ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

Trabajo de Grado

Proyecto Curricular de Matemáticas

Jennyfer Paola Homez Ordoñez

Director: Milton Lesmes

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C.
2018

Primeramente a Dios, a mis padres Ruby y Ever, mi hermana Kelly, mi esposo David y mis abuelos Nicólas y Luz Maria, gracias por su apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al profe Milton Lesmes por guiarme en la realización de esta tesis. A mis padres, mi hermana, mi esposo, mi suegra, mi primo Cristian, mis amigas Angie y Marcela y a toda mi familia por su apoyo, a Katherine Molina, Cristhyan Naranjo y demás compañeros quienes me acompañaron en este camino.

Índice general

INTRODUCIÓN

En 1715 el matemático Brook Taylor propuso el problema de la cuerda vibrante, tema que generó gran interés entre los matemáticos de la época. Supongamos que una cuerda flexible de longitud L se estira hasta quedar tensa y fijamos sus extremos en los puntos $(0, 0)$ y $(L, 0)$ en el eje de las abscisas. Entonces se tira de la cuerda hasta que esta adopte la forma de una curva dada por la ecuación $y = f(x)$ y se suelta. La pregunta fue: ¿Cuál es el movimiento descrito por la cuerda?

Matemáticos como Jean Le Rond d'Alembert, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli y Euler trabajaron para encontrar la solución general por muchos años, sería el trabajo de Fourier sobre la ecuación de distribución de calor fundamental en la solución del problema de la cuerda vibrante.

Fourier investigó en el problema de la distribución del calor, en particular el problema discreto de la barra, el anillo y el cilindro, en el caso continuo, estudió la lámina semiinfita, estandarizó el método de separación de variables y con su obra "teoría analítica del calor" el análisis armónico se convirtió en uno de los temas de mayor estudio, ya que tiene diversas aplicaciones en varias ramas de la matemática y la física, un ejemplo de ello es el procesamiento de señales.

El objetivo de este es texto estudiar algunas de las propiedades de los coeficientes de Fourier. En el primer capítulo esta todos los preliminares, definiciones, teoremas, lemas y ejemplos de los coeficientes de Fourier, en el segundo capítulo se demuestran las propiedades de linealidad y homogeneidad de los coeficientes de fourier, además dos propiedades importantes de dichos coeficientes: acotación y teorema de Riemann Lebesgue.

Para finalizar en el tercer capítulo se aborda el tema de orden de magnitud de dichos coeficientes, en donde se da respuesta a dos preguntas, ¿ Se puede mejorar el Lema de Riemman-Lebesgue agregando la velocidad de convergencia a cero de los coeficientes de Fourier? y ¿Es verdadero que para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la cual tiende a cero cuando $|n| \to \infty$ es la sucesión de coeficientes de Fourier de alguna función $f \in \mathbb{L}^1(T)$?.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Coeficientes de Fourier

Denotamos por $L^1(\mathbb{T})$ el espacio de todas funciones de valor complejo Lebesgue integrables en $\mathbb{T}$, tomemos

$$\|F\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|dt. \tag{1.1}$$

tenemos que $L^1(\mathbb{T})$ con la norma definida en (1.1) es un espacio de Banach.

Definición. Un polinomio trigonométrico en $\mathbb{T}$ es una expresión de la forma

$$P \sim \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} \tag{1.2}$$

Los números n que aparecen en (1.2) son llamados frecuencias de P; el mayor entero n tal que $|a_n|+|a_{-n}| \neq 0$ es llamado el grado de P. Los valores que toma el índice n son enteros tales que la suma (1.2) es una función en $\mathbb{T}$. Ya que (1.2) es una suma finita, esta representa una función la cual denotamos por P, definida para cada $t \in \mathbb{T}$ por

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} \tag{1.3}$$

Sea P definida por (1.3). Conociendo la función P podemos calcular los coeficientes a_n por la fórmula

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P(t)e^{-int}dt \tag{1.4}$$

de (1.4), sigue inmediatamente el hecho de que para los enteros j,

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{ijt}dt = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0, \\ 0 & \text{if } j \neq 0 \end{cases}.$$

Por lo tanto se observa que la función P, determina la expresión (1.2), luego no vamos a tener distinción entre la expresión (1.2) y la función P. Consideremos los polinomios trigonométricos como expresiones y funciones formales.

