UN ESTUDIO SOBRE LOS ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

JUAN DAVID RUBIO TABARES

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2019

UN ESTUDIO SOBRE LOS ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS

JUAN DAVID RUBIO TABARES

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:
Matemático

Director: Álvaro Arturo Sanjuán Cúellar
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2019

Introducción

En el estudio de los espacios normados, métricos y los topológicos, surgen caracterizaciones y propiedades interesantes sobre ellos. Ejemplo de ellas son la continuidad de funciones, invariantes, trasformaciones entre espacios, ideas de distancia, entre otros. Lo que queremos hacer acá es tratar de partir desde los espacios vectoriales y debilitar sus propiedades, dándole unicamente una topología que cumple ciertas características.

Mientras que los espacios con producto interno, normados, métricos y topológicos tienen una jerarquía estricta de contenencias

$$P.I \subset Norm. \subset Met. \subset Top,$$

aparecen los espacios vectoriales con topologías inducidas por F-normas, que quedan entre estos espacios. Estos inducen una topologia compatible con las operaciones del espacio vectorial, al igual que otras generalizaciones mantienen propiedades clásicas. Nuestra labor ahora es verificar que propiedades podemos mantener en este espacio. Para ello vamos a guiarnos del libro [2], el cual nos presenta de manera sistemática una gran cantidad de propiedades sobre los espacios vectoriales topológicos.

Capítulo 1

Espacios vectoriales topológicos

Definición y algunas propiedades

En este primer capítulo queremos presentar algunas definiciones clásicas del análisis funcional vistas desde los espacios vectoriales topológicos. Veremos conceptos como la compacidad en estos espacios, la metrización, los funcionales de Minkwosky, entre otros. Empezaremos por definir nuestro espacio de trabajo, los espacios vectoriales topológicos.

Espacios Vectoriales Topológicos

Definición. Sea τ una topología en un espacio vectorial X, tal que:

i) Todo punto de X es un conjunto cerrado.

ii) Las operaciones de espacios vectorial son continuas con respecto a τ.

Si se cumplen i y ii, τ se dice una topológia vectorial en X y este se denomina espacio vectorial topológico.

Definición (Continuidad)**.**

$$\begin{array}{rcl} + : X \times X & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longrightarrow & x + y \end{array}$$

Es continua si y solo si para $x, y \in X$, si V es vecindad de $x + y$ entonces existen V_x, V_y vecindades de x, y tales que $V_x + V_y \subset V$. De manera similar

$$\begin{array}{rcl} \cdot : X \times K & \longrightarrow & X \\ (x, \alpha) & \longrightarrow & \alpha x \end{array}$$

es continua si y solo si para $x \in X$ y $\alpha \in K$, y para V una vecindad de αx, existe $r > 0$ y alguna vecindad W de x tal que $\beta W \subset V$ para todo β tal que $|\beta - \alpha| < r$.

Ejemplo 1. Las operaciones de un espacio vectorial normado son continuas en la topológia inducida por la métrica.

Sea X un espacio vectorial, probaremos que:

i)

$$\begin{array}{rcl} + : X \times X & \longrightarrow & X \\ (x_1, x_2) & \longrightarrow & x_1 + x_2 \end{array}$$

es continua. Sea $\epsilon > 0$ entonces si usamos la métrica inducida en el producto cartesiano $X \times X$ y hacemos $\delta = \epsilon$, tenemos que:

$$\|(x, y) - (x_1, y_1)\| = \|x - x_1\| + \|y - y_1\| < \epsilon$$

aplicando desigualdad triangular obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} \|+(x, y) - +(x_1, y_1)\| & = & \|(x + y) - (x_1 + y_1)\| \\ & = & \|x - x_1 + y - y_1\| \\ & \leq & \|x - x_1\| + \|y - y_1\| \\ & < & \epsilon \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{rcl} \cdot : K \times X & \longrightarrow & X \\ (\alpha, x) & \longrightarrow & \alpha x \end{array}$$

es continuo.

De manera similar sea $\epsilon > 0$ y sea $M = \max(|\alpha|, \|y\|)$, usando la métrica inducida del producto cartesiano:

$$\|(\alpha, x) - (\beta, y)\| = |\alpha - \beta| + \|x - y\| < \epsilon/M$$

Aplicando desigualdad triangular:

$$\begin{array}{rcl} \|\alpha x - \beta y\| & = & \|\alpha x - \alpha y + \alpha y - \beta y\| \\ & \leq & |\alpha|\|x - y\| + \|y\||\alpha - \beta| \\ & \leq & M(\|x - y\| + |\alpha - \beta|) \\ & < & \epsilon. \end{array}$$

Ejemplo 2. La topológia inducida por la seminorma

$$p(x, y) = |x|,$$

hace al espacio $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial topológico.

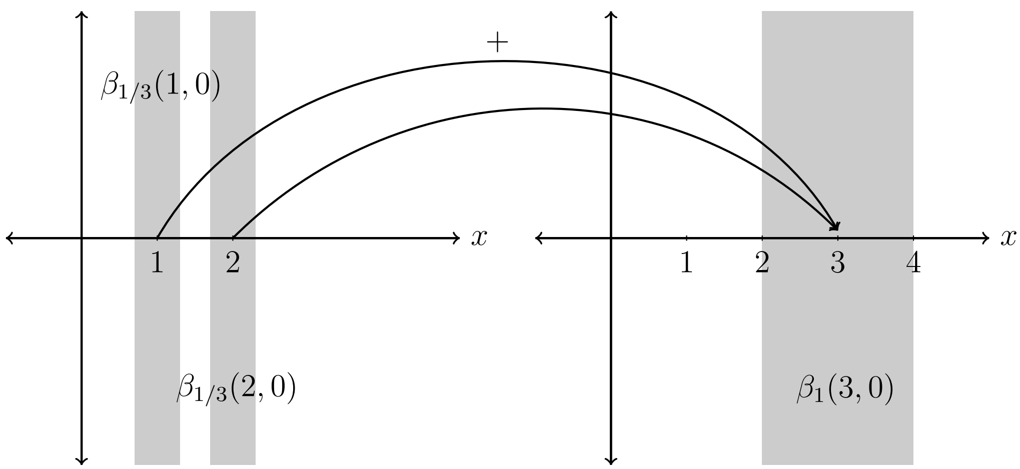
Los abiertos acá son franjas que se extienden hacia el infinito en el eje Y. Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, entonces si V es una vecindad de $x+y$, para $x+y$ existe un radio r tal que

$$\beta_r(x+y) \subset V.$$

Consideremos entonces las bolas de radio $r/3$ centradas en x y y. Tenemos entonces que

$$\beta_{r/3}(x) + \beta_{r/3}(y) \subset \beta_r(x+y) \subset V.$$

Por lo tanto la suma es continua.



Por otro lado, sea $x \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere V una vecindad de αx, entonces existe $r^* > 0$ tal que

$$\beta_{r^*}(\alpha x) \subset V.$$

Sin pérdida de generalidad podemos tomar la vecindad como una bola abierta de la métrica. Así, si hacemos $s = \dfrac{r^*}{|x|2}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |\rho x - \alpha x| &= |x(\rho - \alpha)| \\ &= |x||\rho - \alpha| \\ &< |x|s \\ &= r^*/2 \\ &< r^* \end{aligned}$$

siempre que $|\alpha - \rho| < s$. Por último necesitamos encontrar una vecindad que al multiplicarla por los números ρ tales que $|\alpha - \rho| < s$, quede dentro de V. Consideremos el radio

$$r = \text{mín}\left\{ \frac{|\rho x - (\alpha x - r^*)|}{2}, \frac{|\rho x - (\alpha x + r^*)|}{2} : |\alpha - \rho| < s \right\}.$$

Este mínimo garantiza que para todo ρx podemos generar una vecindad contenida en V. Como nuestros números serán a lo más $\alpha + s$, entonces consideremos

$$W = \beta_{\frac{r}{\alpha+s}}(x),$$

en la cual tenemos que

$$\begin{aligned} \rho\beta_{\frac{r}{\alpha+s}}(\rho x) &\subset \beta_r(\rho x) \\ &\subset V. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos un espacio vectorial topológico.

Definición. Un subconjunto E de un espacio vectorial topológico se dice acotado si para toda vecindad V de 0 en X existe $s \in K$ con $s > 0$, tal que, $E \subset tV$ para todo $t > s$.

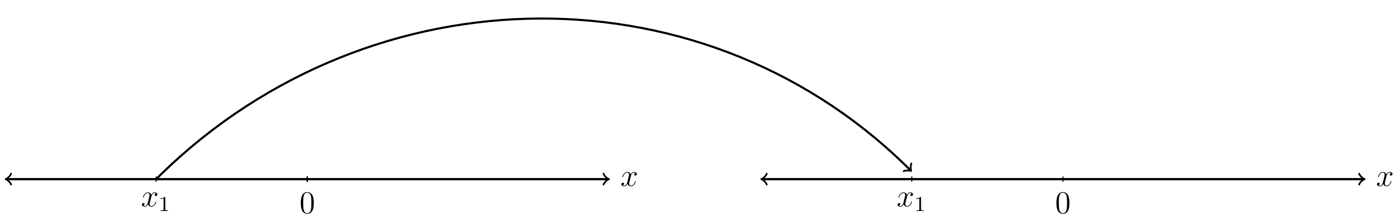
Para la siguiente parte queremos empezar a explorar algunas propiedades sobre los espacios vectoriales topológicos como la invarianza, la separabilidad y las bases. Empezaremos con la invarianza hasta llegar a la separabilidad.

