



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA DE CONGLOMERADO Y NÚMEROS DE MARKOV

MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

Yeniffer Tatiana Chacón Pardo
Dirigido por: Verónica Cifuentes Vargas
Codirigido por: Carolina Melo López

Bogotá DC
Octubre de 2021

Resumen

El principal objetivo de este documento es realizar un estudio cuidadoso del artículo [8], en donde se hace un acercamiento a la conjetura de unicidad de los números de Markov, enunciada hace aproximadamente un siglo por Frobenius. Para lo anterior, se recopilarán algunos resultados notables relacionados a las álgebras de conglomerado y los números de Markov, que son números estrechamente relacionados con áreas de la matemática como la combinatoria, la geometría, la teoría de aproximación, el álgebra, la topología, entre otras. Para ello, se hará un estudio de los emparejamientos perfectos de grafos asociados a unos caminos reticulares en específico, llamados caminos de Christoffel. Los resultados mostrados se encuentran principalmente en los siguientes documentos [1], [6], [11] y [12].

Palabras clave. Números de Markov, álgebras de conglomerado, caminos de Christoffel, grafos serpiente, emparejamientos perfectos, fracciones continuas.

Clasificación AMS: 13F60.

Agradecimientos: Agradezco al todo poderoso por permitirme llegar hasta esta instancia fueron días de sacrificio y esfuerzo, días en donde no solo me forme como una profesional sino como una persona, a mi madre por apoyarme por guiarme por impulsarme aún cuando yo quería desistir este momento y este logro es mas propio de ella que de mi, a mi hermana por ser mi apoyo en todo por ser mi mayor inspiración para día a día crecer en todas las facetas de mi vida.

1. Introducción

Algunos de los ejemplos más famosos y estudiados en combinatoria son los arboles de Markov y de Farey. El primer árbol, se puede conseguir considerando la ecuación diofántica de Markov

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1x_2x_3. \quad (1)$$

Una terna $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$ con $a_i > 0$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, se denomina *terna de Markov* si es solución de la ecuación (1), y cada a_i se conoce como un *número de Markov*. Los números de Markov aparecen en la OEIS¹ como la sucesión A002559, y sus primeros términos son:

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 5, 13, 29, 34, \dots\}.$$

Existe una manera de construir cada terna de Markov, se considera la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3(a_2a_3)x + a_2^2 + a_3^2 \\ f(x) &= (x - a_1)(x - a'_1) \end{aligned}$$

Es evidente que las dos soluciones para esta ecuación cuadrática son a_2 y a_3 si son números de Markov, en consecuencia si a_1 y a'_1 son dichas soluciones se tendrá:

$$a_1a'_1 = a_2^2 + a_3^2 \quad \text{y} \quad a_1 + a'_1 = 3a_2a_3$$

Por tanto (a_1, a_2, a_3) es una terna de Markov, y así lo serán también:

$$\begin{aligned} (3a_2a_3 - a_1, a_2, a_3) &= \left(\frac{a_2^2 + a_3^2}{a_1}, a_2, a_3 \right) \\ (a_1, 3a_1a_3 - a_2, a_3) &= \left(\frac{a_2^2 + a_3^2}{a_1}, a_2, a_3 \right) \\ (a_1, a_2, 3a_1a_2 - a_3) &= \left(\frac{a_2^2 + a_3^2}{a_1}, a_2, a_3 \right) \end{aligned}$$

Como la terna $(1, 1, 1)$ satisface la ecuación (1), entonces empezando con esa terna y la terna $(1, 2, 1)$, utilizando la forma recursiva que se menciona a continuación:

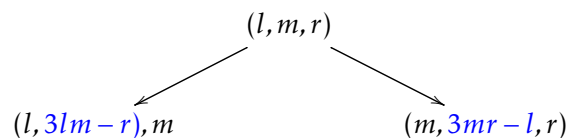


Figura 1: Forma recursiva $T_{\mathcal{M}}$

¹On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) es una base de datos que registra secuencias de números enteros.

Haciendo este proceso varias veces se puede ir encontrando las ternas del árbol de Markov

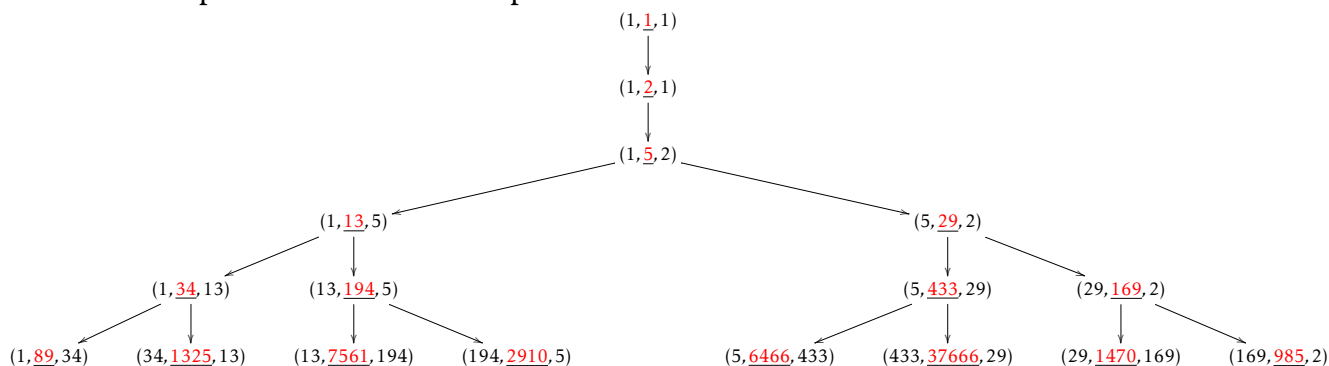


Figura 2: Árbol de Markov $T_{\mathcal{M}}$

Aspectos importantes:

- Las ternas $(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 1)$ (también denominadas ternas singulares) son las únicas ternas de Markov con números repetidos.
- Todas las ternas de Markov no singulares aparecen exactamente una vez en el árbol de Markov.
- Dos números de Markov cualesquiera en una terna son primos relativos.
- En cada terna de Markov distinta a $(1, 1, 1)$, hay un único número de Markov máximo denotado por m .

Al día de hoy, un problema que aún sigue abierto es demostrar que los números maximales subrayados en el árbol de Markov son únicos. Se puede observar inicialmente que el máximo aparece tan solo una vez en la terna, lo cual es fácil de ver con la construcción hecha anteriormente, pero lo difícil es ver que este máximo es único y esta es precisamente la conjetura de Frobenius que lleva más de 100 años abierta, dicha conjetura se enuncia a continuación:

Conjetura 1.1 (Conjetura de unicidad III, Frobenius (1913), [1], p. 48). *Cada número de Markov aparece exactamente una vez como el máximo en una terna de Markov.*

Es importante mencionar que durante estos años, Ralf Schiffler y sus colaboradores, han realizado algunos avances con respecto a la conjetura de unicidad. En el artículo “Continued fractions and ordering on the Markov numbers” se muestra una relación entre los números de Markov y los caminos de Christoffel, en donde se muestra una conjetura más débil enunciada por Aigner en [1]. Meses después, en el artículo “On the ordering of the Markov numbers”, escrito por los mismos autores, se

da una respuesta parcial a otras conjeturas asociadas en términos de la pendiente del segmento de línea que conecta los dos puntos de una malla cuadriculada.

Cabe resaltar que, en estos artículos, fue clave el uso de los grafos serpiente, las fracciones continuas y las álgebras de conglomerado.

2. Números de Fibonacci, números de Pell y árbol de Farey

Es interesante observar las ramas del árbol de Markov, una de ellas, ubicada hacia el lado izquierdo del árbol en donde se encuentran los números de Fibonacci F_n . Esta sucesión de números es tal que, satisface $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y la fórmula recursiva dada por:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

En la parte izquierda del $T_{\mathcal{M}}$ se puede encontrar los números de Fibonacci organizados de la siguiente manera:

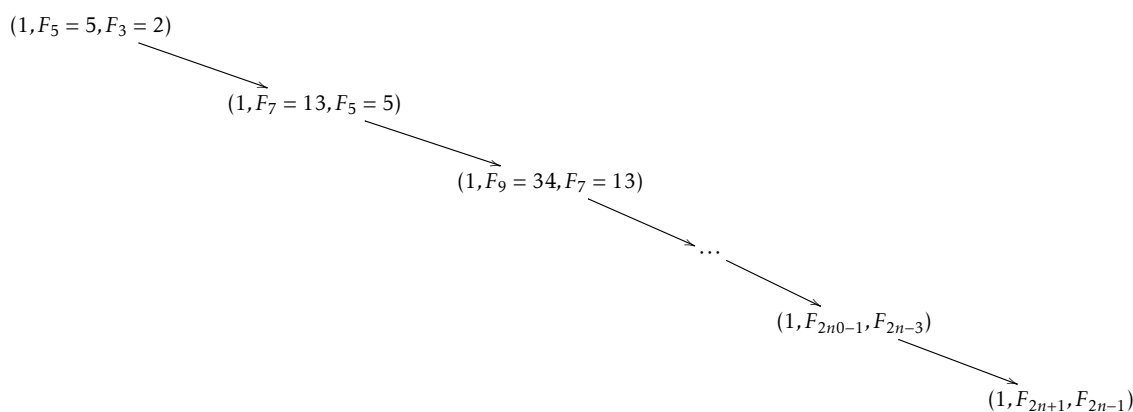


Figura 3: Rama Fibonacci

En relación a la forma recursiva de encontrar las ternas de Markov, se puede decir que:

$$F_{2n+1} = 3F_{2n-1} - F_{2n-3}, \quad n \geq 2.$$

En esta rama se observa que todos los números impares de Fibonacci de la forma:

$$F_{2n+1}, \quad n \geq 0,$$

son números de Markov.