Definición. una serie trigonométrica en $\mathbb{T}$ es una expresión de la forma

$$S \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \tag{1.5}$$

Nuevamente asumimos que n toma valores enteros, sin embargo la cantidad de términos en (1.5) pueden ser infinitos y no hay ninguna suposición sobre el tamaño de los coeficientes o acerca de la convergencia.

Definición. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, se define el n-ésimo coeficiente de Fourier de f como sigue: sea $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, luego

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-int}dt \tag{1.6}$$

Nota 1. *Cuando la función $f \in L^1(\mathbb{T})$ es real, usamos su expansión en serie trigonométrica real*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n \sin nx)$$

Ejemplo 1. *Tomado de [Fernandez Sanchez, 2015] Calcule la serie de Fourier asociada a la función $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por: $f(t) = \frac{1}{4}(\pi - t)^2$*
Solución
Calculemos los coeficientes de la serie de Fourier asociados a f:

- *$n = 0$, tomando $u = \pi - t$, haciendo una integral por sustitución se tiene:*

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(\pi - t)^2dt \\ &= \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u^2du = \frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

- *$n \neq 0$, sustiyendo $u = \pi - t$ y tomando $w = u^2$ y $dv = e^{in(u-\pi)}$ e integramos 2 veces por partes de* *tiene:*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(\pi-t)^2dt\\
&= \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u^2e^{in(u-\pi)}du\\
&= \frac{1}{8\pi}\left[\frac{u^2}{in}e^{in(u-\pi)}\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{4in\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ue^{in(u-\pi)}du\\
&= -\frac{1}{4in\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ue^{in(u-\pi)}du\\
&= \left[\frac{1}{4n^2\pi}ue^{-in(u-\pi)}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{4n^2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in(u-\pi)}du\\
&= \left[\frac{1}{4n^2\pi}ue^{-in(u-\pi)}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

La serie de Fourier asociada a t esta dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n\neq 0}\frac{1}{2n^2}e^{int} &= \frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2n^2}[\cos(nt)+i\sin(nt)]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}[\cos(nt)+i\sin(nt)]\\
&= \frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}[\cos(nt)-i\sin(nt)]+\frac{1}{2n^2}[\cos(nt)+i\sin(nt)]\\
&= \frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nt)}{n^2}
\end{aligned}$$

Definición. La serie de Fourier $S[f]$ de la función $f \in L^1(\mathbb{T})$ es la serie trigonométrica

$$[f] \sim \sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{int} \tag{1.7}$$

Definición. Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Se define la *N-ésima suma parcial asociada a f* para cualquier $N \in \mathbb{N}$ como

$$S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx} \tag{1.8}$$

Definición. El **Núcleo de Dirichlet** se define como el polinomio trigonométrico dado por:

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N}e^{inx} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.9}$$

para todo $x \in [0, 2\pi]$

Lema 1.1.

$$D_N = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

Demostración. Tomemos $\rho = e^{ix}$ y usando el hecho $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \rho^n = \frac{\rho^{N+1} - \rho^{-N}}{\rho - 1}$, se tiene

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} \rho^n = \frac{\rho^{N+1} - \rho^{-N}}{\rho - 1}$$

Reemplazando $\rho = e^{ix}$ en el resultado anterior se tiene

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= \frac{(e^{ix})^{N+1} - (e^{ix})^{-N}}{e^{ix} - 1} \\
&= \frac{(e^{i(N+1)x}) - (e^{-iNx})}{e^{ix} - 1} \\
&= \frac{(e^{iNx+ix}) - (e^{-iNx})}{e^{ix} - 1} \\
&= \frac{e^{\frac{ix}{2}+iNx+\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}-inx-\frac{ix}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right)} \\
&= \frac{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)x}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}\right)} \\
&= \frac{\left(e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)x}\right)/2i}{\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}\right)/2i} \\
&= \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

□

Definición. Sean $f,g \in L^1(\mathbb{T})$, la convolución $(f * g)$ de las funciones f y g está dada por:

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)g(\tau)d\tau \tag{1.10}$$

Definición. El **Núcleo de Fejer** se define por:

$$\mathbf{K}_N(t) := \sum_{j=-N}^{N}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}$$

o también se define como

$$\mathbf{K}_N(t) := \frac{D_0(t) + \cdots + D_{N-1}(t)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(t)$$

