UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

DENDRITAS

JHOSMAR CRISTINA MARTÍNEZ

TRABAJO DE GRADO

DIRECTOR:

PROF. CARLOS ORLANDO OCHOA

Bogotá D.C., 2019

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

DENDRITAS

OPTANDO POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO

JHOSMAR CRISTINA MARTÍNEZ

Bogotá D.C., 2019

Contenido

Índice de figuras

A mi Hermano Hobeth Martínez, quien me ha brindado su apoyo incondicional. A mis profesores,especialmente al Profesor Carlos Ochoa por transmitir, con su enseñanza, el amor por el estudio de las matemáticas.

0.1. Resumen

En el presente trabajo expone el concepto de un objeto particular de la teoría del continuo llamado *Dendrita* y además algunas propiedades.
Inicialmente se aborda la definición de continuo junto con unos ejemplos y características, además se estudian y exponen definiciones y propiedades necesarias que permiten acometer algunas propiedades de las *Dendritas*.
De esta manera se llega a tratar el concepto de *Dendrita* y propiedades, específicamente se conoce la propiedad que relaciona los árboles con estos objetos.

0.2. Objetivos

0.2.1. Objetivo General

Explorar el concepto de *Dendritas* y algunas de sus características desde el área matemática de la topología.

0.2.2. Objetivos Específicos

1. Presentar el concepto de *Dendrita* a partir de la definición de continuo.

2. Estudiar, desde la topología, algunas de las propiedades de las *Dendritas*.

0.3. Introducción

Las *Dendritas* son conocidas en el campo neurocientífico por ser terminaciones nerviosas de las neuronas que actúan como receptores. En matemáticas, las dendritas son un objeto propio de la teoría del continuo en el área de la topología, y tienen aplicaciones en el campo de los sistemas dinámicos complejos. En las *Dendritas* además de conceptos topológicos inmersos en su definición, también se pueden encontrar propiedades relacionadas con otras teorías en la matemática. Son estas relaciones las que llevan a tomar este concepto y hacerlo el tema central de este trabajo.

El concepto de dendrita y sus propiedades se ha elaborado desde hace más de 30 años; Janusz Charatonick, Ph.D. de la Universidad de Wroclaw, quien fue profesor de la Universidad Nacional de México, hace referencia al conocimiento de este tema desde que estuvo participando en el seminario avanzado de topología, para la sección de Wroclaw del instituto de mattemáticas de la academia de ciencias de Polonia, dirigido por el profesor Bronislaw Knoster en el año 1956[1]; en esa época eran ya conocidos el Continuo y Dendroide. Las personas interesadas pueden encontrar estudios recientes, por ejemplo los realizados por Van Nall Ph.D. de la Universidad de Houston.

En este trabajo se estudia el concepto de *Dendrita* desde la definición de *Continuo* y se abordan algunos teoremas acerca de los *continuos* que son útiles en el desarrollo de algunas propiedades de las *Dendritas*. En el primer capítulo, preliminares, se encuentran las definiciones que componen el concepto de continuo y dendrita, se presentan los espacios F_ω y W_R, los cuales son ejemplos de dendritas y además se desarrolla brevemente el concepto de árbol.
En el segundo capítulo se presenta la definición de continuo, junto con el $continuo - Sin(\frac{1}{x})$ como ejemplo. Luego se exponen algunos teoremas con los que se conoce la propiedad de arcoconexidad de los continuos. Además se presenta un objeto de esta teoría que se llama continuo de convergencia, el cual se relaciona con los continuos que poseen la propiedad de heredar la conexidad local.
El último capítulo se da la definición de dendrita, también se desarrolla un caracterización del continuo a dendrita. se desarrollan algunas propiedades de las dendritas, las cuales llevan a una relación entre árboles y dendritas. Por último en este capítulo se da como ejemplo, la dendrita de Gehman y se presenta brevemente una aplicación.
Las gráficas que se presentan en el documento se realizaron en el programa *Geogebra* y exportado en formato PNG.

[1]Tomado del texto *Unas Palabras sobre mi*, escrito por el profesor Janusz Charatonik. Se puede consultar en [13]

0.4. Planteamiento del problema

0.4.1. Descripción del Problema

Desde que se pudo ver por primera vez el comportamiento dinámico de las dendritas distintos autores han buscado la forma de estudiar el comportamiento de las funciones sobre dendritas, su estructura no siempre permite hacerlo por esto se estudia la forma de estudiarlo desde el punto de vista de la teoría de árboles.

0.4.2. Delimitación

En el presente trabajo se estudia y presenta el teorema que expone la relación entre las *Dendritas* y los árboles que se encuentra en ([2], Theorem 3.1).

0.4.3. Pregunta de Investigación

Así que surge el interrogante principal de este trabajo.

¿Qué es una dendrita y cuál es la relación entre estas y los árboles?

CAPÍTULO 1 Preliminares

En esta primera parte se exponen los conceptos y propiedades necesarios para abordar el concepto centro de este trabajo. En lo sucesivo, cuando se mencione la palabra **espacio** y **función**, se esta haciendo referencia al concepto de *espacio métrico* y *función continua* respectivamente.

Definición 1.1 [Espacio Conexo (Ver [7])]**.** Un espacio X es no conexo si existen subconjuntos abiertos disjuntos A, B no vacíos de X tales que,

$$X = A \cup B.$$

En caso contrario se dice que X es conexo .

Definición 1.2 [Separación (Ver [11])]**.** Una *Separación* de un espacio X es un par $U,\ V$ de subconjuntos abiertos de X, no vacíos y disjuntos cuya unión es X.

Si $A,\ B$ y C son subconjuntos de X, se dice que C separa a A y B en X siempre que $X \setminus C$ sea no-conexo, con $X \setminus C = P \cup Q$, donde P y Q son abiertos conexos no vacíos (y en consecuencia disjuntos), tales que $A \subseteq P$ y $B \subseteq Q$.

Además, se dice que X es *Conexo entre dos subconjuntos* $C,\ D$ siempre que existan dos abiertos disjuntos U, V tales que $X \neq U \cup V$, $C \subseteq U$ y $D \subseteq V$.

Definición 1.3 [Componente (Ver [12])]**.** Sea X un espacio. Una componente de X es un subconjunto maximal conexo de X.

Si $p \in X$, entonces C_p, se define por

$$C_p = \bigcup \{A \subset X : p \in A \; y \; A \; es \; conexo\},$$

es una componente de X que es la componente de p en X.
Dados los puntos x e y de un espacio X, se escribe $x \sim y$ si X es conexo entre los conjuntos $\{x\}$ e $\{y\}$; es evidente que $\sim$ es una relación de equivalencia y a las clases de equivalencia se les denomina cuasicomponentes; así a la clase del elemento x se le nota con $Q(x)$ y se le llama cuasicomponente de x.

Definición 1.4 [Espacio Compacto (Ver [7])]**.** Un subconjunto M de un espacio X es *compacto* si todo recubrimiento abierto de M por abiertos de X, tiene un subrecubrimiento finito.

