UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Sobre polinomios ortogonales en la recta real correspondientes a una sucesión encadenada perturbada

Edisson Ricardo Barbosa David

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Matemáticas
Bogotá D.C.
2020

Sobre polinomios ortogonales en la recta real correspondientes a una sucesión encadenada perturbada

Edisson Ricardo Barbosa David

Monografía presentada como requisito parcial para optar al título de Matemático

Director
Luis Oriol Mora Valbuena
Profesor

Bogotá D.C.
2020

Agradecimentos

Antes que nada, quiero agradecer a mis padres, quienes han estado incondicionalmente para mí y me han apoyado en cada paso de este largo camino. También agradezco al profesor Oriol Mora por toda su ayuda en la realización de este trabajo, por su paciencia y disposición en sacar adelante este proyecto. Finalmente, en esta gran aventura me acompañaron personas especiales, las cuales nunca pensé que llegarían a mi vida. Es un gran honor para mí poderlos llamar amigos y les agradezco por siempre estar ahí para mí.

Índice

Introducción

Los polinomios ortogonales pertenecen a una gran familia de funciones especiales y desde su aparición en el siglo XVIII, estos han sido de vital importancia debido a que se hallan en la teoría de ecuaciones diferenciales, la teoría de espacios de Hilbert y muchas más áreas de la matemática y de la física. Es así que surgió el interés por este tema y por ende se planteó hacer el trabajo de grado en esta área.

En consecuencia, se tomó el artículo *"Orthogonal Polynomials On The Real Line Corresponding To A Perturbed Chain Sequence"* de Kiran Kumar Behera y A. Swaminathan. Este artículo trata las sucesiones encadenadas y sus perturbaciones, también señala que últimamente estas sucesiones han jugado un papel importante en la caracterización de polinomios ortogonales tanto en la recta real como en el círculo unitario.

En un principio, al realizar la primera lectura del artículo antes mencionado, se encontraron muchos argumentos y teoría desconocida, lo cual impidió una óptima comprensión del texto; además muchos teoremas y proposiciones tenían demostraciones muy compactas o simplemente no tenían demostración, y por ende no se veían muchos de los argumentos que exhibía el texto.

Es así, que se propone como objetivo principal del trabajo, entender el artículo o parte de él. Para esto, se proponen los siguientes objetivos:

- Hacer un estudio teórico de modo que permita obtener un mejor entendimiento del tema.
- Ampliar en detalle las demostraciones que se presentan en el artículo.
- Desarrollar un estudio teórico con respecto a las sucesiones encadenadas.

Con el fin de lograr estos propósitos, se desarrolla la siguiente metodología:

- Primeramente, se hace un seminario de polinomios ortogonales en donde se ve la teoría general de esta clase de polinomios.

- En segundo lugar, como fuente principal se considera la bibliografía del artículo, y además se busca bibliografía pertinente para así hacer una síntesis teórica.
- Al mismo tiempo en que se desarrollan los pasos anteriores, se tienen reuniones semanales con el director del trabajo de grado en donde se resuelven las dudas del mismo.

Los resultados se organizan en tres capítulos. En el primero, se hace una síntesis teórica de áreas básicas vistas a lo largo de la carrera. Dentro de esta síntesis, se tratan conceptos como los de espacio vectorial, base de Hamel, base de Schauder, medida, entre otros; esta síntesis se hace sin entrar en mucho detalle. Sumado a esto, se elabora un compendio detallado sobre fundamentos de la teoría general de polinomios ortogonales. Todo esto se desarrolla con el fin de dar respuesta al primer objetivo específico.

Entre el segundo y tercer capítulo, se da respuesta al segundo objetivo específico. Así pues, el segundo capítulo contiene una extensión de la teoría de polinomios ortogonales, esta se hace a polinomios más generales debido a que el artículo trata con este tipo de polinomios, mientras que la teoría de polinomios ortogonales usualmente está sustentada en polinomios mónicos. Además, se exponen un tipo de polinomios especiales, estos son los asociados. Este tema generó cierta dificultad, debido a que era un tema nuevo a tratar, sin embargo, de allí surgió una demostración que es propia y que requirió un importante gasto de tiempo. Por último, el capítulo termina con ciertos sistemas de polinomios ortogonales que son de suma importancia, estos son los sistemas de polinomios simétricos y los sistemas Kernel de polinomios.

En el capítulo 3, se hace una introducción de las sucesiones encadenadas, donde se tratan las sucesiones encadenadas complementarias y las sucesiones encadenadas complementarias generalizadas. Además, se ve la relación entre coeficientes de ciertos sistemas mónicos ortogonales de polinomios tratados en el capítulo 2; el capítulo concluye con un ejemplo de sucesión encadenada de un sistema de polinomios ortogonal clásico, como lo es el sistema de polinomios de Laguerre. Toda esta labor, se hace para contestar el último objetivo específico.

Finalmente, se reportan las conclusiones del trabajo junto con las referencias bibliográficas del mismo.

Capítulo I

1. Preliminares

En este capítulo, se encuentran diversos conceptos básicos, que ayudarán a entender con más claridad los argumentos que presenta el artículo estudiado. Entre estos están teoría vista durante la carrera, y por otra parte se hace una síntesis de la teoría general de polinomios ortogonales.

1.1. Álgebra lineal

En esta sección, se tratan conceptos básicos del álgebra lineal como lo son espacio vectorial, base de Hamel y Transformación lineal[1].

Definición 1.1.1 (Espacio vectorial). Un espacio vectorial sobre un campo K es un conjunto no vacío V de elementos $x, y, \cdots$, denominados vectores, junto con dos operaciones denominadas suma (denotada por $x + y$) y multiplicación por un escalar (denotada por αx, y donde los escalares son elementos de K), satisfacen los siguientes axiomas:

i) Si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$.
ii) Para todo x, y y z en V, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
iii) Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo x $\in V$, $x + 0 = 0 + x = x$.
iv) Si $x \in V$, existe un vector $-x$ en V tal que $x + (-x) = 0$.
v) Si x y y están en V, entonces $x + y = y + x$.
vi) Si $x \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha x \in V$.
vii) Si x y y están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
viii) Si $x \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
ix)Si $x \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta x)$.
x) Para cada $x \in V$, $1x = x$.

Entre los espacios vectoriales más conocidos están $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, L_2 L_p y el espacio de polinomios P_n.

[1] Esta síntesis de conceptos de la sección se toma de ([**5**], p $50 - 55$).

Definición 1.1.2 (Subespacio). Un subespacio de un espacio vectorial V es un subconjunto no vacío Y de V tal que para todo $y_1, y_2 \in Y$ y todo escalar $\alpha, \beta \in K$ se tiene que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. Las dos operaciones algebraicas son aquellas inducidas por V.

Definición 1.1.3 (Combinación lineal). Una combinación lineal de vectores $x_1, \cdots, x_m$ de un espacio vectorial V es una expresión de la forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m,$$

donde los coeficientes $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ son escalares.

Nota. Para cualquier subconjunto $M \subset V$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de M se dice el generado de M. Además, el generado de M es un subespacio vectorial de V.

Definición 1.1.4 (Linealmente independiente, linealmente dependiente). La independencia y dependencia lineal de un conjunto M de vectores $x_1, \cdots .x_r$ $(r \geq 1)$ en un espacio vectorial V se define por medio de la siguiente ecuación

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = 0,$$

donde los coeficientes $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ son escalares. Claramente, la ecuación se satisface para $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$. Si esta es la única r-tupla para la cual la ecuación anterior se satisface, el conjunto M se dice linealmente independiente. M se dice linealmente dependiente si M no es linealmente independiente.

Definición 1.1.5 (Base de Hamel). Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots\}$ es una base de Hamel para un espacio vectorial V si:

i) $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots\}$ es linealmente independiente.
ii) $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots\}$ genera a V.

Nota. El conjunto de vectores $\{1, x, \cdots, x^n, \cdots\}$ es una base de Hamel para los polinomios $K[x]$, donde K es un campo.

Definición 1.1.6 (Transformación lineal). Sean V y W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único $T(v) \in W$ y que satisface, para cada u y $v \in V$ y cada escalar α

i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ y ii) $T(\alpha v) = \alpha \, T(v)$.

1.2. Funcional de momentos

En esta sección, se introduce un concepto que es vital para el entendimiento del presente trabajo, este es el de funcional de momentos.

Definición 1.2.1. Un funcional de momentos $\mathscr{L}$ es una transformación $\mathbb{C}$-lineal del espacio $\mathbb{C}[x]$ de los polinomios con coeficientes complejos en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos[2].

Para el presente trabajo, el funcional de momentos $\mathscr{L}$ se restringe a un espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales $\mathbb{R}[x]$.

Definición 1.2.2. Las cantidades $\mu_k = \mathscr{L}[x^k], k \geq 0$, son llamadas momentos de orden k y son usadas para construir la matriz de Hankel $H = (\mu_{i+j})_{i,j=0}^{\infty}$.

1.3. Matrices de Hankel

Este apartado trata el tema de matrices de Hankel, estas matrices están íntimimamente relacionadas con los momentos de un funcional. Además, en esta sección se ilustra la forma de este tipo de matrices.

Definición 1.3.1. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, con $i, j \in \mathbb{N}$ de dimensión finita o infinita, se dice matriz de Hankel si su diagonal secundaria y las paralelas a está son constantes. Ahora bien, en términos de componentes esto quiere decir que si a_{ij} es el ij-ésimo elemento de A, esta se dice matriz de Hankel si para $i \leq j$ se tiene que $a_{i,j} = a_{i+k,j-k} \quad \forall \; k = 0, 1, ..., j-i$[3].

[2] Ver ([**4**], $p.\ 6-7$).
[3] Ver ([**1**], $p.\ 326-327$).

Ejemplo 1.3.1. Una matriz de Hankel A de tamaño nxn es de la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} a_o & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ a_2 & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n-4} & a_{2n-3} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n-3} & a_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Una característica de este tipo de matrices es que tienen la propiedad de ser simétricas.

Definición 1.3.2. Una submatriz de una matriz cuadrada A se dice **submatriz principal** si es obtenida de A al elegir los mismos índices para las filas y las columnas.

Dada esta definición, se dice que la matriz H_n es submatriz principal de la matriz $H = (\mu_{i+j})_{i,j=0}^{\infty}$ y es de la forma

$$H_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix}.$$

Donde los μ_n son los momentos establecidos en la definición 1.2.2.

1.4. Sistema ortogonal respecto a un funcional de momentos $\mathscr{L}$

En este fragmento, se introduce la definición clave para establecer si un sistema de polinomios es o no ortogonal[4].

Definición 1.4.1. Una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ se dice sistema ortogonal de polinomios con respecto a un funcional de momentos $\mathscr{L}$ si:

$$(i)\, P_n(x) \ \text{ es un polinomio de grado n.} \tag{1-1}$$

$$(ii)\, \mathscr{L}[P_n(x)P_m(x)] = \lambda_n \delta_{mn}\ n, m \geq 0 \text{ con } \lambda_0 = 1,\ \lambda_n \neq 0 \ \text{ para todo } n \geq 1. \tag{1-2}$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker definida como

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{if } m = n. \\ 0, & \text{if } m \neq n. \end{cases}$$

Además, si un funcional de momentos $\mathscr{L}$ admite un sistema ortogonal de polinomios se dice que $\mathscr{L}$ **es regular**.

Nota. Si $\mathscr{L}[P_n(x)P_m(x)]= \delta_{mn}$ para todo $n, m \geq 0$, la sucesión $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ se dice ortonormal con respecto a $\mathscr{L}$.

Definición 1.4.2. Un funcional de momentos $\mathscr{L}$ se dice **definido positivo** si $\mathscr{L}[\pi(x)] > 0$ para todo polinomio $\pi(x)$ que no es idénticamente a cero y es no negativo para todo $x \in \mathbb{R}$.

---

[4] A partir de esta sección la bibliografía es tomada de **[4]**, a menos que se indique lo contrario.

1.5. Cálculo de coeficientes para representar un polinomio cualquiera como combinación lineal de un sistema ortogonal de polinomios

En esta sección, se presenta un teorema que relaciona el funcional de momentos de un sistema ortogonal de polinomios, con los coeficientes de la combinación lineal de un polinomio fijo cualquiera de este sistema. Además, se muestra la relación entre coeficientes que tienen dos polinomios, donde uno es mónico y el otro no. Dicho trabajo se hace ya que el artículo[5] trabaja polinomios que no necesariamente son mónicos y la teoría de polinomios ortogonales generalmente se basa en polinomios mónicos.

Teorema 1.5.1. Sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ un sistema de polinomios ortogonales con respecto a $\mathscr{L}$ entonces para cualquier polinomio $r(x)$ de grado n

$$r(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} P_k(x), \tag{1-3}$$

donde

$$c_{n,k} = \frac{\mathscr{L}[r(x)P_k(x)]}{\mathscr{L}[P_k^2(x)]},\ k = 0, 1, 2, .., n. \tag{1-4}$$

Demostración: Como $r(x)$ es un polinomio de grado n entonces existen constantes $c_{n,k}$ tales que

$$r(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} P_k(x).$$

Ahora, se multiplica por $P_m(x)$ a ambos lados de la igualdad y se aplica el funcional $\mathscr{L}$ para obtener

$$\mathscr{L}[r(x)P_m(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \mathscr{L}[P_k(x)P_m(x)] = c_{n,m}\mathscr{L}[P_m^2(x)] \quad \text{con } m \leq n.$$

Y así $c_{n,m} = \frac{\mathscr{L}[r(x)P_m(x)]}{\mathscr{L}[P_m^2(x)]}$. ■

[5]Ver artículo en **[3]**.