Invarianza

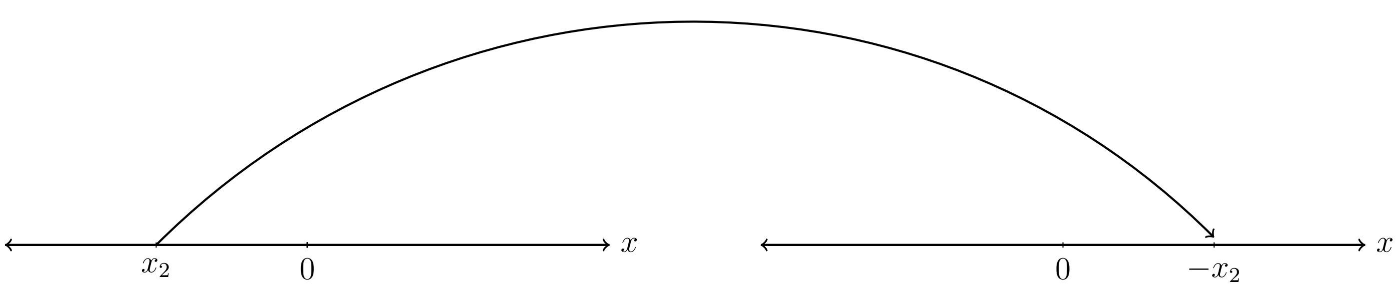
Sea X un espacio vectorial topológico. Asociemos a cada $a \in X$ y cada escalar $\lambda \neq 0$ el operador traslación T_a y el operador de multiplicación M_λ, por las fórmulas:

$$T_a(x) = a + x; \qquad M_\lambda(x) = \lambda x \quad (x \in X).$$

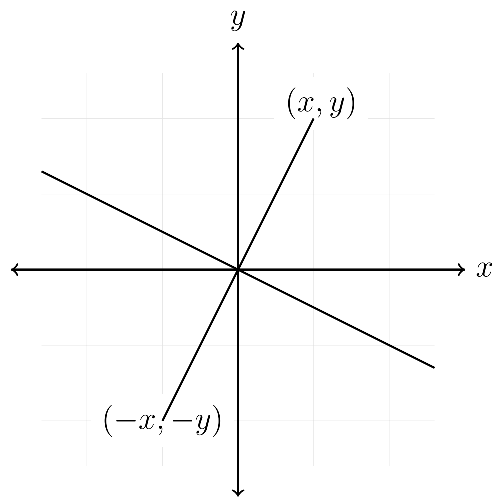
Ejemplo 3. $\mathbb{R}^2$ con T_0 y M_1 deja invariante a $\mathbb{R}$.



Ejemplo 4. $\mathbb{R}$ con T_0 y M_{-1} refleja el espacio.



Ejemplo 5. X con T_0 y M_{-1} es un semigiro con centro en el cero, que refleja los puntos de $\mathbb{R}^2$, con respecto a la recta $y = -mx$, donde m es la pendiente de la recta que pasa por 0 y el punto, así por cada punto tendremos una recta.



Definición. φ es un homeomorfismo entre 2 espacios X e Y si y sólo si φ es continua, biyectiva y φ^{-1} es continua.

Ahora pretendemos introducir una serie de nociones muy conocidas del análisis clásico, con el fin de recordar algunos conceptos que necesitamos de ahora en adelante:

Definición. Sea (S, τ) un espacio topológico.

i) Un conjunto A es cerrado si y solo si A^c es abierto.

ii) La clausura $\overline{E}$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a E.

iii) El derivado E' es el conjunto de todos los puntos límite de E.

iv) el interior de $E(E^o)$ es la unión de todos los subconjuntos abiertos contenidos en E.

v) Una vecindad de un punto $p \in S$ es cualquier conjunto que contiene un subconjunto abierto que contiene a p.

vi) (S, τ) es un espacio Hausdorff y τ es una topología Hausdorff si y solo si para cualesquiera $x, y \in S$ con $x \neq y$, existen V_x, V_y vecindades de x y y tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

vii) Un conjunto $K \subset S$ es compacto si y solo si para toda cubierta abierta de K, esta posee una subcubierta finita.

viii) Una colección $\tau' \subset \tau$ de conjuntos abiertos es una base para τ, si todo miembro de τ es la unión de elementos de τ'.

ix) Una colección γ de vecindades de un punto $p \in S$, es una base local en p si y solo si toda vecindad de p contiene un miembro de γ.

x) Si τ es inducida por una métrica d, se dice que d y τ son compatibles uno con el otro.

Estas mismas definiciones podemos encontrarlas en su mayoría en [3].

Teorema 1. *Sean $x, y \in X$, T_a y M_λ, son homeomorfismos de X en X.*

Demostración. T_a es inyectiva pues sea $a + x = a + y$ entonces $x = y$, consideremos $y \in X$ entonces, tomamos $y - a$, tal que $T_a(y - a) = y$, de ahí que T_a es sobreyectiva, de igual forma para M_λ.

Ahora como la suma y el producto son continuos, por ser espacio vectorial topológico T_a y M_λ son continuos con inversas T_{-a} y $M_{\frac{1}{\lambda}}$ continuos, para $\lambda \neq 0$, por lo tanto, T_a y M_λ son homeomorfismos. □

Corolario 1. *Toda topología vectorial es una traslación invariante: Un conjunto $E \subset X$ es abierto si y sólo si su traslación $a + E$ es abierta.*

Demostración. Sea $E \subset X$ abierto y sea $a \in X$ entonces consideremos

$$\begin{aligned} T_a : E &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto a + x \end{aligned}$$

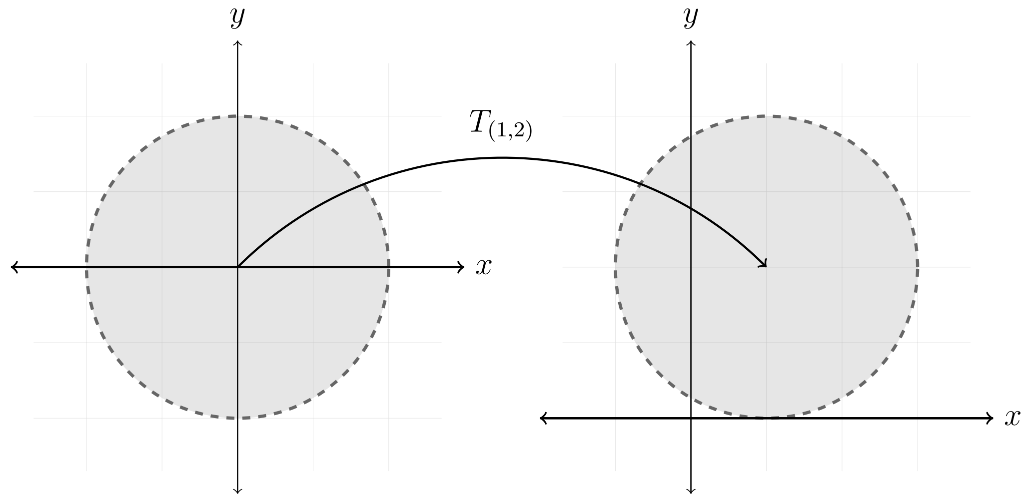
como T_a es continua y E es abierto $T_a(E)$ es abierto. Ahora si $a + E$ es abierto como $(T_a)^{-1} = T_{-a}$ es continua $T_{-a}(a + E) = E$ es abierto.
Esto nos dice que τ se determina por cualquier base local.

□

Nota 1. *En el contexto de los espacios vectoriales, el término base local lo usaremos para decir una base local en 0.*

Definición. Una base local de un espacio vectorial topológico X es una colección β de vecindades de 0 tal que toda vecindad de 0 contiene un miembro de β.
Entonces los conjuntos abiertos de X son precisamente aquellos que son uniones de translaciones en β.

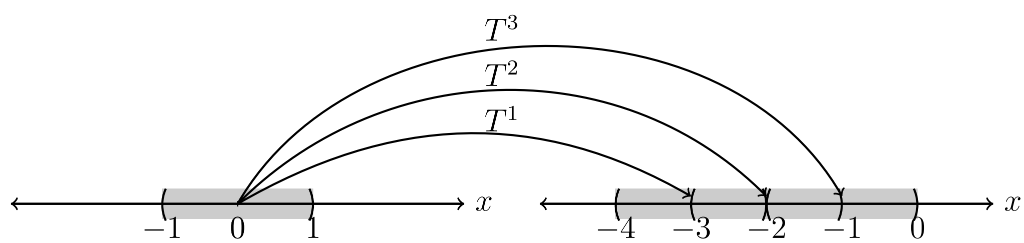
Ejemplo 6. En $\mathbb{R}^2$ $\beta_2((1, 2)) = T_{(1,2)}(\beta_2(0))$.



Podemos ver cada conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ como unión de bolas abiertas. Sea A un abierto contenido en $\mathbb{R}^n$, este es la traslación de cada bola abierta de 0 a A.

Ejemplo 7. En $\mathbb{R}$ consideremos las bolas abiertas $X_1 = (-4,-2) = \beta_1(-3)$; $X_2 = (-3,-1) = \beta_1(-2)$; $X_3 = (-2,0) = \beta_1(-1)$; $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = (-4,0)$, estas las podemos ver mediante las traslaciones

$$X_1 = T^1_{-3}(\beta_1(0))$$
$$X_2 = T^2_{-2}(\beta_1(0))$$
$$X_3 = T^3_{-1}(\beta_1(0))$$



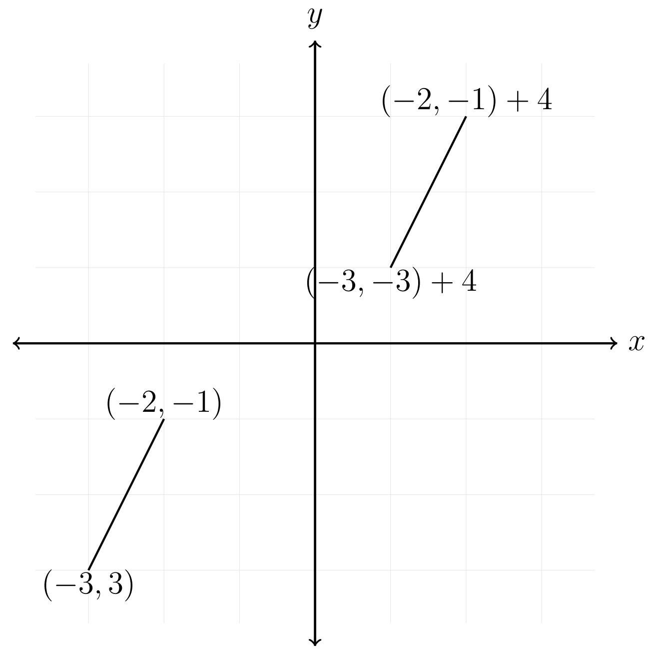
Definición. Una métrica d en un espacio vectorial X la llamamos invariante si

$$d(x+z, y+z) = d(x,y)$$

para todo x, y, z en X.