Similarmente, se puede observar en la rama derecha de árbol de Markov a los números de Pell, los cuales forman una sucesión infinita de números enteros conocida desde tiempos antiguos, que comprende los denominadores de la fracción continua de la raíz cuadrada de dos:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \dots$$

Así, los números de Pell son los denominadores que empiezan por:

$$1, 2, 5, 12, \dots$$

Luego su forma recursiva viene dada por:

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Y de forma similar que en la sucesión de Fibonacci, se puede deducir que:

$$\begin{aligned} P_{2n+1} &= 6P_{2n-1} - P_{2n-3} \\ &= 3 \cdot 2P_{2n-1} - P_{2n-3}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Obteniendo de esta manera lo siguiente:

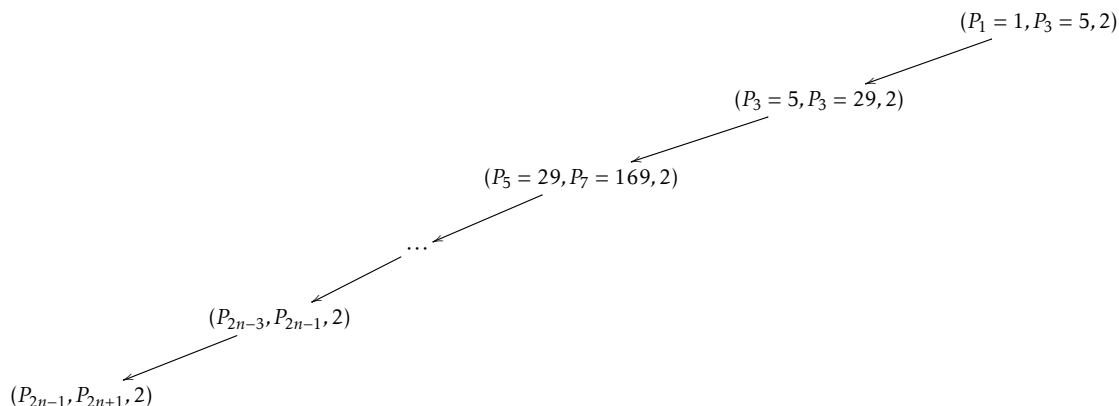


Figura 4: Rama números de Pell

Concluyendo así que, dos sub-sucesiones infinitas de números de Markov están formadas por los números de Fibonacci y Pell de índice impar.

Además de enunciar la conjetura 1.1, Frobenius también estudió las conexiones entre los números de Markov y una enumeración recursiva de los números racionales entre 0 y 1. Esta enumeración se puede visualizar por medio de un árbol $T_{\mathcal{F}}$ llamado el *árbol de Farey*. Para su construcción se tiene una terna $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a'}{b'})$ donde se define el **mediante** de los números $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$ como $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} := \frac{a+a'}{b+b'}$, donde se empieza con la terna $(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1})$ y se aplica la forma recursiva dada:

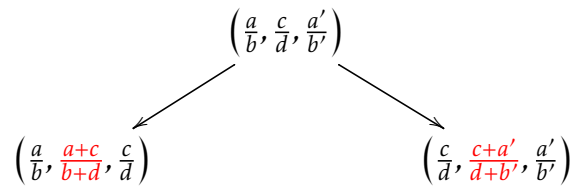


Figura 5: Forma recursiva del Árbol de Farey $T_{\mathcal{F}}$.

Donde se obtiene un árbol binario, etiquetado con ternas de números racionales llamado árbol de Farey.

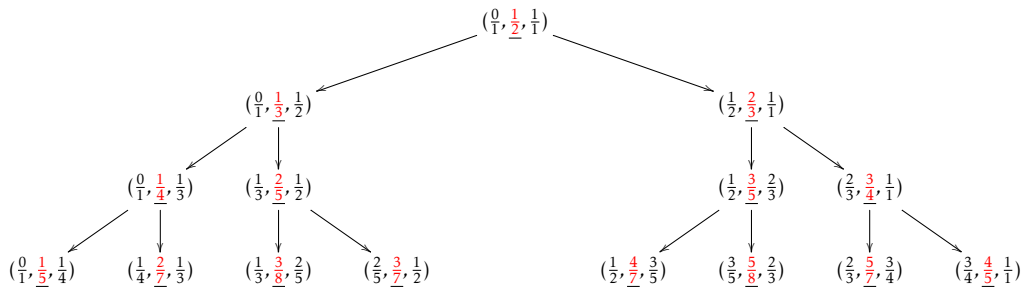


Figura 6: Árbol de Farey $T_{\mathcal{F}}$.

Aspectos importantes

- Sean $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$, vecinos de Farey, entonces entre las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$, se encuentra el **mediante** el cual es la única fracción con el menor denominador.
- Cada número racional entre 0 y 1 aparece en la tabla de Farey y se genera una única vez como **mediante** de dos números.

- Sean $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$, con $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} \leq 1$, tales que satisfacen $a'b - ab' = 1$, entonces $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$ son vecinos de Farey en alguna fila y estos están contenidos en una terna de Farey.

Se puede notar que los árboles de Markov y de Farey son combinatoriamente equivalentes, por lo cual se puede definir una correspondencia entre las ternas de Farey y las de Markov de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Q}_{[0,1]} &\longrightarrow \mathcal{M}, \\ t &\longmapsto m_t, \end{aligned}$$

por medio de la cual, se define un número de Markov $m_{\frac{p}{q}} \in T_{\mathcal{M}}$, donde $p < q$ y q, p son números enteros positivos primos relativos, recibe el índice $t \in \mathbb{Q}_{[0,1]}$ que ocupa el lugar correspondiente en T_F , esto es a cada número de Markov le corresponde un número de Farey. En consecuencia, la conjetura de unicidad se puede re-expresar de la siguiente manera.

Conjetura 2.1 ([1], p. 54). La aplicación $\phi : \mathbb{Q}_{[0,1]} \rightarrow \mathcal{M}$ es inyectiva.

Una pregunta natural que surge a partir de esta correspondencia es si el orden de los números de Markov se puede heredar a $\mathbb{Q}_{[0,1]}$, o viceversa. En general, no es cierto que si $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, entonces $m_{p/q} < m_{r/s}$, de hecho se tiene que $m_{p/p+1} < m_{1/2p-1}$, para $p \geq 7$. Sin embargo, en [12] se probaron recientemente algunas propiedades interesantes que permiten entender mejor el crecimiento de los números de Markov con respecto al orden de unas familias particulares de números racionales.

Teorema 1 ([7], Teorema 4.1). *Sea $i > 0$,*

1. $m_{\frac{p}{q}} < m_{\frac{p}{q+i}}$,
2. $m_{\frac{p}{q}} < m_{\frac{p+i}{q}}$,
3. $m_{\frac{p}{q}} < m_{\frac{p-i}{q+i}}$,

donde las fracciones en los subíndices son reducidas.

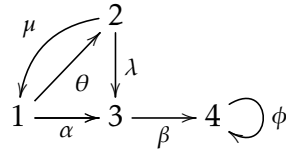
Antes de abordar la idea de la prueba del ítem 1 del *Teorema 1*, se introducirá algunos conceptos previos correspondientes a las álgebras de conglomerado, la teoría de grafos, la combinatoria y la teoría de números, que permitirán ver a los números de Markov desde otro punto de vista.

3. Álgebra de Conglomerado

Las álgebras de conglomerado se introdujeron de manera combinatoria como un anillo conmutativo con un conjunto de generadores y relaciones. Aún en el caso en donde existan infinitos generadores y relaciones, todos se obtienen de un número finito de ellos mediante un procedimiento inductivo nombrado como mutación.