Definición 1.5 [Espacio Localmente Conexo (Ver [11])]**.** Un espacio es *Localmente Conexo* si para cada punto p, toda vecindad abierta G de p contiene una vecindad conexa de p.

Para mayor brevedad se usará la abreviación *lc* al hacer referencia a espacios *localmente conexos*.
La siguiente propiedad lleva a una sencilla caracterización de los espacios conexos.

Definición 1.6 [Propiedad $\mathcal{S}$ (ver[12])]. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto no vacío Y de X tiene la propiedad $\mathcal{S}$ cuando para cada $\epsilon > 0$, existe una colección finita $A_1, \ldots, A_n$ de subconjuntos conexos de Y tales que $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $diam(A_i) < \epsilon$ para $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 1.7. *(ver[12]) Si un espacio X tiene la propiedad $\mathcal{S}$, entonces X es localmente conexo*

Demostración. Sea $p \in X$ y $\epsilon > 0$. Como X tiene la propiedad S, hay una colección finita de conjuntos $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ de X conexos que satisfacen la definición 1.6; se define $G = \bigcup\{A_i : p \in \overline{A_i}\}$. La unión finita de conjuntos conexos, no disjuntos es conexa, por tanto G es conexo, como $p \notin \overline{X \setminus G}$, G es una vecindad de p, se ha probado que X es *lc*. □

Para la siguiente definición es conveniente recordar que dado un espacio X, un camino desde a a b es una función continua $\gamma : [0, 1] \to X$ con $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$.

Definición 1.8 [Espacio Arcoconexo]. Un espacio X es *Arcoconexo* si todo par de elementos $a, b \in X$ existe un camino γ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$.

Definición 1.9 [Curva Cerrada Simple (ver [6])]. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada α es cerrada simple siempre que $\alpha(a) = \alpha(b)$ y que $t_1, t_2 \in [a, b)$, $t_1 \neq t_2$ implique $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.

La siguiente curva tiene una forma sencilla, gráfica (1.1), pero posee las características precisas para este trabajo. El *triodo* es la unión de tres arcos ab, ac, ad que se sólo intersecan en el punto a.

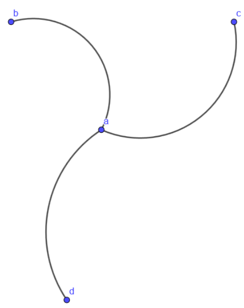


Figura 1.1: *Triodo*

En el presente trabajo se usan dos espacios que se presentan a continuación. El primero es el *Peine del Topólogo* y se construye como sigue, notando por $\overline{pq}$ al segmento de recta con los extremos p y q.
Sea $a = (0, 0)$, $a_n = (1/n, 1/n)$, $b_n = (1/n, 0)$, en el plano. Se define,

$$W_R = \overline{ab_1} \cup \bigcup\{\overline{a_n b_n} : n \in \mathbb{N}\} \;\text{ y }\; W = \overline{ca} \cup W_R.$$

Su representación gráfica se exhibe en la figura 1.2.

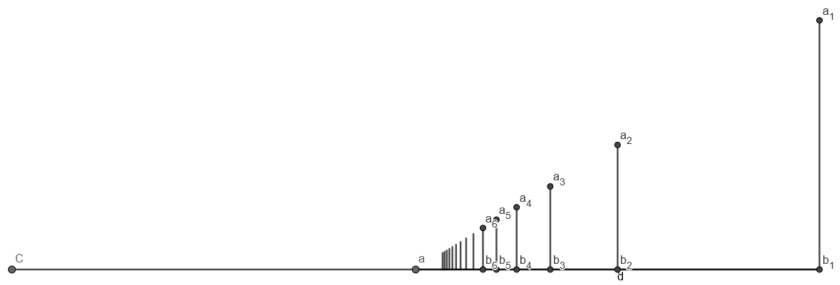


Figura 1.2: *Peine del Topólogo*, W

El otro espacio se conoce como el *Abanico Localmente Conexo* F_ω, el cual es la unión contable de segmentos de recta que tienen un extremo común y su longitud tiende a cero. Así que se puede escribir $F_\omega = \bigcup\{\overline{ve_k} : k \in \mathbb{N}\}$, donde v es el vértice y e_k el punto final de cada segmento de recta. La representación gráfica del conjunto se da a continuación.

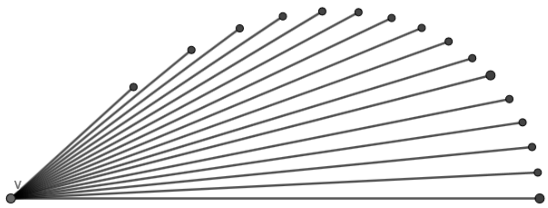


Figura 1.3: *Abanico localmente conexo*, F_ω

Definición 1.10 [Orden de un Punto (ver [10])]**.** Sea *n* un número cardinal, el espacio X se dice que es de Orden menor o igual que *n* en el punto p y se escribe

$$Ord(p; X) \leqslant n,$$

si para cada $\epsilon > 0$ hay un conjunto abierto *G* tal que

$$p \in G,\ diam(G) < \epsilon \text{ y } \#Fr(G) \leqslant n.$$

Para el siguiente teorema se aclara que X es de $orden$ menor o igual que n entre dos conjuntos A y B siempre que exista un abierto G tal que $A \subset G$, $\overline{G} \cap B = \emptyset$ y $\#Fr(G) \leqslant n$. Se denota $Ord(A, B; X) \leqslant n$.

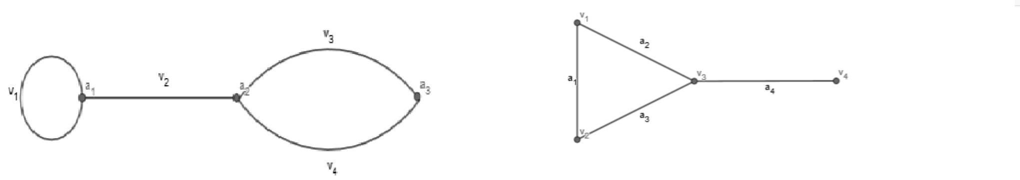
Teorema 1.11. *(ver [10]) $Ord(p; X) \leqslant n$ si y solo si todo conjunto cerrado F tal que $p \in X \setminus F$ satisface que $Ord(p, F; X) \leqslant n$.*

Demostración. Supóngase que $Ord(p; X) \leqslant n$, por definición 1.10 se tiene que para cada $\epsilon > 0$ existe un abierto G tal que $p \in G$, $diam(G) < \epsilon$ y $\#Fr(G) \leqslant n$. Entonces todo cerrado $F \subset X \setminus \overline{G}$ cumple $p \in X \setminus F$, $\overline{G} \cap F = \emptyset$ por tanto $Ord(p, F; X) \leqslant n$.
Por otro lado, se asume que todo conjunto cerrado F con $p \in X \setminus F$ satisface que $Ord(p, F; X) \leqslant n$. Sea $\epsilon > 0$ y se define $F = \{x \in X : d(x - p) \geqslant \epsilon\}$.
Como $Ord(p, F; X) \leqslant n$, entonces existe un abierto G tal que $p \in G$, $\overline{G} \cap F = \emptyset$ y $\#Fr(G) \leqslant n$, por tanto $Ord(p; X) \leqslant n$. $\square$

