \oplus S(2)$ | ▪ $T_{19} = P(3) \oplus S(2) \oplus I(1)$ |
| ▪ $T_{10} = P(2) \oplus P(3) \oplus I(2)$ | ▪ $T_{20} = I(2) \oplus S(2) \oplus I(1)$ |

Todos los T_i tal $1 \leq i \leq 20$ cumplen la primera condición de la Definición 2.1, ahora debemos garantizar cuáles de los módulos indescomponibles cumplen que $\text{Ext}^1(T_i, T_i) = 0$. De acuerdo con la Definición 1.67, realizaremos la revisión con T_5 , es decir probaremos que

$$\text{Ext}^1 = (P(1) \oplus I(2) \oplus S(2), P(1) \oplus I(2) \oplus S(2)) = 0.$$

Por el Lema1.69 y el Lema1.70 se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1 &= (P(1) \oplus I(2) \oplus S(2), P(1) \oplus I(2) \oplus S(2)) \\ &= (I(2) \oplus S(2), S(2)), \end{aligned}$$

luego por la Definición 1.62, la resolución proyectiva está dada por:

$$0 \longrightarrow P(3) \oplus P(3) \longrightarrow P(1) \oplus P(2) \longrightarrow I(2) \oplus S(2) \longrightarrow 0,$$

y aplicando el functor contravariante $\text{Hom}(-, X)$ visto en la Definición 1.5 , obtenemos que:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(P(1) \oplus P(2), S(2)) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(P(3) \oplus P(3), S(2)) \xrightarrow{f^*} 0. \quad (2-1)$$

Ahora, realizaremos los cálculos para cada $\text{Hom}(-, X)$ en el sentido de las definiciones dadas en el Capítulo 1, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc} P(3) & 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k & P(1) & k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k & P(2) & 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \\ \downarrow & \begin{array}{ccc} 0 \downarrow & 0 \downarrow & 0 \downarrow \end{array} & \downarrow & \begin{array}{ccc} 0 \downarrow & 0 \downarrow & 0 \downarrow \end{array} & \downarrow & \begin{array}{ccc} 0 \downarrow & 1 \downarrow & 0 \downarrow \end{array} \\ S(2) & 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0 & S(2) & 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0 & S(2) & 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0 \end{array},$$

y así $\text{Hom}(P(3), S(2)) \cong 0$, $\text{Hom}(P(1), S(2)) \cong 0$ y $\text{Hom}(P(2), S(2)) \cong k$ respectivamente, lo que implica que 2-1 es equivalente a:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(P(2), S(2)) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(P(3), S(2)) \xrightarrow{f^*} 0,$$

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{g^*} 0 \xrightarrow{f^*} 0,$$

y como por Definición 1.2 y Definición 1.67 tenemos que :

$$\text{coker } f^* = 0,$$

lo que implica para nuestro caso que:

$$\text{Ext}^1(P(1) \oplus I(2) \oplus S(2), P(1) \oplus I(2) \oplus S(2)) = \text{coker } f^* = \ker f^* / \text{Im } g^* \cong 0,$$

y así tenemos que $T_5 = (P(1) \oplus I(2) \oplus S(2), P(1) \oplus I(2) \oplus S(2))$ es un módulo inclinante.

De manera análoga, obtenemos que la lista de módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n es:

$$\begin{aligned}
T_1 &= P(1) \oplus P(2) \oplus P(3), \\
T_2 &= P(1) \oplus P(3) \oplus I(1), \\
T_3 &= P(1) \oplus P(2) \oplus S(2), \\
T_4 &= P(1) \oplus I(2) \oplus S(2), \\
T_5 &= I(1) \oplus I(2) \oplus I(3),
\end{aligned}$$

luego se tiene el conjunto

$$T_\Lambda = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\},$$

los cuales pueden ser ordenados siguiendo la Definición 2.3. Primero encontramos cada conjunto T^\perp :

$$\begin{aligned}
T_1^\perp &= \{I(1), I(2), I(3), S(2), P(2), P(3)\}, \\
T_2^\perp &= \{I(1), I(2), I(3), S(2), P(2)\}, \\
T_3^\perp &= \{I(1), I(2), I(3), P(3)\}, \\
T_4^\perp &= \{I(1), I(2), I(3), S(2)\}, \\
T_5^\perp &= \{I(1), I(2), I(3)\},
\end{aligned}$$

y obtenemos que:

$$\tilde{T} = \{T_1^\perp, T_2^\perp, T_3^\perp, T_4^\perp, T_5^\perp\},$$

por tanto las siguientes relaciones:

$$T_1^\perp \supset T_2^\perp \supset T_4^\perp \supset T_5^\perp.$$

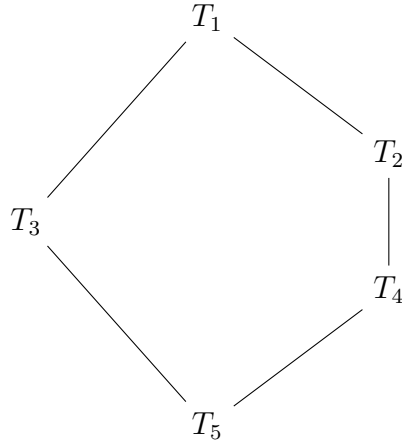
$$T_1^\perp \supset T_3^\perp \supset T_5^\perp.$$

Finalmente, los elementos de T_Λ se pueden ordenar así

$$T_1 \geq T_2 \geq T_4 \geq T_5,$$

$$T_1 \geq T_3 \geq T_5,$$

cuyo retículo asociado es presentado en el siguiente diagrama:



Nota 2.5. En el cálculo del anterior ejemplo se utilizó el hecho de que la suma de representaciones proyectivas es una representación proyectiva cuya prueba se puede encontrar en [20], p. 41. Un resultado análogo se tiene para las representaciones inyectivas.

