ANÁLISIS DE FOURIER: DE LO CLÁSICO A LO ABSTRACTO

JULIETH KATHERINE MOLINA MARTÍNEZ

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C
2017

ANÁLISIS DE FOURIER: DE LO CLÁSICO A LO ABSTRACTO

JULIETH KATHERINE MOLINA MARTÍNEZ

Trabajo de grado para optar por el título de matemática

Presentado a:
Samuel Barreto Melo

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C
2017

Porque de él, y por él, y para él, son todas las cosas.
Romanos 11:36

Agradecimientos

Es tiempo de agradecer por tantos favores recibidos. Doy gracias al Señor Jesucristo por su gracia, por su amor y por permitirme vivir una de las mejores etapas. Él ha sido mi apoyo y fuerza. Sin Él no hubiera podido terminar este proceso.

Agradezco a mis padres Luis Molina y Rocio Martínez por su ejemplo, sus esfuerzos, cuidados, por el amor al estudio y en especial, a las matemáticas que me inculcaron desde muy pequeña. A mi hermano Johan, por su amistad y confianza.

Agradezco especialmente al profesor Samuel Barreto por su ayuda, respaldo y paciencia en este trabajo. A cada uno de los maestros que han hecho parte de mi vida académica. De cada uno aprendí y comprendí varias lecciones que me ayudarán en el futuro.

Aprovecho esta oportunidad para agradecer a la Universidad Distrital por permitirme estar en sus aulas. A mis compañeros, en especial a Miguel Abril y Javier Aldana, con los que pude charlar, debatir y reír un poco. A mis compañeras de seminario, Laura Gonzales y Sofia Puentes. A Cristhyan Naranjo y Ana María Guauque por su amistad y compañerismo. A mis amigos de Misión Juvenil Bogotá por su hermandad y alegría.

Índice general

Introducción

Desde el trabajo pionero de Joseph Fourier, se plantearon preguntas que permitieron el avance de las matemáticas en el siglo XIX y XX. La teoría de la medida, la teoría de grupos topológicos y el analísis funcional se desarrollaron a partir de los intentos de varios matemáticos para resolver varios interrogantes que dejaba el artículo. De los avances y las definiciones se hablará en el capítulo 2.

A partir de estas definiciones y de estructuras clásicas, se plantearon otras cuestiones, como si para $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$ existía una forma de descomposición de funciones integrales en el sentido de Lebesgue con la operación de convolución, o aún más allá, para grupos abelianos localmente compactos (o ALC); También se preguntaba que medida regía para estas y si también eran álgebras de Banach. En esta discusión se incluyeron varios matemáticos del siglo anterior como Rudin, Dieudonné, Zygmund, Salem, entre otros, en los que se dieron resultados positivos para los teoremas de factorización para estructuras clásicas. Todo con el fin de construir estos objetos,a partir de componentes elementales. De esto se hablará en los capítulos 3 y 4.

Cohen fue el responsable de llevar estos resultados a otros entornos por medio del teorema de factorización para grupos compactos y abrió el camino para muchos otros resultados. En el capítulo 5, se extenderá lo anterior y se enuncia brevemente la conjetura L^p, resuelta en la década de los 90.

Objetivos

Objetivo General

Conocer el desarrollo del análisis de Fourier que permitió la generalización del campo real a grupos abelianos localmente compactos.

Objetivos Específicos

1. Reconstruir el artículo **A trip from Classical to Abstract Fourier Analysis** desarrollado por el matemático Kenneth Ross y publicado en el año 2014 en Notices AMS, junto con el soporte de algunos artículos allí mencionados.

2. Reconstruir el teorema de factorización en el álgebra de grupo de la recta real, es decir, $L^1(\mathbb{R}) * L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R})$.