Definición 3.1 ([6], p.9). Un *carcaj* es una cuádrupla $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, que consiste en dos conjuntos Q_0 (conjunto de vértices) y Q_1 (conjunto de flechas), y dos funciones $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$, definidas por $s(\alpha) = i$, y $t(\alpha) = j$, para toda flecha $\alpha : i \rightarrow j \in Q_1$, es decir, α es una flecha del vértice i al vértice j , por tanto se puede referir el vértice $s(\alpha)$ como el punto de partida y el vértice $t(\alpha)$ como el punto de llegada de α .

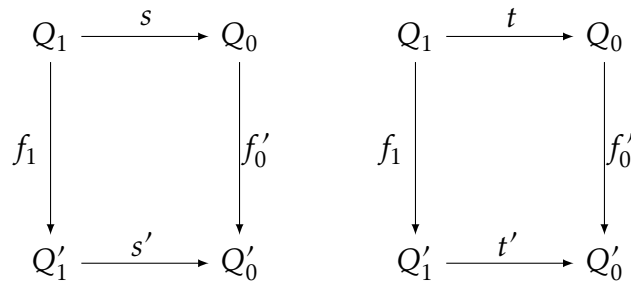
Ejemplo 2. Sea $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Q_1 = \{\alpha, \beta, \lambda, \mu, \theta, \phi\}$



En este caso,

$$\left\{ \begin{array}{cccc} s(\theta) = 1 & s(\mu) = 2 & t(\mu) = 1 & t(\alpha) = 3 \\ s(\alpha) = 1 & s(\lambda) = 2 & t(\theta) = 2 & t(\beta) = 4 \\ s(\beta) = 3 & s(\phi) = 4 & t(\lambda) = 3 & t(\phi) = 4 \end{array} \right\}$$

Definición 3.2. ([6], p.10) Sea $Q = (Q_0, Q, s, t)$ y $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ dos carcajes. Un *isomorfismo* entre Q y Q' es un par (f_0, f_1) , donde $f_0 : Q_0 \rightarrow Q'_0$ y $f_1 : Q_1 \rightarrow Q'_1$ son funciones biyectivas tales que los siguientes diagramas conmutan



Es decir, para todas las flechas $\alpha \in Q_1$ se tiene $f_0(s(\alpha)) = s'(f_1(\alpha))$ y $f_0(t(\alpha)) = t'(f_1(\alpha))$. Si existe un isomorfismo entre Q y Q' entonces se dice que Q y Q' son isomorfos, en este caso se escribe $Q \cong Q'$.

Definición 3.3. ([5], Definición 2.1.1) Un carcaj es un grafo de orientación finita, que consta de vértices y bordes dirigidos (llamados flechas). Se permite múltiples aristas, pero no se permite bucles (es decir, una flecha no puede conectar un vértice consigo mismo) y orientada 2- ciclos (es decir, ninguna flecha de orientación opuesta puede conectar el mismo par de vértices). No es necesario conectar un carcaj.

Definición 3.4. ([5], Definición 2.1.2) Sea Q un carcaj sin bucles y sin 2-ciclos, y sea $k \in Q_0$. La mutación $\mu_k(Q)$ con respecto al vértice k , se obtiene realizando cada uno de los pasos siguientes:

1. La orientación de todas las flechas en Q incidentes a k se invierte.
2. Se agrega una flecha $i \rightarrow j$ por cada camino $i \rightarrow k \rightarrow j$ existente en Q .
3. Finalmente, se borran cada par de flechas opuestas (2-ciclos).

Con base en la definición dada anteriormente para mutación de carcajes, se verá ahora como se define la mutación de una semilla y se define a partir de esto lo que es un álgebra de conglomerado.

Definición 3.5 ([6], Definición 2.3.9). Una *semilla* en $F = \mathbb{Q}(y_1, \dots, y_n)$ es un par $\Sigma = (\mathbf{x}, Q)$, donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es un conjunto generador de F , y Q es un carcaj con vértices $\{1, \dots, n\}$ la cual no tiene bucles ni 2-ciclos.

Definición 3.6 ([6], Definición 2.3.10). Sea $\Sigma = (\mathbf{x}, Q)$ una semilla y $k \in [n]$ un vértice de Q , donde $k \in [n]$ es el conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$. Se define una *mutación* como una nueva semilla $\mu_k(\Sigma) = (\mu_k(x), \mu_k(Q))$ de la siguiente manera:

1. $\mu_k(x) = (\mu_k(x_1), \dots, \mu_k(x_n))$, con

$$\mu_k(x_i) = \begin{cases} x_i & \text{si } i \neq k \\ \frac{1}{x_k} \left(\prod_{i \rightarrow k} x_i + \prod_{k \rightarrow j} x_j \right) & \text{si } i = k \end{cases}$$

2. $\mu_k(Q)$ es el carcaj obtenido de Q mediante la mutación de carcajes.

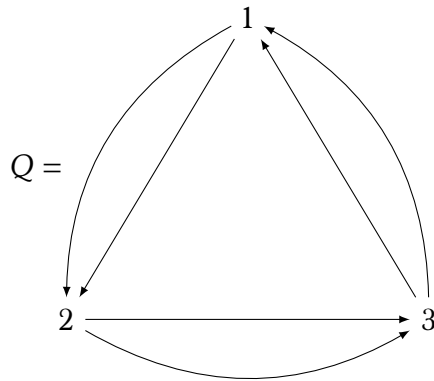
La sucesión $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ recibe el nombre de *conglomerado*, y sus elementos son llamados *variables de conglomerado*.

Definición 3.7 ([6], Definición 2.3.14). Sea (\mathbf{x}, Q) una semilla. El *álgebra de conglomerado* $\mathcal{A}\Sigma = \mathcal{A}(\mathbf{x}, Q)$ asociada a la semilla dada es el subálgebra de $\mathbb{Q}(y_1, \dots, y_n)$ generada por todas las variables de conglomerado obtenidas al realizar el proceso de mutación.

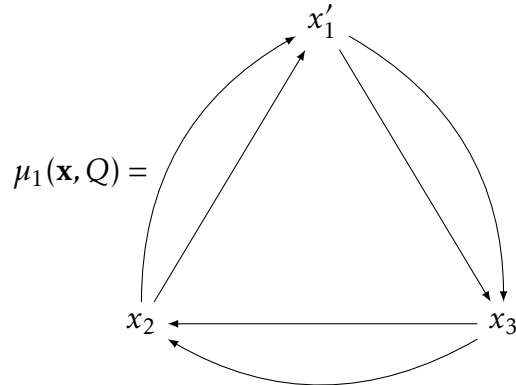
Definición 3.8 ([5], Definición 2.8.1). Sean $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ y $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ dos carcajes. Q y Q' son *mutaciones equivalentes* si existe una sucesión (k_1, \dots, k_r) , con $k_i \in Q_0$ para todo $1 \leq i \leq r$, tal que $(\mu_{k_1} \circ \dots \circ \mu_{k_r})(Q) = Q'$.

En otros términos, dos carcajes son mutaciones equivalentes si uno puede obtenerse del otro utilizando un número finito de mutaciones. Si Q' es un carcaj que es equivalente bajo mutación a Q , entonces las álgebras de conglomerado son isomorfas.

Ejemplo 3 (Carcaj de Markov, [6], p. 38). Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un conglomerado y sea:



el carcaj asociado, entonces la mutación con respecto al vértice 1 es:



donde, por la mutación de la semilla se obtiene que $x'_1 = \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1}$.

Se puede notar que la expresión racional

$$T(i) := \frac{x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2}{x_i x_{i+1} x_{i+2}}$$

es independiente de $i \in \mathbb{Z}$. En efecto, como $x_{i+3}x_i = x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2$ es la relación de cambio, entonces

$$\begin{aligned} T(i) &= \frac{x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2}{x_i x_{i+1} x_{i+2}} = \frac{x_i^2 + x_i x_{i+3}}{x_i x_{i+1} x_{i+2}} = \frac{x_i(x_i + x_{i+3})}{x_i x_{i+1} x_{i+2}} = \frac{x_i + x_{i+3}}{x_{i+1} x_{i+2}} \\ &= \frac{(x_i + x_{i+3})x_{i+3}}{x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}} = \frac{x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + x_{i+3}^2}{x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}} = T(i+1) \end{aligned}$$

Si $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, entonces $T(1) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1 x_2 x_3} = 3$, por lo tanto

$$x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 = 3x_i x_{i+1} x_{i+2}.$$

La anterior expresión no es más que la ecuación diofántica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1 x_2 x_3$ mostrada en la ecuación (1).

Nota 1. En el caso del carcaj de Markov, se puede ver que no hay otros carcajes diferentes a él que sean mutaciones equivalentes. Por otra parte, se observa que hay una cantidad infinita de variables de conglomerado. Estas dos características son importantes en la teoría de álgebras de conglomerado pues corresponden a las nociones de álgebras de conglomerado de tipo finito y de tipo mutación finito.