Ejemplo 8. En $\mathbb{R}$ con $d(x,y) = |x-y|$ es invariante pues

$$d(x+z, y+z) = |x+z-(y-z)| = |x+z-y-z| = |x-y| = d(x,y)$$



Propiedades de Separación

Teorema 2. *Si W es una vecindad de 0 en X, entonces existe una vecindad U de 0 la cual es simétrica ($U = -U$) y satisface $U + U \subset W$.*

Demostración. Como $0+0 = 0$, si W es vecindad de 0 la continuidad en el espacio con la suma implica que si W es vecindad de 0 existen V_1 y V_2 tales que $V_1+V_2 \subset W$. Hagamos $U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$ no es vacio pues 0 pertenece a los conjuntos V_1, V_2, $-V_1$y $-V_2$; por la definición de U si $x \in U$ entonces $-x \in U$ por la construcción. Así U cumple con las propiedades establecidas. □

Teorema 3. *Supongamos que K, C son subconjuntos de un espacio vectorial topológico X, si K es compacto, C cerrado y $K \cap C = \emptyset$, entonces 0 tiene una vecindad V tal que $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.*

Demostración. Si $K = \emptyset$, entonces $K+V = \emptyset$ pues $K+V$ son los elementos $x+y$ con $x \in K$ y $y \in V$, como $K = \emptyset$, no existen elementos para sumar. De igual forma, si $C = \emptyset$ entonces $C + V = \emptyset$. Ahora supongamos $K \neq \emptyset$ y $C \neq \emptyset$, entonces sea $x \in K$, como C es cerrado, C^c es abierto, así x es punto interior y existe V_x vecindad de x tal que $V_x \cap C = \emptyset$. Ahora $T_{-x}(V_x)$ será una vecindad de 0 pues las traslaciones son continuas, por la proposición anterior existe U_x tal que $U_x + U_x + U_x \subset T_{-x}(V_x)$ así $T_x(U_x + U_x + U_x) \subset V_x$ con U_x simétrica esto es

$$x + U_x + U_x + U_x \subset V_x.$$

Como $V_x \cap C = \emptyset$ entonces $(x + U_x + U_x + U_x) \cap C = \emptyset$, de esta igualdad obtenemos que

$$(x + U_x + U_x) \cap C + U_x = \emptyset. \tag{1.1}$$

Todo lo anterior para todo $x \in K$, así $\{x + U_x + U_x\}_{x \in K}$ es una cubierta abierta para K, como K es compacto entonces existen $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \in K$ tales que,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + U_{x_i}, \tag{1.2}$$

hagamos

$$V = U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \cdots \cap U_{x_n}, \tag{1.3}$$

entonces de (1.1) y (1.2)

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + U_{x_i} + V.$$

Como $V \subset V_i$ con $i = 1, 2, \cdots, n$

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + U_{x_i} + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + U_{x_i} + U_{x_i}$$

de (1.3) $\qquad \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} x_i + U_{x_i} + U_{x_i} \cap \bigcup_{i=1}^{n} C + U_{x_i} = \emptyset.$

Como

$$C + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} C + U_{x_i} + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} X_i + U_{x_i} + U_{x_i},$$

de (1.3)

$$C + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} C + U_{x_i} \;\text{ y }\; K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} X_i + U_{x_i} + U_{x_i}$$

entonces

$$C + V \bigcap K + V \neq \emptyset.$$

□

Lema 1. *Si C es cerrado y V es abierto $C + V$ es abierto.*

Demostración. Sea x fijo en C entonces como V es abierto $x + V$ es abierto por la continuidad de la suma y ya que la unión arbitraria de abiertos es abierto:

$$\bigcup_{x \in C} x + V = C + V$$

es abierto. □

Teorema 4. *Si $K, C \subset X$, donde X es un espacio vectorial topológico, K es compacto y C es cerrado, entonces existe V vecindad de 0 tal que*

$$\overline{K+V} \cap (C+V) = \emptyset.$$

Demostración. Por el lema 1, $K+V$ y $C+V$ son abiertos, entonces sea $x \in \overline{K+V} = (K+V) \cup (K+V)'$. Si $x \in K+V$ entonces $x \notin C+V$.

Por otro lado, si

$$(C+V) \cap (K+V)' \neq \emptyset$$

existe $x \in C+V$, como $C+V$ es abierto esto contradice que $x \in (K+V)'$. □

En particular fijémonos que como $C \subset C+V$, entonces $C \cap \overline{K+V} = \emptyset$.

Un resultado interesante lo obtenemos si tomamos $K = \{0\}$, el cual enunciamos en el siguiente teorema y usamos un lema auxiliar.

Lema 2. *En todo espacio topológico $\{x\}$, es compacto.*

Demostración. Sea $\{\beta_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta para $\{x\}$, así $x \in \beta_i$, para algún $i \in I$, de lo cual $\{\beta_i\}$ es una subcubierta abierta finita para $\{x\}$ y así $\{x\}$ es compacto. □

Teorema 5. *Si β es una base local para un espacio vectorial topológico X, entonces todo miembro de β contiene la clausura de algún miembro de β.*

Demostración. Sea $U \in \beta$ y $K = \{0\}$, entonces por el lema anterior K es compacto y $C = U^c$ es cerrado pues U es abierto. Por el Teorema 3 existe V vecindad de 0 tal que

$$(V + \{0\}) \cap (U^c + V) = V \cap (U^c + V) = \emptyset$$

de lo cual tenemos que

$$V \subset (U^c + V)^c \subset U$$

Como β es una base local, existe una vecindad $W \in \beta$ tal que

$$W \subset V \subset (U^c + V)^c \subset U.$$

Como $(U^c + V)^c$ es cerrado, entonces

$$\overline{W} \subset (U^c + V)^c \subset U.$$

Así U contiene la adherencia de otro miembro de la base. □

Teorema 6. *Todo espacio vectorial topológico es Hausdorff.*

Demostración. Sean $x, y \in X$, con $x \neq y$, entonces haciendo $K = \{x\}$ y $C = \{y\}$, existe una vecindad V de 0, tal que

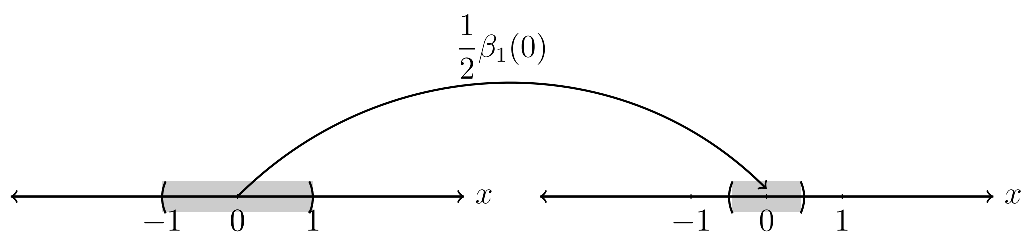
$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

Como $K + V$ es abierto y $K \subset K + V$ entonces $K + V$ es vecindad de K, de manera similar para C. Así X es Hausdorff. $\square$

Definición. En un espacio vectorial topológico X sobre un campo K, un subconjunto $E \subset X$ se dice balanceado si, para todo $\alpha \in K$ tal que $|\alpha| \leq 1$, tenemos que

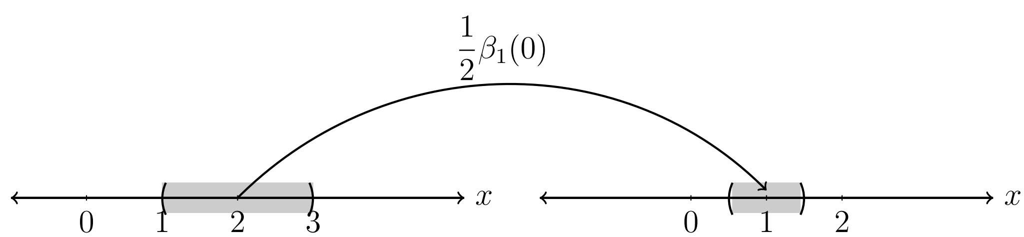
$$\alpha E \subset E.$$

Ejemplo 9. Un ejemplo muy familiar son las bolas centradas en 0 en lo números reales. Allí, al multiplicar por un escalar que tiene norma menor que 1 hace que la bola se haga más pequeña.



Podemos confundirnos con la noción de convexidad y balanceado. Los siguientes ejemplos son conjuntos que poseen una propiedad pero no la otra.

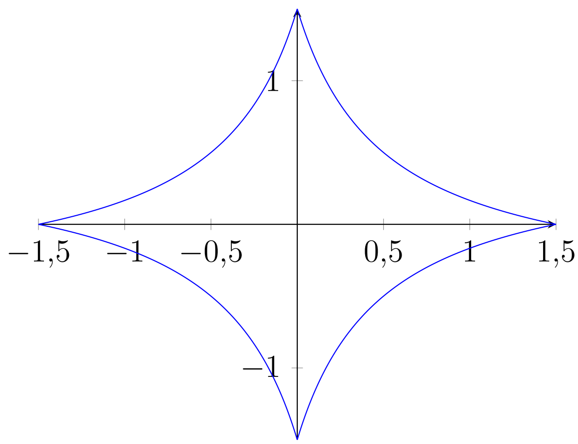
La bola $\beta_1(2)$ es convexa, pero no balanceada. Si tomamos $\alpha = 1/2$



Ahora consideremos la región encerrada entre los ejes coordenados y la curva

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ((|x|)^{\frac{1}{2}} + (|y|)^{\frac{1}{2}})^2 = 1\right\},$$

como sigue



Este no es convexo pero si es balanceado.

Un ejercicio interesante consiste en ver que el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |x| \leq |y|\}$$

es un conjunto balanceado, sin embargo, su interior no lo es.

Para ver que es balanceado sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $|\alpha| \leq 1$, entonces

$$|\alpha(x, y)| = |(\alpha x, \alpha y)|.$$

Como $|x| \leq |y|$,

$$|\alpha x| \leq |\alpha y|$$

y por lo tanto, $(\alpha x, \alpha y) \in C$.

Ahora el interior es el conjunto

$$C^o = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |x| < |y|\}.$$

Si consideramos entonces $\alpha = 0$, el punto $(0, 0) \notin C^o$ y por lo tanto no es balanceado.

El siguiente teorema reúne una gran cantidad de propiedades de los espacios vectoriales topológicos, los cuales usaremos en los resultados que siguen.

Teorema 7. *Sea X un espacio vectorial topológico, entonces:*

i) Si $A \subset X$, entonces $\overline{A} = \bigcap (A + V)$, donde V recorre todas las vecindades de 0.

ii) Si $A \subset X$ y $B \subset X$, entonces $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.

iii) Si Y es un subespacio de X, $\overline{Y}$ también lo es.

iv) Si C es un subconjunto convexo de X, también lo serán $\overline{C}$ y C^o.

v) Si B es un subconjunto balanceado de X, también lo sera $\overline{B}$, ademas si $0 \in B^o$ entonces B^o es balanceado.

vi) Si E es un subconjunto acotado de X, también lo es $\overline{E}$.