2.2. Los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n y el retículo de Tamari

Los módulos inclinantes descritos anteriormente, con la relación de orden definida para el conjunto que ellos forman, puede conectarse con distintas ramas de la matemática. En particular, a lo largo de esta sección hablaremos sobre su relación con el retículo de Tamari definido por Dov Tamari en [21], como un conjunto parcialmente ordenado cuyos elementos consisten en las diferentes formas de agrupar una sucesión de objetos en pares, utilizando paréntesis binarios y cuya relación de orden será en el sentido de Geyer definida en [8].

Definición 2.6. Para todo $n \in \mathbb{N}$, los elementos del **retículo de Tamari** que notaremos como \mathcal{T}_n , son todos los paréntesis binarios con $n + 1$ símbolos fijos x_0, x_1, \dots, x_n .

Definición 2.7. Se define una relación de **orden parcial** para \mathcal{T}_n por la regla de semi-asociatividad dada por:

$$A(BC) \longrightarrow (AB)C,$$

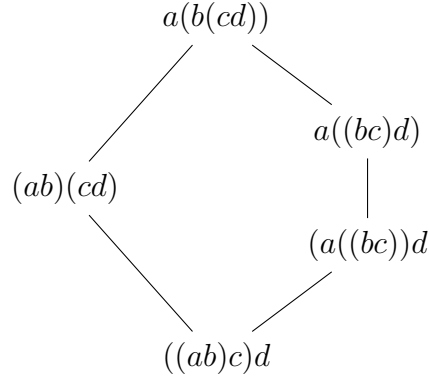
para $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_n$, $t_1 \leq t_2$ si y solo si t_2 puede ser transformado en t_1 por medio de repetidas aplicaciones de la regla de semi-asociatividad.

Ejemplo 2.8. Consideremos \mathcal{T}_3 tal que el orden de sus elementos está dado por:

$$a(b(cd)) \geq a((bc)d) \geq (a((bc))d) \geq ((ab)c)d,$$

$$a(b(cd)) \geq (ab)(cd) \geq ((ab)c)d,$$

cuyo diagrama asociado es:



Nota 2.9. La cardinalidad del retículo de Tamari \mathcal{T}_n es igual a los *números de Catalan*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \tag{2-2}$$

Eugéne Charles Catalan notó que el número de Catalán C_n contaba los paréntesis de una cadena de $n + 1$ letras, y en el contexto de la teoría de representaciones de carcajes, Gabriel notó que el número de Catalán C_n cuenta los módulos inclinantes de los carcajes orientados de tipo \mathbb{A}_n . La conexión con el retículo de Tamari fue señalado por Buan y Krause en [6]. En ese sentido la Definición 1.73 nos permitirá asignar intervalos a representaciones de carcajes, convirtiéndose en una herramienta auxiliar de vital importancia para establecer nuestra primera biyección.

Definición 2.10. Sea $\mathcal{J}(n)$ el conjunto de intervalos $[i, j] = [i, i + 1, \dots, j]$ en \mathbb{Z} con $0 \leq i < j \leq n$. Dos intervalos I, J son *compatibles* si $I \subseteq J$ o $J \subseteq I$ o $I \cap J = \emptyset$. Sea $\mathcal{C}(n)$ el conjunto de todos los subconjuntos $\chi \subseteq \mathcal{J}(n)$ de cardinalidad n , tal que todos los intervalos en χ son compatibles por parejas.

Definición 2.11. Definimos $\text{top}\chi$ para cada $\chi \in \mathcal{C}(n)$ como el vector (a_1, \dots, a_n) tal que

$$a_p = \text{card} \{I \in \chi \mid \text{sup}I = p\}$$

con $1 \leq p \leq n$.

Ejemplo 2.12. Para $n = 3$ tenemos que $\mathcal{J}(3) = \{[0, 3], [0, 2], [0, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 3]\}$ luego cada $\chi \in \mathcal{C}(3)$ estará dado por:

- $\chi_1 = \{[0, 3], [1, 3], [2, 3]\},$
- $\chi_2 = \{[0, 3], [0, 1], [2, 3]\},$

- $\chi_3 = \{[0, 3], [1, 3], [1, 2]\}$,
- $\chi_4 = \{[0, 3], [1, 2], [0, 2]\}$,
- $\chi_5 = \{[0, 3], [0, 2], [0, 1]\}$,

entonces $\text{top}\chi_k$ con $1 \leq k \leq 5$ son:

$$\text{▪ } \text{top}\chi_1 = (a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 3), \text{ donde } \begin{cases} a_1 = \text{card} \{I \in \chi_1 \mid \text{sup}I = 1\} = 0 \\ a_2 = \text{card} \{I \in \chi_1 \mid \text{sup}I = 2\} = 0 \\ a_3 = \text{card} \{I \in \chi_1 \mid \text{sup}I = 3\} = 3 \end{cases}$$

$$\text{▪ } \text{top}\chi_2 = (a_1, a_2, a_3) = (1, 0, 2), \text{ donde } \begin{cases} a_1 = \text{card} \{I \in \chi_2 \mid \text{sup}I = 1\} = 1 \\ a_2 = \text{card} \{I \in \chi_2 \mid \text{sup}I = 2\} = 0 \\ a_3 = \text{card} \{I \in \chi_2 \mid \text{sup}I = 3\} = 2 \end{cases}$$

$$\text{▪ } \text{top}\chi_3 = (a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 2), \text{ donde } \begin{cases} a_1 = \text{card} \{I \in \chi_3 \mid \text{sup}I = 1\} = 0 \\ a_2 = \text{card} \{I \in \chi_3 \mid \text{sup}I = 2\} = 1 \\ a_3 = \text{card} \{I \in \chi_3 \mid \text{sup}I = 3\} = 2 \end{cases}$$

$$\text{▪ } \text{top}\chi_4 = (a_1, a_2, a_3) = (0, 2, 1), \text{ donde } \begin{cases} a_1 = \text{card} \{I \in \chi_4 \mid \text{sup}I = 1\} = 0 \\ a_2 = \text{card} \{I \in \chi_4 \mid \text{sup}I = 2\} = 2 \\ a_3 = \text{card} \{I \in \chi_4 \mid \text{sup}I = 3\} = 1 \end{cases}$$

$$\text{▪ } \text{top}\chi_5 = (a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 1), \text{ donde } \begin{cases} a_1 = \text{card} \{I \in \chi_5 \mid \text{sup}I = 1\} = 1 \\ a_2 = \text{card} \{I \in \chi_5 \mid \text{sup}I = 2\} = 1 \\ a_3 = \text{card} \{I \in \chi_5 \mid \text{sup}I = 3\} = 1 \end{cases}$$