Corolario. Si $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema de polinomios ortogonales para $\mathscr{L}$ y si $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ también es un sistema de polinomios ortogonales para $\mathscr{L}$, entonces existen constantes $c_{n,n}$ con $c_{n,n} \neq 0$ tales que

$$Q_n(x) = c_{n,n}P_n(x) \ , \ n = 0, 1, 2, ... \quad .$$

Demostración: Si $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema de polinomios ortogonales para $\mathscr{L}$, entonces se tiene que $\mathscr{L}[P_k(x)Q_n(x)] = 0$ para $k < n$. Y se toma $r(x) = Q_n(x)$ en el teorema anterior, para así obtener

$$\mathscr{L}[P_n(x)Q_n(x)] = c_{n,n}\mathscr{L}[P_n^2(x)].$$

De allí, se tiene que $Q_n(x) = c_{n,n}P_n(x)$. ■

Cabe resaltar que los polinomios que se trabajan en el artículo[6], no son necesariamente mónicos y son ortonormales, es decir de la siguiente forma

$$P_n(x) = c_{n,n}x^n + c_{n,n-1}x^{n-1} + ... + c_{n,1}x + c_{n,0}, \text{ con } c_{n,n} > 0. \qquad (1\text{-}5)$$

Generalmente se trabaja con polinomios mónicos, es decir, los que tienen coeficiente director igual a 1, por esta razón se relacionan los polinomios dados en (1-5) con los polinomios mónicos de la siguiente manera

$$c_{n,n}Q_n(x) = P_n(x). \qquad (1\text{-}6)$$

Donde $Q_n(x)$ es un polinomio mónico de la forma

$$Q_n(x) = x^n + \alpha_{n,n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_{n,1}x + \alpha_{n,0}.$$

$P_n(x)$ esta dado como en (1-5). De allí, los coeficientes de $Q_n(x)$ y $P_n(x)$ se relacionan como sigue

$$\alpha_{n,n-1} = \tfrac{c_{n,n-1}}{c_{n,n}}, \alpha_{n,n-2} = \tfrac{c_{n,n-2}}{c_{n,n}}, ..., \alpha_{n,0} = \tfrac{c_{n,0}}{c_{n,n}}.$$

[6] Ver **[3]**.

A menos que se indique lo contrario, se va a trabajar con polinomios mónicos, en consecuencia, si $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal de polinomios con respecto a un funcional de momentos $\mathscr{L}$ y si $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisface las dos condiciones establecidas en la definición 1.4.1, se dice que $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema mónico de polinomios ortogonales (**SMOP**) para el mismo funcional $\mathscr{L}$.

Proposición 1.5.1. Si se tiene que $\mathscr{L}[x^m P_n(x)] = 0$ para $m \geq 0$ y $m < n$ con $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $\mathscr{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0$.

Demostración: Sea $P_m(x) = c_{m,m}x^m + c_{m,m-1}x^{m-1} + ... + c_{m,1}x + c_{m,0}$. Así

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[P_m(x)P_n(x)] &= \mathscr{L}[(c_{m,m}x^m + c_{m,m-1}x^{m-1} + ... + c_{m,1}x + c_{m,0})P_n(x)]\\ &= c_{m,m}\mathscr{L}[x^m P_n(x)] + c_{m,m-1}\mathscr{L}[x^{m-1}P_n(x)] + .. + c_{m,0}\mathscr{L}[1.P_n(x)]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Lo anterior debido a que cada $\mathscr{L}[x^m P_n(x)] = 0$ para $m \geq 0$ y $m < n$. ■

1.6. Existencia de un SMOP

En este apartado, se exhibe un teorema que muestra una condición necesaria y suficiente para que un funcional de momentos $\mathscr{L}$, de un sistema de polinomios, sea regular.

Teorema 1.6.1. Si $\mathscr{L}$ es un funcional de momentos con $\mathscr{L}(1) = 1$ y si $\mu_k = \mathscr{L}[x^k]$, para $k \geq 0$, es el k-ésimo momento de $\mathscr{L}$, entonces una condición necesaria y suficiente para que $\mathscr{L}$ sea regular es que $\left|H_n\right| \neq 0$, n≥ 0. Donde $\left|H_n\right|$ es el determinante de la matriz H_n tratada en la sección 1.3.

Demostración: Para la condición suficiente se supone que $\left|H_n\right| \neq 0$ para cada $n \geq 0$, y sea $Q_0(x) = 1$. Además, se supone que

$$Q_n(x) = \frac{1}{|H_{n-1}|} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & \cdots & x^n \end{vmatrix}, n \geq 1. \tag{1-7}$$

Ahora, si $m \leq n$,

$$\mathscr{L}[x^m Q_n(x)] = \frac{1}{|H_{n-1}|} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mathscr{L}[x^m] & \mathscr{L}[x^{m+1}] & \cdots & \cdots & \mathscr{L}[x^{m+n}] \end{vmatrix}, \tag{1-8}$$

Luego, al calcular $\mathscr{L}$ se tiene

$$\mathscr{L}[x^m Q_n(x)] = \frac{1}{|H_{n-1}|} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \cdots & \mu_{m+n} \end{vmatrix}. \tag{1-9}$$

En caso de que $m < n$ se repiten dos filas del determinante (1-9), y por tanto $\mathscr{L}[x^m Q_n(x)] = 0$ y así por proposición 1.5.1, $\mathscr{L}[Q_m(x)Q_n(x)] = 0$ para $m \neq n$.

Ahora, si $m = n$ se obtiene que

$$\mathscr{L}[x^n Q_n(x)] = \frac{1}{|H_{n-1}|} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mathscr{L}[x^n] & \mathscr{L}[x^{n+1}] & \cdots & \cdots & \mathscr{L}[x^{2n}] \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{|H_{n-1}|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}=\frac{|H_n|}{|H_{n-1}|}\neq 0. \quad (1\text{-}10)$$

De (1-10) se tiene que $\mathscr{L}(Q_n^2(x))\neq 0$ y así $\mathscr{L}$ es regular.

Seguidamente se verá la condición necesaria, para esto, se supone que $\mathscr{L}$ es regular y sea $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ un SMOP con respecto a $\mathscr{L}$. A continuación, se demostrará que $|H_n|\neq 0$ para $n\geq 0$; y se procede por inducción. Para $n=0$, $|H_0|=\mu_0=\mathscr{L}(1)=1$ y por tanto se cumple; enseguida se supone para $n=k$, es decir, $\left|H_k\right|\neq 0$. Ahora sea

$$q(x)=\frac{1}{|H_k|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_k & \mu_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_k & \cdots & \mu_{2k} & \mu_{2k+1} \\ 1 & \cdots & x^k & x^{k+1} \end{vmatrix}.$$

Así $q(x)$ es un polinomio mónico de grado $k+1$ y por tanto

$$q(x)=Q_{k+1}(x)+\beta_k Q_k(x)+...+\beta_0 Q_0(x), \beta_i\in\mathbb{C}. \quad (1\text{-}11)$$

Además, si $m<k+1$, se tiene que $\mathscr{L}(x^m q(x))$=0, con lo cual para $m<k+1$, se tiene $\mathscr{L}(Q_m(x)q(x))$=0, y si se multiplica sucesivamente en ambos lados de (1-11), por $Q_m(x)$ con m=0, ...k y al aplicar $\mathscr{L}$ se obtiene que $\beta_m=0$ para m=0, ...k. De allí, $q(x)$=$Q_{k+1}(x)$. Finalmente, $\mathscr{L}(x^{k+1}Q_{k+1}(x))=\mathscr{L}(Q_{k+1}^2(x))$ y como $\mathscr{L}$ es regular, se tiene que

$$\frac{|H_{k+1}|}{|H_k|}=\mathscr{L}(Q_{k+1}^2(x))\neq 0,$$

y por tanto $|H_{k+1}|\neq 0$; así, se concluye que $\left|H_n\right|\neq 0$ para $n\geq 0$. ■

Nota. Un funcional de momentos $\mathscr{L}$, se dice **cuasi-definido** si y solo si $|H_n|\neq 0$ para todo $n\geq 0$.

1.7. Relación de recurrencia de tres términos de un SMOP

Esta sección exhibe un teorema muy importante, el cual garantiza que dado un SMOP cualquiera, este sistema satisface una relación de recurrencia de tres términos. Este teorema va a ser usado muchas veces a lo largo de este trabajo.

Teorema 1.7.1. Si $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un **SMOP** con respecto a un funcional de momentos $\mathscr{L}$, entonces existen números complejos B_n, C_n, $n \geq 0$ tales que:

(i) $C_n \neq 0, n \geq 1$.

(ii) $Q_{n+1}(x) = (x - B_n)Q_n(x) - C_nQ_{n-1}(x)$. (1-12)

Con $Q_{-1}(x) = 0, Q_0(x) = 1$.

Demostración: Por (1-1) de la definición 1.4.1, $Q_n(x)$ es un polinomio de grado n, por tanto se tiene que $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una base de $\mathbb{C}[x]$ y así

$$xQ_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_{n,i}Q_i(x); n \geq 0. \tag{1-13}$$

Donde los $\alpha_{n,i}$ son números complejos, y $\alpha_{n,n+1} = 1$, puesto que $Q_n(x)$ es mónico, entonces $xQ_n(x)$ también lo es. El resultado (1-12) para $n = 0, 1$, se obtiene de manera inmediata, así que se supone $n \geq 2$ y al multiplicar ambos lados de la ecuación (1-13) por $Q_k(x)$ con $0 \leq k \leq n-2$, se obtiene que

$$xQ_k(x)Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_{n,i}Q_i(x)Q_k(x). \tag{1-14}$$

De igual forma,

$$xQ_k(x) = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_{k,i}Q_i(x).$$

Y así

$$\mathscr{L}\left[xQ_k(x)Q_n(x)\right] = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_{k,i}\mathscr{L}\left[Q_i(x)Q_n(x)\right]; \quad \text{con } 0 \leq k \leq n-2.$$

Como $k \leq n-2$, se tiene para $i \leq k+1$, que $i \leq n-1 < n$, por tanto $\mathscr{L}\left[xQ_k(x)Q_n(x)\right] = 0$. Además, por (1-14) y por ser $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ un **SMOP** se tiene que $\mathscr{L}\left[xQ_k(x)Q_n(x)\right] = \alpha_{n,k}\lambda_k$; y como $\lambda_k \neq 0$, se tiene que $\alpha_{n,k} = 0$ para $0 \leq k \leq n-2$, con lo cual

$$\begin{gathered} xQ_n(x) = \alpha_{n,n-1}Q_{n-1}(x) + \alpha_{n,n}Q_n(x) + Q_{n+1}(x) \\ \Leftrightarrow \\ Q_{n+1}(x) = (x-\alpha_{n,n})Q_n(x) - \alpha_{n,n-1}Q_{n-1}(x). \end{gathered}$$

Al final para obtener (1-12) se define $\alpha_{n,n} = B_n$ y $\alpha_{n,n-1} = C_n$; y así queda establecida la parte (ii).

Para ver (i), si $n \geq 1$ se tiene que

$$xQ_{n-1}(x)Q_n(x) = Q_n^2(x) + B_{n-1}Q_{n-1}(x)Q_n(x) + C_{n-1}Q_{n-2}(x)Q_n(x).$$

Y si se aplica el funcional $\mathscr{L}$, a la ecuación anterior se llega a que

$$\mathscr{L}\left[xQ_{n-1}(x)Q_n(x)\right] = \mathscr{L}\left[Q_n^2(x)\right]. \tag{1-15}$$

Ahora, si se multiplica por $Q_{n-1}(x)$ ambos lados de (1-12) se tiene

$$Q_{n-1}(x)Q_{n+1}(x) = xQ_{n-1}(x)Q_n(x) - B_nQ_{n-1}(x)Q_n(x) - C_nQ_{n-1}^2(x).$$

Al aplicar el funcional $\mathscr{L}$ se obtiene

$$\mathscr{L}\left[xQ_{n-1}(x)Q_n(x)\right] = C_n\mathscr{L}\left[Q_{n-1}^2(x)\right]. \tag{1-16}$$

Así, de (1-15) y (1-16) se obtiene

$$\mathscr{L}\left[Q_n^2(x)\right] = C_n\mathscr{L}\left[Q_{n-1}^2(x)\right]. \tag{1-17}$$

Y cuando $n \geq 1$, $\mathscr{L}\left[Q_n^2(x)\right]$ y $\mathscr{L}\left[Q_{n-1}^2(x)\right]$ son no nulos, entonces se tiene que $C_n \neq 0$ que era lo que se quería probar. ■

1.8. Teorema de Favard

Es importante recalcar que el recíproco del Teorema 1.7.1 también se cumple, y se le conoce como Teorema de Favard; este es uno de los de teoremas de más relevancia en la teoría general de polinomios ortogonales, ya que toda teoría y artículo que tratan este tema hacen referencia a este. A continuación, se presenta este importante teorema.

Teorema 1.8.1 (Teorema de Favard). Si $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema de polinomios mónicos determinado por la relación de recurrencia (1-12) con $n \geq 0$, $Q_{-1}(x) = 0$ y $Q_0(x) = 1$. Y además si se tiene que $C_n \neq 0$ para $n \geq 1$, entonces existe un funcional $\mathscr{L}$ para el cual $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal de polinomios mónicos. Más aún $\lambda_n = \mathscr{L}\left[Q_n^2(x)\right] = C_1 ... C_n$.

Demostración: Se supone que $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisface la relación de recurrencia (1-12) con $n \geq 0$, $Q_{-1}(x) = 0$ y $Q_0(x) = 1$. Además $C_n \neq 0$ para $n \geq 1$. Es claro que Q_n tiene grado n para todo $n \geq 0$, así que $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una base de $\mathbb{C}[x]$; por lo tanto si se define $\mathscr{L}$ como:

$$\mathscr{L}[1] = 1; \;\; \mathscr{L}[Q_n(x)] = 0, \;\; n \geq 1. \tag{1-18}$$

Y se extiende por linealidad a todo $\mathbb{C}[x]$ en $\mathbb{C}$.

Así, se verá que $\mathscr{L}$ satisface las condiciones para que $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sea un **SMOP**. En primer lugar, se ve que para $m \geq 0$ fijo,

$$\mathscr{L}[x^m Q_n(x)] = 0 \text{ para todo } m < n. \tag{1-19}$$

Para esto se procede por inducción sobre m. Si $m = 0$ entonces $\mathscr{L}[x^m Q_n(x)] = \mathscr{L}[Q_n(x)] = 0$, esto ya que $n > 0$ y por la definición que se dió de $\mathscr{L}$. Enseguida, se supone que (1-19) se satisface para $m = k$, es decir $\mathscr{L}\left[x^k Q_n(x)\right] = 0$.

Luego, hay que ver que para $m = k+1$ se satisface (1-19), para este fin, sea $n > k+1$. Entonces $n > k$, $n-1 > k$ y $n+1 > k+1$ y al multiplicar x^k en ambos lados de la ecuación (1-12) se obtiene

$$x^k Q_{n+1}(x) = x^k (x - B_n) Q_n(x) - x^k C_n Q_{n-1}(x)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^{k+1} Q_n(x) = x^k Q_{n+1}(x) + B_n x^k Q_n(x) + C_n x^k Q_{n-1}(x).$$

Entre tanto, se aplica el funcional $\mathscr{L}$ y por hipótesis de inducción se tiene que $\mathscr{L}\left[x^{k+1}Q_n(x)\right]=0$, con lo cual (1-19) queda establecida. Así, por (1-19) y por proposición 1.5.1, $\mathscr{L}\left[Q_m(x)Q_n(x)\right]=0$ para $m\neq n$.