Se dice que el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}\Sigma$ es de *tipo finito* si hay únicamente un número finito de variables de conglomerado. Al igual que en la teoría de representaciones de carcajes, un problema de bastante interés es la caracterización de las álgebras de tipo finito. Fomin y Zelevinsky mostraron que las álgebras de conglomerado de tipo finito se clasifican por medio de los diagramas de Dynkin.

Por otra parte, un álgebra de conglomerado es de *tipo mutación finita* si existe una cantidad finita de carcajes que son mutaciones equivalentes al carcaj asociado a la semilla inicial. En [3] y [4], se da una clasificación de los carcajes de tipo mutación finito haciendo uso de carcajes relacionados con superficies de Riemann con puntos marcados.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, se puede deducir que el álgebra de conglomerado asociada al carcaj de Markov es de tipo mutación finito, pero no es de tipo finito. Por lo tanto, es posible encontrar una superficie asociada al carcaj de Markov. Con el propósito de ver esta conexión entre superficies y carcajes, se puede definir primero la triangulación asociada a un carcaj.

Definición 3.9 ([5], p.21). Sea T una triangulación del polígono regular de m vértices, P_m , mediante diagonales no cruzadas. El carcaj $Q(T)$ asociado a T se define como sigue. Los vértices congelados (aquellos vértices que no se mutan) de $Q(T)$ están etiquetados por los lados de P_m , y los vértices mutables de $Q(T)$ están etiquetados por las diagonales de T . Si dos diagonales, o una diagonal y un lado del polígono, pertenecen al mismo triángulo, conectamos los vértices correspondientes en $Q(T)$ mediante una flecha cuya orientación está determinada por la orientación de la frontera del triángulo en el sentido de las manecillas del reloj.

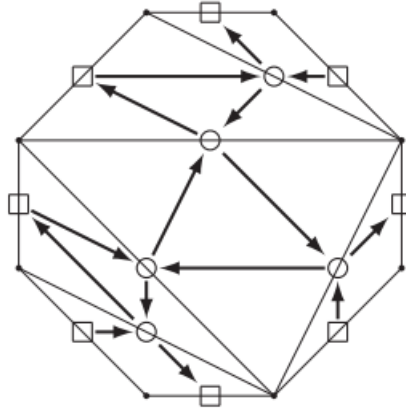


Figura 7: Carcaj $Q(T)$ asociado a la triangulación T de un octágono.

Ahora, se verá cómo usar esta relación entre triangulaciones y carcajes, para definir una superficie asociada a un álgebra de conglomerado.

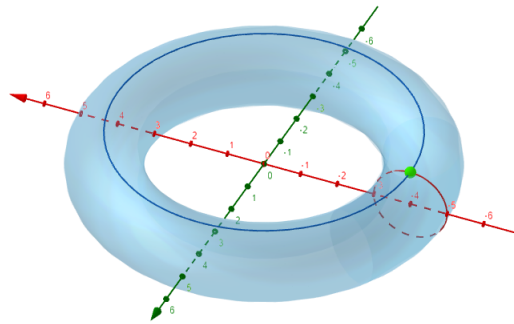
Definición 3.10 ([12], p.2). Una superficie con puntos marcados es un par (S, M) donde:

- S una superficie de Riemann bidimensional orientada y conectada (posiblemente con frontera ∂S).
- $M \subset S$ es un conjunto finito no vacío de puntos marcados en S .
- Los puntos marcados $m \in M$ que están en el interior de $S - \partial S$ se denominan ponchaduras.
- Cada componente de frontera conectada tiene al menos un punto marcado.
- Se requiere que S tenga al menos una triangulación.

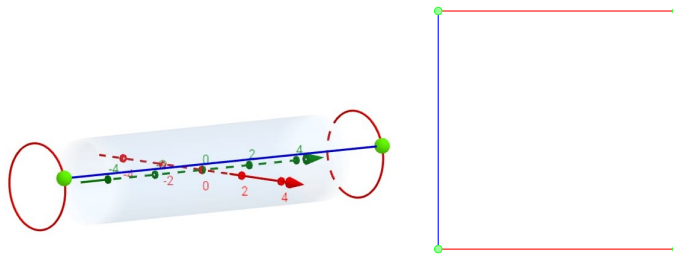
Definición 3.11 ([12], p.2). Un arco γ en (S, M) es una curva salvo isotopía, tal que:

- Los puntos extremos de γ se encuentran en M .
- γ no se autointerseca salvo en sus puntos extremos.
- γ es disjunta de M y ∂S salvo en sus puntos extremos.

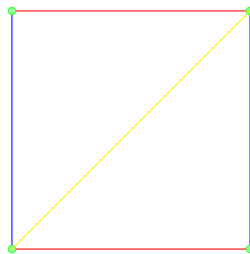
Ejemplo 4. Se considera el toro con una ponchadura



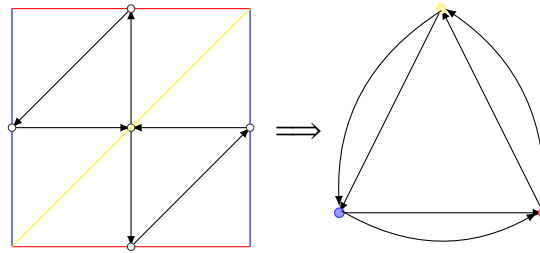
Esta superficie se puede estudiar por medio de una figura plana, la cual es equivalente al toro al identificar cada par de lados opuestos.



Por lo anterior, triangular el toro es equivalente a realizar una triangulación de un cuadrado



Así, haciendo uso de la *Definición 3.9*, se obtiene el siguiente carcaj asociado al toro con una ponchadura.

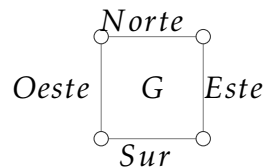


El cual es el carcaj de Markov visto en el *Ejemplo 3*.

4. GRAFOS SERPIENTE, FRACCIONES CONTINUAS Y EMPAREJAMIENTOS PERFECTOS

Los grafos serpiente aparecen de forma natural en la teoría de las álgebras de conglomerado, donde se muestra una relación bastante interesante entre la fracción continua asociada a un grafo serpiente, tal que el cociente de dicha fracción es el numero de emparejamientos perfectos de dicho grafo y las álgebras de conglomerado. Estas relaciones han permitido solucionar problemas asociados a cada uno de estos objetos de manera mas sencilla, de ahí el interés de realizar este estudio.

Para iniciar se define una tesela G como un grafo con cuatro vértices y cuatro aristas ubicados en forma de cuadrado, como se muestra en la siguiente imagen:



Definición 4.1 ([12], p.5). Un *grafo Serpiente* \mathcal{G} es un grafo plano conectado que consiste en una secuencia finita de teselas G_1, G_2, \dots, G_d , con $d \geq 1$, de tal manera que para cada $i \in [d - 1]$, las teselas G_i y G_{i+1} comparten exactamente una arista e_i , la cual es la arista Norte de G_i y la arista Sur de G_{i+1} , o es la arista Este de G_i y la arista Oeste de G_{i+1} .

Las aristas e_1, e_2, \dots, e_{d-1} se llaman interiores y las otras se dicen aristas de contorno. A las aristas de un grafo serpiente se les puede asignar los símbolos $+$ o $-$. Más adelante se usará esta asignación en un subconjunto especial de las aristas para encontrar una fracción continua asociada al grafo.

Definición 4.2 ([12], p.9). Una función signo f sobre un grafo Serpiente \mathcal{G} es una aplicación

$$f : E(\mathcal{G}) \rightarrow \{+, -\}$$

donde $E(\mathcal{G})$ es el conjunto de elementos llamado aristas tal que para cada tesela G_i en \mathcal{G} se cumplen las siguientes condiciones:

- Las aristas Norte y Oeste tienen el mismo signo,
- Las aristas Sur y Este tienen el mismo signo,
- El signo de la arista Norte es opuesto al signo de la arista Sur.