Un *grafo* es una terna $G = \langle V, A, f \rangle$, donde V es el conjunto de *vértices* de G, A el conjunto de *aristas* de G y f es la *función de incidencia* de G; la función f está definida con dominio el conjunto de aristas A y codominio la colección $\mathcal{P}_2(V)$ constituido por los subconjuntos de V con uno o dos elementos, es decir,

$$\begin{aligned} f : A &\to P_2(V) \\ a &\to f(a), \end{aligned}$$

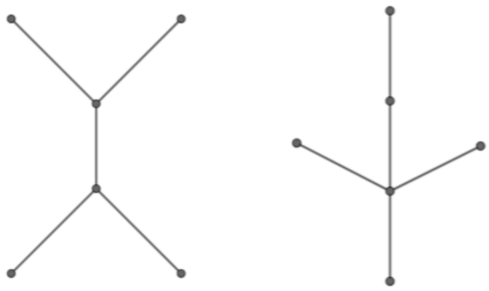
donde $f(a) = \{u, v\}$ o $f(a) = \{w\}$ si una arista $a \in A$ es tal que $\#f(a) = 1$, se dice que a es un *lazo*. Si a y b son aristas tales que $f(a) = f(b)$ se dice que a y b son *aristas paralelas*. Se tiene un grafo simple si no hay lazos ni aristas paralelas.



(a) (b)

Figura 1.4: Grafos

Dado un grafo G, un *camino* en G es una secuencia de vértices y aristas $v_1a_1v_2a_2v_3a_3 \ldots a_{n-1}v_{n-1}a_nv_n$ tales que $f(a_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$. Un camino es simple si todos sus vértices son distintos; un camino es cerrado si su vértice inicial es también el vértice final. Un *árbol* es un grafo simple que no posee caminos cerrados y simples.



(a) (b)

Figura 1.5: Ejemplos de Árbol

CAPÍTULO 2 Continuo

En el presente capítulo se da la definición de continuo, se presentan dos de los ejemplos más conocidos de este espacio y se desarrollan algunos teoremas que relacionan los continuos y sus subcontinuos con la *conexidad local* y la *arcoconexidad*.

Definición 2.1. (ver[12]) Un *Continuo* es un espacio no vacío, compacto y conexo. Un *Subcontinuo* es un subconjunto de un espacio, el cual es un continuo.

Cuando se haga referencia a un *Continuo no Degenerado* quiere decir un continuo que contiene más de un punto. Un primer ejemplo de continuo es un arco, puesto que, en sí mismo el intervalo $[0, 1]$ es un continuo, se llega a que un arco es un continuo. Otros ejemplos son:

Ejemplo 2.2 [Continuo $\sin(1/x)$]**.** se considera el conjunto

$$D = \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leqslant 1\},$$

su adherencia es $\overline{D} = D \cup \{(0, y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$,
a $\overline{D}$ se le llama continuo $\sin(1/x)$.

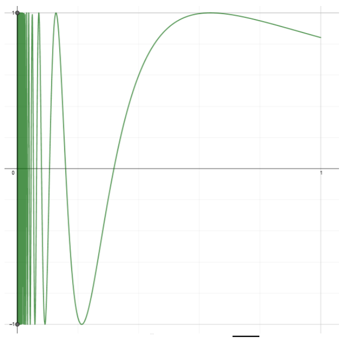


Figura 2.1: $\overline{D}$

Teorema 2.3. *Todo continuo (no degenerado) X lc es arcoconexo.*

La prueba de este teorema aparece en [12] p.130.

Teorema 2.4. *(ver[12]) Todo subconjunto abierto de un continuo lc X es localmente arcoconexo.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de X, para la demostración supongase que $U \neq \emptyset$. Sean $p \in U$ y $\epsilon > 0$.
Como X es compacto y *lc*, el teorema 8.4 en [12] p.120 afirma que X tiene la *Propiedad S* Def. 1.6, es decir, existe una colección finita de conexos $\{V_i\}_{i=1}^n$ tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^n V_i.$$

Dado esto, del teorema $8{,}9$ en [12] se tiene que los conjuntos que cubren a X poseen también la *Propiedad S* y se pueden tomar abiertos o cerrados.
Entonces existe un conjunto abierto conexo V de X tal que $p \in V$, $\overline{V} \subset U$, V tiene la *Propiedad S* y $diam(V) < \epsilon$.
Además $\overline{V}$ tiene la *Propiedad S*, puesto que existe una colección $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ que cubre a V, entonces

$$\overline{V} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} v_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{v}_i.$$

Así, con lo anterior el teorema (1.7) afirma que $\overline{V}$ es *lc*. Como $\overline{V}$ es cerrado y conexo se tiene que es un continuo.
Entonces por el teorema 2.3, $\overline{V}$ es arco-conexo, dado que $\overline{V}$ es una vecindad de p contenida en U, se ha probado U es localmente arco-conexo. □

Teorema 2.5. *(ver[12]) Cualquier subconjunto abierto conexo de un continuo lc X, es arcoconexo.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto conexo de X, y supóngase que $U \neq \emptyset$. se fija $p \in U$ y se define E como sigue

$$E = \{p\} \cup \{x \in U : \text{ existe un arco en } U \text{ de } p \text{ a } x\},$$

como $p \in E$ $E \neq \emptyset$. Puesto que U es abierto en X, U es localmente arco-conexo, por el teorema anterior 2.4. Así, se puede ver que U y $U \setminus E$ son cada uno abiertos en U.
En efecto, si E no fuera abierto entonces $E \neq int(E)$, es decir, existe un punto $x \in E$ tal que ninguna vecindad de x es subconjunto de E, esto es, hay por lo menos un punto de dicha vecindad que no esta en E, pero esto contradice el hecho que U es arco-conexo.
Así mismo, $U \setminus E$ es abierto, ya que al tomar un punto arbitrario $u \in U \setminus E$, existe una vecindad V de u tal que $V \subset U$, tomando $V \setminus E$, se tiene que $V \setminus E$ es una vecindad de u en $U \setminus E$ que cumple la condición $V \setminus E \subset U \setminus E$.
Por tanto, como U es conexo y $E \neq \emptyset$, se tiene que $U = E$. □

Definición 2.6 [Límite de una Sucesión de Conjuntos (ver [12])]**.** Sean (X, τ) un espacio topológico, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X y $A \subset X$. $A = \lim A_i$ significa,

$$\liminf A_i = A = \limsup A_i.$$

Donde
$\liminf A_i = \{x \in X : \forall U \in \tau \text{ tal que } x \in U, U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para todo } i, \text{ salvo caso finito}\}$,
$\limsup A_i = \{x \in X : \forall U \in \tau \text{ tal que } x \in U, U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para infinitos } i\}$.