Falta ver que $\mathscr{L}\left[Q_n^2(x)\right]\neq 0$. Así que se multiplica $Q_{n-1}(x)$ en (1-12) y se obtiene

$$Q_{n-1}(x)Q_{n+1}(x)=(x-B_n)Q_{n-1}(x)Q_n(x)-C_nQ_{n-1}^2(x).$$
$$\Leftrightarrow$$
$$xQ_{n-1}(x)Q_n(x)=Q_{n-1}(x)Q_{n+1}(x)+B_nQ_{n-1}(x)Q_n(x)+C_nQ_{n-1}^2(x).$$

Ahora, se aplica el funcional $\mathscr{L}$ y por (1-19) se tiene que

$$\mathscr{L}\left[xQ_{n-1}(x)Q_n(x)\right]=C_n\mathscr{L}\left[Q_{n-1}^2(x)\right].$$

Y por (1-17)

$$\mathscr{L}\left[Q_n^2(x)\right]=C_n\mathscr{L}\left[Q_{n-1}^2(x)\right]=C_n.C_{n-1}\mathscr{L}\left[Q_{n-2}^2(x)\right].$$

Por último, si se itera sucesivamente, se tiene $\lambda_n=\mathscr{L}\left[Q_n^2(x)\right]=C_1...C_n\neq 0$, puesto que $C_n\neq 0$ para $n\geq 1$. Por tanto, se concluye que $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un **SMOP** con respecto a $\mathscr{L}$. ■

Definición 1.8.1. Se dice que un funcional regular $\mathscr{L}$ es acotado (por $M>0$), si los coeficientes B_n y C_n en la relación de recurrencia (1-12) que define su sistema mónico ortogonal satisfacen

$$|B_n|\leq \tfrac{M}{3},\ |C_{n+1}|\leq \tfrac{M^2}{9};\ n\geq 0.$$

1.9. Medida

En esta sección, se presentan conceptos básicos de análisis funcional y teoría de la medida. Entre estos están, el concepto de σ-álgebra, medida, base de Schauder, espacio de Hilbert, etc. Estos conceptos son clave para sustentar argumentos de capítulos posteriores.

Definición 1.9.1. Una familia de conjuntos $\mathscr{F}$ de un conjunto X se dice **σ-álgebra** si se satisface que:

(i) $\emptyset$, X pertenecen a $\mathscr{F}$.
(ii) Si $A \in \mathscr{F}$, entonces $A^c \in \mathscr{F}$.
(iii) Si (A_n) es una sucesión de conjuntos en $\mathscr{F}$, entonces la unión numerable $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertenece a $\mathscr{F}$.

Al par ordenado $(X, \mathscr{F})$ se le denomina espacio medible.

Definición 1.9.2. Una **medida** es una función μ a valor real definida en una σ-álgebra $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X tal que:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.
(ii) $\mu(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathscr{F}$.
(iii) μ es aditivo contable es decir si (E_n) es una sucesión disjunta de conjuntos en $\mathscr{F}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Nota. La tripla $(X, \mathscr{F}, \mu)$ se denomina espacio de medida. Además, por otro lado si $\mu(E) > 0$ para todo $E \in \mathscr{F}$, entonces se dice que μ es una **medida positiva**.

Definición 1.9.3. Sea $f : T \to E$ una función de un espacio topológico T en un espacio vectorial E; el soporte **S** de f es la adherencia del conjunto de los $x \in T$ tales que $f(x) \neq 0$, es decir $S = \overline{X}$ con $X = \{x \in T / f(x) \neq 0\}$. Si el soporte S es compacto, la función f se llama de **soporte compacto**[7].

[7] Ver ([**6**], *p*. 205).

Definición 1.9.4. Un producto interno definido en un espacio vectorial X es una función de $X \times X$ a un espacio vectorial real o complejo, (y se denota $< x, y >$ para todo par de vectores $x, y \in X$), que cumple las siguientes propiedades:

(i) $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$ esto $\forall x, y, z \in X$.
(ii)$< \alpha x, y > = \alpha < x, y >$ para $x, y \in X$ y $\alpha \in K$.
(iii) $< x, y > = \overline{< y, x >}$ para $x, y \in X$.
(iv) $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Así, un **espacio de Hilbert** es un espacio con producto interno y completo.

Definición 1.9.5. Si un espacio normado X contiene una sucesión (e_n) con la propiedad de que $\forall x \in X$ existe una única sucesión de escalares (α_n) tal que

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n)\| \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Entonces los (e_n) se dicen una **base de Schauder** para X.

Nota. Una base de Hamel de los polinomios $K[x]$ es una base de Schauder para L_2; donde L_2 es el espacio de todas las clases μ-equivalentes de las funciones a valor real medibles f para las cuales la integral con respecto a μ sobre X de $|f|^2$ es finita. Así mismo, los polinomios ortonormales son una base ortonormal total de Hilbert para L_2[8].

Teorema 1.9.1 (Teorema de Representación de Riesz). Todo funcional lineal acotado f en un espacio de Hilbert H puede ser representado en términos del producto interno, es decir $f(x) = < x, z >$ donde z está determinado únicamente por f y tiene norma $\|z\| = \|f\|$[9].

Teorema 1.9.2 (Teorema de Aproximación de Weierstrass). El conjunto W de todos los polinomios con coeficientes reales es denso en el espacio real C$[a, b]$. Esto es $\forall x \in$ C$[a, b]$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p talque $|x(t) - P(t)| < \varepsilon$ para cada $t \in [a, b]$[10].

---

[8] Ver definición de base ortonormal en ([**5**], p. 168).
[9] Ver demostración en ([**5**], p. $188 - 190$).
[10] Ver demostración en ([**5**], p. $280 - 281$).

Definición 1.9.6. Sean $X = (X, d)$ y $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$ espacios métricos. Entonces:

(a) Una función T de X a $\tilde{X}$ se dice isométrica o una simetría si T preserva distancias, esto es, si para todo $x, y \in X$,

$$\tilde{d}(T(x), T(y)) = d(x, y),$$

donde $(T(x)$ y $T(y)$ son las imagenes de x y y respectivamente.

(b) El espacio X se dice isométrico al espacio $\tilde{X}$ si existe una isometría biyectiva de X a $\tilde{X}$. Los espacios X y $\tilde{X}$ son llamados espacios isométricos.

Teorema 1.9.3 (Teorema de Completación). Para un espacio métrico $X = (X, d)$ existe un espacio métrico completo $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$, el cual tiene un subespacio W que es isométrico a X y es denso en $\tilde{X}$. Excepto por isometrías este espacio $\tilde{X}$ es único, esto es, si $\hat{X}$ es cualquier espacio métrico que tiene un subespacio denso $\hat{W}$ isométrico a X, entonces $\tilde{X}$ y $\hat{X}$ son isométricos[11].

[11] Ver demostración en ([**5**], $p.\ 41 - 45$).

Capítulo II

2. Polinomios más Generales

En este capítulo, se desarrolla la teoría de polinomios ortogonales a polinomios más generales que los mónicos. Además, se presentan otros tipos de polinomios como los asociados, de allí surge una demostración propia. Por último, el capítulo termina con ciertos sistemas de polinomios ortogonales que son de suma importancia, estos son los sistemas de polinomios simétricos, los sistemas de kernel de polinomios y una síntesis de los polinomios clásicos.

2.1. Relación de recurrencia de tres términos para polinomios más generales

El Teorema 1.7.1 expuesto en el capítulo anterior, usa polinomios mónicos, pero esté también aplica para polinomios más generales como los que se presentan en (1-5); dicha afirmación se muestra a continuación.

Primeramente, por el Teorema 1.7.1 del capítulo anterior, si $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un (**SMOP**) con respecto a un funcional de momentos $\mathscr{L}$, existen B_n , C_n ,$n \geq 0$, tales que

$$C_n \neq 0,\ n \geq 1,$$

y que

$$Q_{n+1}(x) = (x - B_n)Q_n(x) - C_n Q_{n-1}(x), \tag{2-1}$$

con $Q_{-1}(x) = 0, Q_0(x) = 1$.

Así, al usar la ecuación (1-6) y reemplazar en (2-1) se obtiene

$$\frac{P_{n+1(x)}}{c_{n+1,n+1}} = (x - B_n)\frac{P_n(x)}{c_{n,n}} - \frac{C_n}{c_{n-1,n-1}}P_{n-1}(x). \tag{2-2}$$

Ahora, si se multiplica por $c_{n,n} \neq 0$, a ambos lados de la ecuación (2-2) se tiene

$$\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}}P_{n+1}(x) = (x - B_n)P_n(x) - C_n\frac{c_{n,n}}{c_{n-1,n-1}}P_{n-1}(x). \tag{2-3}$$

Luego, se define

$$a_{n+1} = \frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}}, \tag{2-4}$$

y al reemplazar en (2-3), se obtiene la siguiente expresión

$$a_{n+1}P_{n+1}(x) = (x - B_n)P_n(x) - \frac{C_n}{a_n}P_{n-1}(x). \tag{2-5}$$

Finalmente, se toma $C_n = a_n^2$ y se tiene

$$a_{n+1}P_{n+1}(x) = (x - B_n)P_n(x) - a_nP_{n-1}(x), \;\; n \geq 0. \tag{2-6}$$

Por tanto $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisface (2-6), es decir, satisface una relación de recurrencia de tres términos parecida a la de (1-12) pero no necesariamente mónica; que era lo que se quería mostrar. $\blacksquare$

2.2. Representación matricial de polinomios

En esta sección, se mira que la relación de recurrencia (1-12) se puede representar a través de una matriz especial, esta es, la matriz mónica de Jacobi.

El sistema expuesto en (2-1), se escribe con mayor precisión de la siguiente forma $x\overline{\mathbb{P}} = J\overline{\mathbb{P}}$, donde $\overline{\mathbb{P}} = [Q_0(x) \;\; Q_1(x) \;\; Q_2(x) \cdots]^T$ y

$$J = \begin{pmatrix} B_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ C_1 & B_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & C_2 & B_2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & C_3 & B_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dicha matriz J, se denomina la matriz mónica de Jacobi asociada a los polinomios ortogonales generados por (2-1).

Se observa que dicha representación está bien establecida, ya que

$$x\overline{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} xQ_0(x) \\ xQ_1(x) \\ xQ_2(x) \\ \vdots \\ xQ_m(x) \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ y } J\overline{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} B_0Q_0(x) + Q_1(x) \\ C_1Q_0 + B_1Q_1(x) + Q_2(x) \\ C_2Q_1 + B_2Q_2(x) + Q_3(x) \\ \vdots \\ C_mQ_{m-1} + B_mQ_m(x) + Q_{m+1}(x) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Y así, se tiene que

$$\begin{array}{ll} Q_1(x) = (x - B_0)Q_0(x) \\ Q_2(x) = (x - B_1)Q_1(x) - C_1Q_0(x) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ Q_m(x) = (x - B_{m-1})Q_{m-1}(x) - C_{m-1}Q_{m-2}(x) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

Lo cual claramente satisface (2-1), para cada $m \geq 0$. ■

2.3. Polinomios asociados a un sistema de polinomios

Esta sección trata unos polinomios especiales, estos son los asociados. Este tema generó cierta dificultad, debido a que era un tema nuevo a tratar, sin embargo, de allí surgió una demostración que es propia y la cual es un poco extensa, esto debido a que se usan matrices en su desarrollo. Además, dicha demostración requirió un importante gasto de tiempo.

Hay un tipo de polinomios que constituyen una segunda solución a la siguiente relación de recurrencia

$$Z_{n+1} = (y - D_n)Z_n - E_nZ_{n-1}, \;\; n \geq 1, \tag{2-7}$$

con condiciones iniciales $Z_0 = 0$ y $Z_1 = 1$; estos son los polinomios asociados respecto a una medida μ y son de la forma

$$Q_n^{(1)}(y) = \mathscr{L}\left[\frac{Q_{n+1}(y) - Q_{n+1}(x)}{y - x}\right], \;\; n \geq 0. \tag{2-8}$$

Cabe aclarar que el funcional opera en la variable x[12].

[12] Ver ([**4**], p. 86 – 88).