Definición 2.13. Definimos

$$\mathcal{V}(n) = \left\{ \text{top}\chi \mid \sum_i^n a_i = n \text{ y } \sum_{i \leq p} a_i \leq p \right\}.$$

Ejemplo 2.14. Consideremos el Ejemplo 2.12, entonces tenemos que:

$$\text{▪ } \text{para } \text{top}\chi_1 = (0, 0, 3) \implies \begin{cases} \sum_i^n a_i = 0 + 0 + 3 = 3 \\ \sum_{i \leq p} a_i \leq p \begin{cases} \text{si } p = 1 \implies \sum_{i \leq 1} a_i = 0 \leq 1 \\ \text{si } p = 2 \implies \sum_{i \leq 2} a_i = 0 + 0 = 0 \leq 2 \\ \text{si } p = 3 \implies \sum_{i \leq 3} a_i = 0 + 0 + 3 = 3 \leq 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \text{ para } \text{top}\chi_2 = (1, 0, 2) &\implies \begin{cases} \sum_i^n a_i = 1 + 0 + 2 = 3 \\ \sum_{i \leq p} a_i \leq p \begin{cases} \text{si } p = 1 \Rightarrow \sum_{i \leq 1} a_i = 1 \leq 1 \\ \text{si } p = 2 \Rightarrow \sum_{i \leq 2} a_i = 1 + 0 = 1 \leq 2 \\ \text{si } p = 3 \Rightarrow \sum_{i \leq 3} a_i = 1 + 0 + 2 = 3 \leq 3 \end{cases} \end{cases} \\
 \blacksquare \text{ para } \text{top}\chi_3 = (0, 1, 2) &\implies \begin{cases} \sum_i^n a_i = 0 + 1 + 2 = 3 \\ \sum_{i \leq p} a_i \leq p \begin{cases} \text{si } p = 1 \Rightarrow \sum_{i \leq 1} a_i = 0 \leq 1 \\ \text{si } p = 2 \Rightarrow \sum_{i \leq 2} a_i = 0 + 1 = 1 \leq 2 \\ \text{si } p = 3 \Rightarrow \sum_{i \leq 3} a_i = 0 + 1 + 2 = 3 \leq 3 \end{cases} \end{cases} \\
 \blacksquare \text{ para } \text{top}\chi_4 = (0, 2, 1) &\implies \begin{cases} \sum_i^n a_i = 0 + 2 + 1 = 3 \\ \sum_{i \leq p} a_i \leq p \begin{cases} \text{si } p = 1 \Rightarrow \sum_{i \leq 1} a_i = 0 \leq 1 \\ \text{si } p = 2 \Rightarrow \sum_{i \leq 2} a_i = 0 + 2 \leq 2 \\ \text{si } p = 3 \Rightarrow \sum_{i \leq 3} a_i = 0 + 2 + 1 \leq 3 \end{cases} \end{cases} \\
 \blacksquare \text{ para } \text{top}\chi_5 = (1, 1, 1) &\implies \begin{cases} \sum_i^n a_i = 1 + 1 + 1 = 3 \\ \sum_{i \leq p} a_i \leq p \begin{cases} \text{si } p = 1 \Rightarrow \sum_{i \leq 1} a_i = 1 \leq 1 \\ \text{si } p = 2 \Rightarrow \sum_{i \leq 2} a_i = 1 + 1 = 2 \leq 2 \\ \text{si } p = 3 \Rightarrow \sum_{i \leq 3} a_i = 1 + 1 + 1 = 3 \leq 3 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Las anteriores definiciones son fundamentales para asegurar que podemos asociar un intervalo $[i, j]$ a un único paréntesis binario de una cadena de $n + 1$ letras $x_0 \dots x_n$, tal que $[i, j] \in \chi \in \mathcal{C}(n)$ y de manera recíproca, asignando a cada cadena $x_0 \dots x_n$ un único intervalo $[i, j]$ tal que $[i, j] \in \chi \in \mathcal{C}(n)$, esto inducirá una biyección entre el conjunto $\mathcal{C}(n)$ y los elementos del retículo de Tamari, en particular notemos que el cardinal de $\mathcal{C}(n)$ es igual al n -ésimo número de Catalán.

Lema 2.15. *La función que envía $\chi \in \mathcal{C}(n)$ a $\text{top}\chi$ induce una biyección entre $\mathcal{C}(n)$ y $\mathcal{V}(n)$.*

Demostración. Sea $\chi \in \mathcal{C}(n)$ un conjunto de n intervalos de la forma $I = [i, j]$ con $0 \leq i < j \leq n$, tal que queremos asignaremos una forma de asociar paréntesis binarios en la cadena $x_0 \dots x_n$.

Por Definición 2.11 podemos ver que $\text{top}\chi$ coincide con el valor ubicado en la posición a_p , que representa la cantidad de paréntesis que cierran en la coordenada p del intervalo I .

Falta verificar que se cumplan las condiciones del conjunto $\mathcal{V}(n)$. Por definición se tiene que a_p es el número de paréntesis que cierran, por tanto $\sum_i^n a_i = n$. Ahora, sea $(a_1, \dots, a_p, \dots, a_n)$ tal que por definición se tiene que a_p puede ocupar su posición a lo sumo p veces, y supongamos que $\sum_{i \leq p} a_i > p$, entonces existirá i tal que $[p, i] \cap [i, q] \neq \emptyset$ y además $[p, i] \not\subseteq [i, q]$ y $[q, i] \not\subseteq [i, p]$, lo que es una contradicción, ya que todos los intervalos de χ deben ser compatibles dos a dos,

luego $\sum_{i \leq p}^n a_i \leq p$. Luego $\text{top}\chi$ cumple con las dos condiciones de $\mathcal{V}(n)$ y cada forma de asignar los paréntesis en una cadena $x_0 \dots x_n$, estará dada por la anterior construcción. \square

Ahora, como es natural, vamos a definir el orden para el conjunto $\mathcal{C}(n)$ en el sentido de Krause y Buan en [6].