Definición 2.7 [Continuo de Convergencia (ver [12])]**.** Sea X un espacio. Un subcontinuo A no degenerado, que es un subcontinuo con más de un punto, es un continuo de convergencia de X, siempre que exista una sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos A_i de X tales que

$$A = \lim A_i \quad y \quad A \cap A_i = \emptyset \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

El conjunto $A = \{(0, y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$, es un continuo de convergencia del continuo definido en 2.2. En efecto, se puede ver que la sucesión $\{A_i\}_{i=2}^{\infty}$ con $A_i := \{(x, sin(\frac{1}{x})) : \frac{1}{i} < x \leqslant 1\}$ cumple con las condiciones de la definición.

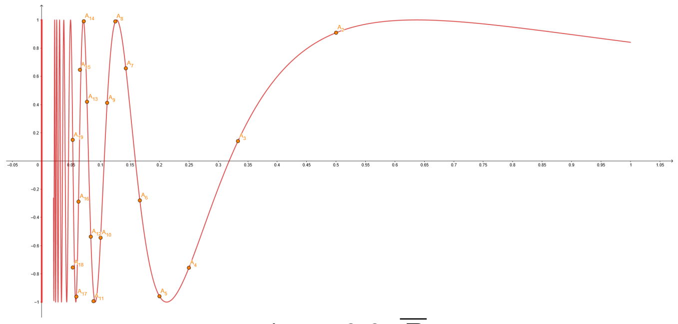


Figura 2.2: $\overline{D}$

Retomando el concepto de conjunto que separa a un espacio presentado en la nota después de la definición 1.2 se puede ver, que L no separe a $\{x\}$ y $\{y\}$ en X quiere decir que $X \setminus L$ es conexo entre $\{x\}$ y $\{y\}$.
Como se dijo en el capítulo anterior la relación definida respecto a la *conexidad entre conjuntos* es una relación de equivalencia, las clases de esta relación se denominan cuasicomponentes. Así que se puede decir que los elementos de estas cuasicomponentes, tomados de a dos, no pueden ser separados por ningún sobconjunto del espacio. Este último hecho se usa en la demostración del siguiente lema.

Proposición 2.8. (ver [9]) Si K es un continuo de convergencia en un espacio X y $x, y \in K$ entonces ningún subconjunto L de K separa a x y y en X.

Demostración. Se debe mostrar que $Q_{X\setminus L}(x) = Q_{X\setminus L}(y)$, es decir, dados dos puntos $x, y \in K$, estos pertenecen a la misma casicomponente respecto a $X \setminus L$, donde L es cualquier subconjunto de K.
Tomando la sucesión de subcontinuos $\{A_i\}_{i\geqslant 1}$ en X tal que $A_i \to K$ y $A_i \cap K = \emptyset$, entonces $A_i \subset X \setminus L$. Sea U abierto y cerrado en $X \setminus L$ y $x \in U$ entonces, existe un abierto V tal que $U \subset V$, es decir $(X \setminus L) \cap V = U$.
Por tanto existe un $N \geqslant 0$ tal que si $i \geqslant N$ entonces $A_i \cap V \neq \emptyset$, pero como A_i es un subcontinuo, es conexo por definición, así que $A_i \subset U$ ya que los únicos abiertos y cerrados contenidos en A_i son el mismo y vacío. Es decir, no se puede tener $U \subset A_i$.
Ahora, al tener la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} K \setminus L &= K \cap L^c \\ &= K \cap (X \setminus L) \\ &= \lim A_i \cap (X \setminus L). \end{aligned}$$

Como se dijo anteriormente, $A_i \subset U$ si $i \geqslant N$ para algún $N \in \mathbb{N}$ y $U \subset (X \setminus L)$, entonces $\lim A_n \cap (X \setminus L) \subset U = \overline{U}$, por ser U cerrado en $X \setminus L$, entonces $y \in U$, es decir $y \in Q_{X\setminus L}(x)$, por tanto se tiene la igualdad deseada. □

El contrareciproco de este teorema afirma que si cada par de puntos de un espacio se pueden separar por un tercero entonces el espacio no contiene continuos de convergencia.

Teorema 2.9. *(ver[10],[12]) Si X es un continuo y*

$$\mathcal{N} := \{x \in X : X \text{ no es lc en } x\}.$$

Entonces, todo punto $p \in \mathcal{N}$ pertenece a un continuo de convergencia $K \neq \{p\}$ tal que $K \subset \mathcal{N}$.

Demostración. Sea p un punto arbitrario de $\mathcal{N}$, como X no es *lc* en p, existe una vecindad abierta E de p tal que, si C es la componente de p en E entonces $p \notin int(C)$.
Como $int(C) = E \setminus \overline{E \setminus C}$, $p \in \overline{E \setminus C}$. Sea

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n, \tag{2.1}$$

$$p_n \in E \setminus C, \quad \text{para cada } n. \tag{2.2}$$

Sea C_n la componente de p_n en E, para cada $n = 1, 2, \ldots$.
Ahora,

$$C \cap C_n = \emptyset. \tag{2.3}$$

En efecto, si $C \cap C_n \neq \emptyset$ quiere decir que C y C_n tienen por lo menos un punto en común, así que por teorema (1) en [10] $C \cup C_n$ es un continuo, es decir subcontinuo de E. Así, $C \cup C_n$ es un conexo tal que $p, p_n \in (C \cup C_n)$, pero esto contradice el hecho de que C es la componente de p en E. Entonces se tiene,

$$C \cup C_n \subseteq C \quad o \quad C \cup C_n \subseteq C_n,$$

si $C \cup C_n \subseteq C$, entonces $C \subseteq C_n$, lo que contradice nuevamente que C es la componente de p en E. Si $C \cup C_n \subset C$ entonces $p_n \in C$ contradiciendo (2.2).
Sea F una vecindad cerrada de p tal que,

$$F \subset int(E). \tag{2.4}$$

Puesto que p_n tiende a p (2.1), se puede suponer que $p_n \in F$ para $n = 1, 2, \ldots$.
Sea D_n la componente de cada p_n en F. Como $F \subset E$, se tiene que

$$D_n \subset C_n. \tag{2.5}$$

Por el corolario $4{,}18$ en [12], toda sucesión de subcontinuos de un espacio tiene una subsucesión convergente a un subcontinuo del mismo espacio, así de $\{D_n\}$ se toma una subsucesión D_{n_m} y se define,

$$K = \lim_{n\to\infty} D_{n_m}. \tag{2.6}$$

Puesto que $p_{n_m} \in D_{n_m}$ para cada m, p_n tiende p por (2.1) y se definió K como el límite de la subsucesión (2.6) se tiene que

$$p \in K \subset F, \tag{2.7}$$

y como $F \subset int(E)$ (2.4) entonces $K \subset E$.
Ya $p \in K$, C es la componente de p en E y K es conexo, entonces

$$K \subset C. \tag{2.8}$$

Ahora como se tiene $K \subset C$(2.8), $D_n \subset C_n$(2.5) y $C \cap C_n = \emptyset$ (2.3) se puede concluir que

$$K \cap D_{n_m} = \emptyset \quad \text{para cada } m = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