Dicho esto, se observará que (2-8) si satisface la relación de recurrencia mencionada. En efecto, primero se expresa a $Q_{n+1}(y)$ como en (1-7)

$$Q_{n+1}(y) = \frac{1}{|H_n|} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ 1 & y & \cdots & \cdots & y^{n+1} \end{vmatrix}, \; n \geq 1. \tag{2-9}$$

Luego, de igual forma se expresa a $Q_{n+1}(x)$

$$Q_{n+1}(x) = \frac{1}{|H_n|} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ 1 & x & \cdots & \cdots & x^{n+1} \end{vmatrix}, n \geq 1. \tag{2-10}$$

Así, $Q_n^{(1)}(y) = \mathscr{L}\left[\frac{Q_{n+1}(y)-Q_{n+1}(x)}{y-x}\right]$, queda representado de la siguiente manera

$$Q_n^{(1)}(y) = \frac{1}{|H_n|} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ 0 & \mathscr{L}(1) & \cdots & \cdots & \displaystyle\sum_{j=0}^{n} y^{n-j} \mathscr{L}\left(x^j\right) \end{vmatrix}, n \geq 1. \tag{2-11}$$

Se sabe de (2-1), que $Q_{n+2}(y) = (y - B_{n+1})\, Q_{n+1}(y) - C_{n+1}Q_n(y)$, entonces si se aplica la representación (2-9), la ecuación queda así

$$\frac{1}{|H_{n+1}|} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \cdots & \mu_{2n+3} \\ 1 & y & \cdots & y^{n+2} \end{vmatrix} = \frac{(y - B_{n+1})}{|H_n|} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n+1} \\ 1 & y & \cdots & y^{n+1} \end{vmatrix}$$

$$
-\frac{C_{n+1}}{|H_{n-1}|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & y & \cdots & \cdots & y^n \end{vmatrix}. \tag{2-12}
$$

Igualmente, para la variable x se tiene que
$Q_{n+2}(x) = (x - B_{n+1})\, Q_{n+1}(x) \; - C_{n+1} Q_n(x)$, y al aplicar la representación (2-10) se tiene

$$
\frac{1}{|H_{n+1}|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \cdots & \mu_{2n+3} \\ 1 & x & \cdots & x^{n+2} \end{vmatrix} = \frac{(x-B_{n+1})}{|H_n|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ 1 & x & \cdots & \cdots & x^{n+1} \end{vmatrix}
$$

$$
-\frac{C_{n+1}}{|H_{n-1}|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & \cdots & x^n \end{vmatrix}. \tag{2-13}
$$

Ahora se resta (2-13) a (2-12) y se nota
$g_n(x, y) = y^{n+2} - x^{n+2} - B_{n+1}\,(y^{n+1} - x^{n+1})$, para así obtener la siguiente ecuación

$$
\frac{1}{|H_{n+1}|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+3} \\ 0 & y-x & \cdots & \cdots & y^{n+2}-x^{n+2} \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{|H_n|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ y-x & y^2-x^2-B_{n+1}(y-x) & \cdots & \cdots & g_n(x,y) \end{vmatrix}
$$

$$
-\frac{C_{n+1}}{|H_{n-1}|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 0 & y-x & \cdots & \cdots & y^n-x^n \end{vmatrix}. \tag{2-14}
$$

Enseguida se divide por $(y-x)$, se aplica el funcional $\mathscr{L}$ a la ecuación (2-14) y se nota $t(y) = y + \mathscr{L}(x) - B_{n+1}$, para así obtener

$$
\frac{1}{|H_{n+1}|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+3} \\ 0 & \mathscr{L}(1) & \cdots & \cdots & \displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} y^{n+1-j}\mathscr{L}\left(x^j\right) \end{vmatrix} =
$$

$$
\frac{1}{|H_n|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ \mathscr{L}(1) & t(y) & \cdots & \cdots & \displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} y^{n+1-j}\mathscr{L}\left(x^j\right) - B_{n+1}\sum_{j=0}^{n} y^{n-j}\mathscr{L}\left(x^j\right) \end{vmatrix}
$$

$$
-\frac{C_{n+1}}{|H_{n-1}|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 0 & \mathscr{L}(1) & \cdots & \cdots & \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} y^{n-1-j}\mathscr{L}\left(x^j\right) \end{vmatrix}. \tag{2-15}
$$

Y por (2-11) se tiene que $Q_{n+1}^{(1)}(y) =$

$$\frac{1}{|H_n|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ \mathscr{L}(1) & t(y) & \cdots & \cdots & \sum_{j=0}^{n+1} y^{n+1-j}\mathscr{L}\left(x^j\right) - B_{n+1}\sum_{j=0}^{n} y^{n-j}\mathscr{L}\left(x^j\right) \end{vmatrix}$$

$$- C_{n+1}Q_{n-1}^{(1)}(y). \tag{2-16}$$

Ahora, por el mismo (2-11) se observa que

$$(y - B_{n+1})Q_n^{(1)}(y) = \frac{(y - B_{n+1})}{|H_n|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ 0 & \mathscr{L}(1) & \cdots & \cdots & \sum_{j=0}^{n} y^{n-j}\mathscr{L}\left(x^j\right) \end{vmatrix}. \tag{2-17}$$

Para terminar, se ve que $(y - B_{n+1})Q_n^{(1)}(y)$ es igual al determinante

$$\frac{1}{|H_n|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ \mathscr{L}(1) & t(y) & \cdots & \cdots & \sum_{j=0}^{n+1} y^{n+1-j}\mathscr{L}\left(x^j\right) - B_{n+1}\sum_{j=0}^{n} y^{n-j}\mathscr{L}\left(x^j\right) \end{vmatrix}. \tag{2-18}$$

Es decir, se verá que los determinantes (2-17) y (2-18) son iguales; para ilustrar esto se observa que la resta de estos determinantes es igual a 0. En efecto

$$\frac{(y-B_{n+1})}{|H_n|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ 0 & \mathscr{L}(1) & \cdots & \cdots & \displaystyle\sum_{j=0}^{n} y^{n-j}\mathscr{L}\left(x^j\right) \end{vmatrix} -$$

$$\frac{1}{|H_n|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ \mathscr{L}(1) & t(y) & \cdots & \cdots & \displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} y^{n+1-j}\mathscr{L}\left(x^j\right) - B_{n+1}\sum_{j=0}^{n} y^{n-j}\mathscr{L}\left(x^j\right) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|H_n|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ -\mathscr{L}(1) & -\mathscr{L}(x) & \cdots & \cdots & -\mathscr{L}\left(x^{n+1}\right) \end{vmatrix}$$

$$= -\tfrac{1}{|H_n|}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n+1} \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Como la primera y última fila del determinante anterior son iguales, entonces el determinante es igual a cero. Así, se obtiene (2-18) y si se reemplaza en (2-16) se tiene que

$$Q_{n+1}^{(1)}(y) = (y-B_{n+1})Q_n^{(1)}(y) - C_{n+1}Q_{n-1}^{(1)}(y).$$

Finalmente, al notar $Z_n = Q_n^{(1)}(y)$, $D_n = B_{n+1}$ y $E_n = C_{n+1}$ se obtiene (2-7) que era lo que se quería probar. ∎

El polinomio descrito en (2-8) es de grado n. Esto se ilustra en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1. Sea $Q_n(x) = x^n + \alpha_{n,n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_{n,1}x + \alpha_{n,0}$ un polinomio mónico de grado n y $\mathscr{L}(1) = 1$, entonces $Q_n^{(1)}(y)$ definido como en (2-8) también es de grado n.

Demostración: Se procede por inducción, para $n = 0$ se tiene que

$$Q_0^{(1)}(y) = \mathscr{L}\left[\tfrac{Q_1(y)-Q_1(x)}{y-x}\right] = \mathscr{L}\left[\tfrac{y+\alpha_{0,0}-x-\alpha_{0,0}}{y-x}\right] = \mathscr{L}(1) = 1,$$

por tanto $Q_0^{(1)}(y)$ es de grado 0. Ahora, se supone que la proposición se cumple para $n = k$, es decir, $Q_k^{(1)}(y)$ es de grado k; luego queda ver que $Q_{k+1}^{(1)}(y)$ es de grado $k+1$, en efecto

$$\begin{aligned}
Q_{k+1}^{(1)}(y) &= \mathscr{L}\left[\tfrac{Q_{k+2}(y)-Q_{k+2}(x)}{y-x}\right] = \mathscr{L}\left[\tfrac{y^{k+2}+Q_{k+1}(y)-x^{k+2}-Q_{k+1}(x)}{y-x}\right] \\
&= \mathscr{L}\left[\tfrac{y^{k+2}-x^{k+2}}{y-x}\right] + \mathscr{L}\left[\tfrac{Q_{k+1}(y)-Q_{k+1}(x)}{y-x}\right] \\
&= \mathscr{L}\left[\tfrac{(y-x)(y^{k+1}+xy^k+x^2y^{k-1}+\cdots+x^{k+1})}{y-x}\right] + Q_k^{(1)}(y) \\
&= \left(\mathscr{L}\left[y^{k+1}\right] + \mathscr{L}\left[xy^k\right] + \mathscr{L}\left[x^2y^{k-1}\right] + \cdots + \mathscr{L}\left[x^{k+1}\right]\right) + Q_k^{(1)}(y) \\
&= \left(y^{k+1} + \mu_1 y^k + \mu_2 y^{k-1} + \cdots + \mu_{k+1}\right) + Q_k^{(1)}(y).
\end{aligned}$$

Luego, se llama $l(x) = \left(y^{k+1} + \mu_1 y^k + \mu_2 y^{k-1} + \cdots + \mu_{k+1}\right)$ y así

$$Q_{k+1}^{(1)}(y) = l(x) + Q_k^{(1)}(y).$$

Como $l(x)$ es de grado $k+1$ y por hipótesis de inducción $Q_k^{(1)}(y)$ es de grado k, entonces el grado de la suma de polinomios es igual al grado del polinomio de mayor grado; con lo cual $Q_{k+1}^{(1)}(y)$ es de grado $k+1$. Por tanto, la proposición se cumple para todo $n \geq 0$, que era lo que se quería probar. ∎

2.4. Representación de un funcional definido positivo

Es interesante ver que si un funcional de momentos $\mathscr{L}$ es definido positivo, se puede usar el producto interno en el espacio de polinomios para definir a $\mathscr{L}$. A través del siguiente teorema se puede ver más claramente esta afirmación.

Teorema 2.4.1. Sea $\mathscr{L}$ definido positivo y acotado por $M > 0$ (cf. Definición 1.8.1), entonces existe una medida positiva μ, con soporte compacto contenido en $[-M, M]$, tal que

$$\mathscr{L}\,[P(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)\ d\mu(t),\ P(x) \in \mathbb{C}\,[x].$$

Demostración: En virtud del Teorema 1.9.2 (Teorema de Aproximación de Weierstrass), $\mathbb{C}\,[x]$ es denso en $C[-M, M]$[13], el espacio de las funciones continuas en $[-M, M]$, cuando se da a este espacio la topología de la norma

$$\|f\| = \sup_{t\in[-M,M]} |f(t)|.$$

Luego, como $\mathscr{L}$ es lineal y continuo sobre $\mathbb{C}\,[x]$ para la topología de esta norma, $\mathscr{L}$ admite una extensión continua $\overline{\mathscr{L}}$ a $C[-M, M]$, y en virtud del Teorema 1.9.1 (Teorema de Representación de Riesz), existe una medida μ con soporte en $[-M, M]$ tal que

$$\overline{\mathscr{L}}\,[f] = \int_{-M}^{M} f(t)\ d\mu(t),\ f \in C\,[-M, M].$$

Enseguida, como $\mathscr{L}\,[P(t)] \geq 0$ si $P(t) \geq 0$ para $t \in [-M, M]$, también $\mathscr{L}(f) \geq 0$ para $f \geq 0$ en $C\,[-M, M]$. Entonces μ es una medida positiva, y es claro que

$$\mathscr{L}\,[P(x)] = \overline{\mathscr{L}}\,[P(x)] = \int_{-M}^{M} P(t)\ d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)\ d\mu(t).$$

Para cualquier polinomio $P(x) \in \mathbb{C}\,[x]$. ■

Dicho esto, el funcional lineal ahora tiene la representación

$$\mathscr{L}\left[t^k\right] = \int_E t^k d\mu(t),$$

donde E es el soporte de la medida μ y en este caso $E = [-M, M]$.

[13]Por Teorema 1.9.3 (Teorema de completación) $C[-M, M] = L_2[-M, M]$, donde $L_2[-M, M]$ es un espacio de Hilbert.

Definición 2.4.1. El intervalo cerrado más pequeño que contiene los ceros de todos los polinomios de un sistema, se denomina **Verdadero intervalo de ortogonalidad**.

2.5. Kernel de polinomios

En esta sección, se estudia un sistema especial de polinomios conocido como sistema de Kernel de polinomios. Para desarrollar este tema, se considera el funcional de momentos $\mathscr{L}$ cuasidefinido, $\{\mu_n\}$ su sucesión de momentos y $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ su correspondiente SMOP.

Ahora bien, para cualquier número k, real o complejo, se define el siguiente funcional

$$\mathscr{L}_k^*\left[x^n\right] = \mathscr{L}\left[x^{n+1}\right] - k\mathscr{L}\left[x^n\right] = \mu_{n+1} - k\mu_n, \;\; n \geq 0. \tag{2-19}$$

De (2-19), se sigue la siguiente proposición.

Proposición 2.5.1. Sea $\mathscr{L}_k^*$ definido como en (2-19), entonces para cualquier polinomio $\pi(x)$, se tiene que

$$\mathscr{L}_k^*\left[\pi(x)\right] = \mathscr{L}\left[(x-k)\pi(x)\right]. \tag{2-20}$$

Demostración: Sea $\pi\left(x\right) = \gamma_{n,n}x^n + \gamma_{n,n-1}x^{n-1} + ... + \gamma_{n,1}x + \gamma_{n,0}$ un polinomio de grado n cualquiera, al aplicar el funcional $\mathscr{L}_k^*$ y emplear la definición (2-19) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_k^*\left[\pi(x)\right] &= \mathscr{L}_k^*\left[\gamma_{n,n}x^n + \gamma_{n,n-1}x^{n-1} + ... + \gamma_{n,1}x + \gamma_{n,0}\right] \\
&= \gamma_{n,n}\left[\mathscr{L}\left[x^{n+1}\right] - k\mathscr{L}\left[x^n\right]\right] + \gamma_{n,n-1}\left[\mathscr{L}\left[x^n\right] - k\mathscr{L}\left[x^{n-1}\right]\right] + \cdots \\
&\quad + \gamma_{n,0}\left[\mathscr{L}\left[x\right] - k\mathscr{L}\left[1\right]\right] \\
&= \mathscr{L}\left[\gamma_{n,n}x^{n+1} + \gamma_{n,n-1}x^n + ... + \gamma_{n,1}x^2 + \gamma_{n,0}x\right] \\
&\quad - k\mathscr{L}\left[\gamma_{n,n}x^n + \gamma_{n,n-1}x^{n-1} + ... + \gamma_{n,0}\right] \\
&= \mathscr{L}\left[x\pi\left(x\right)\right] - k\mathscr{L}\left[\pi\left(x\right)\right] \\
&= \mathscr{L}\left[\left(x-k\right)\pi\left(x\right)\right].
\end{aligned}$$

Cabe aclarar que en las últimas dos líneas se aplicó la linealidad del funcional de momentos $\mathscr{L}$, así queda demostrada la proposición. ∎

Nota. Si hay algún error en la demostración anterior, es del autor del presente trabajo.

Enseguida, se definen los polinomios $Q_n^*(k;x)$ como

$$Q_n^*(k;x) = (x-k)^{-1}\left[Q_{n+1}(x) - \frac{Q_{n+1}(k)}{Q_n(k)}Q_n(x)\right], \tag{2-21}$$

donde se asume que k no es un cero de $Q_n(x)$. Dada esta definición, se introduce el siguiente teorema.

Teorema 2.5.1. Si $Q_n(k) \neq 0$ para todo $n \geq 0$, entonces $\mathscr{L}_k^*$ es cuasi-definido y $\{Q_n^*(k;x)\}_{n=0}^{\infty}$ es su correspondiente SMOP.