Definición 2.16. Se definen las siguientes relaciones en el conjunto $\mathcal{J}(n)$ de intervalos:

$$\begin{aligned} I \succ I' &\Leftrightarrow \inf I = \inf I' \text{ y } \text{card} I \leq \text{card} I', \\ I \rightarrow I' &\Leftrightarrow \sup I = \sup I' \text{ y } \text{card} I \geq \text{card} I'. \end{aligned}$$

Dados subconjuntos χ y χ' de $\mathcal{J}(n)$ definimos $\chi \succ \chi'$ si para cada $I \in \chi$ existe $I' \in \chi'$ tal que $I \succ I'$. Análogamente $\chi \rightarrow \chi'$ si para cada $I \in \chi$ existe $I' \in \chi'$ tal que $I \rightarrow I'$.

Lema 2.17. El conjunto $\mathcal{C}(n)$ es parcialmente ordenado mediante:

$$\chi' \rightarrow \chi \Leftrightarrow \chi \leq \chi'$$

Demostración. La prueba es una consecuencia directa de la Definición 2.16, además $\chi' \rightarrow \chi$ si y solo si $\chi' \succ \chi$ cuya prueba se encuentra en [6] p. 16. \square

Ejemplo 2.18. Consideremos los Ejemplos 2.12 y 2.14, entonces por el Lema 2.15 se tiene que la siguiente asignación:

$$\chi_1 = \{[0, 3], [1, 3], [2, 3]\} \rightarrow x_0(x_1(x_2x_3)),$$

$$\chi_2 = \{[0, 3], [0, 1], [2, 3]\} \rightarrow (x_0x_1)(x_2x_3),$$

$$\chi_3 = \{[0, 3], [1, 2], [1, 3]\} \rightarrow x_0(x_1x_2)x_3,$$

$$\chi_4 = \{[0, 3], [1, 2], [0, 2]\} \rightarrow (x_0(x_1x_2)x_3,$$

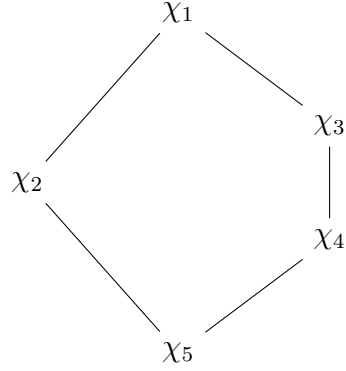
$$\chi_5 = \{[0, 3], [0, 2], [0, 1]\} \rightarrow ((x_0x_1)x_2)x_3,$$

luego el conjunto $\mathcal{C}(3) = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5\}$ se puede ordenar de acuerdo a la Definición 2.16 y al Lema 2.17 así:

$$\chi_1 \geq \chi_3 \geq \chi_4 \geq \chi_5,$$

$$\chi_1 \geq \chi_2 \geq \chi_5,$$

cuyo diagrama asociado es:



A continuación introduciremos una definición en el sentido de Schiffler en [20] que nos permitirá asociar a cada $\chi \in \mathcal{C}(n)$ módulos indescomponibles de \mathbb{A}_n .

Definición 2.19. Sea $P(i) = (P(i), \phi_\alpha)$ una representación proyectiva en el vértice i . El **radical** de $P(i)$ es la representación $\text{rad}P(i) = (R_j, \phi'_\alpha)$ definida por:

$$R_i = 0, \quad R_j = P(i)_j \text{ si } i \neq j \quad \text{y} \quad \phi'_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } s(\alpha) = i \\ \phi_\alpha & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.20. Consideremos los módulos proyectivos del carcaj de \mathbb{A}_3 como en el Ejemplo 1.72, entonces los radicales respectivos estarán dados como se sigue:

$$\begin{aligned} \blacksquare P(1) = k \longrightarrow k \longrightarrow k &\implies \begin{cases} \text{rad}P(1) = k \longrightarrow k \longrightarrow 0 \\ \text{rad}^2P(1) = k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ \text{rad}^3P(1) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \end{cases} \\ \blacksquare P(2) = 0 \longrightarrow k \longrightarrow k &\implies \begin{cases} \text{rad}P(2) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k \\ \text{rad}^2P(2) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ \text{rad}^3P(2) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k \end{cases} \\ \blacksquare P(3) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k &\implies \begin{cases} \text{rad}P(3) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k \\ \text{rad}^2P(3) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ \text{rad}^3P(3) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para llegar a nuestro objetivo en esta sección, necesitaremos introducir una definición que cambiará la forma general de los módulos proyectivos indescomponibles del carcaj de \mathbb{A}_n , lo que permitirá encontrar los módulos inclinantes asociados a cada $\chi \in \mathcal{C}(n)$.