Teorema 1.1. *Consideramos $\{\mathbf{K}_N\}_{N=1}^{\infty}$ el núcleo de Fejer, entonces se tiene:*

i. $\mathbf{K}_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

ii. $\|K_N\|_{L^1} = 1$

Demostración. i. Tomemos $\rho = e^{ix}$, luego

$$\begin{aligned}
NK_N(X) &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=-n}^{n} \rho^k\right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\rho^{n+1}-\rho^{-n}}{\rho-1}\right) \\
&= \frac{1}{\rho-1}\sum_{n=0}^{N-1} \rho^{n+1}-\rho^{-n} \\
&= \frac{1}{\rho-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} \rho^{n+1}-\sum_{n=0}^{N-1}\rho^{-n}\right) \\
&= \frac{1}{\rho-1}\left(\frac{\rho^{N+1}-\rho}{\rho-1}-\frac{1-\rho^{-N}}{\rho-1}\right) \\
&= \frac{1}{(\rho-1)^2}\left(\rho^{N+1}-2\rho+\rho^{-N+1}\right) \\
&= \frac{1}{\left(e^{ix}-1\right)^2}\left(e^{i(N+1)x}-2e^{ix}+e^{i(-N+1)x}\right) \\
&= \frac{e^{ix}\left(e^{iNx}-2+e^{-iNx}\right)}{e^{ix}\left(e^{ix}-2+e^{-ix}\right)} \\
&= \frac{\left(e^{iNx}-2+e^{-iNx}\right)}{\left(e^{ix}-2+e^{-ix}\right)} \\
&= \frac{\left(e^{\frac{inx}{2}}-e^{-\frac{inx}{2}}\right)^2/2i}{\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right)^2/2i} \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
NK_N(x) &= \frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
K_N(x) &= \frac{1}{N}\frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\|K_N(x)\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |K_N(x)| dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_N(x)\right| dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)| dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{\mathbb{T}} \left|\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\right| dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{\mathbb{T}} \left|\sum_{k=-n}^{n} \cos(kx) + i\sin(kx)\right| dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{\mathbb{T}} \left|\sum_{k=-n}^{-1} \cos(kx) + i\sin(kx) + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) + i\sin(kx) + 1\right| dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\int_{\mathbb{T}} dx + \sum_{k\neq 0}\int_{\mathbb{T}}\cos(kx)dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 2\pi = 1
\end{aligned}$$

$\square$

CAPÍTULO 2

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

A continuación describiremos algunas de las propiedades de los coeficientes de Fourier

Teorema 2.2. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, entonces*

- $\widehat{(f+g)}(n) = \hat{f} + \hat{g}$.

  Demostración.

$$\begin{aligned}\widehat{(f+g)}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int (f+g)(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int (f(t)+g(t))e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-int} + g(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-int}dt + \frac{1}{2\pi}\int g(t)e^{-int}dt \\ &= \hat{f}(n) + \hat{g}(n)\end{aligned}$$

- *Para cualquier número complejo α*

$$\widehat{(\alpha f)}(n) = \alpha \hat{f}(n)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\widehat{(\alpha f)}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int (\alpha f)(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int \alpha (f)(t)e^{-int}dt \\
&= \alpha\frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-int}dt \\
&= \alpha\hat{f}(n).
\end{aligned}$$

- *Si $\bar{f}$ es el complejo conjugado de f entonces $\hat{\bar{f}} = \overline{\hat{f}(-n)}$.*

  Demostración. Usando la propiedad $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\hat{\bar{f}}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int \bar{f}(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int \overline{f(t)\overline{e^{-int}}}dt \\
&= \overline{\frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-i(-n)t}dt} \\
&= \overline{\hat{f}(-n)}
\end{aligned}$$

- *Denotando $f_\tau(t) = f(t-\tau)$, $t \in \mathbb{T}$, entonces*

$$\hat{f}_\tau(n) = \hat{f}(n)e^{-in\tau}$$

  Demostración. Sea $u = t-\tau$, luego $u+\tau = t$, tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{f}_\tau(n) &= \frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int f(u)e^{-in(u+\tau)}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int f(u)e^{-inu}e^{-in\tau}du \\
&= e^{-in\tau}\frac{1}{2\pi}\int f(u)e^{-inu}du \\
&= \hat{f}(n)e^{-in\tau}
\end{aligned}$$