3. Establecer que la medida de Haar en $\mathbb{R}$ coincide con la medida de Lebesgue.

4. Elaborar una secuencia cronológica del análisis de Fourier clásico al moderno.

Capítulo 1

Cronología

Año	**Análisis de Fourier**	**Desarrollo teórico**	**Contexto matemático**
1822	Joseph Fourier, después de su viaje a Egipto publica en París el artículo *Theorie Analytique du Chaleur*, tomando algunas ideas de Daniel Bernoulli.	En este artículo se presentan varios interrogantes que ayudarán al desarrollo de nuevas teorías.	Cauchy unifica las notaciones de Newton y Leibniz y basado en una definición de Bolzano, introduce el concepto actual de derivada.
1829	Dirichlet publica un artículo en el cual afirma que la condición de convergencia de las series de Fourier es la continuidad.	Años después junto a Lobachevskyi separan los conceptos de función y continuidad	Fallece Niels Henrik Abel a la edad de 27 años. Se publica postúmamente *Memoire sur une clase particuliere d'equations résolubles algébriquement*
1868	Riemann establece como condición para encontrar los coeficientes de Fourier que una función sea acotada y con un número finito de discontinuidades	Riemann define una función integrable con un conjunto infinito de discontinuidades en la recta real	Muere el matemático alemán August Mobius.

1870	Cantor, junto a Heine prueban la unicidad de la representación de una función en series de Fourier y fijan una pregunta sobre la característica de los conjuntos de puntos sobre los cuales se puede renunciar a la convergencia.	Cantor construye la teoría de conjuntos. Un año después, introduce los conceptos de punto de acumulación, conjunto derivado y conjunto cerrado.	Clifford publica su libro *On the space-theorie of the matter*, en donde de manera independiente propone una teorá de espacio-tiempo con conceptos de geometría de Riemann.
1875	DuBois-Reymond dan un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier no converge en un conjunto denso.	Weiestrass encuentra una función real continua en todo punto y no derivable en ninguno.	Se publica *Teoria de las funciones abelianas*, un trabajo póstumo de Riemann
1900-1903	Fejer demuestra que pueden utilizarse series divergentes de Fourier considerando en vez de las sucesión de sumas parciales, la sucesión de medias aritméticas	Después de varios trabajos previos de DuBois-Reymond, Cantor, Peano, Jordan y Borel, Lebesgue introduce en su tesis doctoral *Intégrale, longueur, aire* el concepto de función medible y la integral que lleva su nombre.	Se publica *La science et l'hypothese, primer escrito divulgativo de Poincaré.* Hilbert propone como su quinto problema, bajo que condiciones un grupo topológico puede convertirse en un grupo de Lie.
1907	Riesz introduce las funciones cuadrado integrables, muy utilizadas en el análisis de Fourier, estudiando ecuaciones integrales de Fredholm.		Minkowski plantea a partir de la teoría especial de la relatividad de Einstein, que la creación de un espacio de cuatro dimensiones con geometría no euclídiana podría explicar mejor la teoría. Este espacio propuesto lleva su nombre.

1920's	Kolmogorov construye una serie de Fourier que diverge en casi todas partes.	Pavel Urysohn demuestra el lema que lleva su nombre. Schreirer y Leja, en su artículo *Sur la notion du groupe abstrait topologique* establece la definición de grupo topológico tal como lo conocemos hoy en día.	Stefan Banach enuncia el teorema del punto fijo que lleva su nombre.
1930's	Raphael Salem publica el teorema de factorización de funciones integrables en $\mathbb{T}$	Alfred Haar obtiene la existencia de una medida invariante por translación en un grupo localmente compacto, metrizable y separable, Weil hace los mismo sin las dos últimas condiciones.	Kurt Gödel prueba los teoremas de incompletitud.
1950's	Rudin publica *Factorización en el álgebra de grupo de la recta real* **Reto Rudin-Dieudonné**. Rudin publica el teorema de factorización para grupos abelianos localmente euclídeos	Gleason Montgomery resuelve el quinto problema de Hilbert.	Henri Cartan y Samuel Erlenberg publican *Homological Algebra.* Grothendick introduce la K-teoría.
1959	**PUNTO DE QUIEBRE: TEOREMA DE FACTORIZACIÓN DE COHEN**		Antoni Zygmund publica un gran libro pionero de la teoría: *Trigonometrical Series.*

1960's	Rajagolapan plantea la conjetura L^p. Curtis-Figa Talamanca demuestran que $$L^1(G) * L^\infty = C_{ru}(G)$$ Hewitt muestra el teorema de factorización en módulos de Banach y que $$L^1(G)*L^p(G) = L^p(G)$$	Sobolev publica *On a theorem of functional analysis.* Carleson muestra que la convergencia de una serie se puede dar excepto en conjunto de medida cero.	Cohen trabaja en la indecibilidad de la hipótesis del continuo y el axioma de elección, por el método de forcing, lo que hace que gane la medalla Fields.
1990	Sadahiro Saeki prueba la conjetura L^p.		