Definición 2.21. Sean un entero $n \geq 1$ y un campo k . Consideremos el carcaj de \mathbb{A}_n con orientación lineal

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n.$$

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ consideramos P_j como el módulo proyectivo indescomponible que tiene como k -bases, todos los caminos que terminan en el vértice j , y para cada intervalo $[i, j]$ en \mathbb{Z} con $0 \leq i < j \leq n$, definimos:

$$M_{[i,j]} := P_j / \text{rad}^{j-i} P_j.$$

Ejemplo 2.22. De acuerdo la Definición 2.21 consideremos los siguientes módulos proyectivos indescomponibles del carcaj de \mathbb{A}_3 :

$$\begin{aligned} \hat{P}(1) &= k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0, \\ \hat{P}(2) &= k \longrightarrow k \longrightarrow 0, \\ \hat{P}(3) &= k \longrightarrow k \longrightarrow k, \end{aligned}$$

tales que su radical está dado por:

$$\begin{aligned} \blacksquare \hat{P}(1) = k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 &\implies \begin{cases} \text{rad} \hat{P}(1) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ \text{rad}^2 \hat{P}(1) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ \text{rad}^3 \hat{P}(1) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \end{cases} \\ \blacksquare \hat{P}(2) = 0 \longrightarrow k \longrightarrow k &\implies \begin{cases} \text{rad} \hat{P}(2) = k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ \text{rad}^2 \hat{P}(2) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ \text{rad}^3 \hat{P}(2) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \end{cases} \\ \blacksquare \hat{P}(3) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k &\implies \begin{cases} \text{rad} \hat{P}(3) = k \longrightarrow k \longrightarrow 0 \\ \text{rad}^2 \hat{P}(3) = k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ \text{rad}^3 \hat{P}(3) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ahora la asignación entre $\chi \in \mathcal{C}(n)$ y los módulos indescomponibles de \mathbb{A}_3 está dada por:

$$\begin{aligned} \blacksquare [0, 3] &\longrightarrow M_{[0,3]} = \hat{P}(3) / \text{rad}^3 \hat{P}(3) = \hat{P}(3), & \blacksquare [1, 2] &\longrightarrow M_{[1,2]} = \hat{P}(2) / \text{rad} \hat{P}(2) = S(2), \\ \blacksquare [0, 2] &\longrightarrow M_{[0,2]} = \hat{P}(3) / \text{rad}^2 \hat{P}(2) = \hat{P}(2), & \blacksquare [1, 3] &\longrightarrow M_{[1,3]} = \hat{P}(3) / \text{rad}^2 \hat{P}(3) = P(2), \\ \blacksquare [0, 1] &\longrightarrow M_{[0,1]} = \hat{P}(1) / \text{rad} \hat{P}(1) = \hat{P}(1), & \blacksquare [2, 3] &\longrightarrow M_{[2,3]} = \hat{P}(3) / \text{rad} \hat{P}(3) = S(3). \end{aligned}$$

Note que por la Definición 2.21 y el Ejemplo 1.72 los módulos que encontramos son $P(1)$, $I(2)$, $I(1)$, $S(2)$, $P(2)$ y $P(3)$ respectivamente.

A continuación presentaremos un Lema que Krause muestra en [15], el cual permitirá describir la biyección entre los elementos del conjunto de los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n y los elementos del retículo de Tamari.

Lema 2.23. (1) El conjunto $\{M_I | I \in \mathcal{J}(n)\}$ es un conjunto completo de clases de isomorfismos de módulos indescomponibles.

(2) Para X_I y X_J dos módulos indescomponibles del carcaj de Auslander-Reiten se tiene que los intervalos I y J son compatibles si y solo si $\text{Ext}^1(X_I, X_J) = 0 = \text{Ext}^1(X_J, X_I)$.

(3) Existe un epimorfismo $M_i \rightarrow M_j$ si y solo si $\text{sup}I = \text{sup}J$ y $\text{card}I \geq \text{card}J$.

Demostración. La prueba de la parte (1) y (3) del Lema se encontrarán en [6]. A continuación realizaremos de la parte (2). (\Rightarrow) Sean X_I y X_J dos módulos indescomponibles del carcaj de Auslander-Reiten tales que $I = [i, j]$ y $J = [r, s]$ son dos intervalos compatibles. Si $I \subseteq J$ se tiene que

$$0 \xrightarrow{f_2} P_j \xrightarrow{f_1} P_i \xrightarrow{f_0} X_{[i,j]} \longrightarrow 0$$

entonces

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(X_{[i,j]}, X_{[r,s]}) \xrightarrow{f_0^*} \text{Hom}(P_i, X_{[r,s]}) \xrightarrow{f_1^*} \text{Hom}(P_j, X_{[r,s]}) \xrightarrow{f_2^*} 0$$

por definición se tiene que

$$\text{Ext}^1(M, N) = \text{coker } f^* = \ker f_2^* / \text{Im} f_1^*$$

entonces el $\text{Hom}(P_i, X_{[r,s]})$ se obtiene así:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & \xrightarrow{r} & 0 & \rightarrow & k & \rightarrow & k & \rightarrow & k & \rightarrow & k & & k & \xrightarrow{j} & k & \rightarrow & k & \rightarrow & k & \xrightarrow{s} & k & \rightarrow & k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \cdots & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & k & \rightarrow & k & \rightarrow & k & \rightarrow & k & \rightarrow & k & & k & \rightarrow & k & \rightarrow & k & \rightarrow & k & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

por tanto $\text{Hom}(P_i, X_{[r,s]}) = k$, análogamente calculamos $\text{Hom}(P_j, X_{[r,s]}) = k$ ahora

$$\begin{aligned} \text{Hom}(P_i, X_{[r,s]}) &\longrightarrow \text{Hom}(P_j, X_{[r,s]}) \\ \langle 0, 0, \dots, 1, 1, 0 \rangle &\longmapsto \lambda \langle 0, 0, \dots, 1, 1, 0 \rangle \end{aligned}$$

con $\lambda \in k$ entonces $\ker(f_1^*) \cong k$ y $\text{Im}(f_1^*) \cong k$, por tanto $\text{Ext}^1(X_I, X_J) = 0$.