Definición 4.3 ([12],p.7). Una *fracción continua* finita es una función de n variables a_1, \dots, a_n dada por:

$$[a_1, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Ejemplo 5. Si se considera el siguiente grafo serpiente con 5 teselas, y su correspondiente asignación de signos:



Entonces la sucesión de signos y fracción continua asociadas son, respectivamente

$$\underbrace{(-, -)}_2, \underbrace{(+, +, +)}_3, \underbrace{(-)}_1$$

$$[2, 3, 1] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}} = \frac{9}{4}$$

Ejemplo 6. El siguiente grafo tiene 6 teselas H_i , con $i \in [6]$, y 5 aristas interiores:

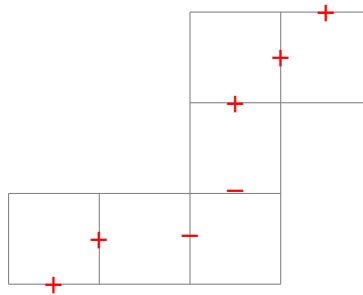


La sucesión de signos es:

$$\left(\underbrace{+,+}_2, \underbrace{-,-}_2, \underbrace{+,+}_2, \underbrace{-}_1 \right)$$

$$[2, 2, 2, 1] = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{17}{7}$$

De los anteriores ejemplos surge la pregunta: ¿Qué ocurre con el grafo serpiente asociado a la fracción continua $[2, 2, 3] = \frac{17}{7}$? Es sencillo observar que es el mismo grafo asociado a la fracción continua $[2, 2, 2, 1]$, solo que su última arista e_6 ya no es la Este de la tesela H_6 , sino que se toma la Norte de la misma tesela:



En general se puede decir que, si $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ una fracción continua con $a_n = 1$, entonces:

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1].$$

Es importante mencionar que un emparejamiento es un subconjunto de aristas independientes esto es que no tengan vértices en común, cabe resaltar que este objeto ha sido estudiado en algunas áreas como ciencias de computación y áreas de las matemáticas. A pesar de los muchos estudios existentes en este tema, aún hay bastantes problemas abiertos concernientes a los emparejamientos. Por ejemplo, no ha sido posible encontrar una fórmula cerrada que brinde la cantidad de emparejamientos en un grafo. En particular, no existe una fórmula cerrada que indique el número de emparejamientos perfectos $m(\mathcal{G})$ en un grafo \mathcal{G} cualquiera. Sin embargo, existen algunas aproximaciones asintóticas y algunos resultados exactos al considerar algunas clases de grafos.

Definición 4.4 ([2],p.47). Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$ y sea $S \subset E$. Se dice que S es un emparejamiento en \mathcal{G} , si dichas aristas no tienen vértices en común. Si cada vértice en \mathcal{G} es incidente a una arista de S , entonces S es un emparejamiento perfecto.

Teorema 7 ([12],p.10). Si $N(\mathcal{G})$ denota el número de emparejamientos perfectos de \mathcal{G} entonces:

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{N(\mathcal{G}[a_1, a_2, \dots, a_n])}{N(\mathcal{G}[a_2, a_3, \dots, a_n])}$$

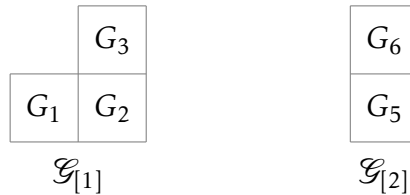
Ejemplo 8. Sea el siguiente grafo \mathcal{G} con la siguiente asignación de signos.



La fracción continua de este grafo es:

$$[4, 2, 1] = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} = \frac{13}{3}$$

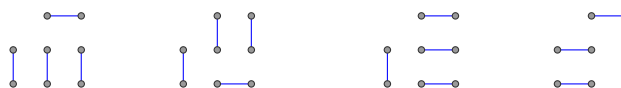
Para hallar los emparejamientos perfectos del grafo \mathcal{G} , se hallan los subgrafos $\mathcal{G}[a_i]$ para $i \in [2]$, que se obtienen en este caso al separar el grafo original a través de los cambios de signo de sus aristas interiores, lo que muestra que la tesela G_4 es la que une los dos subgrafos por medio de sus aristas horizontales y de ahí que sean dos subgrafos.



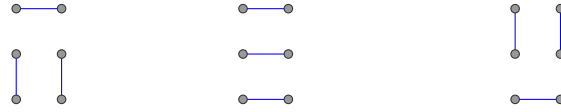
De esta manera para los emparejamientos perfectos tenemos dos casos:

- *Caso 1.* Se toman aquellos emparejamientos perfectos que no contienen las aristas horizontales de la tesela G_4 , esto es, las aristas que unen a los subgrafos $\mathcal{G}_{[1]}$ y $\mathcal{G}_{[2]}$.

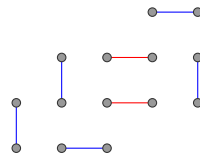
- Para el grafo $\mathcal{G}_{[1]}$



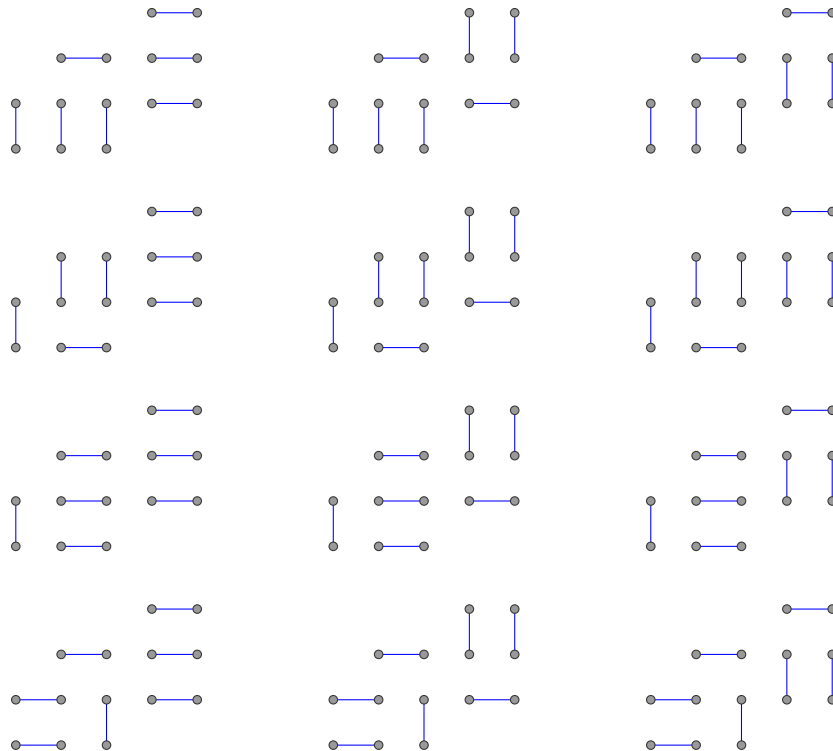
- Para el grafo $\mathcal{G}_{[2]}$

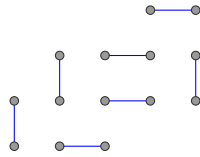


- *Caso 2.* Se toman las dos aristas horizontales de la tesela G_4 que unen a los dos subgrafos $\mathcal{G}_{[1]}$ y $\mathcal{G}_{[2]}$ esto es:



Teniendo en cuenta el caso 1 se halla el número de las posibles combinatorias $4 * 3 = 12$ y se suma 1 al emparejamiento perfecto del caso 2 para completar 13 en total.





Definición 4.5 ([10], p. 28). Sea S un subconjunto de \mathbb{Z}^d . Un camino reticular L en \mathbb{Z}^d de longitud k con pasos en S es una sucesión $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{Z}^d$ tal que cada diferencia consecutiva $v_i - v_{i-1}$ vive en S . Se dice que L comienza en v_0 y finaliza en v_k .

Definición 4.6. Sean p y q primos relativos enteros con $p < q$, se define el (q, p) -rectángulo como el rectángulo cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$, $(0, p)$, $(q, 0)$ y (q, p) . Se llama diagonal $l_{\frac{p}{q}}$ al segmento de recta con pendiente p/q que inicia en el origen y finaliza en el punto (q, p) . Se denomina camino de Christoffel $L_{\frac{p}{q}}$ al camino reticular en \mathbb{Z}^2 que va desde el origen hasta (q, p) usando pasos $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$, y que se encuentra estrictamente debajo del segmento $l_{\frac{p}{q}}$.

Por ejemplo, el camino de Christoffel $L_{\frac{3}{7}}$ se muestra en la Figura 8 de color verde, y la diagonal $l_{\frac{p}{q}}$ en color rojo.

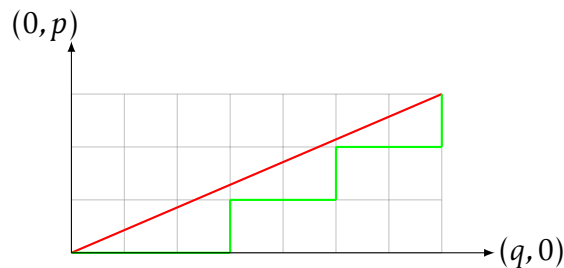


Figura 8: Camino de Christoffel

Definición 4.7 ([8], p.6). El *grafo serpiente de Markov*, es el grafo de serpiente con cuadros de media unidad de longitud, que se encuentra sobre el camino reticular de Christoffel L de tal manera que el vértice Suroeste de la primera tesela es $(0.5, 0)$ y el vértice Noroeste de la última tesela es $(q, p - 0.5)$.

Teorema 9. Si γ es un arco en una superficie triangulada (S, M) , la variable de conglomerado x_γ esta dada por la fórmula:

$$x_\gamma = \frac{1}{\text{cross}(\mathcal{G}_\gamma)} \sum_{P \in \text{Match}(\mathcal{G}_\gamma)} x(P),$$

donde

- $Match(\mathcal{G}_\gamma)$: Conjunto de los emparejamientos perfectos del grafo \mathcal{G}_γ
- $cross(\mathcal{G}_\gamma)$: Producto de las diagonales atravesadas por el arco γ .