Demostración.

i) $x \in \overline{A}$ si y solo si $(x+V) \cap A \neq \emptyset$, si y solo si $x \in A+V$, así existe $y \in V$, tal que $y = x + x_v$, de acá que $x = y - x_v$, pero como V es vecindad de 0, $-V$ también lo será. Así $x \in A+V$, para toda V vecindad de 0.

ii) Sea $a \in \overline{A}$ y $b \in \overline{B}$. Sea W una vecindad de $a+b$, queremos ver que $W \cap (A+B) \neq \emptyset$. Por la continuidad de la suma existen W_a, W_b tales que $W_a + W_b \subset W$, como $a \in \overline{A}$ y W_a es vecindad de a, existe $x \in W_a \cap A$. De igual forma existe y tal que $y \in W_b \cap B$, de lo cual $x+y \in W_a + W_b$ y $x+y \in A+B$, así $x+y \in W \cap (A+B)$, de lo cual $a+b \in \overline{A+B}$ y por lo tanto $\overline{A}+\overline{B} \subset \overline{A+B}$.

iii) Queremos ver que $\overline{Y}$ es un subespacio

a) Como $0 \in Y$, entonces $0 \in \overline{Y}$.

b) Sean $x, y \in \overline{Y}$, como $x+y \in \overline{Y}+\overline{Y}$, por el numeral anterior $x+y \in \overline{Y}$.

c) Sea $\alpha \in K$, con $\alpha \neq 0$ y $x \in \overline{Y}$. Tomemos $\epsilon > 0$ entonces como $x \in \overline{Y}$, existe $y \in Y$ tal que $\|x-y\| < \epsilon/|\alpha|$, como Y es subespacio $\alpha y \in Y$ y ademas

$$\begin{aligned} \|\alpha x - \alpha y\| &= |\alpha|\|x-y\| \\ &< |\alpha|\epsilon/|\alpha| \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Así $\alpha\overline{Y} \subset \overline{Y}$.

De lo anterior $\overline{Y}$ es un subespacio vectorial.

iv) Sea $0 \leq t \leq 1$

$$t\overline{C} + (1-t)\overline{C} \subset \overline{tC} + \overline{(1-t)C}$$

por el numeral ii), tenemos que:

$$t\overline{C} + (1-t)\overline{C} \subset \overline{tC} + \overline{(1-t)C} \subset \overline{tC + (1-t)C}$$

pero como C es convexo, $tC + (1-t)C \subset C$, y por lo tanto $\overline{tC + (1-t)C} \subset \overline{C}$, de lo cual $t\overline{C} + (1-t)\overline{C} \subset \overline{C}$, esto es $\overline{C}$ es convexo.
Ahora como C es convexo.

$$tC^o + (1-t)C^o \subset C$$

Como tC^o y $(1-t)C^o$ son abiertos por la continuidad de la multiplicación por escalar, y como el interior es el conjunto abierto mas grande contenido en el conjunto, entonces

$$tC^o + (1-t)C^o \subset C^o$$

de lo cual C^o es convexo.

v) Sea $\alpha \in K$, con $|\alpha| \leq 1$, entonces por la parte iii) en el producto por escalar

$$\alpha\overline{B} \subset \overline{B}$$

así $\overline{B}$ es balanceado.
Por otro lado si $0 < |\alpha| \leq 1$, entonces $\alpha B^o = (\alpha B)^o$, ya que αB^o es abierto por la continuidad del producto por escalar, así $\alpha B^o = (\alpha B)^o \subset \alpha B \subset B$, pero como el interior es el abierto más grande contenido en un conjunto y αB^o es abierto, se tiene entonces que $\alpha B^o \subset B^o$, y por lo tanto B^o es balanceado.

vi) Sea V una vecindad de 0 entonces existe $W \subset V$ tal que $\overline{W} \subset V$, como E es acotado para W existe s tal que $E \subset tW$ si $t > s$, pero entonces $\overline{E} \subset t\overline{W} \subset tV$, así $\overline{E} \subset tV$ si $t > s$ y por lo tanto $\overline{E}$ es acotado.

Lo cual completa la demostración. □

El anterior teorema y el siguiente nos enriquecen todas las vecindades, esto nos ayudará más adelante cuando queramos definir bases, podremos entonces encontrar bases convexas o balanceadas. Para ello probaremos antes dos lemas necesarios en la demostración.

Lema 3. *Si U es convexo αU es convexo.*

Demostración. Sean $\alpha x, \alpha y \in \alpha U$, con $x, y \in U$, entonces queremos ver que $t\alpha x + (1-t)\alpha y \in \alpha U$. Como el producto por escalar es homeomorfismo, $\varphi_\alpha^{-1}(t\alpha x + (1-t)\alpha y) = tx + (1-t)y$, por ser U convexo $tx + (1-t)y \in U$ así $\varphi_\alpha(tx + (1-t)y) = t\alpha x + (1-t)\alpha y \in \varphi_\alpha U = \alpha U$ y por lo tanto αU es convexo. □

Lema 4. *La interesección arbitraria de conjuntos convexos es convexo.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una colección de conjuntos convexos. Si $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$, $\emptyset$ es convexo. Ahora si $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ sean $x, y \in \bigcap_{i\in I} A_i$, entonces $x, y \in A_i$ para todo $i \in I$ y A_i es convexo, tenemos que $tx + (1-t)y \in A_i$ para todo $t \in [0,1]$ y por lo tanto $tx + (1-t)y \in \bigcap_{i\in I} A_i$, de este modo $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un conjunto convexo. □

Teorema 8. *En un espacio vectorial topológico X.*

a) Toda vecindad de 0 contiene una vecindad balanceada de 0.

b) Toda vecindad convexa de 0 contiene una vecindad balanceada y convexa de 0.

Demostración. a) Sea U una vecindad de 0 en X, como la multiplicación por escalar es continua y $0{\cdot}0 = 0$, entonces existe una vecindades V de 0 y $\delta > 0$ tal que

$$\alpha V \subset U \qquad \text{para} \qquad |\alpha| < \delta$$

definamos $W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V \subset U$.

W es vecindad de 0 pues αV es vecindad de 0 para todo α tal que $|\alpha| < \delta$. Ademas W es balanceado pues si $|\beta| \leq 1$, entonces:

$$\beta W = \beta \left(\bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V \right) = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \beta\alpha V.$$

Como $|\beta| \leq 1$, etonces $\alpha\beta \leq \alpha < \delta$, así

$$\bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha' V \subset W \qquad \text{donde} \qquad \alpha' = \alpha\beta$$

b) Sea U una vecindad convexa de 0. Consideremos

$$A = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U.$$

Sea $W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V \subset U$, como W es balanceado $\alpha^{-1} W = W$, si $|\alpha| = 1$, de donde $\alpha^{-1} W = W \subset U$, esto significa que $w \subset \alpha U$, como esto ocurre para cualquier α de norma 1, entonces

$$W \subset \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U = A,$$

pero como W es abierto $W \subset A^o$, así A^o es vecindad de 0. Si $\alpha = 1$, $1U = U$ y tendríamos que

$$\bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U \subset U$$

y por lo tanto $A^o \subset U$. Por el lema 3, αU es convexo y por el numeral iv) del teorema 7 A^o es convexo, solo falta por mostrar que es balanceada que es balanceado.
Sea $\rho, \beta \in K$, tales que $0 \leq \rho \leq 1$ y $|\beta| = 1$, entonces

$$\rho\beta A = \bigcap_{|\alpha|=1} \rho\beta\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} \rho\alpha U,$$

como αU es un conjunto convexo que contiene al 0 tenemos que $\rho\beta A \subset A$ y por lo tanto A es balance, por el numeral v del teorema 7 A^o es balanceado, lo cual completa la demostración. □

De acá llegamos a nuestro resultado sobre las bases locales.

Definición. Sea X un espacio vectorial topológico, X se dice localmente convexo si y solo si posee una base cuyos elementos son convexos.

Corolario 2.

a) Todo espacio vectorial topológico tiene una base local balanceada.

b) Todo espacio localmente convexo tiene una base localmente balanceada y convexa

Demostración. a) Sea β una base local arbitraria, entonces para cada $\beta_i \in \beta$ existe U_i vecindad de 0 balanceada contenida en β_i (teorema 8), así $\{U_i\}$ es una base local balanceada.

b) Si X es localmente convexo, X posee una base local convexa $\beta = \{\beta_i\}_{i\in I}$, así cada β_i es convexo, por el teorema 8 existe U_i convexo y balanceado, tal que $U_i \subset \beta_i$, así $\{U_i\}_{i\in I}$ es una base local convexa y balanceada. □

Teorema 9. *Sea V una vecindad de 0 en un espacio vectorial topológico X, entonces*

a) Si $\{r_n\}$ es creciente y $r_n \longrightarrow \infty$, entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

b) Todo subconjunto compacto K de X es acotado.

c) Si $\delta_1 > \delta_2 > \cdots$ y $\{\delta_n\} \longrightarrow 0$, y si V es acotado entonces la colección $\{\delta_n V : n = 1, 2, \cdots\}$ es una base local para X.

Demostración.

a) Sea $x \in X$, de la continuidad de la multiplicación por escalar tenemos que la función

$$\begin{aligned} g : K &\longrightarrow X \\ \alpha &\longrightarrow \alpha x \end{aligned}$$

es continua, por lo cual si V es una vecindad de 0, el conjunto $M = \{\alpha \in K | \alpha x \in V\}$ es abierto y contiene al 0, como $r_n \to \infty$, $1/r_n \to 0$, así para un n lo suficientemente grande $1/r_n \in M$, de lo cual

$$\frac{1}{r_n} x \in V \text{ o } x \in r_n V.$$

Como x es arbitrario podemos concluir que $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$, y por lo tanto $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$.

b) Como V es vecindad de 0, existe W vecindad de 0 balanceada, tal que $W \subseteq V$. Consideremos en a la sucesión $\{r_n\} = \{n\}$, de acá

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nW,$$

así $\{nW\}$ es un cubierta abierta para K, al ser compacto K, existen $n_1, n_2 \cdots, n_s \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset n_1 W \cup n_2 W \cup \cdots \cup n_s W,$$

pero como W es balanceado y $n_i < n_s$, entonces $n_i/n_s W \subset W$, de lo cual, $n_i W \subset n_s W$, luego $K \subset n_s W$. Además, si $t > n_s$, $K \subset n_s W \subset tW \subset tV$, con lo cual K es acotado.

c) Sea U una vecindad de 0 en X. Como V es acotado existe $s > 0$ tal que $V \subset tU$ para todo $t > s$, como s es fijo y $\delta_n \to 0$ entonces $s\delta_n \to 0$, tomamos $\epsilon = 1$ existe N tal que $s\delta_n < 1$ si $n \geq N$ y por lo tanto $s < 1/\delta_n$, así $V \subset 1/\delta_n U$ lo que implica que $\delta_n V \subset U$ para todo $n \geq N$, esto indica que U contiene a todos los conjuntos de la forma $\delta_n V$ excepto un número finito de estos, por lo tanto $\{\delta_n V\}$ es una base local.

□

Funciones Lineales

Ahora queremos ver que pasa con las funciones que actúan sobre los espacios vectoriales topológico, para ello recordemos algunas nociones que se usaran. Una función $\Lambda : X \to Y$ es lineal si $\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\Lambda(x) + \beta\Lambda(y)$, un ejemplo de esto es el operador de multiplicación M_λ, el cual es lineal, pues si aplicamos la definición

$$\begin{aligned} M_\lambda(\alpha x + \beta y) &= \lambda(\alpha x + \beta y) \\ &= \lambda\alpha x + \lambda\beta y \\ &= \alpha\lambda x + \beta\lambda y \\ &= \alpha M_\lambda(x) + \beta M_\lambda(y) \end{aligned}$$

sin embargo es fácil ver que si α no es 0 en el operador de traslación T_α no es lineal.