Si $J \subseteq I$ se realiza un procedimiento análogo al anterior y si $I \cap J = \emptyset$ tal que $i < j < r \leq s$ se tiene que el cálculo para $\text{Hom}(P_i, X_{[r,s]})$ está dado por

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & \rightarrow & 0 & \xrightarrow{i} & k & \rightarrow & k & \xrightarrow{j} & k & \rightarrow & k & \rightarrow & k & \rightarrow & k & \rightarrow & k \\
 \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\
 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

y por tanto $\text{Hom}(P_i, X_{[r,s]}) = 0$. Análogamente se tiene el resultado para $\text{Hom}(P_j, X_{[r,s]}) = 0$, por tanto $\text{Ext}^1(X_I, X_J) = 0$. Ahora si $r < s < i \leq j$ el cálculo es igual, solo se den tener en cuenta los intervalos en el diagrama conmutativo y $\text{Hom}(P_i, X_{[r,s]}) = 0$ y $\text{Hom}(P_j, X_{[r,s]}) = 0$ luego en este caso también $\text{Ext}^1(X_I, X_J) = 0$. Como obtuvimos que en todos los casos $\text{Ext}^1(X_I, X_J) = 0$ siempre.

(\Leftarrow) Supongamos $\text{Ext}^1(X_I, X_J) = 0 = \text{Ext}^1(X_J, X_I)$ es decir que $\ker(f_2^*) \cong k$ y $\text{Im}(f_1^*) \cong k$, o $\ker(f_2^*) \cong 0$ y $\text{Im}(f_1^*) \cong 0$, dada la resolución proyectiva minimal

$$0 \longrightarrow P_j \longrightarrow P_i \xrightarrow{f_0} X_I \longrightarrow 0$$

Si $\ker(f_2^*) \cong k$ y $\text{Im}(f_1^*) \cong k$ entonces $\text{Hom}(P_i, X_{[r,s]}) = k$ y $\text{Hom}(P_j, X_{[r,s]}) = k$ es decir que $r < i, s < n, r < j$ lo que implica que $r < i < j < s$ y así $I \subseteq J$. Por otro lado si $\ker(f_2^*) \cong 0$ y $\text{Im}(f_1^*) \cong 0$ entonces $\text{Hom}(P_i, X_{[r,s]}) = 0$ y $\text{Hom}(P_j, X_{[r,s]}) = 0$, es decir que $i < r, s < n, j < r$, o $i < r, s < n, i < j$ por tanto $I \cap J \text{ o } J \subseteq I$. El otro caso es análogo y hemos probado lo que se quería probar. \square

Lema 2.24. La asignación $\chi \mapsto \bigoplus_{I \in \chi} M_I$ induce una biyección entre los elementos del conjunto \mathcal{C}_n y los elementos del conjunto T_Λ .

Demostración. El Lema 2.15 y el Lema 2.17 aseguran la existencia de una biyección entre los elementos del conjunto $\mathcal{C}(n)$ y los elementos del retículo de Tamari. Ahora, la Definición 2.21 y el Lema 2.23 aseguran que los elementos de $\mathcal{C}(n)$ se pueden asociar con sumas directas de módulos indescomponibles de longitud n de \mathbb{A}_n que son precisamente los módulos inclinantes y que además preservan el orden que se mantiene en $\mathcal{C}(n)$ y así, en el retículo de Tamari. Luego hemos probado lo que queríamos probar. \square

Ejemplo 2.25. Consideremos el Lema 2.23, la Definición 2.21, el y los Ejemplos 2.22 y 2.4 entonces se tiene la siguiente asignación:

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &= \{[0, 3], [1, 3], [2, 3]\} \longrightarrow P(1) \oplus P(2) \oplus P(3), \\
 \chi_2 &= \{[0, 3], [0, 1], [2, 3]\} \longrightarrow P(1) \oplus I(1) \oplus P(3), \\
 \chi_3 &= \{[0, 3], [1, 2], [1, 3]\} \longrightarrow P(1) \oplus P(2) \oplus S(2), \\
 \chi_4 &= \{[0, 3], [1, 2], [0, 2]\} \longrightarrow P(1) \oplus I(1) \oplus I(2), \\
 \chi_5 &= \{[0, 3], [0, 2], [0, 1]\} \longrightarrow I(1) \oplus I(2) \oplus I(3),
 \end{aligned}$$

entonces por el Lema 2.24 se tiene que:

$$\begin{aligned} x_0(x_1(x_2x_3)) &\longleftrightarrow \chi_1 \longleftrightarrow T_1, \\ (x_0x_1)(x_2x_3) &\longleftrightarrow \chi_2 \longleftrightarrow T_2, \\ x_0((x_1x_2))x_3 &\longleftrightarrow \chi_3 \longleftrightarrow T_3, \\ (x_0(x_1x_2))x_3 &\longleftrightarrow \chi_4 \longleftrightarrow T_4, \\ ((x_0x_1)x_2)x_3 &\longleftrightarrow \chi_5 \longleftrightarrow T_5. \end{aligned}$$

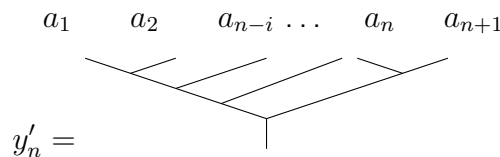
Este es un ejemplo particular, con $n = 3$ para los tres conjuntos, que nos permite ver la relación biyectiva que existe entre ellos.

2.3. Los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n y los árboles planares binarios

Loday en [16] define los árboles planares binarios como objetos combinatorios, los cuales son de interés en múltiples ramas de la matemática. En esta sección nuestro interés es mostrar la relación que existe entre ellos con los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n . Además se definirá una relación de orden parcial entre ellos lo cual permitirá entenderlos de forma reticular.

En la sección anterior definimos los elementos del retículo de Tamari y su relación con la teoría de representaciones, ahora nos encargaremos de mostrar una relación entre los árboles planares binarios y los elementos del retículo de Tamari.

Definición 2.26. Un **árbol planar binario** es un grafo orientado dibujado en el plano que consta de una raíz, n vértices y $n + 1$ hojas. Cada hoja es denotada por a_k , tal que cada vértice interno tiene dos hojas y una raíz. Cada árbol planar binario es denotado por y'_n y tiene la siguiente representación:



Definición 2.27. El número de vértices internos se define como el **grado** del árbol. Para los vértices se definirá un **orden total**, el cual estará por enumeración de izquierda a derecha desde 1 hasta n . Este orden es único si siempre asumimos que por encima de cada vértice no hay aristas.