Ahora se verá que K es un continuo no degenerado, esto es $K \neq \{p\}$, en efecto puesto que F es un subconjunto propio de X y D_n la componente de cada p_n en F, del teorema (2) en ([10], p.172) se tiene que

$$D_n \cap Fr(F) \neq \emptyset, \text{ y así } D_{n_m} \cap Fr(F) \neq \emptyset \text{ para cada } m = 1, 2 \ldots$$

como se definió K como el límite de la subsucesión (2.6), entonces $K \cap Fr(F) \neq \emptyset$. Así, ya que $p \in K$ y F es una vecindad de p, entonces $K \neq p$
Hasta el momento se tiene que K es no degenerado y es el continuo de convergencia que se estaba buscando.
Por último falta mostrar que $K \subset \mathcal{N}$.
Suponiendo lo contrario, que existe un x tal que $x \in K \setminus \mathcal{N}$. Como $F \subset int(E)$ (2.4) y $p \in K \subset F$ (2.7), entonces E es una vecindad de x.
Ya que $K \subset C$ (2.8), se tiene que C es la componente de x en E. Por suposición $x \notin \mathcal{N}$, es decir, X no es *lc* en x, así, como E es una vecindad de x, existe una vecindad conexa G de x tal que $G \subset E$ y $G \subset C$.
Como $x \in K$, K es el límite de la subsucesión, $D_n \subset C_n$ entonces se obtiene que $x \in \limsup D_n \subset \limsup C_n$. Y como G es vecindad de x existe un subíndice n tal que $G \cap C_n \neq \emptyset$, esto lleva a que $C \cap C_n \neq \emptyset$ contradiciendo (2.3). Finalmente, se tiene que K es un continuo de convergencia, puesto que $K \subset C$, $D_n \subset C_n$ y $C \cap C_n = \emptyset$ implican que $K \cap D_n = \emptyset$. $\square$

En otras palabras, el anterior teorema dice que, dado un continuo y el conjunto de puntos donde el continuo no es *lc*, tomando un punto arbitrario de este conjunto, existe un continuo de convergencia que contiene dicho punto y es subconjunto del conjunto de puntos donde el continuo no es *lc*.
Igual que en la proposición 2.8, el resultado que se utiliza más adelante es el contrarecíproco.

Definición 2.10 [σ-Conexidad (ver [12])]. Un espacio topológico (X, τ) es *σ-conexo* siempre que X no sea la unión de mas de uno y a lo mas una cantidad infinita contable de subconjuntos cerrados, no-vacíos, mutuamente disjuntos.

En otras palabras, un espacio es *σ-conexo* si no se puede descomponer en una familia infinita contable de conjuntos mutuamente separados (ver [8]).

Definición 2.11 [Continuo *lch* (ver [12])]. Un Continuo X es *Localmente Conexo hereditariamente (lch)*, cuando todo subcontinuo de X sea localmente conexo.

Teorema 2.12. *(ver [12]) Un continuo X es lch si y solamente si, X no contiene continuos de convergencia*

Demostración. Primero se asume que X no contiene continuos de convergencia y que existe un subcontinuo Z de X que no es *lc*. Sea

$$\mathcal{N} = \{z \in Z : Z \text{ no es } lc \text{ en z}\},$$

entonces, si $p \in \mathcal{N}$ por teorema 2.9 existe un continuo de convergencia $A \neq \{p\}$ que contiene a p, tal que $A \subset \mathcal{N}$, esto es $A \subset X$, lo que contradice la hipótesis. Por tanto X es *lch*.

Por otro lado, para abordar la otra implicación se supone que X contiene un continuo de convergencia A, es decir, A es un subcontinuo no degenerado de X y hay una sucesión $\{A_i\}$ de subcontinuos A_i de X que cumplen

$$A = \lim A_i, \tag{2.10}$$
$$A \cap A_i = \emptyset,\ \forall i, \tag{2.11}$$
$$A_i \cap A_j = \emptyset\ para\ i \neq j. \tag{2.12}$$

Sean $p, q \in A$ tales que $p \neq q$. Se quiere llegar a que X no es *lch*, para este fin se puede suponer que X es *lc*. Entonces, hay un conjunto U, abierto y conexo en X tal que $p \in U$ y $q \notin \overline{U}$. En (2.10) se define A como el límite de la sucesión A_i, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \cap U \neq \emptyset$ para todo $i \geqslant N$. Ahora se define

$$Y = A \cup \overline{U} \cup \left[\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i\right],$$

Y es un continuo el cual no es *lc*. En efecto, si Se supone que Y es *lc*, entonces como $q \in Y \setminus \overline{U}$ existe un subconjunto conexo abierto V de Y tal que $q \in V$ y $\overline{V} \cap \overline{U} = \emptyset$, de esto se tiene

$$\overline{V} \cap Y = \overline{V} \cap \left(A \cup \overline{U} \cup \left[\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i\right]\right),$$

Entonces

$$\overline{V} = (\overline{V} \cap A) \cup \left[\bigcup_{i=N}^{\infty} (\overline{V} \cap A_i)\right]. \tag{2.13}$$

Ya que $q \in (V \cap A)$, $V \cap A \neq \emptyset$. Como V es abierto en Y del límite en (2.10) se puede ver que $V \cap A_i \neq \emptyset$ para todo menos un número finito de $i \geqslant N$.

Así, usando que en (2.11) se fijó que A no tiene elementos en común con los subconjuntos de la sucesión, en (2.12) los subconjuntos de la sucesión son disjuntos dos a dos y en (2.13) se dejó $\overline{V}$ en términos de los subconjuntos que componen a Y se puede ver que $\overline{V}$ no es σ-*conexo*, definición 2.10. Sin embargo, ya que V es no vacío y conexo, $\overline{V}$ es un continuo y por tanto se contradice el hecho que todo continuo es $\sigma-$conexo, expuesto en ([12] teorema 5.16, p 83).

Entonces Y no es *lc*, por tanto X no es *lch*. □

CAPÍTULO 3 Dendritas

En este capítulo se aborda el concepto principal de este trabajo, junto con algunos ejemplos y propiedades que permiten obtener una idea del mismo. De la definición de continuo se desprende la siguiente definición de Dendrita.

Definición 3.1. (ver [10]) Un Continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples recibe el nombre de *Dendrita*.

El Peine W y el abanico localmente conexo F_ω, son ejemplos muy conocidos de dendritas. El más sencillo que se puede encontrar es el triodo, también presentado en la figura 1.1

La caracterización que se presenta a continuación, además de ser otra forma de ver las dendritas como continuo, es útil para mostrar una de las propiedades que se presenta más adelante.