Para notar el conjunto de la imagen directa e inversa de una función recordemos que si $A \subset X$, el conjunto

$$\Lambda(A) = \{y \in Y | \Lambda(x) = y, \text{ con } x \in A\}$$

es la imagen directa de A. Del mismo modo si B es un subconjunto de Y, definimos

$$\Lambda^{-1}(B) = \{x \in X | \Lambda(x) = y, \text{ con } y \in B\}$$

es la imagen inversa de B.

Estos conjuntos cumplen varias propiedades interesantes, por ejemplo, si el conjunto A es un subespacio y Λ es una función lineal, $\Lambda(A)$ resulta ser también un subespacio, puesto que, si A es subespacio $0 \in A$ y

$$\Lambda(0) = \Lambda(0 + 0) = \Lambda(0) + \Lambda(0)$$

esto implica que $\Lambda(0) = 0$ y así $0 \in \Lambda(A)$. Por otro lado, si $y_1, y_2 \in \Lambda(A)$, existen $x_1, x_2 \in A$ tal que

$$\Lambda(x_1) = y_1 \text{ y } \Lambda(x_2) = y_2.$$

Pero como A es subespacio $x_1 + x_2 \in A$, por lo tanto $y_1 + y_2 \in \Lambda(A)$, ahora bien solo tenemos que ver que en efecto al tomar $\alpha \in K$ y $y \in \Lambda(A)$, $\alpha y \in K$, esto lo obtenemos directamente del hecho de que A es subespacio y Λ es lineal.

Resultados similares ocurren si suponemos A convexo o balanceado, sean $\Lambda(x), \Lambda(y) \in \Lambda(A)$ entonces como

$$t\Lambda(x) + (1 - t)\Lambda(y) = \Lambda(tx + (1 - t)y).$$

Si A es convexo, $\Lambda(A)$ también lo sera.

Ahora si A es balanceado y $|\alpha| < 1$,

$$\alpha A \subset A$$

y como la imagen directa se comporta bien bajo contenencias

$$\alpha\Lambda(A) = \Lambda(\alpha A) \subset \Lambda(A).$$

Por lo tanto, vemos que la imagen directa preserva la propiedad de subespacio, convexidad y de conjunto balanceado. Argumentos similares demuestran que la imagen inversa Λ^{-1} cumple exactamente las mismas propiedades, esta vez suponiendo B con la propiedad y aplicando la definición de imagen inversa. Cuando $B = \{0\}$, el conjunto de su imagen inversa $\Lambda^{-1}(B)$ es un subespacio conocido como el espacio nulo de Λ. El siguiente teorema pretende anidar las ideas presentadas en la sección de invarianza y separación junto con la idea de continuidad en funciones lineales.

Definición (Continuidad Uniforme)**.** Λ se dice uniformemente continua si para toda vecindad W de 0 en Y, existe una vecindad V de 0 en X tal que si $y - x \in V$ entonces $\Lambda(y) - \Lambda(x) \in W$.

Teorema 10. *Sean X y Y espacios vectoriales topológicos, si $\Lambda : X \to Y$ es lineal y continua en 0, entonces Λ es continua.*

Demostración. Sea W una vecindad de 0 en Y, como Λ es continua en 0 existe V vecindad de 0 en X, tal que $\Lambda(V) \subset W$. Así si $y - x \in V$ entonces $\Lambda(y) - \Lambda(x) \in W$, de acá que Λ envía vecindades de la forma $x + V$ de x en vecindades de la forma $\Lambda(x) + W$ de $\Lambda(x)$, esto implica que Λ es continua. $\square$

Teorema 11. *Sea Λ un funcional lineal en un espacio vectorial topológico X. Supongamos $\Lambda(x) \neq 0$, para algún $x \in X$, entonces cada una de las siguientes afirmaciones implica las otras 3*

a) *Λ es continua.*

b) *El espacio nulo $N(\Lambda)$ es cerrado.*

c) *$N(\Lambda)$ no es denso en X.*

d) *Λ es acotado en alguna vecindad V de 0.*

Demostración. $a \implies b$, por definición $N(\Lambda) = \Lambda^{-1}(\{0\})$ y $\{0\}$ es cerrado pues Y es espacio vectorial topológico, así $\Lambda^{-1}(\{0\})$ es cerrado.

$b \implies c$, supongamos que $N(\Lambda)$ es denso, entonces $\overline{N(\Lambda)} = X$, pero $N(\Lambda)$ es cerrado, así que $N(\Lambda) = X$ esto implicaría que $\lambda = 0$, lo cual es una contradicción.

$c \implies d$, Notemos K el campo del espacio vectorial. Como $N(\Lambda) \neq X$ y $N(\Lambda)$ no es denso, existe x y $r > 0$ tal que $\beta_r(x) \subset N(\Lambda)^c$, de este hecho y del teorema 8 existe V vecindad balanceada de 0 tal que

$$x + V \cap N(\Lambda) = \emptyset.$$

Como Λ es lineal $\Lambda(V)$ es balanceado en K y además $\Lambda(x + V) \neq 0$, por lo tanto si $y \in V$ entonces

$$\Lambda(x) + \Lambda(y) \neq 0 \text{ o } \Lambda(x) \neq -\Lambda(y).$$

Ahora veremos que en efecto Λ es acotado en V. Supongamos que no, entonces sea $z \in K$ cualquiera, como $\Lambda(V)$ no es acotado existe $x \in \Lambda(V)$ tal que $|x| > |z|$, entonces si $t = z/x$ tenemos que $|t| = |z/x| < 1$. Luego $tx = z \in \Lambda(V)$ por ser $\Lambda(V)$ balanceado, estos es $N(V) = K$, pero $\Lambda(y) \neq -\Lambda(x)$ para todo $y \in V$, lo cual es una contradicción , así $\Lambda(V)$ es acotado.

Por último queremos ver que $d \implies a$ para completar el ciclo. Sea V una vecindad de 0 en X tal que $|\Lambda(V)| < m$ para todo $x \in V$ y para algún $m < \infty$. Sea $r > 0$, hagamos $W = (r/m)V$ entonces si $y \in W$

$$|\Lambda(y)| \leq \frac{\epsilon}{m} \sup_{x \in V} |\Lambda(x)| \leq \epsilon,$$

así Λ es continua en 0 y por el teorema anterior continua en todo X. $\square$

Espacios de Dimensión Finita

Lema 5. *Sea X un espacio vectorial topológico sobre un campo K, cualquier funcional lineal $f : K^n \to X$ es continuo.*

Demostración. Sea $\{e_j\}$ una base estándar en K^n y haga $\mu_j = f(e_j)$ con $j = 1, \cdots, n$. Sea $z \in K^n$ entonces

$$z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i \text{ y } f(z) = f\left(\sum_{i=1}^{n} z_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} z_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} z_i u_i.$$

Como las proyecciones $f_i : K^n \to X$ definida por $(z_1, z_2, \cdots, z_n) \to z_i$, son continuas y la suma y multiplicación por escalar son continuas por ser espacio vectorial topológico (en este caso los escalares son μ_j), entonces f es continua. □

Para la siguiente demostración nos basaremos en [1], quien da un claro diagrama de lo que sucede.

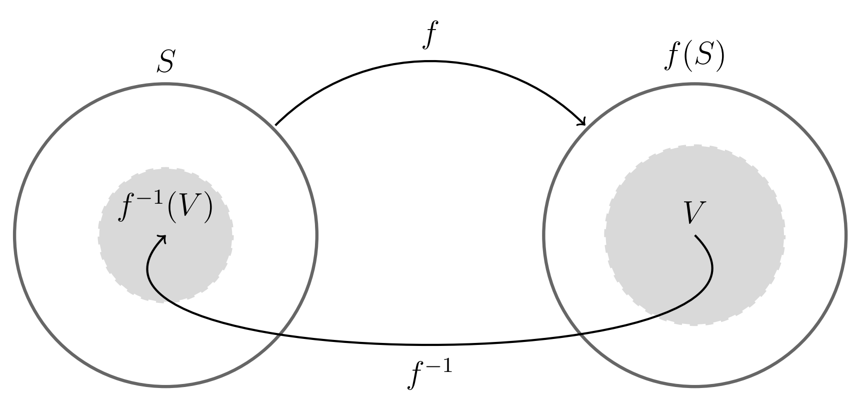
Teorema 12. *Sea n un entero positivo y Y un subespacio $n-$ dimensional de X un espacio vectorial topológico, entonces*

i) Todo isomorfismo $f : K^n \to Y$ es un homeomorfismo.

ii) Y es cerrado en X.

Demostración. Sea $f : K^n \to Y$ un isomorfismo (esto es lineal y biyectivo), queremos ver que f y f^{-1} son continuas. Por el lema anterior f es continua pues es lineal.

Considere S el cascarón de la esfera unitaria en K^n, B el interior de la esfera y sea $G = f(S)$. Como la esfera unitaria en un espacio vectorial de dimensión finita es compacta y f es continua entonces G es compacta en Y, además la biyectividad de f asegura que $0 \notin G$, un uso del teorema 4, es que si tenemos un compacto y un cerrado los podemos separarlos por vecindades disyuntas. En este caso tomamos nuestro compacto como G y nuestro cerrado $\{0\}$, así existe V vecindad balanceada de 0 tal que $G \cap V = \emptyset$.



El conjunto

$$E = f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap Y)$$

no interseca a S y como f es lineal entonces E es balanceado. Tenemos entonces que $f^{-1}(E) \in B$, como hicimos en el lema anterior podemos expresar f^{-1} como una $n-$tupla de funciones lineales sobre Y, como f^{-1} es acotado por 1 el teorema 11 nos indica que f^{-1} es continua.

Ahora queremos ver que Y es cerrado, para esto tomemos $p \in \overline{Y}$, y sean f y V como definimos arriba. Para algún $t > 0$, $p \in tV$ (Teorema 9), entonces p cae en la clausura de

$$Y \cap (tV) \subset f(tB) \subset f(t\overline{B}).$$

Como $f(t\overline{B})$ es compacto, es cerrado en X, de donde

$$p \in \overline{Y \cap (tV)} \subset \overline{f(tB)} \subset \overline{f(t\overline{B})} \subset f(t\overline{B}) \subset Y$$

así, $p \in Y$ de donde $Y = \overline{Y}$. □

Teorema 13. *Todo espacio vectorial topológico locamente compacto tiene dimensión finita.*

Demostración. Como X es localmente compacto existe V vecindad de 0 tal que $\overline{V}$ es compacta. esto implica que V es acotada y los conjuntos de la forma $2^{-n}V$ forman una base local para X.