Notemos que cada árbol es un grafo con un extremo distinguible que llamaremos raíz, con $n + 1$ extremos enumerados desde 1 hasta $n + 1$ y cada vértice que no tiene extremo tendrá precisamente tres aristas conectadas a él, además el árbol tendrá siempre $n + 2$ extremos, una raíz y $n + 1$ hojas, por tanto, tendrá n vértices, $n + 2$ aristas conectadas a una y $n - 1$ aristas internas.

Ejemplo 2.28. Consideremos $n = 4$ tal que:

$$y'_4 = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}$$

es un árbol con 4 vértices y 5 hojas.

Nota 2.29. Por definición solo existe un árbol planar binario con una hoja y grado cero:

$$y'_0 = |$$

y solo existe un árbol planar binario con dos hojas y grado 1:

$$y'_1 = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} .$$

Las siguientes definiciones la introduciremos con el objetivo de facilitar la primera biyección de esta sección.

Definición 2.30. La operación principal que se puede desarrollar con los árboles planares binarios es llamada **injerto** que notaremos por \vee , y es el árbol obtenido al unir las raíces en un nuevo vértice.

Ejemplo 2.31. Consideremos y'_0 entonces:

$$y'_0 \vee y'_0 = | \vee | = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} .$$

Definición 2.32. Al conjunto de todos los árboles de grado n se le dará el nombre de **bosque** y lo notaremos por Y_n .

Ejemplo 2.33. Consideremos todos los árboles de grado 0, 1, 2, 3 y 4, entonces obtenemos los siguientes conjuntos:

$$Y_0 = \{ | \}$$

$$Y_1 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} \}$$

$$Y_2 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \end{array} \}$$

$$Y_3 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \end{array} \}$$

$$Y_4 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \end{array} \}$$

Nota 2.34. Para n fijo, $|Y_n|$ es el n -ésimo número de Catalán.

Ahora, nuestro objetivo es ordenar los elementos del conjunto Y_n como lo hace Loday en [1].

Definición 2.35. Se define una relación de **orden parcial** para Y_n por la siguiente regla:

Sean x' , y' y z' árboles planares binarios con n vértices y $n + 1$ hojas tal que $x' > y'$ se mantiene, si el árbol y' es obtenido del árbol x' , moviendo cada hoja de x' , de izquierda a derecha sobre un vértice a la vez, o $x' > y'$ si y solo si x' puede ser transformado en y' , por medio de repetidas aplicaciones de la regla, que adicionalmente con las siguientes propiedades:

$$(i) (x' \vee y') \vee z' \geq x' \vee (y \vee z'),$$

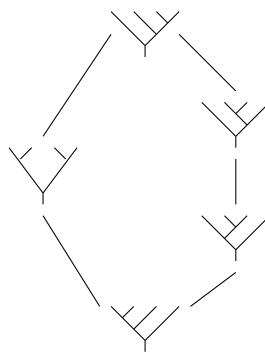
$$(ii) \text{ si } x' > y' \text{ entonces } x' \vee z' > y' \vee z' \text{ y } z' \vee x' > z' \vee y'.$$

Este orden parcial definido para el conjunto Y_n permite organizar de forma reticular los árboles planares binarios de grado n .

Ejemplo 2.36. Consideremos Y_3 como en el Ejemplo 2.33 tal que bajo la Definición 2.35 se tiene que:

$$\begin{aligned} \Psi > \Psi > \Psi > \Psi, \\ \Psi > \Psi > \Psi, \end{aligned}$$

luego su retículo asociado es:



La siguiente definición nos permitirá utilizar la teoría dada hasta ahora para lograr el objetivo de nuestro trabajo.

Lema 2.37. Existe una correspondencia biyectiva entre los elementos del conjunto de los árboles planares binarios Y_n y los elementos del retículo de Tamari \mathcal{T}_n .

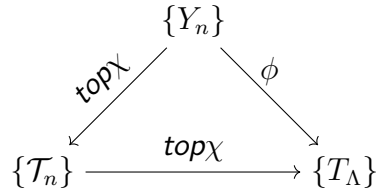
Demostración. Para cada vértice interno i con $1 \leq i \leq n$, de un árbol planar binario de n vértices y $n + 1$ hojas, se asigna un intervalo de la forma $[a(i) - 1, b(i)]$, donde $a(i)$ es el lugar más a la izquierda de un vértice arriba de i y $b(i)$ es el lugar más a la derecha de un vértice arriba de i , teniendo en cuenta el orden descrito en la Definición 2.27. De acuerdo con el Lema 2.15 estos intervalos coinciden con los elementos del retículo de Tamari. \square

Lema 2.38. *Existe una correspondencia biyectiva entre los elementos del conjunto de los árboles planares binarios y los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n*

Demostración. Consecuencia directa del Lema 2.37 y del Lema 2.24. \square

Como consecuencia de los Lemas 2.24, 2.37 y 2.38 obtenemos el principal resultado de este trabajo.

Teorema 2.39. *Se tiene el siguiente diagrama conmutativo de biyecciones:*



donde ϕ es la clásica biyección entre los elementos del conjunto de los árboles planares binario y los elementos del conjunto de los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n .