Teorema 3.2. *(ver [12]) Un continuo X es una dendrita sii cualquier par de puntos de X son separados en X por un tercer punto de X.*

Demostración. Se supone que X es una dendrita. Sean $p, q \in X$ con $p \neq q$. Como X es un continuo lc, por teorema 2.3 existe un arco A en X de p a q.
Sean $r \in A - \{p, q\}$ y U la componente de p en $X \setminus \{r\}$. Supóngase que $q \in U$. entonces como U es abierto en X, existe un arco B en U de p a q por teorema 2.5. $A \cap B$ es no-conexo. Por tanto se tiene que $A \cup B$ contiene una curva cerrada simple lo que contradice que X es una dendrita, entonces $q \notin U$. Por tanto, ya que U es abierto y cerrado en $X \setminus r$, r separa a p y q en X.
Por otro lado, se supone que cualquier par de puntos de X son separados por un tercer punto de X, entonces del contrarecíproco del lema 2.8 se tiene que X no contiene continuos de convergencia. Así, del contrareecíproco del teorema 2.9 se tiene que X es lc. Además, si X tuviera una curva cerrada simple S ningún par de puntos de S podrían ser separados en X por un tercer punto de X.
Por tanto X es una dendrita. □

Las dendritas tienen varias propiedades, entre ellas se tienen la siguientes,

Teorema 3.3. *(ver [12]) Toda dendrita es lch.*

Demostración. Sea X una dendrita, entonces del teorema 3.2 se tiene que, todo par de puntos de X pueden ser separados en X por un tercer punto de X. Como se puede dar esta separación para cada par de elementos de X, entonces usando el teorema 2.8 se tiene que X no contiene *continuos de convergencia*. Esto último lleva a una de las implicaciones del teorema 2.12, de donde se sigue que X es *lch*. □

Teorema 3.4. *(ver [12]) Todo subcontinuo de una dendrita es una dendrita.*

Demostración. Sea Y un subcontinuo arbitrario de una dendrita X; por definición 2.1 Y es un continuo, de la definición de dendrita, X no tiene curvas cerradas simples, y en consecuencia Y hereda esta propiedad; el teorema 3.3 afirma que todo subcontinuo de una dendrita es *lch*, así que Y es *lc*, es decir Yes una dendrita. □

El orden de un punto x en una dendrita X es el mismo que se expone en la definición 1.10, también se puede ver como el número de arcos que se intersecan unicamente en x (ver [4], p.229). En particular para las dendritas se tiene que el número de componentes es igual al orden del punto en X, esto es lo que se expone en el siguiente resultado.

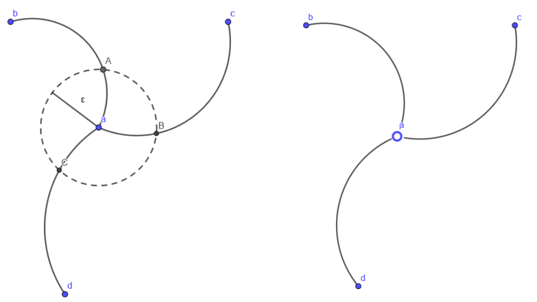
Teorema 3.5. *(ver [10]) Sean X una dendrita y p un punto arbitrario de X, si el número de componentes de $X \setminus \{p\}$ es finito, este es igual a $Ord(p, X)$.*

Demostración. Sea n el número de componentes de $X \setminus \{p\}$. Se muestra que $Ord(p, X)$ menor o igual que n, es decir, por el teorema 1.11 se debe cumplir que todo conjunto cerrado F, tal que $p \in X \setminus F$, existe un conjunto que consiste de n puntos el cual separa a X entre p y F. Sea $X \setminus \{p\} = R_1 \cup \cdots \cup R_n$ la unión de n regiones; el conjunto $F \cap R_i$ es cerrado, puesto que,

$$\overline{F \cap R_i} \subset (F \cap (R_i \cup p)) = F \cap R_i$$

por tanto, existe un continuo K_i tal que $F \cap R_i \subset K_i$. Así, existe un conjunto de n puntos, el cual separa X entre $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ y p; por consiguiente, separa a X entre F y p. □

En la siguiente gráfica T denota el triodo.



(a) Orden de a en T (b) $T \setminus \{a\}$

Figura 3.1: Triodo

Continuando con la discusión del orden de un punto $x \in X$; si el orden es infinito, entonces es contable, y el diámetro de las componentes de $X \setminus \{x\}$ tiende a cero (ver [14], apartado (2.6), p.92).
Los puntos de orden uno son *puntos finales*, al conjunto de puntos finales en una dendrita X se denota por $E(X)$. Si los puntos son de orden 3 o más, son *Puntos de Ramificación*. Se nota con R_n al conjunto de puntos de orden n, para cualquier $n \in \{1, 2, \ldots, \omega\}$ y si $R(X) = \{R_n : n \in \{3, 4, \ldots, \omega\}\}$ se tiene que $R(x)$ es el conjunto de puntos de ramificación.

Por otro lado, se tiene que ([10], teorema 5, p.293) $E(X) \cup R_2$ esta contenido en los arcos de X y el conjunto de puntos de X es $E(X) \cup R_2 \cup R(X)$.

Dados dos puntos x e y en una dendrita X, xy denota el arco que une a x e y. Fijando un punto $p \in X$, se escribe $x \leqslant_p y$ si $x \in py$, y se escribe $x <_p y$ y $x \neq y$. De forma natural, se obtiene $\leqslant_p$ que es un orden parcial cerrado[1] en X, y para cada $A \subset X$ existe un único elemento $a \in X$ tal que para todo $x \in A$ se tiene $a \leqslant_p x$ y a es el más grande elemento con esta propiedad. Entonces se escribe $a = inf_{\leqslant_p} A$.
En la definición 9.1 de ([12]) se expone que un grafo también es un continuo que se puede escribir como la unión de un número finito de arcos, donde cada par de arcos son disjuntos o se intersecan en uno o los dos puntos finales. De lo anterior y teniendo presente lo escrito sobre árboles en el capítulo uno se tiene que, un *Árbol* también se puede ver como una dendrita que no contiene puntos de orden ω con $R(x)$ finito.
Se presenta ahora una caracterización de las dendritas respecto a árboles. En este teorema se mencionan dos conceptos que no se han escrito anteriormente.

Definición 3.6 [Encaje ([10])]**.** Se dice que un espacio X contiene un *Encaje* (o *Copia*) de un espacio Z si existe un subespacio Y de X y un homeomorfismo $f : Z \to Y$.

Definición 3.7 [Continuo Minimal]**.** Un continuo X es *minimal* si contiene mas de un punto y es homeomorfo a todos sus subcontinuos.

El continuo minimal que se mensiona en el siguiente teorema se conoce usualmente como continuo *hereditariamente equivalente*; en este teorema se mencionan los espacios F_ω (el abanico) y W_R (el peine del topologo); note que F_ω tiene un punto de ramificación que además tiene orden infinito y que W_R tiene un conjunto infinito contable de puntos de ramificación a saber, los puntos con abscisa $\frac{1}{n}$ con $n > 2$.