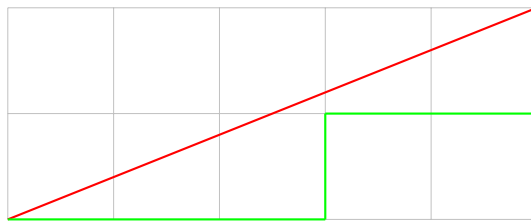
Debido a que el carcaj de Markov está asociado al toro con una ponchadura, y como al realizar la especialización $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ se obtiene que las variables de conglomerado son los números de Markov, esto es $x_\gamma = m_{p/q}$, para algunos p y q enteros primos relativos, entonces el teorema anterior se puede escribir de la siguiente manera.

Teorema 10. Sean $p, q \in \mathbb{Z}$ primos relativos. Si γ es el arco en el plano triangulado $(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}^2)$ formado por la línea recta que une al origen con el punto (q, p) ,

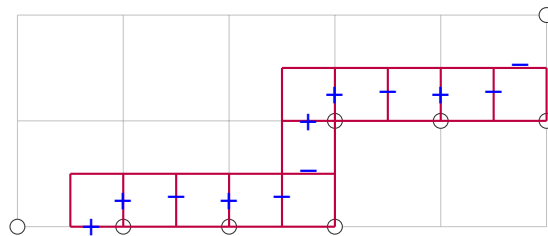
$$m_{p/q} = \sum_{P \in Match(\mathcal{G}_\gamma)} 1 = |Match(\mathcal{G}_\gamma)|.$$

Esto es, el número de emparejamientos perfectos del grafo serpiente de Markov, $\mathcal{G}_{p/q}$ en el (q, p) rectángulo es el número de Markov $m_{p/q}$.

Ejemplo 11. Se considera la línea roja $l_{2/5}$ con su respectivo camino de Christoffel $\mathcal{L}_{2/5}$ marcado en verde.



Ahora, se puede observar el grafo serpiente de Markov $\mathcal{G}_{2/5}$ en color morado, el cual está formado a partir del camino de Christoffel mostrado anteriormente. La fracción continua asociada a este grafo es $[2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2]$, lo que implica que el número emparejamientos perfectos para este grafo es $N[2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2] = 194$, haciendo uso del teorema 10 el numero de Markov $m_{\frac{2}{5}} = 194$.

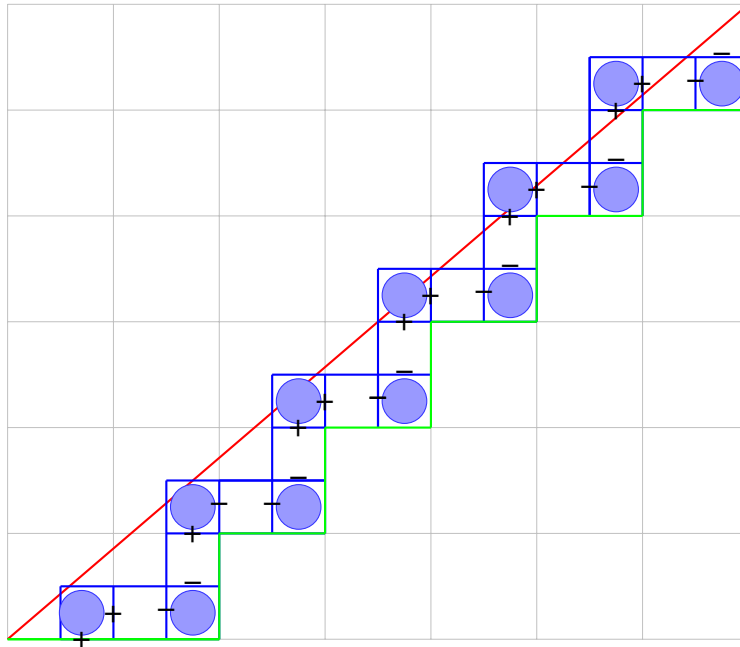


Las notas a continuación mencionadas se ilustraran por medio de dos ejemplos:

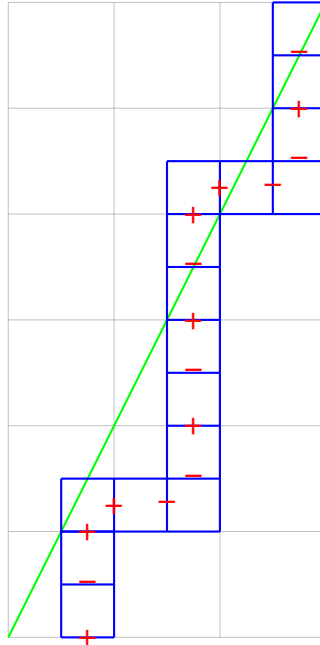
Nota 2. La fracción continua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ tiene entradas $a_i \in \{1, 2\}$ tal que la suma de sus entradas es:

$$\sum_{i=1}^n 2q + 2p - 2$$

Además $a_1 = a_n = 2$, si n es par y $a_i = a_{i+1}$, siempre que i sea par y $2 \leq i \leq n - 2$.



Nota 3. Tomando el rectángulo (q, p) y $q < p$ las entradas no empiezan por 2.



4.1. FRACCIONES CONTINUAS DE UN GRAFO SERPIENTE DE MARKOV

Proposition 4.8 ([8], p 4). *Sea $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$*

1. $N[a_1, \dots, a_n] = a_1 N[a_2, \dots, a_n] + N[a_3, \dots, a_n]$
2. $N[a_1, \dots, a_n] = a_n N[a_1, \dots, a_{n-1}] + N[a_1, \dots, a_{n-2}]$
3. $[a_1, \dots, a_n, 1, 1] = [a_1, \dots, a_n, 2]$
4. $N[1, 1, a_1, \dots, a_n] = N[2, a_1, \dots, a_n]$
5. $N[a_1, \dots, a_n] = N[a_n, \dots, a_1]$
6. $N[\mu^-] = N[a_1, \dots, a_{n-1}]$
7. $N[-\mu] = N[a_2, \dots, a_n]$
8. $N[a_1, \dots, a_n] = N[a_1, \dots, a_i] N[a_{i+1}, \dots, a_n] + N[a_1, \dots, a_{i-1}] N[a_{i+2}, \dots, a_n]$

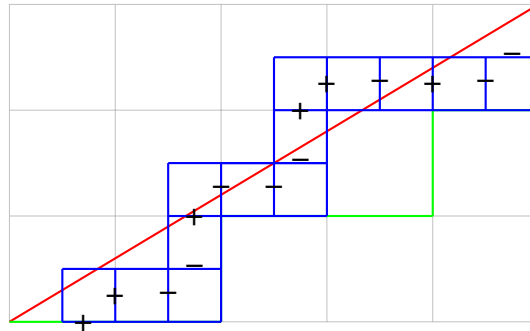
Teorema 12 ([8], Teorema 5.2). Sea $c_{\frac{p}{q}} = [\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu]$ donde μ, δ y ν tienen longitud impar y δ es una sucesión de 2s.

Sea $\hat{\mu}$ la sucesión inversa de μ , entonces se tiene la siguiente desigualdad de fracciones continuas.

$$[\hat{\mu}] < [\nu]$$

Nota 4. Es importante mencionar que este teorema solo se satisface para Grafos Serpiente de Markov como se ilustrara en los siguientes ejemplos donde se darán los casos en donde uno es el grafo serpiente de Markov y el otro es un Grafo Serpiente.

Ejemplo 13. Se supone el siguiente grafo como un grafo serpiente de Markov y se aplica el teorema:



Donde la fracción continua asociada a este grafo es:

$$c_{\frac{p}{q}} = \left[\underbrace{2, 2, 2}_{\mu}, 2, \underbrace{2}_{\delta}, 1, 1, \underbrace{2}_{\nu} \right]$$

Se calcula

$$\hat{\mu} = [2, 2, 2] = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{12}{5} = 2,4$$

Por otra parte

$$\nu = [2] = 2$$

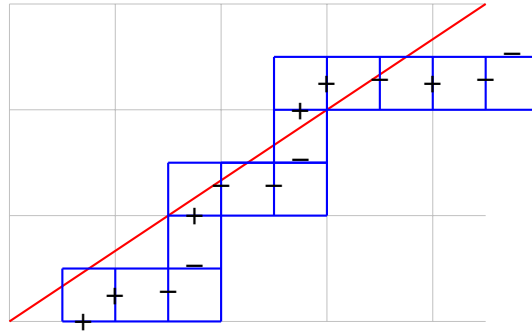
Por tanto no se tendría la desigualdad del Teorema 12:

$$[\hat{\mu}] < [\nu]$$

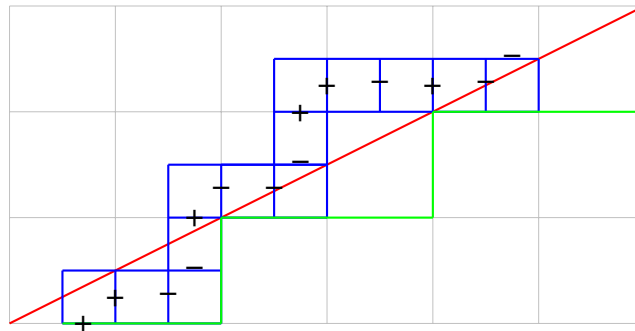
Esto no es un contraejemplo del teorema, puesto que es importante mencionar que el ejemplo utilizado anterior no es un grafo serpiente de Markov. Esto se observa de la siguiente manera:

- La línea roja muestra la diagonal $l_{\frac{1}{3}}$, mientras se denota el camino de Christoffel en color verde donde se evidencia que ese no es un grafo Serpiente de Markov por lo tanto no funciona para el teorema.