- $\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$

Demostración. Usando un cambio de variable y el teorema de Fubini, se tiene:

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int f*g(t)e^{int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)e^{int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)g(\tau)e^{int}d\tau\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)g(\tau)e^{int}dt\right)d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int g(\tau)e^{-in\tau}\left(\frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)e^{in(t-\tau)}dt\right)d\tau
\end{aligned}$$

Reemplazando $u = t - \tau$ se tiene

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int g(\tau)e^{-in\tau}\left(\frac{1}{2\pi}\int f(u)e^{inu}du\right)d\tau \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int f(u)e^{inu}du\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int g(\tau)e^{-in\tau}d\tau\right) \\
&= \hat{f}(n)\hat{g}(n)
\end{aligned}$$

□

Lema 2.2. *Sean $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $\varphi(t) = e^{int}$, para algún entero n, entonces:*

$$(\varphi * f)(t) = \hat{f}(n)e^{int}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(\varphi * f)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int \varphi(t-\tau)f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int e^{in(t-\tau)}f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int e^{-in\tau}f(\tau)d\tau e^{int} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int f(\tau)e^{-in\tau}d\tau e^{int} \\
&= \hat{f}(n)e^{int}
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3. *Sean $f \in L^1(\mathbb{T})$, D_x como se definió en (1.9) y $S_N(f)(x)$ dada por (1.8) entonces*

$$S_N(f)(x) = f * D_N(x)$$

Demostración. Se realizará la demostración usando las definiciones ya dadas

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx} &= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int f(t)e^{-int}dt \right) e^{inx} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int e^{inx}e^{-int}f(t)dt \right) \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int e^{-in(x-t)}f(t)dt \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \left(\sum_{n=-N}^{N} e^{-in(x-t)}f(t) \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int f(t)D_N(x-t)dt \\
&= f * D_N(x)
\end{aligned}$$

□

2.1. Dos propiedades importantes de los coeficientes de Fourier

- $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int |f(t)|dt = \|f\|_{L^1}$.

  Demostración.

$$\begin{aligned}
\left|\hat{f}(n)\right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int f(t)e^{-int}dt \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int f(t)e^{-int}dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int \left| f(t)e^{-int} \right| dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int |f(t)| \left| e^{-int} \right| dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int |f(t)| \, dt \\
&= \|f\|_{L^1}
\end{aligned}$$

  Por tanto $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int |f(t)|dt = \|f\|_{L^1}$.

- **Lema de Riemman - Lebesgue**
  Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces

$$\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0$$

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y P un polinomio trigonométrico sobre (T) tal que $\|f - P\|_{L^1} < \epsilon$. Si $|n| >$ grado de P, entonces

$$\left|\hat{f}(n)\right| = \left|\widehat{(f - P)}(n)\right| \leq \|f - P\|_{L^1} < \epsilon.$$

$\square$

CAPÍTULO 3

ORDEN DE MAGNITUD DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

Hasta el momento las únicas cosas que sabemos sobre la magnitud de los coeficientes de Fourier son: $\{\hat{f}(n)\}$ de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ los cuales están acotados por $\|f\|_{L^1}$, y el Lema de Riemman - Lebesgue.
En esta sección discutiremos las siguientes 2 preguntas:

a. ¿Se puede mejorar el Lema de Riemman-Lebesgue agregando la velocidad de convergencia a cero de los coeficientes de Fourier?.

Teorema 3.4. *Sea $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una sucesión de números no negativos tendiendo a cero en el infinito, asumamos que para $n > 0$*

$$a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0 \tag{3.1}$$

entonces existe una función no negativa $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\hat{f}(n) = a_n$

Demostración. Veamos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_0$. En efecto

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n - a_{n+1} &= \lim_{k\to\infty} \sum_{k=0}^{k}(a_n - a_{n+1}) \\
&= \lim_{k\to\infty}(a_0 - a_{k+1}) \\
&= a_0.
\end{aligned}$$

y dada la condición de convexidad de (3.1), se tiene:

$$\begin{aligned} a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n &\geq 0 \\ a_{n-1}+a_{n+1}-a_n &\geq a_n \\ a_{n-1}-a_n &\geq a_n-a_{n+1} \end{aligned}$$