Teorema 3.8. *(ver [4]) Una dendrita X es un árbol si y sólo si X no contiene una copia de F_ω ni de W_R. Entonces $Ord(x, X)$ es finito para todo $x \in X$*

Demostración. Se supone que la dendrita X es un árbol, es decir que el conjunto $E(X)$ es finito. En el teorema 3.4 se mostró que todo subcontinuo de una dendrita es una dendrita, además cada conjunto de puntos finales relacionado a tales subcontinuos es finito. Esto lleva a que todo subcontinuo de X es un árbol, entonces X no contiene una copia de F_ω ni de W_R.
Ahora se asume que X no contiene una copia de F_ω o de W_R, entonces para cualquier $x \in X$ se tiene $Ord(x, X)$ es finito. Se supone que $E(X)$ es infinito, es decir la dendrita X no es un árbol y se toma una sucesión no constante convergente $\{x_n\}$ de puntos finales de X. Tomando $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ y como $Ord(x, X)$ es finito, por el teorema 3.5 se puede suponer que todos los puntos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ están en una componente de $X - \{x\}$. Se define $p_n = \inf_{\leqslant_x}\{x_1, \dots, x_n\}$, esto es cada $p_n \in X$ es único y el más grande elemento que está en todos los arcos xx_n. Así, $\{p_n\}$ es una sucesión decreciente (respecto al orden $\leqslant_x$) de puntos. Como $\{p_n\} \in xx_n$ y los arcos xx_n convergen a $\{x\}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} p_n = x$, tomando una subsucesión $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{p_n\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfaga $p_{n_i} \neq p_{n_j}$ para $i \neq j$, y sea Y el continuo minimal que contiene los

[1] Un orden parcial cerrado, en este contexto, es un orden cuyo grafo es un conjunto cerrado en el espacio $X \times X$ con la topología producto.

puntos x_{n_k} para $k \in \{1, 2, \dots\}$, entonces hay un homeomorfismo $h : Y \to W_R$ tal que $h(x_{n_k}) = a_k$ y $h(p_{n_k}) = b_k$, por tanto X contiene una copia de W_R contradiciendo el supuesto. $\square$

El siguiente ejemplo es una de las dendritas más conocidos, la dendrita de *Gehman*, su forma y característica representa claramente las dendrtitas con puntos de ramificación de orden finito, además de otras propiedades que se exponen en [2]

Ejemplo 3.9. Primero se presenta el *Conjunto de Cantor* denotado por C (ver [12]), el cual es el subespacio de $[0, 1]$,

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$$

donde $C_1 = [0, 1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, suponiendo que se ha definido inductivamente C_i, C_{i+1} se define quitando de C_i el intervalo abierto correspondiente al tercio central de cada componente C_i.
En el siguiente gráfico se muestra los primeros cuatro pasos, donde $C_0 = [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
C_1 &= [0,1] \setminus \Big(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big), \\
C_2 &= \Big(C_1 \setminus \Big(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\Big)\Big) \setminus \Big(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\Big), \\
C_3 &= \Big(\Big(\Big(C_2 \setminus \Big(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\Big)\Big) \setminus \Big(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\Big)\Big) \setminus \Big(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\Big)\Big) \setminus \Big(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\Big), \\
C_4 &= \Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(C_3 \setminus \Big(\frac{1}{81}, \frac{2}{81}\Big)\Big) \setminus \Big(\frac{7}{81}, \frac{8}{81}\Big)\Big) \setminus \Big(\frac{19}{81}, \frac{20}{81}\Big)\Big) \setminus \Big(\frac{25}{81}, \frac{26}{81}\Big)\Big) \\
&\quad \setminus \Big(\frac{55}{81}, \frac{56}{81}\Big)\Big) \setminus \Big(\frac{61}{81}, \frac{62}{81}\Big)\Big) \setminus \Big(\frac{79}{81}, \frac{80}{81}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Figura 3.2: Conjunto de Cantor

A partir del conjunto de cantor C, la dendrita de Gehman G, es la clausura de la unión contable de segmentos de recta con pendiente $+1$ y -1, cada una de las cuales une un punto arriba del eje x con un punto apropiado de C.

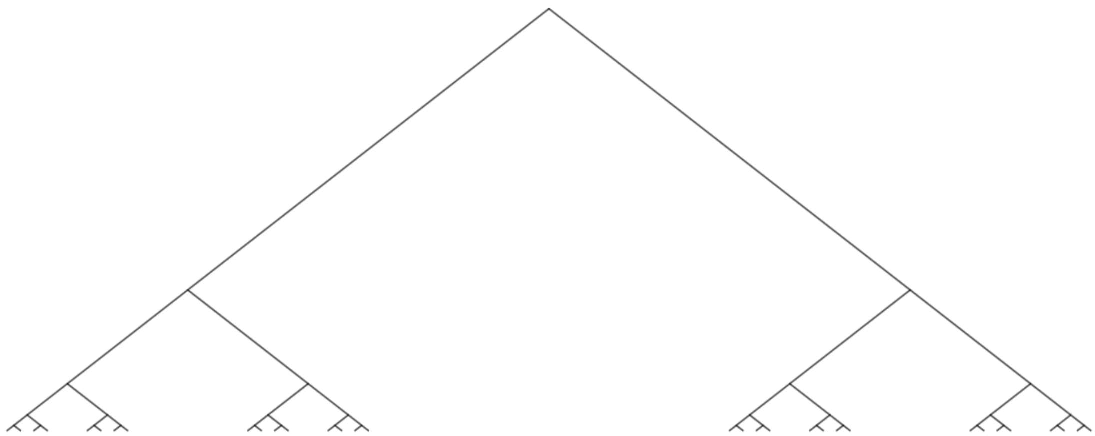


Figura 3.3: Dendrita de Gehman

En la figura 3.3 se toman inicialmente las rectas $y = x$ y $y = -x + 1$ las cuales tiene punto de corte en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y puntos finales en los extremos de $C_0 = [0, 1]$.
Para el segundo paso se determinan las rectas con pendiente -1 y 1, intersecan al eje x en $\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \in C_1$ respectivamente e intersecan a $y = x$.
Igualmente en el paso 3, se determinan las rectas de pendiente -1 que pasan por el extremo derecho de cada intervalo de C_2, a saber $(\frac{1}{9}, 0)$; $(\frac{7}{9}, 0)$ e intersecan las rectas ya definidas. Así mismo se hace con las rectas de pendiente 1 que pasan por el extremo izquierdo de los intervalos de C_2, a saber $(\frac{2}{9}, 0)$; $(\frac{8}{9}, 0)$. Se sigue de la misma manera con cada C_i.
Claramente las abscisas de los puntos finales están en el conjunto de Cantor C, las ordenadas en el vértice son de la forma $\frac{1}{2\cdot 3^i}$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Si se toma, de forma similar como se expone en [7],

B_0 como el conjunto de los intervalos de recta $\overline{(0,0)(1,0)}$; $\overline{(0,0)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$; $\overline{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(1,0)}$.

B_1 como el conjunto de los intervalos de recta $\overline{(0,0)\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)}$; $\overline{\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{3},0\right)}$; $\overline{\left(\frac{1}{3},0\right),(0,0)}$; $\overline{\left(\frac{2}{3},0\right)\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)}$; $\overline{\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right),(1,0)}$; $\overline{(1,0)\left(\frac{2}{3},0\right)}$.