Demostración: Si se aplica el funcional $\mathscr{L}_k^*$ a $x^m Q_n^*(k;x)$ y se reemplaza en (2-21), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_k^*\left[x^m Q_n^*(k;x)\right] = \mathscr{L}_k^*&\left[x^m(x-k)^{-1}\left[Q_{n+1}(x) - \tfrac{Q_{n+1}(k)}{Q_n(k)}Q_n(x)\right]\right]\\ &= \mathscr{L}_k^*\left[x^m(x-k)^{-1}Q_{n+1}(x)\right]\\ &\quad -\mathscr{L}_k^*\left[x^m(x-k)^{-1}\tfrac{Q_{n+1}(k)}{Q_n(k)}Q_n(x)\right].\end{aligned}$$

Lo anterior debido a la linealidad del funcional, y si se emplea la ecuación (2-20) se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_k^*\left[x^m Q_n^*(k;x)\right] &= \mathscr{L}\left[(x-k)x^m(x-k)^{-1}Q_{n+1}(x)\right]\\ &\quad -\mathscr{L}\left[(x-k)x^m(x-k)^{-1}\tfrac{Q_{n+1}(k)}{Q_n(k)}Q_n(x)\right]\\ &= \mathscr{L}\left[x^m Q_{n+1}(x)\right] - \tfrac{Q_{n+1}(k)}{Q_n(k)}\mathscr{L}\left[x^m Q_n(x)\right].\end{aligned}$$

Ahora, como en Teorema 1.5.1 se toma $r(x) = x^m$ en (1-3) y, $n = m$ en (1-4); además para este $r(x)$, $c_{n,n} = 1$ se tiene

$$\mathscr{L}\left[x^m Q_n(x)\right] = c_{n,n}\mathscr{L}\left(Q_n^2(x)\right) = \mathscr{L}\left(Q_n^2(x)\right).$$

Luego, para $0 \leq m \leq n$,

$$\mathscr{L}_k^*\left[x^m Q_n^*(k;x)\right] = -\frac{Q_{n+1}(k)}{Q_n(k)}\mathscr{L}\left[Q_n^2(x)\right]\delta_{m,n}. \tag{2-22}$$

Por tanto $\{Q_n^*(k;x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un SMOP para $\mathscr{L}_k^*$. ■

Por otro lado, se introduce una identidad muy importante en la teoría general de polinomios, esta es, la identidad de Christoffel-Darboux.

Identidad de Christoffel-Darboux. Si $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisface (1-12) con $C_n \neq 0$ $(n \geq 1)$, entonces

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(x)Q_k(u)}{C_1.C_2\cdots.C_{k+1}} = (C_1.C_2\cdots.C_{n+1})^{-1}\,\frac{Q_{n+1}(x)Q_n(u)-Q_n(x)Q_{n+1}(u)}{x-u}. \tag{2-23}$$

Nota. La demostración de esta identidad aparece en muchos trabajos de grado relacionados con polinomios ortogonales, es por eso que en este caso se omite[14].

Si se compara (2-21) con la identidad de Christoffel-Darboux se obtiene que

$$Q_n^*(k;x) = C_1.C_2\cdots.C_{n+1}\left[Q_n(k)\right]^{-1}\sum_{k=0}^{n} q_k(x)q_k(k), \tag{2-24}$$

donde los q_k son polinomios ortonormales, y por eso los $C_k = 1, \forall k \geq 0$. En efecto, si se hace $u = k$ en (2-23), y se despeja adecuadamente, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}&(x-k)\sum_{k=0}^{n}\frac{q_k(x)q_k(k)}{C_1.C_2\cdots.C_{k+1}}\,(C_1.C_2\cdots.C_{n+1}) =\\ &\left[Q_{n+1}(x)Q_n(k)-Q_n(x)Q_{n+1}(k)\right].\end{aligned} \tag{2-25}$$

Y de (2-21) se tiene que

$$\begin{aligned}Q_n^*(k;x) &= (x-k)^{-1}\left[Q_{n+1}(x)-\frac{Q_{n+1}(k)}{Q_n(k)}Q_n(x)\right]\\ &= (x-k)^{-1}\left[Q_n(k)\right]^{-1}\left[Q_{n+1}(x)Q_n(k)-Q_n(x)Q_{n+1}(k)\right].\end{aligned} \tag{2-26}$$

Luego, se reemplaza (2-25) en (2-26) y se obtiene

$$\begin{aligned}Q_n^*(k;x) &= (x-k)^{-1}\left[Q_n(k)\right]^{-1}(x-k)\sum_{k=0}^{n}\frac{q_k(x)q_k(k)}{C_1.C_2\cdots.C_{k+1}}\,(C_1.C_2\cdots.C_{n+1})\\ &= C_1.C_2\cdots.C_{n+1}[Q_n(k)]^{-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{q_k(x)q_k(k)}{C_1.C_2\cdots.C_{k+1}}.\end{aligned} \tag{2-27}$$

[14] Ver demostración en ([**4**], *p.* 23).

Finalmente, como los q_k son polinomios ortonormales entonces $C_k = 1$, $\forall k \geq 0$. Así (2-26) se convierte en (2-24), que era lo que se quería mostrar. ■

Por otra parte, en la mayoría de textos los polinomios

$$K_n(z,x) = \sum_{m=0}^{n} \overline{p_m(z)} p_m(x), \tag{2-28}$$

usualmente llamados sistemas de Kernel de polinomios. En el caso de que todos los momentos del funcional $\mathscr{L}$ sean reales, se tiene que

$$K_n(z,x) = \sum_{m=0}^{n} p_m(z) p_m(x). \tag{2-29}$$

Además, se observa que $Q_n^*(k;x)$ es el sistema mónico de $K_n(\overline{k},x)$ y cuando k es real se tiene

$$Q_n^*(k;x) = C_1.C_2 \cdots .C_{n+1} \left[Q_n(k)\right]^{-1} K_n(k,x). \tag{2-30}$$

En adelante, se refiere a los $Q_n^*(k;x)$ como el Kernel de polinomios mónicos correspondientes a los $Q_n(x)$ y K-parámetro al parámetro k. También es usual referirse a los $Q_n^*(k;x)$ como **SPOK**. Finalmente, se denota $K_n(x) = K_n(0,x)$ a la sucesión Kernel de polinomios correspondientes a $Q_n(x)$.

2.6. Polinomios ortogonales simétricos

En esta sección, se elabora una síntesis teórica sobre un tipo de polinomios especiales, estos son los simétricos. Es así, que se expone el concepto de funcional simétrico y también se observa que si un sistema simétrico es un SMOP, entonces este se puede representar a través de otros dos sistemas mónicos de polinomios ortogonales. Además, se observa que el recíproco de la afirmación anterior también es cierto.

Definición 2.6.1. Un funcional de momentos se dice **simétrico** si todos sus momentos de orden impar son cero.

Teorema 2.6.1. Sea $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ un SMOP con respecto a un funcional de momentos cuasi-definido $\mathscr{L}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathscr{L}$ es simétrico.
b) $Q_n(-x) = (-1)^n Q_n(x)$, $n \geq 0$.
c) En la fórmula de recurrencia (1-12), $B_n = 0$ para $n \geq 0$.

Demostración: Se desarrollan las equivalencias $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c$. Así entonces se empezará por demostrar $a \Leftrightarrow b$.

Si $\mathscr{L}$ es simétrico, y si $\pi(x) = \beta_{n,n}x^n + \beta_{n,n-1}x^{n-1} + ... + \beta_{n,1}x + \beta_{n,0}$ es un polinomio de grado n con n par, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(\pi(-x)\right) &= \beta_{n,n}\mathscr{L}\left((-x)^n\right) + \beta_{n,n-1}\mathscr{L}\left(-x)^{n-1}\right) + ... + \beta_{n,1}\mathscr{L}\left(-x\right) \\
&\quad + \mathscr{L}\left(\beta_{n,0}\right) \\
&= \beta_{n,n}\mathscr{L}\left(x^n\right) + (-1)^{n-1}\beta_{n,n-1}\mathscr{L}\left(x^{n-1}\right) + ... + (-1)\beta_{n,1}\mathscr{L}\left(x\right) \\
&\quad + \mathscr{L}\left(\beta_{n,0}\right) \\
&= \beta_{n,n}\mathscr{L}\left(x^n\right) + (-1)^{n-1}\beta_{n,n-1}(0) + ... + (-1)\beta_{n,1}(0) + \mathscr{L}\left(\beta_{n,0}\right) \\
&= \beta_{n,n}\mathscr{L}\left(x^n\right) + \beta_{n,n-2}\mathscr{L}\left(x^{n-2}\right) ..... + \mathscr{L}\left(\beta_{n,0}\right) \\
&= \beta_{n,n}\mathscr{L}\left(x^n\right) + \beta_{n,n-1}\mathscr{L}\left(x^{n-1}\right) + ... + \beta_{n,1}\mathscr{L}\left(x\right) + \mathscr{L}\left(\beta_{n,0}\right) \\
&= \mathscr{L}\left(\pi(x)\right).
\end{aligned}$$

De igual manera, se obtiene para n impar.

En cualquier caso $\mathscr{L}\left(\pi(-x)\right) = \mathscr{L}\left(\pi(x)\right)$ para cualquier polinomio $\pi(x)$. Así

$$\mathscr{L}[Q_m(-x)Q_n(-x)] = \mathscr{L}[Q_m(x)Q_n(x)].$$

Luego, por el corolario del Teorema 1.5.1 se llega a que $Q_n(-x) = a_n Q_n(x)$, donde a_n es una constante. Ahora, si $Q_n(x) = x^n + \alpha_{n,n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_{n,1}x + \alpha_{n,0}$ y si n es par se tiene que

$$Q_n(-x) = x^{2n} + (-1)^{2n-1}\alpha_{2n,2n-1}x^{2n-1} + ... + (-1)\alpha_{2n,1}x + \alpha_{2n,0},$$

y

$$a_n Q_n(x) = a_n x^{2n} + a_n\alpha_{2n,2n-1}x^{2n-1} + ... + a_n\alpha_{2n,1}x + a_n\alpha_{2n,0}.$$

Enseguida, se igualan las dos ecuaciones anteriores y se comparan sus coeficientes, y así se obtiene que $a_n = (-1)^{2n} = 1 = (-1)^n$ por ser n par. De manera similar si n es impar

$$Q_n(-x) = (-1)^{2n-1} x^{2n-1} + \alpha_{2n-1,2n-2}x^{2n-2} + ... + (-1)\alpha_{2n-1,1}x + \alpha_{2n-1,0},$$

y

$$a_nQ_n(x) = a_nx^{2n-1} + a_n\alpha_{2n-1,2n-2}x^{2n-2} + ... + a_n\alpha_{2n-1,1}x + a_n\alpha_{2n-1,0}.$$

Al igualar los coeficientes de las dos ecuaciones, se obtiene que $a_n = (-1)^{2n-1} = -1 = (-1)^n$ por ser n impar. Así, en cualquier caso se tiene que $a_n = (-1)^n$ para todo $n \geq 0$.

Ahora, recíprocamente si $Q_n(-x) = (-1)^nQ_n(x)$, $n \geq 0$ entonces $Q_n(x)$ contiene solo potencias impares de x cuando n es impar. Esto es

$$\mathscr{L}(Q_1(x)) = \mu_1 = 0, \quad \mathscr{L}(Q_3(x)) = \mu_3 = 0, \cdots .$$

y así se sigue por inducción que $\mu_{2n+1} = 0$ $(n \geq 0)$, lo que implica que $\mathscr{L}$ es simétrico.

Luego, se prueba la equivalencia $b \Leftrightarrow c$, por lo cual se supone que $Q_n(-x) = (-1)^nQ_n(x)$, $n \geq 0$. Además, se observa que $(-1)^nQ_n(-x) = P_n(x)$ también satisface la ecuación (1-12), esto es

$$P_{n+1}(x) = (x - B_n)P_n(x) - C_nP_{n-1}(x), \text{ con } n \geq 1. \tag{2-31}$$

Por hipótesis $P_n(x) = Q_n(x)$, por tanto si se resta (2-31) a (1-12) se obtiene que $-2B_nQ_n(x) = 0$, de donde $B_n = 0$, para $n \geq 1$.

Finalmente, si $B_n = 0$ en (1-12) para $n \geq 1$, entonces $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisface la misma relación de recurrencia que $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ con $P_{-1}(x) = Q_{-1}(x)$ y $P_0(x) = Q_0(x)$. Así, se sigue que $P_n(x) = Q_n(x)$ con lo cual

$$Q_n(x) = (-1)^nQ_n(-x) \Leftrightarrow Q_n(-x) = (-1)^nQ_n(x).$$

Con lo cual queda demostrado el teorema. ■

2.6.1. Polinomios generados por sistemas ortogonales simétricos

Sea $\mathcal{S}$ un funcional de momentos simétrico y regular, además sea $\mathscr{L}$ definido por

$$\mathscr{L}[x^n] = \mathcal{S}[x^{2n}]. \tag{2-32}$$

Ahora bien, si $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un **SMOP** para $\mathcal{S}$ entonces por Teorema 2.6.1,

$$S_n(-x) = (-1)^n S_n(x), \;\; n \geq 1.$$

Por consiguiente, si se considera a n par, es decir, de la forma $n = 2m$, se tiene

$$(-1)^{2m} S_{2m}(x) = S_{2m}(x) = x^{2m} + \beta_{2m,2m-1}x^{2m-1} + \cdots + \beta_{2m,1}x + \beta_{2m,0}, \tag{2-33}$$

y

$$\begin{aligned} S_{2m}(-x) &= (-x)^{2m} + (-1)^{2m-1}\beta_{2m,2m-1}x^{2m-1} + \cdots + (-1)\beta_{2m,1}x + \beta_{2m,0} \\ &= x^{2m} - \beta_{2m,2m-1}x^{2m-1} + \cdots - \beta_{2m,1}x + \beta_{2m,0}. \end{aligned} \tag{2-34}$$

Por simetría se igualan (2-33) y (2-34) y así se tiene
$\beta_{2m,2m-1}x^{2m-1} = -\beta_{2m,2m-1}x^{2m-1}$ y por tanto $\beta_{2m,2m-1} = 0$ para $m \geq 1$, con lo cual

$$S_{2m}(x) = (x^2)^m + \beta_{2m,2(m-1)}(x^2)^{m-1} + \cdots + \beta_{2m,2}x^2 + \beta_{2m,0}. \tag{2-35}$$