Sea $y \in \overline{V}$, como $2^{-n}V$ es base local $y - \dfrac{1}{2}V \cap V \neq \emptyset$, así $y \in V + \dfrac{1}{2}V$, de lo cual

$$\overline{V} \subset V + \frac{1}{2}V = \bigcup_{x \in V} \left(x + \frac{1}{2}V \right)$$

como cada $x + \frac{1}{2}V$ es abierto, la última parte en la anterior ecuación forma un cubrimiento abierto para $\overline{V}$, como este es compacto entonces existen $x_1, x_2, \cdots, x_n \in V$ tales que

$$\overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{1}{2}V \right)$$

sea $Y = \text{Span}\{x_1, x_2 \cdots, x_n\}$, es un subespacio de dimensión finita y por lo tanto Y es un subespacio cerrado en X.

Como $V \subset Y + \dfrac{1}{2}V$ y ya que $\lambda Y = Y$ para todo $\lambda \neq 0$, entonces, al multiplicar por $\dfrac{1}{2}$se tiene que

$$\frac{1}{2}V \subset Y + \frac{1}{4}V$$

así, $V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V$. De manera similar podemos hallar que $V \subset Y + 2^{-n}V$ y por lo tanto

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(Y + 2^{-n}V\right)$$

pero del teorema 7 parte $i)$ tenemos que

$$\overline{Y} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(Y + 2^{-n}V\right)$$

así $V \subset \overline{Y} = Y$.

Por otro lado, por el teorema 9 como $x_n = n \to \infty$ entonces

$$x = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$$

pero como Y es subespacio vectorial $nV \subset Y$, así

$$Y \subset X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nV \subset Y$$

por lo tanto $Y = X$, y X es de dimensión finita. □

El anterior teorema nos facilita el trabajo sobre la dimensión de los espacios vectoriales topológicos, por ejemplo, si el espacio es locamente acotado y además posee la propiedad de Heine-Borel (cerrado y acotado implica compacto) podemos garantizar inmediatamente que este espacio debe ser de dimensión finita. Esto debido a que el ser localmente acotado hace que exista V vecindad de 0 acotada. Luego, por el teorema 7 ítem $vi)$ nos garantiza que $\overline{V}$ va a ser acotado y por lo tanto la propiedad de Heine-Borel lo hace compacto.

En este punto hemos reunido todas las condiciones del teorema anterior, en consecuencia el espacio sobre el que se esta trabajando debe ser de dimensión finita.

Metrización

En esta parte pretendemos presentar un teorema que nos va a permitir hablar de cuando un espacio vectorial topológico posee una métrica compatible con la topológia, la demostración es puramente constructiva, y se basa en la idea de que si X es un espacio vectorial topológico con una métrica compatible d, entonces las bolas de radio $1/n$ se convierten en una base local contable, este hecho es la condición precisa que necesitamos para tener una condición necesaria y suficiente para hablar de métricas en X.

Teorema 14. *Si X es un espacio vectorial topológico con una base local contable, entonces existe una métrica d en X tal que*

a) d es compatible con la topológia de X.

b) Las bolas abiertas en 0 son balanceadas.

c) d es invariante.

Además si X es localmente convexo, entonces podemos tomar d que satisface

d) Todas las bolas abiertas son convexas.

Demostración. Primero como X es localmente contable sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ la base local contable, por el teorema 8 cada B_n contiene vecindades balanceadas V_n de 0 y estas forman una base local gracias al corolario 2, además las podemos tomar tal que cumplen

$$V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n.$$

Cuando X es localmente convexo estas las tomaremos convexas.
Sea D el conjunto de todos los números racionales $r = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r)2^{-n}$ donde los $C_i(r)$ son 0 o 1 y solo un número finito de estos son 1.

Si $r \in D$ entonces $0 \leq r < 1$. Definimos la función $A(r) = X$ si $r \geq 1$ y para todo $r \in D$

$$A(r) = C_1(r)V_1 + C_2(r)V_2 + \cdots$$

cada una de estas sumas es finita por ahora. Sea

$$f(x) = \text{ínf}\,\{r : x \in A(r)\}$$

y para todo $x, y \in X$

$$d(x, y) = f(x - y).$$

Antes de mostrar que en efecto d cumple con las propiedades que necesitamos, hay varias cosas que debemos tener en cuenta, en los conjuntos V_n tenemos que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} V_i \subset V_n$$

y la función $A(r)$ cumple que $A(r) + A(s) \subset A(r + s)$. Si $r + s \geq 1$, $A(r + s) = X$ y por lo tanto $A(r) + A(s) \subset A(r + s)$. si $r + s < 1$, entonces existen varios casos

1) Si $C_n(r) + C_n(s) = C_n(r+s)$, obtenemos

$$\begin{aligned} A(r) + A(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r)2^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(s)2^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_n(r) + C_n(s))\, 2^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r+s)2^{-n} \\ &= A(r+s). \end{aligned}$$

2) Si $C_n(r) + C_n(s) \neq C_n(r+s)$, para algún n, entonces sea N el más pequeño n donde esto ocurre, entonces tenemos que $C_N(r) = C_N(s) = 0$ y $C_N(r+s) = 1$, de lo cual como

$$\begin{aligned} A(r) &= C_1(r)V_1 + \cdots + C_{N-1}(r)V_{N-1} + 0V + C_{N+1}(r)V_{N+1} + C_{N+2}(r)V_{N+2} + \cdots \\ &\subset C_1(r)V_1 + \cdots + C_{N-1}(r)V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1}. \end{aligned}$$

De igual forma $A(s) \subset C_1(s)V_1 + \cdots + C_{N-1}(s)V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1}$, así

$$\begin{aligned} A(r) + A(s) &= (C_1(r) + C_1(s))V_1 + \cdots + (C_{N-1}(r) + C_{N-1}(s))V_{N-1} \\ &\quad + V_{N+1} + V_{N+1} + V_{N+1} + V_{N+1} \\ &= C_1(r+s)V_1 + \cdots + C_{N-1}(r+s)V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1} + V_{N+1} + V_{N+1} \\ &= C_1(r+s)V_1 + \cdots + C_{N-1}(r+s)V_{N-1} + V_N \\ &\subset A(r+s). \end{aligned}$$

La discución de $C_N(r) = 1$, $C_N(s) = 0$ y $C_N(r+s) = 0$ o $C_N(r) = 1$, $C_N(s) = 1$ y $C_N(r+s) = 0$, se basa en el hecho de que N es el menor número en el que ocurre $C_n(r) + C_n(s) \neq C_n(r+s)$ y en como se definen r y s.

Por otro lado notemos que $0 \in A(r)$ así

$$A(r) \subset A(r) + A(t-r) \subset A(r+t-r) = A(t) \qquad \text{si } r < t$$

luego el conjunto $\{A(r)\}$ es un conjunto totalmente ordenado por la inclusión de conjuntos.

Ahora queremos ver que si $x, y \in X$, entonces

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

Si $f(x) + f(y) \geq 1$ tendríamos el resultado por la definición de f. Ahora si $f(x) + f(y) < 1$, sea $\epsilon > 0$, entonces existen $r, s \in D$ tales que

$$f(x) < r, f(y) < s \text{ y } r + s < f(x) + f(y) + \epsilon.$$

Estos los podemos tomar si hacemos el máximo de los n en $f(x) = r_1$ y $f(y) = s_1$, tales que,

$$C_m(r_1) = C_m(s_1) = 0 \text{ para todo } m > n$$

y por la Propiedad Arquimediana, podemos encontrar un N tal que $1/2^N < \epsilon$. Sea k el mayor de ambos, entonces cumple que $C_m(r_1) = C_m(s_1) = 0$ y $1/2^k < \epsilon/2$, de acá

$$\begin{aligned} f(x) &< r_1 + 1/2^k = r, \\ f(y) &< s_1 + 1/2^k = s, \\ r + s &= s_1 + 1/2^k + r_1 + 1/2^k < f(x) + f(y) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\{A(r)\}$ es totalmente ordenado, esto implica que

$$x \in A(r) \text{ y } y \in A(s),$$

de donde,

$$x + y \in A(r) + A(s) \subset A(r+s),$$

de lo cual,

$$f(x+y) \leq r + s \leq f(x) + f(y) + \epsilon$$

para todo ϵ. Así,

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

Por otro lado como

$$A(r) = C_1(r)V_1 + \cdots$$

es una suma de conjuntos balanceados tenemos que $f(x) = f(-x)$.

Tenemos también que$f(0) = 0$ pues $0 \in A(r)$ para todo $r \in D$ y $f(0) = \text{ínf}\,\{r : 0 \in A(r)\} = 0$. De lo anterior y por como esta definido f, d es una métrica en X.

Veamos que $a)$ ocurre, consideremos

$$B_\delta(0) = \{x : f(x) < \delta\} = \bigcup_{r<\delta} A(r)$$

si hacemos $\delta < 2^{-n}$, entonces $B_\delta \subset V_n$ de donde $\{B_\delta\}$ es una base local para la topológia de X y por lo tanto d es compatible con la topológia en X.

b) Tenemos $B_\delta(0) = \bigcup\limits_{r<\delta} A(r)$, y cada $A(r)$ es balanceado.

c) Obtenemos de

$$\begin{aligned} d(x+z, y+z) &= f(x+z-(y+z)) \\ &= f(x-y) \\ &= d(x,y). \end{aligned}$$

Por último *d*), si V_n es convexo, $A(r)$ lo es también, y como $B_\delta(0) = \bigcup\limits_{r<\delta} A(r)$, cada $B_\delta(0)$ es convexo y cada traslación de esta también lo es, lo cual completa la prueba. □

Sucesiones de Cauchy

Hasta el momento hemos trabajado las propiedades de los espacios vectoriales topológicos y no hemos necesitado que estos posean una norma o una métrica, por esto debemos dar una definición de sucesión de Cauchy totalmente compatible con la de los espacios métricos, y que nos ayude a determinar como las sucesiones de Cauchy interactúan con los anteriores resultados.

Cuando un espacio es casi un espacio de Banach, solo conservando la propiedad de ser completo, localmente convexo y posea una métrica invariante lo llamaremos un espacio de Fréchet.

Definición. Sea X un espacio vectorial topológico y B una base local para τ, una sucesión $\{x_n\}$ en X es una sucesión de Cauchy si para cada $V \in B$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in V$ si $n, m > N$.

Notemos que de esta definición se desprenden varias consecuencias. Por ejemplo, si tenemos varias bases locales en un mismo espacio vectorial topológico, las sucesiones de Cauchy que determinan estas son exactamente las mismas, para ver esto tomemos β_1 y β_2, dos bases locales para τ y $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en β_1 , tomemos un $W \in \beta_2$ arbitrario, así, como β_1 es base local se tiene que existe $V \in \beta_1$ tal que $V \subset W$, como x_n es sucesión de Cauchy para V existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in V$ si $n, m > N$ y por lo tanto $x_n - x_m \in W$ si $n, m \geq N$, esto es las sucesiones de Cauchy son independientes de la base local que tomemos para el espacio, así que todas son determinadas por una sola base local.