B_2 como el conjunto de los intervalos de recta $\overline{(0,0)\left(\frac{1}{18},\frac{1}{18}\right)}$; $\overline{\left(\frac{1}{18},\frac{1}{18}\right),\left(\frac{1}{9},0\right)}$; $\overline{\left(\frac{1}{9},0\right)(0,0)}$; $\overline{\left(\frac{2}{9},0\right),\left(\frac{5}{18},\frac{1}{18}\right)}$; $\overline{\left(\frac{5}{18},\frac{1}{18}\right)\left(\frac{1}{3},0\right)}$; $\overline{\left(\frac{1}{3},0\right)\left(\frac{2}{9},0\right)}$; $\overline{\left(\frac{2}{3},0\right)\left(\frac{13}{18},\frac{1}{18}\right)}$; $\overline{\left(\frac{13}{18},\frac{1}{18}\right)\left(\frac{7}{9},0\right)}$; $\overline{\left(\frac{7}{9},0\right)\left(\frac{2}{3},0\right)}$; $\overline{\left(\frac{8}{9},0\right)\left(\frac{17}{18}\frac{1}{18}\right)}$; $\overline{\left(\frac{17}{18}\frac{1}{18}\right)(1,0)}$; $\overline{(1,0)\left(\frac{8}{9},0\right)}$.

Entonces en general para cada paso, con los elementos de cada B_i se formarán 2^i *triángulos*, cada uno de los cuales tiene base en el eje x de longitud $\frac{1}{3^i}$. Es claro que en este caso no se trata de una dendrita pues contiene curvas cerradas simples.

3.0.1. Aplicación

En diferentes artículos donde se pueden encontrar estudios sobre *Dendritas* concuerdan en que el interés en el comportamiento dinámico de las funciones sobre dendritas empieza cuando aparecieron como *Conjuntos de Julia*. En [5] se muestra la dependencia del conjunto de Julia de la orbita del punto crítico, al menos para funciones cuadráticas. Cuando el punto crítico es eventualmente periódico pero no periódico el conjunto de Julia es una dendrita, es decir que si x es el punto existe un $m > 0$ para el que el punto comienza a ser periódico de periodo n, $f^{n+i}(x) = f^i(x)$ para todo $i \geqslant m$.
Aquí se va a exponer un resultado el cual se muestra en [1], para esto se debe recordar que dada una dendrita X se denota por $E(X)$ al conjunto de puntos finales de X, un subconjunto A de X es denso en X cuando $\overline{A} = X$. Un conjunto es residual cuando es la intersección contable de conjuntos con interior denso.
Un *Sistema Dinámico* es un par (X, f) que consiste de un espacio métrico compacto X y una función continua $f : X \to X$.
Dado $x \in X$. Si $f : X \to X$ homeomorfismo, la *órbita* de x es

$$Orb(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

La *Orbita Futura* de x es, $Orb^+(x) = \{f^n(x) : n \geqslant 0\}$,
la *Orbita Pasada* de x es, $Orb^-(x) = \{f^n(x) : n \leqslant 0\}$.

Se dice que f es *transitivo* si para cualquier par de conjuntos abiertos no vacíos U, V existe un $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, [5].

Teorema 3.10. *Sea X una dendrita. Si $E(X)$ es denso en X entonces $E(X)$ es residual.*

Demostración. Primero se debe notar que como X no tiene puntos aislados, para cualquier conjunto finito $A \subset X$ el conjunto $E(X) \setminus A$ es denso en X.
Se puede presentar X como la clausura de la unión de una sucesión creciente de árboles $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$, esto es

$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n}.$$

Cada árbol T_n contiene a lo mas finitos puntos de $E(X)$ y así $X \setminus T_n$ contiene a $E(X) \setminus A_n$, donde $A_n = E(T_n) \cap E(X)$ pero A_n es finito y entonces $X \setminus T_n$ es un subconjunto abierto denso de X.
Si $q \in X \setminus E(X)$ entonces $X \setminus \{q\}$ consiste de dos subconjuntos abiertos no vacíos. En particular, existe un n tal que T_n interseca estos dos conjuntos abiertos, así que T_n. Esto implica que,

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus T_n) &= X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \\ &\subset E(X) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \\ &\subset E(X).\end{aligned}$$

es residual, esto finaliza la demostración. □

Corolario 3.11. Sea X una dendrita y suponga que $f : X \to X$ es transitivo. Si $E(X)$ es denso en X entonces $\{x \in E(x) : \overline{Orb^+(x)} = X\}$ es residual en X.

3.1. Conclusiones

En esta aproximación del estudio de las dendritas se pudo apreciar que:

- Después de la presentación en el capítulo 2 de algunos conceptos de la teoría del continuo, se expone que una dendrita es un tipo de continuo el cual es localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.
- Se presenta la propiedad de conexidad local hereditaria, la relación entre componentes conexas y orden de un punto y una caracterización entre dendritas y árboles de la teoría de grafos.

Bibliografía

[1] Gerando Acosta, Rodrigo Hernandez, Issam Naghmouchi, Piotr Oprocha. *Periodic Points and Transitivity on Dendrites*. Ergodyc Theory and Dynamical Systems, 2017,Vol. 37, Pags. 2017-2033.

[2] Daniel Arevalo, Wlodzimierz J. Charatonik, Patricia P. Covarrubias, Likin Simón. *Dendrites with a closed set of end points*. Topology and its Applicatios, 2001,VOL. 115, PAGS. 1-17.

[3] J.J. Charatonik, A.Illanes. *Mappings on Dendrites*. Topology and its Applicatios, 2004,VOL. 144, PAGS. 109-132.

[4] J.J. Charatonik. *On ramification points in the clasical sense*. Fun. Math. 51 (1962)229-252.

[5] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison Wesley, New York, 1989.

[6] Manfredo P. Docarmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[7] Harry Merrill Gehman. *Concerning the Subsets of a Plane Continuous Curve*. Annals od Mathematics, 1925,VOL. 27, PAGS. 29-46.

[8] J. Grispolakis y E. D. Tymchatyn, *σ-connectedness in Hereditarily Locally Connectd Spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.253, pp. 303-315, American Mathematical Society, 1979.

[9] Rodrigo J. Hernández, 2007. *Dendritas* (Tesis de pregrado), Universidad Autónoma de México, Ciudad de México.

[10] K. Kuratowski, *Topology*, 2nd edition. Academic Press, New York and London, 1968.

[11] James M. Munkres, *Topology, A First Course*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1975.

[12] Sam B. Nadler, *Continuum Theory, An Introduction*. Marcel Dekker, Inc.,New York,1992.

[13] J.J. Charatonik,*Unas Palabras Sobre Mi*. Universidad Nacional de México. Matemáticos en México. matemàticos.matem.unam. Recuperado de"http://matematicos.matem.unam.mx/matematicos-a-g/matematicos-c/janusz-j-charatonik/615-algunas-palabras-sobre-mi-por-j-j-charatonik". Consultado en 2018.

[14] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol.28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1942.