De donde se tiene $(a_n - a_{n+1})$ es monotonamente decreciente.
Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$$

de donde,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n) &= \sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1}-a_n) - \sum_{n=1}^{N} n(a_n-a_{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)(a_n-a_{n+1}) - \sum_{n=1}^{N} n(a_n-a_{n+1}) \\ &= a_0-a_1+\sum_{n=1}^{N-1} (n+1)(a_n-a_{n+1}) - N(a_N-a_{N+1}) - \sum_{n=1}^{N-1} n(a_n-a_{n+1}) \\ &= a_0-a_1+\sum_{n=1}^{N-1} ((n+1)(a_n-a_{n+1}) - n(a_n-a_{n+1})) - N(a_N-a_{N+1}) \\ &= a_0-a_1+\sum_{n=1}^{N-1} (a_n-a_{n+1}) - N(a_N-a_{N+1}) \\ &= a_0-a_1+a_1-a_N-N(a-N-a_{N+1}) \\ &= a_0-a_N-N(a_N-a_{N+1}). \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{N\to\infty} a_0-a_N-N(a_N-a_{N+1}) = a_0.$$

Tomemos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\mathbf{K}_{n-1}(t) \tag{3.2}$$

donde $\mathbf{K}_n$ denota el kernel de Fejér. Ya que $\|\mathbf{K}_n\|_{L^1} = 1$ (teorema (1.1)), la serie (3.2) en $L^1(\mathbb{T})$, todos sus términos son no negativos y límite f es no negativo ya que,

$$\begin{aligned}
\|f(t)\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi}\int \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\mathbf{K}_{n-1}(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\mathbf{K}_{n-1}(t)e^{-int}dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\frac{1}{2\pi}\int \mathbf{K}_{n-1}(t)e^{-int}dt \\
&= a_0
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\hat{f}(j) &= \frac{1}{2\pi}\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)K_{n-1}(t)e^{ijt}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int \left(n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)K_{n-1}(t)e^{ijt}\right)dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\frac{1}{2\pi}\int K_{n-1}(t)e^{ijt}dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\hat{K}_{n-1}(j)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{n-1}(j) = \int K_{n-1}(t)e^{-ijt}dt& \\
&= \frac{1}{2\pi}\int \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ikt}e^{-ijt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\int e^{i(k-j)t}dt
\end{aligned}$$

ya que

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{i(k-j)t}dt = \begin{cases} 1 & \text{if } k-j=0, \\ 0 & \text{if } k-j\neq 0 \end{cases}$$

tenemos

$$\hat{K}_{n-1}(j) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)$$

De lo anterior se tiene:

$$\hat{K}_{n-1}(j) = \begin{cases} 1 - \frac{|j|}{n} & \text{if } j \in [-(n-1),(n-1)], \\ 0 & \text{if } j \notin [-(n-1),(n-1)] \end{cases} \tag{3.3}$$

Como $j \in \mathbb{Z}$ entonces $K_{n-1}(j) \neq 0$, para todo n tal que $j \in [-(n-1),(n-1)]$, luego el intervalo más pequeño esta dado por $j \in [-|j|,|j|]$, así en este intervalo $n-1 = |j|$ luego $n = |j|+1$ y para todo $n \geq |j|+1$, se tiene que $j \in [-(n-1),(n-1)]$, por tanto

$$\begin{aligned} \hat{f}(j) &= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\left(1-\frac{|j|}{n}\right) \\ &= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\left(\frac{n-|j|}{n}\right) \\ &= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} (n-|j|)(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n) \end{aligned}$$

Tomando $l = n-|j|$, luego $n = l+|j|$

$$\begin{aligned} \hat{f}(j) &= \sum_{l=1}^{\infty} l(a_{l+|j|-1}+a_{l+|j|+1}-2a_{l+|j|}) \\ &= a_{1+|j|-1} = a_{|j|} \end{aligned}$$

□

La respuesta a nuestra pregunta es negativa, $\hat{f}(n)$ no puede ir a cero tan despacio como se quiera.

b. En vista de la respuesta negativa de $a.$, ¿Es verdadero que para cualquier sucesión $\{a_n\}$ la cual tiende a cero cuando $|n| \to \infty$ es la sucesión de coeficientes de Fourier de alguna $f \in \mathbb{L}^1(T)$?.
   El siguiente teorema nos muestra la diferencia entre la serie de seno ($a_{-n} = -a_n$) y la serie de coseno ($a_{-n} = a_n$)

Teorema 3.5. *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y asumamos que $\hat{f}(|n|) = -\hat{f}(-|n|) \geq 0$, entonces*

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n}\hat{f}(n) < \infty$$

Ver demostración "AN INTRODUCTION TO HARMONIC ANALYSIS", autor: Yitzhak Katznelson, tercera edición corregida, página 24.