Capítulo 2

Preliminares

El análisis de Fourier se ha fundamentado en diversos recursos teóricos de varias ramas de la matemática, como la teoría de la medida, la topología, el álgebra y el análisis. A continuación enunciaremos las principales definiciones que le han dado un soporte a la teoría de análisis de Fourier, tal como la conocemos hoy en día.

2.1. Teoría de la medida

Definición 1. *Una colección* $\mathbf{X}$ *de subconjuntos de un conjunto* X *es un álgebra si:*

- $\emptyset, X \in \mathbf{X}$
- *Si* $E \in \mathcal{X}$*, entonces* $E^c \in \mathbf{X}$
- *Si* $E_1, \ldots, E_n \in \mathbf{X}$*, entonces* $\cup_{j=1}^{n} E_j \in \mathbf{X}$

Definición 2. *Una colección* $\mathbf{X}$ *de subconjuntos de un conjunto* X *se dice que es un* σ*-álgebra si cumple las siguientes condiciones:*

- $\emptyset, X \in \mathbf{X}$
- *Si* $A \in \mathcal{X}$*, entonces* $A^c \in \mathbf{X}$
- *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{X}$*, entonces* $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ *también esta en* $\mathbf{X}$

Un par $(X, \mathbf{X})$*, donde* X *es un conjunto y* $\mathbf{X}$ *un* σ*-álgebra, forman un* ***espacio medible****.*

Definición 3. *Una* ***medida*** *es una función de valor real extendida* μ *definida en un* μ *definida en un* σ*-álgebra* $\mathbf{X}$ *de subconjuntos de* X *tales que:*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(E) \geq 0$ *para todo* $E \in \mathbf{X}$

- μ *es* ***contablemente aditiva****, es decir, si* (E_j) *es una sucesión disyunta de conjuntos en* $\mathbf{X}$*, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

A la tripla $(X, \mathbf{X}, \mu)$ *se le conoce como* ***Espacio de medida****.*

Definición 4. *Una función* f *se dice que es medible o que* $f \in M(X, \mathbf{X})$*, si para todo número real* α*, el conjunto*

$$\{x \in : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a $\mathbf{X}$*.*

Ejemplos.

- *Sea* $E \in \mathbf{X}$*. Definimos la función característica* χ_E *como*

$$\chi_E = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Esta función es medible ya que

$$\{x \in X : \chi_E > \alpha\} = \begin{cases} X, & si\ E = X\ y\ \alpha < 1 \\ E, & si\ E \neq X\ y\ \alpha < 1 \\ \emptyset, & si\ E \neq X\ y\ \alpha \geq 1\ o\ si\ E = \emptyset \end{cases}$$

- *Si* $X = \mathbb{R}$ *y* $\mathbf{X} = \mathcal{B}$*, todas las funciones continuas* f *de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbf{R}$ *son medibles: Como* f *es continua,* $\{x \in \mathbf{R} : \mathbf{f}(\mathbf{x}) > \alpha\}$ *es un intervalo abierto en* $\mathbf{R}$*, por tanto, es unión de intervalos abiertos, entonces en* $\mathcal{B}$*.*

- *Si* f, g *son funciones medibles de valor real y* $c \in \mathbb{R}$*, entonces (a)*cf*, (b)*f^2*, (c)*$f+c$*, (d)*$f+g$*, (e)*fg*, (f)*$|f|$ *son funciones medibles.*

  1. *Se cumple trivialmente si* $c = 0$*. Si* $c > 0$*, entonces*

  $$\{x \in X : cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X : f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\} \in \mathbf{X}$$

  si $c < 0$*,*

  $$\{x \in X : cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X : f(x) > -\frac{\alpha}{c}\right\} \in \mathbf{X}$$

  2. *Si* $a < 0$*, entonces* $\{x \in X : (f(x))^2 > \alpha\} = X$*. Si* $a \geq 0$*,*

  $$\{x \in X : (f(x))^2 > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X : f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathbf{X}$$

3. *Si f es una función medible, se tiene que $\{x \in X : f(x) > \alpha - c\} \in \mathbb{X}$. Por tanto, $\{x \in X : f(x) + c > \alpha\} \in \mathbf{X}$*
4. *Sea $r \in \mathbb{Q}$. Construimos los conjuntos*

$$S_r = \{x \in X : f(x) > r\} \cap \{x \in X : g(x) > \alpha - r\} \in \mathbf{X}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} S_r &= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (\{x \in X : f(x) > r\} \cap \{x \in X : g(x) > \alpha - r\}) \\ &= \{x \in X : (f+g)(x) > \alpha\}\end{aligned}$$