- Haciendo el intento de buscar el camino adecuado para ese grafo y que sea un grafo serpiente de Markov se toma el rectángulo $(4,5,3)$ donde se intentara encontrar el camino adecuado de Christoffel pero se puede observar que la diagonal no se ajusta al grafo encontrado.

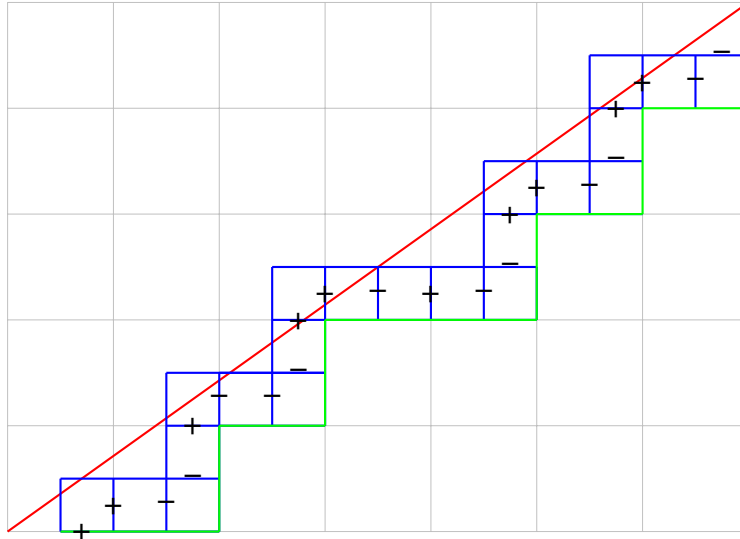


- Análogamente con el rectángulo $(6,3)$ se puede observar que tampoco es el camino adecuado de Christoffel, ya que el camino adecuado es el del color verde.



Por tanto se concluye que el grafo no es un grafo serpiente de Markov.

Ejemplo 14. Sea el rectángulo $(7,5)$ con el número de Markov $m_{\frac{5}{7}} = 1470$. Se traza la diagonal y el correspondiente camino de Christoffel, para luego construir el grafo serpiente de Markov.



Donde la fracción continua asociada a este grafo es:

$$c_{\frac{p}{q}} = [\underbrace{2, 2, 2}_{\mu}, 2, \underbrace{2}_{\delta}, 1, 1, \underbrace{2, 2, 2, 2, 2}_{\nu}]$$

Se calcula

$$\hat{\mu} = [2, 2, 2] = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{12}{5} = 2,4$$

Por otra parte

$$\nu = [2] = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{70}{29} = 2,4137$$

Por tanto se cumple la desigualdad de fracciones del teorema mencionado:

$$[\hat{\mu}] < [\nu]$$

Corolario 4.9.

$$N[\mu]N[\nu^-] < N[\mu^-]N[\nu]$$

Demostración

Por Teorema 12, se tiene la siguiente desigualdad de fracciones continuas:

$$[\hat{\mu}] < [\nu]$$

Donde utilizando el Teorema 7 se tiene:

$$\frac{N[\hat{\mu}]}{N[-\hat{\mu}]} < \frac{N[\nu]}{N[-\nu]}$$

luego utilizando la Proposición (4.8) de fracciones continuas se tiene $N[\hat{\mu}] = N[\mu]$ y $N[-\hat{\mu}] = N[\mu^-]$, por tanto reemplazando y despejando se tiene:

$$N[\mu]N[\nu^-] < N[\mu^-]N[\nu]$$

Lemma 4.10. Sea p y q enteros positivos tales que $p < q$:

1. Si el punto reticular (a, b) con $a < p$, $b < q$ se encuentra entre los dos segmentos de la recta $l_{\frac{p}{q}}$ y $l_{\frac{p}{q+1}}$ entonces ninguno de los puntos $(a-1, b)$, $(a, b-1)$, $(a, b+1)$ se encuentra entre los segmentos de recta.
2. Si $c_{\frac{p}{q}} = [\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu]$ y $c_{\frac{p}{q+1}} = [\mu', 2, \delta, 1, 1, \nu']$ donde μ, μ' tienen la misma longitud impar, entonces todas las entradas de la sucesión δ son iguales a $2s$.

Teorema 15. Sea p y q enteros positivos tales que $p < q$, entonces $m_{\frac{p}{q}} < m_{\frac{p}{q+1}}$.

Demostración

Se puede escribir la fracción continua de $m_{\frac{p}{q}}$ como una lista de $q + p - 1$ entradas reemplazables, $a_i = 1, 1$ ó 2 . Mientras que la fracción continua de $m_{\frac{p}{q+1}}$ tendría $q+p$ entradas reemplazables. Estamos considerando reemplazos de la fracción continua de $m_{\frac{p}{q+1}}$ a la fracción continua de $m_{\frac{p}{q}}$. Esto significa que el primer reemplazo sustituye un par $1, 1$ por un 2 , y luego los reemplazos alternan entre la sustitución de un 2 por un par $1, 1$ y la sustitución de un par $1, 1$ por un 2 y así sucesivamente. Además, el lema 4.11 implica que entre dos sustituciones de este tipo, ambas fracciones continuas están formadas enteramente por $2s$. Así, se puede escribir

$$m_{\frac{p}{q+1}} = N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 2] \text{ y } m_{\frac{p}{q}} = N[\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu']$$

donde μ, ν, ν' son sucesiones de $1s$ y $2s$, y δ consiste sólo en $2s$.

En primer lugar, se demuestra el resultado para un número par de sustituciones por inducción en el número de pares de sustituciones. Se supone primero que hay exactamente un par de sustituciones, es decir $\nu = \nu'$ de modo que ν y ν' no contienen sustituciones.

Se quiere mostrar

$$N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 2] - N[\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu] > 0$$

Por definición 4.7 item 2 se tiene

$$N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 2] = N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 1, 1,] = 1N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 1] + N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu]$$

Asi se tiene

$$N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 2] - N[\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu] > 0 \quad (2)$$

$$= N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 1] + N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu] - N[\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu] \quad (3)$$

Seguidamente utilizando el item 6,7,8 de la misma definición se tiene:

$$N[\mu, 1, 1, \delta, 2, 1] = N[\mu, 1, 1]N[\delta, 2, \nu, 1] + N[\mu, 1]N[-\delta, 2, \nu, 1]$$

$$N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu] = N[\mu, 1, 1]N[\delta, 2, \nu] + N[\mu, 1]N[-\delta, 2, \nu]$$

$$N[\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu] = N[\mu, 2]N[\delta, 1, 1, \nu] + N[\mu]N[-\delta, 1, 1, \nu]$$

Se tiene reemplazando 3 lo siguiente

$$\begin{aligned} & N[\mu, 1, 1]N[\delta, 2, \nu, 1] + N[\mu, 1]N[-\delta, 2, \nu, 1] + \\ & N[\mu, 1, 1]N[\delta, 2, \nu] + N[\mu, 1]N[-\delta, 2, \nu] - \\ & (N[\mu, 1, 1]N[\delta, 2, \nu] + N[\mu, 1]N[-\delta, 2, \nu]) \end{aligned}$$

El primer término negativo más el quinto término es igual a cero. La suma del segundo término negativo y el primer término es positiva. La suma del tercer término negativo y el tercer término es positiva. La suma del último término negativo y el séptimo término es positiva. Por lo tanto,

$$N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 2] - N[\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu] > 0$$

Esto demuestra el caso base de la inducción.