Ejemplo 2.40. Consideremos Y_3 como en el Ejemplo 2.33, entonces por Lema 2.37 se tendrá la siguiente asignación:

- si $y'_3 = \mathbb{Y}$, entonces, para cada $1 \leq i \leq 3$ $[a(i) - 1, b(i)] = \begin{cases} [0, 3] \\ [1, 3] \\ [2, 3] \end{cases}$
- si $y'_3 = \mathbb{Y}$, entonces, para cada $1 \leq i \leq 3$ $[a(i) - 1, b(i)] = \begin{cases} [0, 3] \\ [0, 1] \\ [2, 3] \end{cases}$
- si $y'_3 = \mathbb{Y}$, entonces, para cada $1 \leq i \leq 3$ $[a(i) - 1, b(i)] = \begin{cases} [0, 3] \\ [1, 3] \\ [1, 2] \end{cases}$
- si $y'_3 = \mathbb{Y}$, entonces, para cada $1 \leq i \leq 3$ $[a(i) - 1, b(i)] = \begin{cases} [0, 3] \\ [0, 2] \\ [1, 2] \end{cases}$

- si $y'_3 = \mathbb{Y}$, entonces, para cada $1 \leq i \leq 3$ $[a(i) - 1, b(i)] = \begin{cases} [0, 3] \\ [0, 2] \\ [0, 1] \end{cases}$

y por el Lema 2.24 tenemos que

- $\mathbb{Y} \longleftrightarrow \chi_1 = \{[0, 3], [1, 3], [2, 3]\} \longleftrightarrow x_0(x_1(x_2x_3)) \longleftrightarrow P(1) \oplus P(2) \oplus P(3)$.
- $\mathbb{Y} \longleftrightarrow \chi_1 = \{[0, 3], [0, 1], [2, 3]\} \longleftrightarrow (x_0x_1)(x_2x_3) \longleftrightarrow P(1) \oplus I(1) \oplus P(3)$,
- $\mathbb{Y} \longleftrightarrow \chi_1 = \{[0, 3], [1, 3], [1, 2]\} \longleftrightarrow x_0((x_1x_2)x_3) \longleftrightarrow P(1) \oplus P(2) \oplus S(2)$,
- $\mathbb{Y} \longleftrightarrow \chi_1 = \{[0, 3], [0, 2], [1, 2]\} \longleftrightarrow (x_0(x_1x_2))x_3 \longleftrightarrow P(1) \oplus I(2) \oplus S(2)$,
- $\mathbb{Y} \longleftrightarrow \chi_1 = \{[0, 3], [0, 2], [0, 1]\} \longleftrightarrow ((x_0x_1)x_2)x_3 \longleftrightarrow I(1) \oplus I(2) \oplus I(3)$.

Conclusiones

- (1) Existe una estrecha relación entre los elementos del conjunto de los módulos inclinantes en carcajes del tipo \mathbb{A}_n y el retículo de Tamari debido a tres hechos importantes: la cardinalidad en sus conjuntos y el orden que se define para ellos, además de una herramienta fundamental que son los intervalos compatibles del conjunto $\mathcal{J}(n)$.
- (2) Existe una estrecha relación entre los elementos de los conjuntos de los árboles planares binarios y los elementos del retículo de Tamari, a través de los mismos hechos del anterior ítem.
- (3) Dado lo anterior pudimos observar la relación que existe dentro de la teoría de representaciones y diferentes objetos de la combinatoria, como lo son, el retículos de Tamari y los árboles planares binarios.
- (4) La particularidad de este trabajo, es que el camino que tomamos para establecer las anteriores biyecciones, que son la unión de las biyecciones propuestas por Flores, Kimura y Rognerud en [7], por Krause en [15] y por Hille en [13].

Bibliografía

- [1] G. Andrews, *Dichotomy of the addition of natural numbers*, arXiv:1108.6238, 2011.
- [2] T. Araya, *Exceptional Sequences over graded Cohen-Macaulay rings*, Math. J. Okayama Univ., 1999.
- [3] I. Assem, D. Simson, and A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 2006. 1-457.
- [4] M. Auslander and S. O. Smalø, *Preprojective modules over Artin algebras*, Journal of algebra 66, 1980. 1-17.
- [5] S. Brenner and M.C.R. Butler, *The equivalence of certain functors occurring in the representation theory of algebras and species*, J.London Math. Soc., 14(1976). 1-457.
- [6] A.B. Buan and H. Krause, *Tilting and cotilting for quivers and type \mathbb{A}_n* , 190, J. Pure Appl. Algebra, 2004. 1-21.
- [7] M. Flores, Y. Kimura, and B. Rognerud, *Combinatorics of Quasi-Hereditary Structures*, arXiv:2004.04726v2, 2020.
- [8] W. Geyer, *On Tamari lattices*, Discrete Mathematics. 1-133.
- [9] D. Happel and L. Unger, *On a Partial Order of Tilting Modules*, Mathematics Subject Classifications, 2005. 1-10.
- [10] L. A. Hugel and F. U. Celho, *Infinitely generated tilting modules of finite projective dimension*, Forum Mathematicum, Berlin, New York: De Gruyter, Unknown Month 1989. 239-250.
- [11] L. A. Hugel, A. Tonolo, and J. Trlifaj, *Tilting preenvelopes and cotilting precovers*, Algebras and Representation Theory, 2001. 155-170.
- [12] D. Happel and C. M. Ringel, *Tilted Algebras*, Transactions of the American Mathematical Society, American Mathematical Society **274** (2009), 1-46.
- [13] L. Hille, *On the Volume of a Tilting Module*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 2006.
- [14] L. A. Hugel, D. Happel, and H. Krause, *Handbook of tilting theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series 332, Cambridge University, 2009. 1-470.
- [15] H. Krause, *The Tamari Lattice in Representation Theory*, 2011. 1-92.
- [16] J.L. Loday, *Arithmetree*, Journal of Algebra 258, 2005.
- [17] Y. Miyashita, S. Rajabi, and S. Yassemi, *Tilting modules of finite projective dimension*, Mathematische Zeitschrift 193, 1986. 113-146.
- [18] P. Moradifar, S. Rajabi, and S. Yassemi, *Tilting Modules under Special Base Changes*, J. Pure Appl. Algebra, 2018. 1-17.

-
- [19] L. L. Scott, *Simulating algebraic geometry with algebra. I. The algebraic theory of derived categories*, The Arcata Conference on Representations of Finite Groups Vol. 47. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, Arcata, California, 1986.
- [20] R. Schiffler, *Quiver Representation*, Springer, Canadá, 2014.
- [21] D. Tamari and H. Krause, *The algebra of bracketings and their enumeration*, Nieuw Arch. Wisk. (3), J. Pure Appl. Algebra, MR 146227, 1962. 1-146.