Por lo que $f + g$ es medible

5. *fg es medible, ya que $fg = \dfrac{1}{4}\{(f+g)^2 - (f-g)^2\}$ utilizando además las propiedades anteriores.*
6. *Si $\alpha < 0$, $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = X$. Si $\alpha \geq 0$,*

$$\begin{aligned}\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} &= \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X : -f(x) > \alpha\} \\ &= \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X : f(x) < -\alpha\} \in \mathbf{X}\end{aligned}$$

Definición 5 (Integración)**.** *Sea ϕ un a función simple y medible positiva. La integral de ϕ con respecto a la medida de μ es*

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_j}$$

Sea ϕ una función simple y medible positiva. La integral de ϕ con respecto a la medida μ es

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

Sea f cualquier función medible positiva. Sea

$$\Phi = \{\phi| \quad \phi \text{ es simple y } 0 \leq \phi \leq f \text{ para todo } x \in X\}$$

La integral de f con respecto a la medida μ, tomando todas las funciones $\phi \in \Phi$, está definida como

$$\int f d\mu = \sup \int \phi d\mu$$

Decimos que una función f es integrable, si es medible de valor real bajo alguna σ-álgebra $\mathbf{X}$, tal que $\int |f| d\mu$ (en el sentido de Lebesgue) es finita. La colección de estas funciones se nota $L(X, \mathbf{X}, \mu)$

Definición 6. *Dos funciones en L^1 son μ-equivalentes y son iguales en casi toda parte. La clase de equivalencia determinada por f en L^1 se denota $[f]$ y consiste en el conjunto de todas las funciones en L^1 que son μ-equivalentes a f.*

Definición 7. *Sea X un espacio topológico, el σ-álgebra más pequeña $\mathcal{B}$ en X tal que cada abierto de X pertenece a $\mathcal{B}$. Los miembros de $\mathcal{B}$ se denominan* ***conjuntos de Borel de X****.*

Definición 8. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y μ una medida definida sobre X y $\mathcal{B}$. Un conjunto de Borel E es* ***regular externo*** *si*

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ es abierto}\}$$

Es ***regular interno*** *si*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ es compacto}\}$$

Si cada conjunto de Borel en X es regular interno y regular externo, decimos que μ es ***regular****.*

A continuación se enuncia uno de los teoremas más importantes de teoría de la medida, que se aplica en varios resultados aquí expuestos.

Teorema 1 (Teorema de Fubini)**.** *Sea $(X, \mathbf{X}, \mu)$ y $(Y, \mathbf{Y}, \nu)$ espacios σ-finitos y sea la medida π en $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ el producto de μ y ν. Si la función F de $Z = X \times Y$ en $\mathbb{R}$ es integrable con respecto a π, entonces las funciones extendidas de valor real están definidas en casi toda parte por*

$$f(x) = \int_Y F_x d\nu, \quad g(y) = \int_X F^y d\mu$$

tiene integrales finitas y

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\nu.$$

Escrito de otra forma,

$$\int_X \left[\int_Y F d\nu \right] d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y \left[\int_X F d\mu \right] d\nu$$

2.2. Grupos topológicos

Definición 9. *Sea f una función compleja de un espacio topólogico.*

$$sop(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

La colección de todas las funciones complejas continuas con soporte compacto se denota como $C_c(X)$.

Denotaremos como $K \prec f$, donde K es un subconjunto compacto de X y $f \in C_c(X)$ y $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$, y $f(x) = 1$ para todo $x \in K$.
Notamos como $f \prec V$, donde V es abierto, $f \in C_c(X)$, $0 \leq f(x) \leq 1$ y $sop(f) \subseteq V$. Cuando ambas condiciones se cumple se notará

$$K \prec f \prec V$$

Definición 10. *Un **grupo** G se dice que es **topológico** si las operaciones de grupo son continuas. Es decir, si para $x, y \in G$, la función f que va de G a G tal que $x \mapsto x^{-1}$ y la función g que va de $G \times G$ a G tal que $(x, y) \mapsto x + y$ son continuos. Para $x \in G$ fijo, la aplicación $y \mapsto x + y$ es un homeomorfismo de G en si mismo, el cual envía 0 a x.*
*Un **grupo abeliano localmente compacto (o ALC)** es un grupo abeliano topológico el cual es un espacio de Hausdorff localmente compacto.*

Ejemplos.