Ahora procedemos con el paso inductivo. Se supone que $N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 2] - N[\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu'] > 0$ cuando ν y ν' contiene $n - 1$ pares de sustituciones, se quiere mostrar que $N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 2] - N[\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu'] > 0$ cuando ν y ν' contiene n pares reemplazables. Se tiene:

$$\begin{aligned} & N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 2] - N[\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu'] \\ & = N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 1] + N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu] - N[\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu'] \\ & = N[\mu, 1, 1, \delta, 2]N[\nu, 1] + N[\mu, 1, 1, \delta]N[-\nu, 1] \\ & \quad + N[\mu, 1, 1, \delta, 2]N[\nu] + N[\mu, 1, 1, \delta]N[-\nu] - N[\mu, 2, \delta, 1, 1]N[\nu'] - N[\mu, 2, \delta, 1]N[-\nu'] \\ & = N[\mu, 1, 1, \delta, 2](N[\nu, 1] + N[\nu]) + N[\mu, 1, 1, \delta](N[-\nu, 1] + N[-\nu]) \\ & \quad - N[\nu, 2, \delta, 1, 1]N[\nu^-] - N[\mu, 2, \delta, 1]N[-\nu'] \\ & = N[\mu, 1, 1, \delta, 2]N[\nu, 2]N[\nu, 2] + N[\mu, 1, 1, \delta]N[-\nu, 2] - N[\mu, 2, \delta, 1, 1]N[\nu'] \\ & \quad - N[\mu, 2, \delta, 1]N[-\nu'] \end{aligned}$$

Se sigue reemplazando

Aplicando las propiedades de fracciones continuas y sustituyendo $N[\mu, 1, 1, \delta, 2] = N[\mu, 2, \delta, 2] + N[\mu^-]N[-\delta, 2]$, $N[\mu, 1, 1, \delta] = N[\mu, 2, \delta] + N[\mu^-]N[-\delta]$, y se sustituye también $N[\mu, 2, \delta, 1] = N[\mu, 2, \delta] + N[\mu, 2, \delta^-]$.

Por lo tanto, las siguientes expresiones son equivalentes.

$$\begin{aligned} & N[\mu, 2, \delta, 2]N[\nu, 2] + N[\mu^-]N[-\delta, 2]N[\nu, 2] \\ & + N[\mu, 2, \delta]N[-\nu, 2] + N[\mu^-]N[-\delta]N[-\nu, 2] \\ & - N[\mu, 2, \delta, 1, 1]N[\nu'] - N[\mu, 2, \delta]N[-\nu'] - N[\mu, 2, \delta^-]N[-\nu'] \end{aligned}$$

$$N[\mu, 2, \delta, 2](N[\nu, 2] - N[\nu']) + N[\mu, 2, \delta](N[-\nu, 2] - N[-\nu']) \quad (4)$$

$$+ N[\mu^-]N[-\delta, 2]N[\nu, 2] + N[\mu^-]N[-\delta]N[-\nu, 2] - N[\mu, 2, \delta^-]N[-\nu'] \quad (5)$$

Se demostró que los dos primeros términos en (4,5) son de hecho positivos. De hecho, la hipótesis de inducción dice que $N[\mu, 1, 1, \delta, 2, \nu, 2]N[\mu, 2, \delta, 1, 1, \nu'] > 0$ si ν, ν' contiene como máximo $n - 1$ pares de reemplazos. Se observa que ν, ν' en (4,5) son de la forma $\nu = [\mu_1, 1, 1, \delta_1, 2, \nu_1]$, $\nu' = [\mu_1, 2, \delta_1, 1, 1, \nu'_1]$, para algunas sucesiones $\mu_1, \delta_1, \nu_1, \nu'_1$. Dado que ν_1, ν'_1 contienen solo $n-1$ pares de reemplazos, la inducción muestra $N[\nu, 2] > N[\nu']$ y $N[-\nu, 2] > N[-\nu']$. Usando las mismas desigualdades en el tercer y cuarto término, solo se necesita mostrar que la siguiente expresión es positivo.

$$\begin{aligned} & N[\mu^-]N[-\delta, 2]N[\nu'] + N[\mu^-]N[-\delta]N[-\nu'] - N[\mu, 2, \delta^-]N[-\nu'] \\ & = N[\mu^-]N[-\delta, 2]N[\nu'] + N[\mu^-]N[-\delta]N[-\nu'] \\ & - N[\mu]N[2, \delta^-]N[-\nu'] - N[\mu^-]N[\delta^-]N[-\nu'] \\ & = N[\mu^-]N[-\delta, 2]N[\nu'] - N[\mu]N[2, \delta^-]N[-\nu'] \\ & = N[-\delta, 2](N[\mu^-]N[\nu'] - N[\mu]N[-\nu']) \end{aligned}$$

Según el Corolario 4.8, esta última expresión es mayor que cero.

A continuación, se prueba el resultado para un número impar de reemplazos. Se deja

$$m_{\frac{p}{q+1}} = N[\mu, 1, 1, \nu, 2] \quad \text{y} \quad m_{\frac{p}{q}} = N[\mu', 2, \nu]$$

Donde μ, μ' son sucesiones de unos y dos, μ, μ' empiezan con un 2 y contienen un número impar de reemplazamientos.

Se quiere mostrar que $N[\mu, 1, 1, \nu, 2] - N[\mu', 2, \nu] > 0$.

$$N[\mu, 1, 1, \nu, 2] - N[\mu', 2, \nu] = N[\mu, 2, \nu, 2] - N[\mu', 2, \nu] + N[\mu^-]N[-\nu, 2]$$

La diferencia $N[\mu, 2, \nu, 2] - N[\mu', 2, \nu]$ es que contiene un número positivo par de reemplazamientos. Por lo tanto $N[\mu, 1, 1, \nu, 2] - N[\mu', 2, \nu] > 0$, en este caso $m_{\frac{p}{q}} < m_{\frac{p}{q+1}}$.

5. Conclusiones

- *Es sorprendente ver cómo las distintas ramas de la matemática se entrelazan y en conjunto muestran resultados tan interesantes como el señalado en este trabajo, donde al estudiar las álgebras de conglomerado, se ve la estrecha relación entre la combinatoria, el álgebra, la teoría de números y la geometría*
- *Ralf Schiffler, Michelle Rabideau y sus colaboradores, publicaron un artículo "Snake graph calculus and cluster algebras from surfaces III: Band graphs and snake rings.", donde por medio de la geometría hiperbólica logran mostrar las conjeturas débiles, esto ayudó a que la prueba del ítem 1 del Teorema 1, saliera mucho más elegante y corta haciendo uso de herramientas más avanzadas propias de la teoría de álgebras de conglomerado.*
- *Es interesante observar las conexiones que existen entre una ponchadura de un toro y otras superficies donde por medio de una triangulación se logra llegar a un carcaj, es así como partir de mutaciones de este carcaj se consiguen los números de Markov que son números que están estrechamente ligados y tiene una amplia comparación con los números de Fibonacci y números de Pell.*

Referencias

- [1] *Martin Aigner. Markov's theorem and 100 years of the uniqueness conjecture. A mathematical journey from irrational numbers to perfect matchings, 2013.*
- [2] *Federico Ardila. Algebraic and geometric methods in enumerative combinatorics. preprint, <http://math.sfsu.edu/federico/Articles/methods.pdf>, 09 2015.*
- [3] *A Felikson, Michael Shapiro, and P Tumarkin. Skew-symmetric cluster algebras of finite mutation type. European Mathematical Society, issue 4, 14:1135–1180, (2014).*
- [4] *Sergey Fomin, Michael Shapiro, and Dylan Thurston. Cluster algebras and triangulated surfaces. part i: Cluster complexes. arXiv Mathematics e-prints, 08 (2006).*
- [5] *Sergey Fomin, Lauren Williams, and Andrei Zelevinsky. Introduction to cluster algebras. chapters 1-3. arXiv Mathematics e-prints, 2017.*
- [6] *Philipp Lampe. Cluster Algebras. Department of Mathematical Sciences, Durham University, United Kingdom, 2013.*
- [7] *K. Lee, L. Li, M. Rabideau, and Ralf Schiffler. On the ordering of the markov numbers. preprint, arXiv:2010.13010v1, 2020.*

REFERENCIAS

- [8] *M. Rabideau and Ralf Schiffler. Continued fractions and orderings on the markov numbers. Advances in Mathematics, vol. 370, pp. 107-231, ISSN 0001-8708, <https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107231>, 2020.*
- [9] *Ralf Schiffler. Quiver Representations. Canadian Mathematical Society-Department of Mathematics University of Connecticut, CMS Books in Mathematics, Springer International Publishing, 2014.*
- [10] *Richard Stanley. Enumerative Combinatorics, Volume 1. Cambridge, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, 2012.*
- [11] *Ilke Çanakçı and Ralf Schiffler. Snake graph calculus and cluster algebras from surfaces. Journal of Algebra, vol. 382, pp. 240-281, ISSN 0021-8693, <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.02.018>, 2013.*
- [12] *Ilke Çanakçı and Ralf Schiffler. Cluster algebras and continued fractions. Compositio Mathematica, vol. 154, no. 3, pp. 565-593, <https://doi.org/10.1112/S0010437X17007631>, 2018.*