Ahora, si se considera n impar, es decir de la forma $n = 2m+1$ se tiene que

$$\begin{aligned} (-1)^{2m+1} S_{2m+1}(x) &= (-1)^{2m+1} x^{2m+1} + (-1)^{2m+1}\beta_{2m+1,2m}x^{2m} + \cdots \\ &\quad + (-1)^{2m+1}\beta_{2m+1,1}x + (-1)^{2m+1}\beta_{2m+1,0} \\ &= -x^{2m+1} - \beta_{2m+1,2m}x^{2m} - \cdots - \beta_{2m+1,1}x - \beta_{2m+1,0}. \end{aligned} \tag{2-36}$$

y

$$
\begin{aligned}
S_{2m+1}(-x) &= (-1)^{2m-1} x^{2m+1} + \beta_{2m+1,2m} x^{2m} + \cdots \\
&\quad + (-1)\beta_{2m+1,1} x + \beta_{2m+1,0} \\
&= -x^{2m+1} + \beta_{2m+1,2m} x^{2m} - \cdots \\
&\quad - \beta_{2m+1,1} x + \beta_{2m+1,0}.
\end{aligned} \tag{2-37}
$$

De (2-36) y (2-37) se tiene $\beta_{2m+1,2m}x^{2m} = -\beta_{2m+1,2m}x^{2m}$ y así $\beta_{2m+1,2m} = 0$ para $m \geq 0$, con lo cual

$$
\begin{aligned}
S_{2m+1}(x) &= x^{2m+1} + \beta_{2m+1,2m-1}x^{2m-1} + \cdots + \beta_{2m+1,3}x^3 + \beta_{2m+1,1}x \\
&= x\left[x^{2m} + \beta_{2m+1,2m-1}x^{2m-2} + \cdots + \beta_{2m+1,3}x^2 + \beta_{2m+1,1}\right] \\
&= x\left[(x^2)^m + \beta_{2m+1,2m-1}(x^2)^{m-1} + \cdots + \beta_{2m+1,3}x^2 + \beta_{2m+1,1}\right].
\end{aligned} \tag{2-38}
$$

Finalmente, de (2-35) y (2-38) se sigue que

$$
S_{2n}(x) = Q_n(x^2) \;\; y \;\; S_{2n+1}(x) = xK_n(x^2), \tag{2-39}
$$

donde $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{K_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son dos **SMOP**; además $\{K_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ está definido como en (2-29). ■

Proposición 2.6.1. Sean $\mathscr{L}$ y $\mathcal{S}$ funcionales de momentos definidos como en (2-32), entonces para todo polinomio $\pi(x)$ se tiene que

$$
\mathscr{L}[\pi(x)] = \mathcal{S}[\pi(x^2)]. \tag{2.40}
$$

Demostración: Sea $\pi(x) = \gamma_{n,n}x^n + \gamma_{n,n-1}x^{n-1} + ... + \gamma_{n,1}x + \gamma_{n,0}$ un polinomio de grado n cualquiera, si se aplica la linealidad del funcional $\mathscr{L}$, y la ecuación (2-32) se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}[\pi(x)] &= \mathscr{L}\left[\gamma_{n,n}x^n + \gamma_{n,n-1}x^{n-1} + ... + \gamma_{n,1}x + \gamma_{n,0}\right] \\
&= \gamma_{n,n}\mathscr{L}\left[x^n\right] + \gamma_{n,n-1}\mathscr{L}\left[x^{n-1}\right] + \gamma_{n,1}\mathscr{L}\left[x\right] + ... + \gamma_{n,0}\mathscr{L}\left[1\right] \\
&= \gamma_{n,n}\mathcal{S}\left[x^{2n}\right] + \gamma_{n,n-1}\mathcal{S}\left[x^{2(n-1)}\right] + ... + \gamma_{n,1}\mathcal{S}\left[x^2\right] + \gamma_{n,0}\mathcal{S}\left[1\right] \\
&= \mathcal{S}\left[\gamma_{n,n}(x^2)^n + \gamma_{n,n-1}(x^2)^{n-1} + ... + \gamma_{n,1}(x^2)^1 + \gamma_{n,0}\right] \\
&= \mathcal{S}[\pi(x^2)].
\end{aligned}
$$

Así, queda demostrada la proposición. ■

Por otra parte, de (2-39) y (2.40) se obtiene

$$\mathscr{L}\left[Q_m(x)Q_n(x)\right] = \mathcal{S}\left[Q_m(x^2)Q_n(x^2)\right] = \mathcal{S}\left[S_{2m}(x)S_{2n}(x)\right]. \qquad (2\text{-}41)$$

Además, junto con los argumentos anteriores y (2-20) se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0^*\left[K_m(x)K_n(x)\right] &= \mathscr{L}\left[xK_m(x)K_n(x)\right]\\ &= \mathcal{S}\left[x^2K_m(x^2)K_n(x^2)\right]\\ &= \mathcal{S}\left[xK_m(x^2)xK_n(x^2)\right]\\ &= \mathcal{S}\left[S_{2m+1}(x)S_{2n+1}(x)\right]. \qquad (2\text{-}42)\end{aligned}$$

Como $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un **SMOP** para $\mathcal{S}$, de (2-41) se tiene que $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un SMOP para $\mathscr{L}$. Del mismo modo de (2-42) y por (2-30), los

$$Q_n^*(0;x) = K_n(0,x) = K_n(x),$$

son un SMOP para $\mathscr{L}_0^*$.

Recíprocamente, se puede empezar con un funcional de momentos cuasi-definido $\mathscr{L}$, y definir un funcional de momentos simétrico $\mathcal{S}$ por

$$\mathcal{S}[x^{2m}] = \mathscr{L}[x^m], \qquad \mathcal{S}[x^{2m+1}] = 0, \qquad m \geq 0. \qquad (2\text{-}43)$$

Luego, si $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un SMOP para $\mathscr{L}$ y $K_n(x)$ es un SMOP para $\mathscr{L}_0^*$, entonces $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ puede definirse por (2-39). De allí

$$\mathcal{S}\left[S_{2m}(x)S_{2n+1}(x)\right] = 0 \qquad m,n = 0,1,2,....$$

Esto junto con (2-41) y (2-42) muestra que $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un SMOP para $\mathcal{S}$. ∎

2.7. Algunos polinomios ortogonales clásicos

En este fragmento, se hace una pequeña síntesis de polinomios ortogonales clásicos, entre estos están, los de Hermite, Laguerre y Jacobi. Este último tipo abarca otros también importantes, como los de Tchebichef, Legendre y Gegenbauer. Este tipo de polinomios se denominan clásicos, ya que tienen ciertas características especiales, una de las que más se destaca, es que dichos polinomios satisfacen la siguiente ecuación diferencial

$$a_2(x)y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_0(x)y + \lambda y = 0, \tag{2-44}$$

donde $a_0(x)$, $a_1(x)$ y $a_2(x)$ son polinomios de grado a lo sumo $0, 1$ y 2 respectivamente, y $\lambda \neq 0$. Otra característica que tienen estos polinomios es que vienen dados por la Fórmula de Rodrigues o por una Fórmula tipo Rodrigues. Dicha síntesis se hace debido a que más adelante se va a emplear uno de estos polinomios clásicos en un ejemplo.

Los polinomios de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, son polinomios dados por la fórmula

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-2)^{-n}\,(n!)^{-1}\,(1-x)^{-\alpha}\,(1+x)^{-\beta}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}\,(1+x)^{n+\beta}\right]. \tag{2-45}$$

Aquí α y β son parámetros que por propósitos de integrabilidad, están restringidos a $\alpha > -1$ y $\beta > -1$.

El caso en que $\alpha = \beta = 0$ en la fórmula (2-45) es usualmente llamado **Fórmula de Rodrigues**, mientras que el caso general se dice Fórmula tipo Rodrigues. Es así que los polinomios de Laguerre generalizados, $L_n^{(\alpha)}(x)$, están definidos por una Fórmula tipo Rodrigues, esto es

$$L_n^{(\alpha)}(x) = e^x\frac{x^{-\alpha}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right), \qquad n \geq 0. \tag{2-46}$$

Es necesario que $\alpha > -1$. En caso de que $\alpha = 0$, los polinomios simplemente se dicen de Laguerre.

Igualmente los polinomios de Hermite, $H_n(x)$, están dados por una Fórmula tipo Rodrigues[15]

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x^2}\right), \qquad n \geq 0. \tag{2-47}$$

[15] Información tomada de ([**4**], $p.\ 143-145$).

Capítulo III

3. Sucesiones encadenadas y sus perturbaciones

En este capítulo, se hace una introducción de las sucesiones encadenadas, se tratan las sucesiones encadenadas complementarias y las sucesiones encadenadas complementarias generalizadas. Además, se observa la relación entre coeficientes de ciertos SMOP tratados en el capítulo anterior.

3.1. Sucesiones encadenadas

Esta sección trata el concepto de sucesión encadenada, y se proporcionan algunos ejemplos. Además, se exhiben ciertas características de este tipo de sucesiones.

Definición 3.1.1. Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice sucesión encadenada si existe una sucesión $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ tales que:

(i) $0 \leq g_0 < 1, \;\; 0 < g_n < 1, \;\; n \geq 1,$ (3-1)

(ii) $a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$ (3-2)

$\{g_k\}$ se dice sucesión de parámetros para la sucesión $\{a_n\}$, y g_0 se dice parámetro inicial.

Ejemplo 3.1.1. Se toma la sucesión constante $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{8}\right\}$. Ahora, se observa por un sencillo cálculo, que una sucesión de parámetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sería

$$\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right\}.$$

En efecto,

$$a_n = \frac{1}{8} = \left(1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right).$$

Por lo tanto, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión encadenada.

A continuación, se presenta un ejemplo de sucesión encadenada que involucra los coeficientes de la relación de recurrencia (1-12).

Ejemplo 3.1.2. Sea $\{d_n(t)\}$ la sucesión definida como

$$d_n(t) = \frac{C_n}{(t - B_{n-1})(t - B_n)}, \quad n \geq 1, \tag{3-3}$$

donde B_n y C_n son los coeficientes en la relación de tres términos definida en (1-12). Se puede ver fácilmente que (3-3) es una sucesión encadenada si se utiliza la siguiente identidad

$$\begin{aligned} d_n(t) &= \frac{C_n}{(t - B_{n-1})(t - B_n)} \\ &= \frac{Q_n(t)}{(t - B_{n-1})Q_{n-1}(t)}\left[1 - \frac{Q_{n+1}(t)}{(t - B_n)Q_n(t)}\right], \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{3-4}$$

Efectivamente (3-4) se satisfece. Pues al partir del lado derecho de la ecuación (3-4) y al usar la relación de recurrencia (1-12) reiteradamente, se obtiene

$$\begin{aligned} d_n(t) &= \frac{Q_n(t)}{(t - B_{n-1})Q_{n-1}(t)}\left[1 - \frac{Q_{n+1}(t)}{(t - B_n)Q_n(t)}\right] \\ &= \frac{\frac{Q_{n+1}(t)+C_nQ_{n-1}(t)}{t-B_n}}{(t - B_{n-1})\frac{Q_n(t)+C_{n-1}Q_{n-2}(t)}{t-B_{n-1}}}\left[1 - \frac{(t - B_n)Q_n(t) - C_nQ_{n-1}(t)}{(t - B_n)\frac{Q_{n+1}(t)+C_nQ_{n-1}(t)}{t-B_n}}\right]. \end{aligned} \tag{3-5}$$

Ahora, si se cancelan términos semejantes y se efectuan cálculos en (3-5) se obtiene

$$\begin{aligned} &d_n(t) = \\ &\frac{Q_{n+1}(t) + C_nQ_{n-1}(t)}{(t - B_n)[Q_n(t) + C_{n-1}Q_{n-2}(t)]}\left[\frac{Q_{n+1}(t) - (t - B_n)Q_n(t) + 2C_nQ_{n-1}(t)}{Q_{n+1}(t) + C_nQ_{n-1}(t)}\right] \\ &\qquad = \frac{Q_{n+1}(t) - (t - B_n)Q_n(t) + 2C_nQ_{n-1}(t)}{(t - B_n)[Q_n(t) + C_{n-1}Q_{n-2}(t)]}. \end{aligned} \tag{3-6}$$

Nuevamente, se realizan cálculos en (3-6) y se usa la relación de recurrencia (1-12), para así obtener

$$
\begin{aligned}
d_n\left(t\right) &= \frac{\left(t-B_n\right)Q_n(t)-C_nQ_{n-1}(t)-\left(t-B_n\right)Q_n(t)+2C_nQ_{n-1}(t)}{\left(t-B_n\right)\left[\left(t-B_{n-1}\right)Q_{n-1}(t)-C_{n-1}Q_{n-2}(t)+C_{n-1}Q_{n-2}(t)\right]} \\
&= \frac{C_nQ_{n-1}(t)}{\left(t-B_n\right)\left(t-B_{n-1}\right)Q_{n-1}(t)} \\
&= \frac{C_n}{\left(t-B_n\right)\left(t-B_{n-1}\right)}.
\end{aligned}
$$

Con lo cual queda demostrada la identidad (3-4), cabe aclarar que $t \notin [\xi, \eta]$, donde $[\xi, \eta]$ es el verdadero intervalo de ortogonalidad para el funcional $\mathscr{L}$. Finalmente, se ve que $\{d_n(t)\}$ es una sucesión encadenada con sucesión de parámetros $\{g_n(t)\}$, donde

$$
g_n\left(t\right) = \left[1-\frac{Q_{n+1}(t)}{\left(t-B_n\right)Q_n(t)}\right], \quad n \geq 0. \tag{3-7}
$$

Es decir, $d_n(t) = (1-g_{n-1}(t))g_n(t)$, que era lo que se quería mostrar. ■

Teorema 3.1.1. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión encadenada y sean $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h_k\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de parámetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces

$$
g_k < h_k \quad \text{para} \quad k \geq 1 \quad \text{si y solo si} \quad g_0 < h_0.
$$

Demostración: Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión encadenada y sean $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h_k\}_{n=1}^{\infty}$ ambas sucesiones de parámetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces por (3-2) se tiene que

$$
a_n = (1-g_{n-1})g_n = (1-h_{n-1})h_n,
$$

entonces

$$
\frac{g_n}{h_n} = \frac{1-h_{n-1}}{1-g_{n-1}}.
$$

Así

$$
0 < g_n < h_n < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1-h_{n-1} < 1-g_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < g_{n-1} < h_{n-1} < 1.
$$

Por tanto, queda demostrado el teorema. ■

Definición 3.1.2. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión encadenada. Una sucesión de parámetros $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ se dice **sucesión de parámetros minimal** si su parámetro inicial $m_0 = 0$.