Ahora hablemos sobre qué pasa con las métricas, resulta que si τ es compatible con una métrica invariante d, las sucesiones de Cauchy que generan ambos son exactamente las mismas, para notar las sucesiones de τ las llamaremos $\tau-$Cauchy y $d-$Cauchy para las de d. Primero tomemos una sucesión (x_n) $d-$Cauchy entonces si $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ siempre que $n, m > N$, además como τ es compatible con d las bolas $\beta_\delta(0)$ forman una base local para τ. Sea $V = \beta_\epsilon(0)$, como d es invariante $d(x_n, x_m) = d(x_n - x_m, 0) < \epsilon$, y por lo tanto $x_n - x_m \in V$ y por la discusión anterior $x_n - x_m$ es $\tau-$Cauchy. Por otro lado si $\{x_n\}$ es $\tau-$Cauchy, para la base local $\beta = \{\beta_\delta(0)\}$ es $\tau-$Cauchy, así sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in \beta_\epsilon(0)$, esto es $d(x_n - x_m, 0) = d(x_n, x_m) < \epsilon$ siempre que $n, m > N$, luego $\{x_n\}$ resulta ser $d-$Cauchy, así que hay compatibilidad entre las definiciones de sucesión de Cauchy en ambos casos.

Como ya vimos si una métrica invariante y una topológia son compatibles, determinan las mismas sucesiones de Cauchy. Lo mismo pasa en el caso en que se tengan 2 métricas invariantes que inducen la misma topológia. Sean d_1 y d_2 dos métricas que inducen la misma topológia τ. Sea $\{x_n\}$ una d_1-sucesión de Cauchy, entonces $\{x_n\}$ es una τ sucesión de Cauchy. Como τ y d_2 son compatibles $\{x_n\}$ es una d_2- sucesión de Cauchy y por lo tanto d_1 y d_2 tienen exactamente las mismas sucesiones de Cauchy. De igual forma si el espacio con d_1 es completo, también lo sera con d_2. Dicho esto podemos formular el primer teorema.

Teorema 15. *Suponga que (X, d_1), (Y, d_2) son espacios métricos y (X, d_1) es completo. Sea E un conjunto cerrado en X, $f : E \to Y$ continua y $d_2(f(x_1), f(x_2)) \geq d_1(x_1, x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in E$, entonces $f(E)$ es cerrado.*

Demostración. Sea $y \in \overline{f(E)}$ entonces existe $\{x_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y,$$

esto es, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, para el cual

$$\begin{aligned} \epsilon &> d_2(f(x_n), f(x_m)) \\ &\geq d_1(x_n, x_m) \end{aligned}$$

siempre que $n, m > N$. Esto implica que $\{x_n\}$ es sucesión de Cauchy en X. Como este es completo existe $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $x \in E$ pues es cerrado. El hecho de que f sea continua garantiza que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = y \in f(E)$, por lo tanto E es cerrado. □

Necesitamos hablar de las métricas invariantes en los espacios vectoriales topológicos, cuando un espacio vectorial topológico posea una métrica invariante que además lo haga completo, lo llamamos un $F-$espacio.

Teorema 16. *Supongamos que Y es un subespacio de un espacio vectorial topológico X, además Y es un $F-$espacio, con la topologia inducida de X. Entonces Y es un subespacio cerrado de X.*

Demostración. Sea d la métrica invariante, completa y compatible con la topológia inducida en Y. Sea la base local contable $\beta_{1/n}(0)$. como $\beta_{1/n}(0)$ esta en la topológia inducida, existen abiertos $U_n \in \tau$, tales que,

$$\beta_{1/n}(0) = U_n \cap Y$$

como en las construcciones anteriores podemos encontrar entonces vecindades $V_n \subset U_n$ tal que V_n es simétrica , $V_n + V_n \subset U_n$ y $V_{n+1} \subset V_n$.

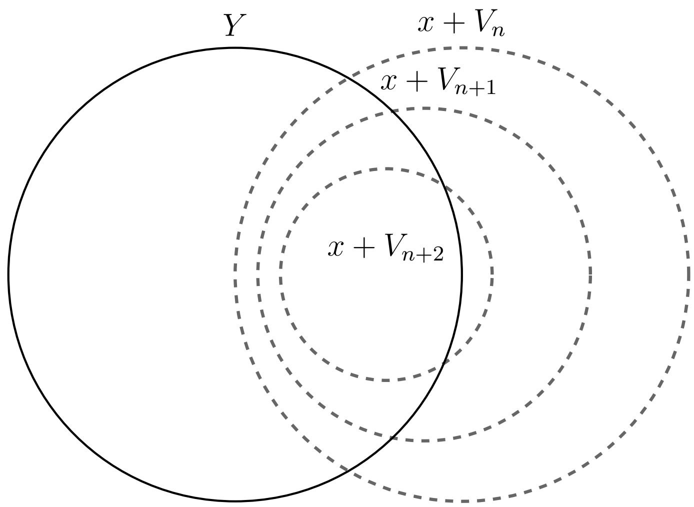
Sea $x \in \overline{Y}$ y defina

$$E_n = Y \cap (x + V_n)$$

como $x \in \overline{Y}$, ningún E_n es vació. Sean $y_1, y_2 \in E_n$, entonces $y_1, y_2 \in Y$, como Y es subespacio $y_1 - y_2 \in Y$, además $y_1 = x + x_1$ y $y_2 = x + x_2$ donde $x_1, x_2 \in V_n$, como los V_n pueden ser escogidos balanceados, $y_1 - y_2 = x_1 - x_2 \in V_n - V_n \subset V_n + V_n$, de lo cual $y_1 - y_2 \in V_n + V_n \subset U_n$, así

$$\begin{aligned} E_n &= Y \cap (x + V_n) \\ &\subset Y \cap U_n \\ &= \beta_{1/n}(0) \end{aligned}$$

de donde, el diámetro de los conjuntos E_n tiende a 0, como Y es completo, la intersección de la $Y-$clausura de estos conjuntos contiene exactamente un punto, el cual notamos $y_0 \in Y$.



Ahora sea W una vecindad de 0 en X y defina

$$F_n = Y \cap (x + W \cap V_n).$$

Argumento similares a la anterior construcción, muestran que la intersección de la $Y-$clausura de F_n tiene un único punto de acumulación y_w, pero como $F_n \subset E_n$ entonces $y_w = y_0$, además como $F_n \subset x + W$ entonces y_0 cae en la $X-$clausura de $x+W$ y como W puede recorrer todas las vecindades de 0, el teorema 7 garantiza que el único punto de acumulación de $x + W$ es x, así $y_0 = x$ y $x \in Y$, por lo tanto $Y = \overline{Y}$. □

Por último para terminar la sección existen propiedades que pueden llegar a ser muy útiles, por ejemplo si d es una métrica invariante sobre un espacio vectorial X, entonces

$$d(nx, 0) \leq nd(x, 0)$$

y tomamos una sucesión $\{x_n\}$ que converge a 0 en un espacio vectorial topológico metrizable, se pueden encontrar escalares γ_n tales que

$$\gamma_n \to \infty \text{ y } \gamma_n x_n \to 0. \tag{1.4}$$

Esto nos ayudara más adelante cuando demostremos algunas propiedades de las transformaciones lineales acotadas.

La primera parte es una implicación de la desigualdad triangular aplicada n veces y para la segunda como $d(x_n, 0) \to 0$, existe una sucesión creciente de enteros positivos n_k tal que $d(x_n, 0) < k^{-2}$ si $n \geq n_k$, defina $\gamma_n = 1$ si $n < n_1$ y $\gamma_n = k$ si $n_k \leq n < n_{k+1}$, por ejemplo si tomamos $x_n = 1/n$, entonces los n_k pueden ser tomados como $\{2, 5, 10, 17, \cdots, n^2 + 1, \cdots\}$ y por lo tanto los γ_n serian $\{1, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, 5, \cdots\}$. si fijamos un n tenemos que

$$d(\gamma_n x_n, 0) = d(kx_n) \leq kd(x_n, 0) < 1/k$$

de donde $\{\gamma_n x_n\} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Acotación y Continuidad

Iniciaremos la discusión hablando sobre los conjuntos acotados. En las métricas decimos que un conjunto $E \subset X$ es acotado si existe un $M < \infty$ tal que $d(x, y) < M$ para todo $x, y \in E$. En cambio hemos definido de otra forma el ser acotado para los espacios vectoriales topológicos. En este caso, no ocurre lo que pasaba con las sucesiones de Cauchy, puede que un conjunto sea acotado con la métrica, sin embargo no serlo con la topológia. Por ejemplo pensemos en la sección de metrización, la métrica que allí definimos es una métrica acotada por 1, es decir, $d(x, y) \leq 1$, y todo el espacio es acotado, lo cual en general no es verdad.

Por otro lado, si tenemos que la métrica es inducida por una norma, en efecto ambas nociones de acotación coinciden. Tomemos un conjunto E acotado por la métrica, entonces todos los elementos de E estarán acotados por un M, fijamos un $z \in E$ y hacemos $r = d(0, z)$ esta distancia siempre sera fija entonces si tomamos un x arbitrario en E,

$$d(0, x) \leq d(0, z) + d(z, x) \leq r + M.$$

Como las vecindades, la base local la podemos tomar $\beta_{1/n}(0)$, basta que probemos para una vecindad de estas que E es acotado, sea n arbitrario, entonces como $d(x, 0) < r+M$, $|x/(r+M)n| < 1/n$, luego $x/(r+M)n \in V_{1/n}(0)$ o $x \in n(r+M)V_n(0)$ y si tomamos $t = (r+M)n$, E es acotado con la topológia.

Pensemos que pasa con la métrica

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

en $\mathbb{R}$ con la métrica usual, ambas, d^* y la usual son equivalentes. Sin embargo,la topológia de d hace que el conjunto $\mathbb{N}$ no sea acotado, pero en d^* si lo es.

Como en los espacios normados, en los espacios vectoriales topológicos las sucesiones de Cauchy son acotadas, esto lo veremos en el siguiente teorema.