Corolario 3.1. *Si $a_n > 0$, $\sum \frac{a_n}{n} = \infty$, entonces $\sum a_n \sin(nt)$ no es una serie de Fourier, Por tanto existe una serie trigonométrica tendiendo a cero la cual no es una serie de Fourier.*
Ver demostración "AN INTRODUCTION TO HARMONIC ANALYSIS", autor: Yitzhak Katznelson, tercera edición corregida, página 24.

Ejemplo 2. *Tomado [Katznelson, 2002], Veamos un ejemplo de una serie trigonométrica cuyos coeficientes tienden a cero y no es una serie de Fourier.*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\ln(n)} \tag{3.4}$$

(3.4) es una serie trigonométrica cuyos coeficientes $a_n = \frac{1}{\ln(n)}$*, donde* $a_n > 0$*, usando el corolario (3.1), veamos entonces que la serie* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ *es una serie divergente. Usando el criterio de la integral: [Apostol, 1976], se tiene:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \quad y \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)} dn$$

entonces ambas sucesiones convergen o divergen.
Así, haciendo la sustitución $u = \ln(x)$ *y* $du = \frac{1}{x}dx$*, se tiene*

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)} dx &= \lim_{a\to\infty} \int \frac{1}{u} du \\
&= \lim_{a\to\infty} (\ln(\ln(x))_2^a) \\
&= \lim_{a\to\infty} (\ln(\ln(a)) - \ln(\ln(2))) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Por tanto, por el criterio de la integral

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = \infty$$

Por el corolario (3.1) la serie (3.4) no es una serie de Fourier.

CONCLUSIONES

A partir del análisis que se realiza a las funciones periódicas, su representación en series de Fourier y su estudio mediante los núcleos de Dirichlet y Fejer vemos que:

- Los coeficientes de Fourier cumplen las propiedades de linealidad, homogeneidad, acotación y con teorema de Riemann Lebesgue se tiene $\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0$.
- Partiendo desde el teorema de Riemann Lebesgue se consideraron dos preguntas.

  a. ¿ Se puede mejorar el Lema de Riemman-Lebesgue agregando la velocidad de convergencia a cero de los coeficientes de Fourier?.

  b. En vista de la respuesta negativa de a.¿Es verdadero que para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la cual tiende a cero cuando $|n| \to \infty$ es la sucesión de coeficientes de Fourier de alguna $f \in \mathbb{L}^1(T)$?.

  Para solucionar estas dos preguntas se consideran las funciones que resultan de análisis al proponer una sucesión de coeficientes de Fourier, esto nos conduce de funciones extrañas como por ejemplo a funciones continuamente diferenciables en ninguna parte como el ejemplo de Weierstrass. En este trabajo se consideró el problema de tomar sucesiones como coeficientes de Fourier y encontrar las funciones que correspondan a dichos coeficientes. Se tiene la conclusión que le velocidad de convergencia a cero no determina la construcción de funciones con dichos coeficientes y por otro lado se da una sucesión cuyos coeficientes tienden a cero, esta determina una función serie trigonométrica pero que no es serie de Fourier de ninguna función periódica integrable (Lebesgue) en su periodo.

Bibliografía

[Apostol, 1976] Apostol, T. M. (1976). *Análisis Matemático.* Reverte, 2 edition.

[Fernandez Sanchez, 2015] Fernandez Sanchez, J. (2015). *Convergencia y Divergencia de Series de Fourier.* Universidad de Murcia.

[Iorio and Magalhães, 2001] Iorio, R. and Magalhães, V. (2001). *Fourier Analysis and Partial Differential Equations.* Cambridge Studies in Advanced Mathematicas.

[Katznelson, 2002] Katznelson, Y. (2002). *An Introduction To Harmonic Analysis.* 3 edition.

[Walter Rudin, 1976] Walter Rudin (1976). *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill, 3 ed edition.