Nota. Si la sucesión de parámetros minimal es la única sucesión de parámetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces se dice que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ determina sus parámetros de manera única.

Un ejemplo de sucesión de parámetros minimal es el dado en (3-7), esto debido a que

$$g_0\,(t) = \left[1 - \frac{Q_1(t)}{(t - B_0)\,Q_0(t)}\right],$$

y de la relación de recurrencia (1-12) se obtiene que $Q_1(t) = (t - B_0)\,Q_0(t)$, con lo cual

$$g_0\,(t) = \left[1 - \frac{(t - B_0)\,Q_0(t)}{(t - B_0)\,Q_0(t)}\right] = 1 - 1 = 0.$$

Esto prueba que $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida en (3-7), es una sucesión de parámetros minimal para la sucesión encadenada (3-3), que era lo que se quería mostrar. ■

Definición 3.1.3. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión encadenada. Una sucesión de parámetros $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ se dice **sucesión de parámetros maximal** si $M_k > g_k$ $(k \geq 0)$ para cualquier otra sucesión de parámetros $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Teorema 3.1.2. Toda sucesión encadenada tiene una sucesión de parámetros maximal.

Demostración: Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión encadenada que determina sus parámetros de manera única, entonces su sucesión de parámetros minimal es claramente su sucesión de parámetros maximal. En caso de que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no determine sus parámetros de manera única, sea M_0 la menor de las cotas superiores del conjunto de todos los parámetros iniciales para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; así se tiene que $0 < M_0 \leq 1$.

Ahora, para cada $\mathbf{x}$ tal que $0 \leq \mathbf{x} < M_0$, existe una sucesión de parámetros $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $g_0(x) = \mathbf{x}$. De acuerdo al Teorema 3.1.1 para cada valor fijo de n, g_n es una función creciente. Así se puede definir

$$M_n = \lim_{x \to M_0^-} g_n(x).$$

Además, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de parámetros, con lo cual $a_n = (1 - g_{n-1})g_n$ y así $0 < M_n \leq 1$ y también $0 < (1 - M_{n-1})M_n = a_n < 1$, $(n \geq 1)$; se concluye que $0 < M_n < 1$ para cada n, y $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de parámetros la cual debe ser maximal por la definición de M_0. $\blacksquare$

Por otro lado, se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 3.1.3. Sea $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ un SMOP para un funcional de momentos $\mathscr{L}$, sea $[\xi, \eta]$ el verdadero intervalo de ortogonalidad de este sistema, y sea

$$w_n(t) = \frac{C_n}{(t - B_{n-1})(t - B_n)}, \quad n \geq 1, \tag{3-8}$$

donde B_n y C_n son los coeficientes en la relación de tres términos definida en (1-12). Entonces para $a, b \in \mathbb{R}$, las siguientes dos proposiciones son equivalentes:

a) $[\xi, \eta]$ esta contenido en (a, b).

b) $B_n \in (a, b)$ para $n \geq 0$ y las dos sucesiones $w_n(a)$ y $w_n(b)$ son sucesiones encadenadas.

Nota. Para la demostración de este teorema, se toma como guía el texto [4], ya que si se hace $a = s$ y $t = b$, el Teorema 2.1 y sus respectivos corolarios, los cuales aparecen en ese texto, son equivalentes al Teorema 3.1.3[16].

Es importante señalar que, si un sistema tiene un verdadero intervalo de ortogonalidad contenido en $\mathbb{R}$ y los coeficientes B_n de la relación de recurrencia (1-12), también están contenidos en este intervalo, entonces el Teorema 3.1.3 exhibe la existencia de dos nuevas sucesiones encadenadas.

[16]El Teorema 2.1 y sus corolarios se encuentran en ([**4**], Teorema 2.1, p. 108 – 109).

3.2. Ciertas relaciones de recurrencia

Las fórmulas (2-21) y (2-39) involucran relaciones entre los coeficientes de las respectivas fórmulas de recurrencia que satisfacen los siguientes tres SMOP $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{Q_n^*(0;x)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. En efecto, se supone que las relaciones de recurrencia satisfechas por estos sistemas, respectivamente son:

$$\begin{gathered} Q_{n+1}(x) = (x - B_n)\, Q_n(x) - C_n Q_{n-1}(x), \qquad n \geq 0, \\ Q_{-1}(x) = 0, \qquad Q_0(x) = 1, \qquad C_n \neq 0, \qquad C_0 = \mathscr{L}[1]; \end{gathered} \tag{3-9}$$

$$\begin{gathered} K_{n+1}(x) = (x - D_n)\, K_n(x) - V_n K_{n-1}(x), \qquad n \geq 0, \\ K_{-1}(x) = 0, \qquad K_0(x) = 1, \qquad V_n \neq 0, \qquad V_0 = \mathscr{L}_0^*[1], \end{gathered} \tag{3-10}$$

donde $K_n(x) = Q_n^*(0;x)$;

$$\begin{gathered} S_{n+1}(x) = xS_n(x) - \gamma_n S_{n-1}(x), \qquad n \geq 0, \\ S_{-1}(x) = 0, \qquad S_0(x) = 1, \qquad \gamma_n \neq 0, \qquad \gamma_0 = \mathcal{S}[1], \end{gathered} \tag{3-11}$$

donde $S_n(x)$ satisface (2-39), cabe aclarar que para expresar (3-11) se usa el Teorema 2.6.1 inciso c.

Se observa que para $n = 2m \geq 2$, (3-11) puede escribirse de la siguiente manera

$$xK_m(x^2) = xQ_m(x^2) - \gamma_{2m} xK_{m-1}(x^2),$$

esto es

$$K_m(x) = Q_m(x) - \gamma_{2m} K_{m-1}(x), \;\; m \geq 1. \tag{3-12}$$

De igual forma, (3-11) puede escribirse para $n = 2m + 1 \geq 1$,

$$Q_{m+1}(x^2) = x^2 K_m(x^2) - \gamma_{2m+1} Q_m(x^2)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Q_{m+1}(x) = xK_m(x) - \gamma_{2m+1} Q_m(x), \;\; m \geq 0. \tag{3-13}$$

Ahora, se usa (3-12) para eliminar $Q_m(x)$ de (3-13). Entonces si se cambia el índice en (3-12) de m a $m+1$, se puede quitar $Q_{m+1}(x)$ de (3-13) y al reorganizar la ecuación se obtiene

$$K_{m+1}(x) + \gamma_{2m+2} K_m(x) = x K_m(x) - \gamma_{2m+1} \left[K_m(x) + \gamma_{2m} K_{m-1}(x) \right]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$K_{m+1}(x) = \left(x - \gamma_{2m+1} - \gamma_{2m+2} \right) K_m(x) - \gamma_{2m} \gamma_{2m+1} K_{m-1}(x), \quad m \geq 1. \tag{3-14}$$

Igualmente, se usa (3-13) para eliminar $K_m(x)$, y $K_{m-1}(x)$ de (3-12), para así tener

$$\frac{Q_{m+1}(x) + \gamma_{2m+1} Q_m(x)}{x} = Q_m(x) - \gamma_{2m} \left[\frac{Q_m(x) + \gamma_{2m-1} Q_{m-1}(x)}{x} \right]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Q_{m+1}(x) + \gamma_{2m+1} Q_m(x = x Q_m(x) - \gamma_{2m} \left[Q_m(x) + \gamma_{2m-1} Q_{m-1}(x) \right]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Q_{m+1}(x) = \left(x - \gamma_{2m} - \gamma_{2m+1} \right) Q_m(x) - \gamma_{2m-1} \gamma_{2m} Q_{m-1}(x), \quad m \geq 1. \tag{3-15}$$

Por último, se comparan los coeficientes de las fórmulas (3-9) y (3-10) con los de (3-15) y (3-14) respectivamente, y así se obtiene:

$$\begin{aligned} B_n &= \gamma_{2n} + \gamma_{2n+1}, \qquad C_n = \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}, \qquad n \geq 1, \\ D_n &= \gamma_{2n+1} + \gamma_{2n+2}, \qquad n \geq 0, \qquad V_n = \gamma_{2n}\gamma_{2n+1}, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

Más precisamente, como cada fórmula de recurrencia está determinada de manera única por el funcional de momentos correspondiente, se ha probado el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. Sean $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{Q_n^*(0;x)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ tres SMOP tales que satisfacen (3-9), (3-10) y (3-11) respectivamente, entonces para que

$$Q_n^*(0;x) = K_n(x), \qquad S_{2n}(x) = Q_n(x^2), \qquad S_{2n+1}(x) = xK_n(x^2).$$

Es necesario y suficiente que

$$B_n = \gamma_{2n} + \gamma_{2n+1}, \qquad n \geq 1, \qquad C_n = \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}, \qquad n \geq 0, \tag{3-16}$$

$$D_n = \gamma_{2n+1} + \gamma_{2n+2}, \qquad n \geq 0, \qquad V_n = \gamma_{2n}\gamma_{2n+1}, \qquad n \geq 0 \qquad (\gamma_{-1} = 1). \tag{3-17}$$

Además, los tres funcionales de momentos correspondientes a cada sistema son definidos positivos si y solo si $\gamma_n > 0 \quad (n \geq 0)$.

Corolario. Sea $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ un sistema de polinomios que satisfacen la fórmula de recurrencia

$$R_{n+1}(x) = (x - f_n)\,R_n(x) - \rho_n R_{n-1}(x), \qquad n \geq 0, \tag{3-18}$$
$$R_{-1}(x) = 0, \qquad R_0(x) = 1, \qquad \rho_n \neq 0.$$

Entonces, el funcional de momentos correspondiente $\mathscr{M}$ es definido-positivo en $[0,\infty)$ si y solo si existen números δ_n tales que:

$$\delta_0 \geq 0. \quad \delta_n > 0, \quad n \geq 1,$$

$$f_n = \delta_{2n} + \delta_{2n+1}, \qquad \rho_{n+1} = \delta_{2n+1}\delta_{2n+2}, \qquad n \geq 0. \tag{3-19}$$

Además, $\mathscr{M} = \mathscr{L}_0^*$ para algún funcional de momentos $\mathscr{L}$, el cual es definido-positivo en $[0,\infty)$ si y solo si δ_n existe con $\delta_0 > 0$.

Demostración: Si $\delta_0 = 0$, el conjunto $\delta_n = \gamma_n$, $\rho_0 = \gamma_0$ y se obtiene $R_n(x) = Q_n(x)$, $\mathscr{M} = \mathscr{L}$ como en el Teorema 3.2.1. De igual forma, si $\delta_0 > 0$, el conjunto $\delta_n = \gamma_{n+1} \quad (n \geq 0)$, $\rho_1 = \gamma_0\gamma_1$ y así $R_n(x) = K_n(x)$, $\mathscr{M} = \mathscr{L}_0^*$ en el Teorema 3.2.1. ∎

Teorema 3.2.2. El verdadero intervalo de ortogonalidad del funcional de momentos $\mathscr{M}$ es un subconjunto de $[0,\infty)$ si y solo si $f_n > 0$ para $n \geq 0$, y existen números g_n tales que:

(i) $\quad 0 \leq g_0 < 1, \qquad 0 < g_n < 1, \qquad n \geq 1.$

(ii) $\quad \dfrac{\rho_{n+1}}{f_n f_{n+1}} = (1-g_{n-1})\, g_n, \qquad n \geq 1.$

Además, el funcional $\mathscr{M} = \mathscr{L}_0^*$ para algún funcional $\mathscr{L}$ definido-positivo en $[0,\infty)$ si y solo si existe g_n con $g_0 > 0$.

Demostración: Si se satisface (3-19), entonces $f_n > \delta_{2n}$, y así

$$\delta_{2n} = g_{n-1} f_n$$

donde $0 \leq g_0 < 1$ y $0 < g_n < 1$, para $n \geq 1$.
Entonces $\delta_{2n+1} = f_n - \delta_{2n} = (1-g_{n-1})f_n$ y por tanto se obtiene (ii). Recíprocamente, si (i) y (ii) se satisfacen, entonces (3-19) se obtiene inmediatamente al poner $\delta_{2n} = g_{n-1} f_n$ y $\delta_{2n+1} = (1-g_{n-1})f_n$. Finalmente, por la construcción de $g_{n-1} = \frac{\delta_{2n}}{f_n}$ se tiene que $\delta_0 > 0$ si y solo si $g_0 > 0$. ■

Si se usa el teorema anterior para el funcional de momentos $\mathscr{L}$ de la sección 1.7, se tiene que el verdadero intervalo de ortogonalidad es un subconjunto de $[0,\infty)$ si y solo si $B_n > 0$ para $n \geq 0$ y existen números g_n tales que $0 \leq g_0 < 1, \;\; 0 < g_n < 1, \;\; n \geq 1$. Además, se satisface que $(1-g_{n-1})g_n = \frac{C_n}{B_{n-1}B_n} = w_n(0)$, con $n \geq 1$ y donde $w_n(t)$ es la sucesión encadenada mostrada en (3-8) con $t = 0$. Adicionalmente, como se muestra a lo largo de esta sección

$$B_n = \gamma_{2n} + \gamma_{2n+1},\ n \geq 1 \ \text{ y } \ C_n = \gamma_{2n-1}\gamma_{2n},\ n \geq 0,$$

y los parámetros están dados por

$$g_n = \frac{\gamma_{2n}}{B_n},\ n \geq 0. \tag{3-20}$$

En efecto,

$$(1-g_{n-1})g_n = \left(1 - \frac{\gamma_{2n-2}}{B_{n-1}}\right)\frac{\gamma_{2n}}{B_n} = \left(\frac{B_{n-1} - \gamma_{2n-2}}{B_{n-1}}\right)\frac{\gamma_{2n}}{B_n}$$

$$= \left(\frac{\gamma_{2n-2} + \gamma_{2n-1} - \gamma_{2n-2}}{B_{n-1}}\right)\frac{\gamma_{2n}}{B_n} = \frac{\gamma_{2n-1}\gamma_{2n}}{B_{n-1}B_n} = \frac{C_n}{B_{n-1}B_n}. \blacksquare$$

3.3. Sucesiones encadenadas complementarias y perturbaciones

En esta sección, se introduce el término de sucesión encadenada complementaria y se muestra la relación que tiene con sistemas de polinomios ortogonales mónicos. Además, se realizan perturbaciones en los coeficientes de la relación de tres términos presentada en la sección 1.7 y se obtienen resultados similares a los de la sección 3.2. Cabe aclarar que la información de esta sección se hace de acuerdo al artículo guía.