Teorema 17. *Una sucesión de Cauchy en un espacio vectorial topológico es acotada.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy. Sea W una vecindad de 0, por las construcciones anteriores podemos construir V balanceada, tal que $V + V \subset W$, como $\{x_n\}$ es sucesión de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in V$ para $n, m \geq N$, en particular si fijamos $m = N$

$$\begin{aligned} x_n - x_N &\in V \\ x_n &\in x_N + V \end{aligned}$$

como $\bigcup_{n=1}^{\infty} nV = X$, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in sV$

$$x_n \in x_N + V \subset sV + V \subset sW$$

ahora si $t > s$ por la construcción

$$x_n \in tW$$

luego $\{x_n\}$ es acotado. □

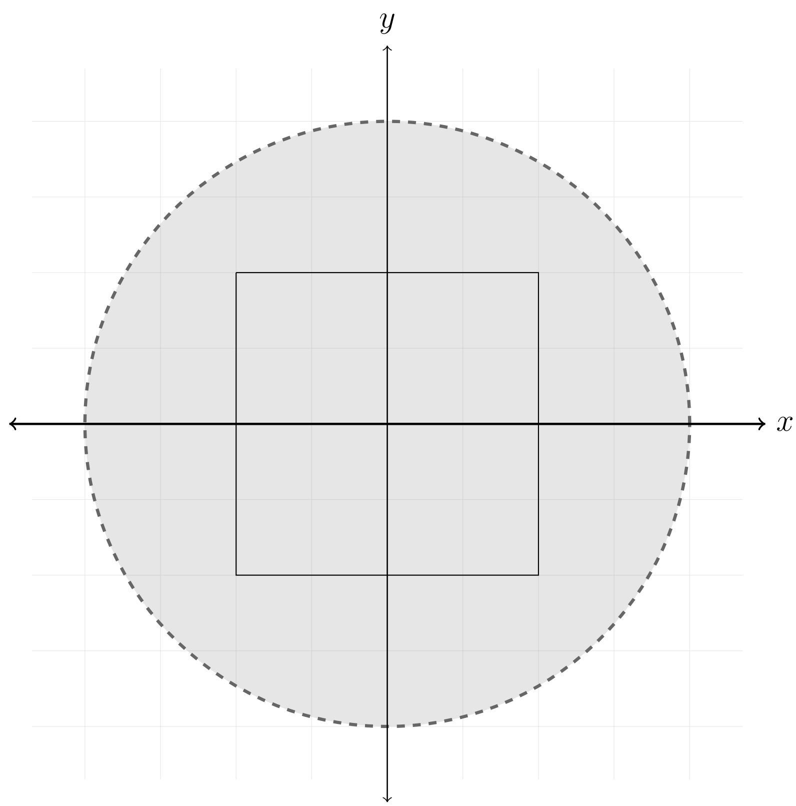
Teorema 18. *Si $x \neq \{0\}$ el conjunto $E = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$, no es acotado.*

Demostración. Como $x \neq 0$, existe V tal que

$$V \cap \{x\} = \emptyset$$

de aca $nx \notin nV$ eso quiere decir que ningún, nV contiene a E y por lo tanto E no es acotado. □

Un resultado inmediato, es el hecho de que en un espacio vectorial topológico, el único subespacio que es acotado es el $\{0\}$. En los reales podíamos caracterizar un conjunto acotado de una manera muy similar como acá. Por ejemplo el cuadrado unitario era acotado, puesto que los puntos contenidos en este no superaban la norma $\sqrt{2}$. Es decir, si se toma la bola de radio $\sqrt{2} + 1$ el cuadrado unitario quedaba dentro de esta bola y por lo tanto es acotado,



Teorema 19. *En un espacio vectorial topológico X, un subconjunto E es acotado si y solo si, existe una sucesión $\{x_n\} \subset E$ y una sucesión de escalares $\{\alpha_n\}$ tal que si $\alpha_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\alpha_n x_n \to 0$.*

Demostración. Supongamos que E es acotado, sea V una vecindad balanceada de 0 en X, entonces $E \subset tV$, para algún $t > 0$, sea $\{x_n\} \subset E$ y $\{\alpha_n\} \to 0$, entonces existe N tal que $|\alpha_n|t < 1$ si $n > N$, como $t^{-1}E \subset V$ y V es balanceado,

$$\alpha_n tV \subset V$$

por lo cual

$$\alpha_n t t^{-1} x_n = \alpha_n x_n \in V \qquad \text{si } n > N$$

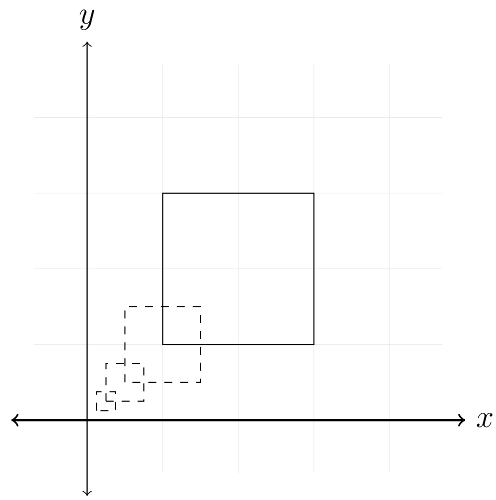
es decir, $\{\alpha_n x_n\} \to 0$.

Ahora, supongamos que E no es acotado, entonces existe una vecindad V de 0 y $\{r_n\} \to \infty$, tal que $E \not\subset r_n V$ para todo n. Tomemos $\{x_n\}$ en E de tal forma que $x_n \notin r_n V$, entonces ningún $1/r_n x_n$ pertenecerá a V, lo cual es una contradicción, puesto que

$$\frac{1}{r_n} \to 0 \qquad \text{y } \frac{1}{r_n} x_n \not\to 0,$$

lo cual completa la demostración. $\square$

Este hecho lo podemos ver fácilmente en $\mathbb{R}^2$, en donde si tenemos un conjunto acotado como el cuadrado unitario centrado en $(2,2)$, la sucesión $\{1/n\}$ hace que este vaya tendiendo a ser un "objeto" muy cercano al 0.



En el análisis funcional estudiamos las propiedades de las transformaciones lineales, una de estas es la acotación. Para el ámbito de los espacios vectoriales topológicos diremos que una transformación lineal Λ entre espacios vectoriales topológicos sera acotada, si Λ envia conjuntos acotados en conjuntos acotados, más precisamente si

$$\Lambda : X \longrightarrow Y$$

y $E \subset X$ acotado, entonces $\Lambda(E)$ es acotado en Y.

Teorema 20. *Supongamos X y Y espacios vectoriales topologicos y $\Lambda : X \to Y$ lineal, entonces*

a) *Λ es continua.*

b) *Λ es acotada.*

c) *Si $x_n \to 0$ en X, entonces $\Lambda(x_n)$ es acotado.*

d) *Si $x_n \to 0$ entonces $\Lambda(x_n) \to 0$*

para cuales quiera X, Y y Λ, a $\implies$ b $\implies$ c, si además X es metrizable, entonces c $\implies$ d $\implies$ a

Demostración. $a) \implies b)$ Sea E un conjunto acotado en X y sea W una vecindad de 0 en Y. Siendo que Λ es continua (y que $\Lambda(0) = 0$), existe una vecindad V de 0 en X tal que $\Lambda(V) \subset W$ como E es acotado existe $t > 0$ tal que $E \subset sV$, para todo $s > t$, así

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(sV) = s\Lambda(V) \subset sW$$

para todo $s > t$, así $\lambda(E)$ es acotado en Y, y por lo tanto Λ es acotado.

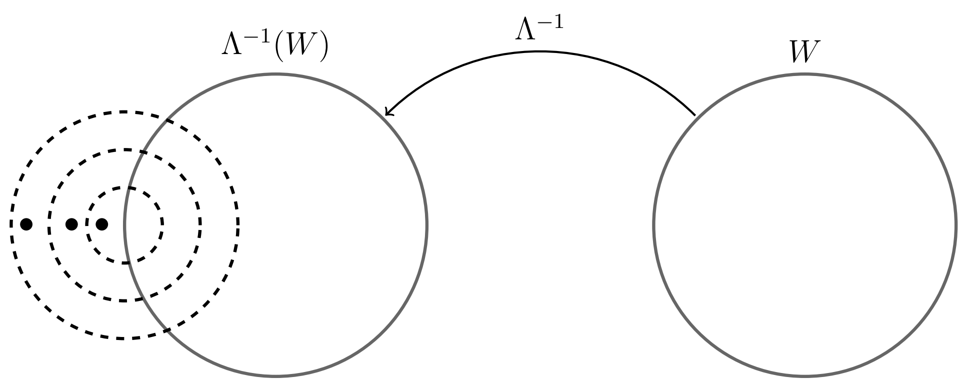
$b) \implies c)$ Como x_n es convergente es una sucesión de Cauchy, y por lo tanto es acotado, el ítem anterior prueba entonces que $\Lambda(x_n)$ es acotado.

Ahora supongamos que X es metrizable y que Λ satisface $c)$, tome $\{x_n\} \to 0$ por 1.4, existe $\{\alpha_n\} \to \infty$ tal que $\{x_n\alpha_n\} \to 0$ de lo cual, $\Lambda\{x_n\alpha_n\}$ es acotado, sin embargo por el teorema 19

$$\frac{1}{\alpha_n}\Lambda(\alpha_n x_n) \to 0$$

Es decir, $\Lambda(x_n) \to 0$.

Por último supongamos que $d)$ se tiene pero $a)$ no, entonces existe W vecindad de 0 en Y tal que $\Lambda^{-1}(W)$ no contiene vecindades de 0 en X. Como X tiene una base local contable $V_{1/n}(0)$, existe una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $x_n \to 0$, pero $\{\Lambda(x_n)\} \notin W$, y por lo tanto $\{\Lambda(x_n)\} \not\to 0$ lo cual es un absurdo. □



Conclusiones

Pudimos rescatar muchas nociones que teníamos sobre los espacios de Banach en espacios y más generales. Cada una de estas nociones pudimos demostrar que es consistente sin necesidad de disponer de una norma e incluso una métrica en ocasiones. Además, pudimos manejar más a gusto y afondo las propiedades conjuntistas que poseen estos espacios. Nociones no tan conocidas como conjunto balanceado.

En el capítulo de separación pudimos separar un punto y un compacto. Esto nos lleva a pensar que nuestro espacio no solo es Hausdorff si no que puede ser regular e incluso más. El teorema 5 asegura que si tenemos una base local β, todo miembro de β contiene la clausura de algún otro miembro, esto significa que nuestro espacio se vuelve Urysohn.

En los espacios vectoriales topológicos pudimos observar una condición que es necesaria y suficiente para poseer métrica. Cambia mucho a las nociones de la topológica pues en esta tenemos apenas un implicación

$$\text{Métrica} \Longrightarrow \text{Topología}.$$

Acá sin embargo el hecho de poseer una base local contable es suficiente y necesario para poseer una métrica compatible con la topología.

Bibliografía

[1] Kuferman, R. *Functional analysis 80600.* Institute of Mathematics The Hebrew University, 2013.

[2] Rudin, W. *Functional analysis.* McGraw-Hill New York, 1973.

[3] Rudin, W. *Principles of mathematical analysis / Walter Rudin*, 3d ed. ed. McGraw-Hill New York, 1976.