Definición 3.3.1. Suponga que $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión encadenada con $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ como su sucesión de parámetros minimal. Sea $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ otra sucesión dada por $k_0 = 0$ y $k_n = 1 - m_n$ para $n \geq 1$. Entonces la sucesión encadenada $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que tiene a $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ como su sucesión de parámetros minimal, se dice **sucesión encadenada complementaria** de $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 3.3.2. Suponga que $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión encadenada con $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ sucesión de parámetros no-minimal. Sea $\left\{k_n^{'}\right\}_{n=0}^{\infty}$ otra sucesión dada por $k_n^{'} = 1 - g_n$ para $n \geq 0$. Entonces la sucesión encadenada $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ que tiene a $\left\{k_n^{'}\right\}_{n=0}^{\infty}$ como su sucesión de parámetros, se dice **sucesión encadenada complementaria generalizada** de $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$.

De las dos definiciones anteriores se observa que, para una sucesión encadenada fija, su sucesión encadenada complementaria es única mientras que su sucesión encadenada complementaria generalizada no necesariamente lo es. De hecho, una sucesión encadenada puede tener muchas sucesiones encadenadas complementarias generalizadas como sucesión de parámetros no-minimal. Así, una sucesión encadenada complementaria y todas sus sucesiones encadenadas complementarias generalizadas coinciden si y solo si la sucesión encadenada fija determina sus parámetros de manera única.

El siguiente teorema muestra que los polinomios $\left\{\tilde{Q}_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ y $\left\{\hat{Q}_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ asociados respectivamente, con la sucesión encadenada complementaria $\{\tilde{w}_n(0)\}$ y la sucesión encadenada complementaria generalizada $\left\{\hat{\vartheta}_n(0)\right\}$, se atribuyen a una perturbación particular de los coeficientes de recurrencia de los polinomios $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$[17]. En este caso todos los coeficientes son perturbados.

[17] El sistema $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es el tratado en la sección 2.6.

Teorema 3.3.1. Sea $\left\{\tilde{S}_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ un sistema de polinomios simétricos que satisface

$$\tilde{S}_n(x) = x\tilde{S}_{n-1}(x) - \tilde{v}_n\tilde{S}_{n-2}(x), \qquad n \geq 1, \tag{3-21}$$

con $\tilde{S}_{-1}(x) = 0$, $\tilde{S}_0(x) = 1$ y donde, para $n \geq 1$

$$\tilde{v}_n = \begin{cases} \gamma_{2j-1}, & n = 2j, \qquad j = 1, 2, \cdots \\ \gamma_{2j+2}, & n = 2j+1, \quad j = 0, 1, \cdots . \end{cases} \tag{3-22}$$

Entonces, con $\gamma_1 \neq 0$, $\left\{\tilde{Q}_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$, donde $\tilde{S}_{2n}(x) = \tilde{Q}_n(x^2)$, satisface,

$$\tilde{Q}_{n+1}(x) = (x - D_n)\tilde{Q}_n(x) - \tilde{C}_n\tilde{Q}_{n-1}(x), \qquad n \geq 1, \tag{3-23}$$

con condiciones iniciales $\tilde{Q}_0(x) = 1$, y $\tilde{Q}_1(x) = (x - \gamma_1)$.

Demostración: Primero, se observa que la perturbación (3-22) implica que la sucesión de coeficientes $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \cdots\}$ es reemplazada por $\{\gamma_2, \gamma_1, \gamma_4, \gamma_3, \cdots\}$. Esto es, las parejas $\{\gamma_{2k-1}, \gamma_{2k}\}$ son intercambiadas con $\{\gamma_{2k}, \gamma_{2k-1}\}$, $k \geq 1$. Así para n=2m

$$\tilde{S}_{2m}(x) = x\tilde{S}_{2m-1}(x) - \gamma_{2m-1}\tilde{S}_{2m-2}(x), \qquad m \geq 1,$$

lo cual implica

$$\tilde{Q}_m(x^2) = x^2\tilde{K}_{m-1}(x^2) - \gamma_{2m-1}\tilde{Q}_{m-1}(x^2)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\tilde{Q}_m(x) = x\tilde{K}_{m-1}(x) - \gamma_{2m-1}\tilde{Q}_{m-1}(x), \; m \geq 1. \tag{3-24}$$

Similarmente, para $n = 2m+1$

$$\tilde{S}_{2m+1}(x) = x\tilde{S}_{2m}(x) - \gamma_{2m+2}\tilde{S}_{2m-1}(x), \qquad m \geq 0,$$

y esto implica

$$x\tilde{K}_m(x^2) = x\tilde{Q}_m(x^2) - \gamma_{2m+2}x\tilde{K}_{m-1}(x^2)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\tilde{K}_m(x) = \tilde{Q}_m(x) - \gamma_{2m+2}\tilde{K}_{m-1}(x), \qquad m \geq 0. \tag{3-25}$$

Ahora, de (3-25) $\tilde{Q}_m(x) = \tilde{K}_m(x) + \gamma_{2m+2}\tilde{K}_{m-1}(x)$, $m \geq 0$, y si se usa este hecho en (3-24), se tiene

$$\tilde{K}_m(x) + \gamma_{2m+2}\tilde{K}_{m-1}(x) = x\tilde{K}_{m-1}(x) - \gamma_{2m-1}\left[\tilde{K}_{m-1}(x) + \gamma_{2m}\tilde{K}_{m-2}(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\tilde{K}_m(x) = \left[x - \gamma_{2m-1} - \gamma_{2m+2}\right]\tilde{K}_{m-1}(x) - \gamma_{2m-1}\gamma_{2m}\tilde{K}_{m-2}(x), \qquad m \geq 1, \tag{3-26}$$

con $\tilde{K}_{-1}(x) = 0$ y $\tilde{K}_0(x) = 1$. Del mismo modo, de (3-24) $x\tilde{K}_{m-1}(x) = \tilde{Q}_m(x) + \gamma_{2m-1}\tilde{Q}_{m-1}(x)$, y si se usa esto en (3-25), se tiene

$$\left[\frac{\tilde{Q}_{m+1}(x) + \gamma_{2m+1}\tilde{Q}_m(x)}{x}\right] = \tilde{Q}_m(x) + \gamma_{2m+2}\left[\frac{\tilde{Q}_m(x) + \gamma_{2m-1}\tilde{Q}_{m-1}(x)}{x}\right]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\tilde{Q}_{m+1}(x) = \left[x - \gamma_{2m+1} - \gamma_{2m+2}\right]\tilde{Q}_m(x) - \gamma_{2m-1}\gamma_{2m+2}\tilde{Q}_{m-1}(x), \qquad m \geq 1, \tag{3-27}$$

con $\tilde{Q}_0(x) = 1$, y $\tilde{Q}_1(x) = (x - \gamma_1)$. Luego, se hace $\tilde{C}_m = \gamma_{2m-1}\gamma_{2m+2}$ y finalmente por la definición de D_n en (3-17), se obtiene (3-23). ■

Corolario 1. Se considera el SMOP $\left\{\hat{Q}_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ que satisface (3-27) con $m \geq 1$. Entonces $\left\{\hat{Q}_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ esta asociado con una sucesión encadenada complementaria generalizada $\left\{\hat{\vartheta}_n(0)\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Demostración: De la relación de recurrencia (3-27), se tiene

$$\hat{Q}_{m+1}(x) = \left[x - \gamma_{2m+1} - \gamma_{2m+2}\right]\hat{Q}_m(x) - \gamma_{2m-1}\gamma_{2m+2}\hat{Q}_{m-1}(x), \qquad m \geq 0, \tag{3-28}$$

con $\hat{Q}_{-1}(x) = 1$, y $\hat{Q}_0(x) = (x - \gamma_1)$. Así la sucesión encadenada está dada por

$$\left\{\hat{\vartheta}_n(0)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{\gamma_{2n-1}\gamma_{2n+2}}{\left(\gamma_{2n-1} + \gamma_{2n}\right)\left(\gamma_{2n+1} + \gamma_{2n+2}\right)}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{\tilde{C}_n}{D_{n-1}D_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

con la sucesión de parámetros $\left\{k_n'\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{\gamma_{2n+2}}{(\gamma_{2n+1}+\gamma_{2n+2})}\right\}_{n=0}^{\infty}$. El resultado se sigue ya que $k_n' = 1 - g_n$, con $n \geq 0$ y g_n como en (3-20). ■

Por otra parte, si se ven las sucesiones encadenadas complementarias generalizadas como perturbaciones de los parámetros minimales o simplemente como una transformación de la sucesión encadenada original, se obtiene una consecuencia importante, la cual se presenta en el siguiente Corolario del Teorema 3.3.1.

Corolario 2. El sistema de kernel de polinomios $\{K_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ permanece invariante bajo la sucesión encadenada complementaria generalizada si la sucesión $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface

$$\gamma_{2n+1} - \gamma_{2n-1} = \gamma_{2n+2} - \gamma_{2n}$$

Demostración: Se procede a comparar los coeficientes de (3-26) y las expresiones de la ecuación (3-16), B_n y C_{n+1}. Esto es

$$B_n = \gamma_{2n} + \gamma_{2n+1} \text{ y } C_{n+1} = \gamma_{2n+1}\gamma_{2n+2},$$

con los coeficientes de (3-26). Esto es

$$\gamma_{2n} + \gamma_{2n+1} = \gamma_{2n-1} + \gamma_{2n+2},$$

y al operar se obtiene

$$\gamma_{2n+1} - \gamma_{2n-1} = \gamma_{2n+2} - \gamma_{2n},$$

que era lo que se quería probar. ∎

El corolario anterior es importante ya que por ([**4**], Ejercicio 7.2, *p.* 39), se tiene que la relación entre los SMOP y los Kernel de polinomios no es única. Es decir, para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo, aunque $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ conduzca a un sistema de kernel de polinomios único $\{K_n(t,x)\}_{n=0}^{\infty}$, existe un número finito de otros SMOP que tienen el mismo $\{K_n(t,x)\}_{n=0}^{\infty}$ como sus sistemas de Kernel de polinomios. Por lo tanto, las sucesiones encadenadas complementarias generalizadas pueden ser usadas para construir dos sistemas de polinomios ortogonales que tengan el mismo sistema de Kernel de polinomios.

3.4. Sucesión encadenada de los polinomios de Laguerre

En esta sección, se desarrolla un ejemplo donde a partir de la relación de tres términos de un SMOP particular se obtiene una sucesión encadenada. El SMOP a considerar es uno de los polinomios clásicos tratado en la sección 2.7, este sistema es el de polinomios de Laguerre generalizado $\left\{L_n^{(\alpha)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$. Al desarrollar la fórmula (2-46), se obtiene que los primeros polinomios de Laguerre son

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1,$$
$$\mathrm{L}_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x, \;\; L_2^{(\alpha)}(x) = \tfrac{1}{2}\left[(1+\alpha)(2+\alpha) - 2(2+\alpha)t + t^2\right], \cdots .$$

Ahora, se considera la relación de recurrencia de tres términos de los polinomios de Laguerre generalizados $\left\{L_n^{(\alpha)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ [18]

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = \left[x - (2n+\alpha+1)\right] L_n^{(\alpha)}(x) - n(n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1, \tag{3-29}$$

con $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ y $L_1^{(\alpha)}(x) = x - (1+\alpha)$. Si se nota $B_n = 2n + \alpha + 1$, $C_n = n(n+\alpha)$ y con $t = 0$, se obtiene $d_n(0)$ en (3-3). Así, la sucesión encadenada asociada a $\left\{L_n^{(\alpha)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ es

$$d_n(0) = \frac{C_n}{B_{n-1}B_n} = \frac{n(n+\alpha)}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha+1)}, \qquad n \geq 1. \tag{3-30}$$

Finalmente, se verifica que la sucesión de parámetros $m_n = \frac{n}{2n+\alpha+1}$, $n \geq 0$, satisface

$$\begin{aligned}(1 - m_{n-1})\, m_n &= \left[1 - \frac{(n-1)}{(2n+\alpha-1)}\right] \frac{n}{(2n+\alpha+1)} \\ &= \left[\frac{2n+\alpha-1-n+1}{2n+\alpha-1}\right] \frac{n}{(2n+\alpha+1)} \\ &= \frac{n+\alpha}{(2n+\alpha-1)} \frac{n}{(2n+\alpha+1)} \\ &= d_n.\end{aligned}$$

Además, $m_0 = 0$; por lo tanto m_n es una sucesión de parámetros minimal para la sucesión encadenada (3-30). ■

[18] Ver ([**4**], *p.* 154).

Conclusiones

- La síntesis teórica desarrollada en el presente trabajo, no fue suficiente para comprender la totalidad del artículo guía. Hubo temas como función de Stieltjes, distribución simétrica y transformación de Christoffel que no se trataron es este texto, debido a que requerían un estudio más profundo y exigían herramientas de mayor complejidad.

- La teoría estudiada permitió hacer un análisis más detallado tanto de las demostraciones correspondientes a los teoremas y proposiciones incluidos en el artículo, como al desarrollo de aquellas que no la tenían. Este es el caso de la prueba realizada en la sección 2.3 acerca de polinomios asociados a un sistema de polinomios.

- Con el estudio teórico hecho, se logró comprender una relación que tienen las sucesiones encadenadas con los verdaderos intervalos de ortogonalidad de los SMOP. También, se comprendió la forma de encontrar algunas sucesiones encadenadas de ciertos SMOP a través de los coeficientes de estos mismos.

Referencias

[**1**] Ahlswede, A.(2018). *Combinatorial Methods and Models*. Alemania: Springer.

[**2**] Apostol, T. M. (1976). *Análisis Matemático*. Massachusetts: J Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[**3**] Behera, K. K. Y Swaminathan, A. (2017). *Orthogonal polynomials on the real line corresponding to a perturbed chain sequence*. arXiv:1701.07960 [math.CA].

[**4**] Chihara, T. S.(1978). *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. New York: Gordon and Breach Science Publishers.

[**5**] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley Sons. Inc.

[**6**] Lelong, F. J. Y Arnaudies, J. M. (1983). *Ecuaciones diferenciales, funciones holomorfas e integrales múltiples, Volumen 4*. Paris: Reverté.

[**7**] Poularikas, A. D.(1999). *"Laguerre Polynomials", The Handbook of Formules and tables for signal processing*. Boca Raton: CRC Press LLC.