Cualquier grupo abeliano G es un grupo ALC con la topología discreta.

- *Para mostrar que $(G, \mathbf{P}(G))$ es localmente compacto, se toma $x \in G$, existe $V_x = \{x\}$, tal que $V_x \in \mathcal{P}$ que es compacto por ser finito.*

- *Para ver que es de Hausdorff, se toma $x, y \in G$ tal que $x \neq y$. Existen $V_x = \{x\}, V_y = \{y\} \in \mathcal{P}(G)$ tal que $V_x \cup V_y = \emptyset$.*

- *La función $x \mapsto x^{-1}$ es continua. En efecto, sea $V_{f(a)}$ una vecindad de $f(a)$, por tanto existe $A \in \mathcal{P}$ tal que $a^{-1} = f(a) \in A \subset V_{f(a)}$. Tomando $V_a = \{a\}$ tenemos que $V_a = f(\{a\}) = \{a^{-1}\} \subseteq A \subseteq V_{f(a)}$.*

- *La función $(x, y) \mapsto x + y$ es continua. Sea $V_{f(x,y)}$ una vecindad de $f(x, y)$. Por tanto, existe $A = \{x+y\} \in \mathcal{P}(G)$ tal que $f(x, y) \in A \subset V_{f(x,y)}$. Se toma $V_x = \{x\}$ y $V_y = \{y\}$. Luego, $V_x \times V_y = \{(x, y)\}$. Así, $f(V_x \times V_y) = \{x + y\} = A \subset V_{f(x,y)}$.*

Definición 11 (Medida de Haar)**.** *Sea X un grupo abeliano localmente compacto. Una medida de Haar en X es una medida de Borel regular μ que tiene las siguientes propiedades:*

1. *$\mu(E) < \infty$ si E es compacto (medida de Borel en grupos ALC);*

2. *$\mu(Ex) = \mu(E)$ para todo conjunto medible $E \subset X$ y todo $x \in X$ (Invarianza por translación.)*

2.3. Álgebras de Banach y transformadas de Fourier

Definición 12. *Un conjunto X es llamado una **álgebra normada sobre** $\mathbb{C}$, si*

1. *X es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{C}$,*

2. *X es un anillo con respecto a dos operaciones internas, donde la adición es la adición vectorial correspondiente al item anterior.*

3. *Si $k \in \mathbb{C}$ y $x, y \in X$, entonces*

$$k(xy) = (kx)y = x(ky)$$

   lo que establece una relación entre el producto por escalar y el producto del anillo.

4. *La norma cumple la siguiente propiedad.*

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad x, y \in X$$

Si además X es completo, decimos que X es un ***álgebra de Banach****.*

Definición 13 (Convolución)**.** *Sean $f, g \in L^1(G)$. Definimos la convolución como*

$$(f * h)(x) = \int_G f(x-y)g(y)dy$$

Definición 14. *La* ***transformada de Fourier*** *de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ se denota por $\widehat{f}$ y se define como*

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$$

Teorema 2 (Propiedades de la transformada de Fourier)**.** *Sea $f \in L^1$ y $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$*

- *Si $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, entonces $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$*
- *Si $g(x) = f(x-\alpha)$, entonces $\hat{g}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\alpha t}$*
- *si $g \in L^1$ y $h = f * g$, entonces $\hat{h}(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t)$.*
- *si $g(x) = -ixf(x)$ y $g \in L^1$, entonces $\hat{f}$ es diferenciable y $\hat{f}' = \hat{g}(t)$*

Capítulo 3

Desarrollo clásico

En el análisis de Fourier clásico utilizamos las series de Fourier para estudiar las funciones periódicas en la recta real $\mathbb{R}$. Nos enfocaremos en funciones 2π-periódicas (funciones determinadas en $[0, 2\pi)$ tal que $f(x + 2\pi) = f(x)$). Mostraremos, que la recta real bajo una relación de equivalencia que describiremos, forman un grupo con la adición módulo 2π.

Luego, mostraremos que este grupo conformado y el grupo $\mathbb{T}$ son isomorfos bajo la aplicación $t \to e^{it}$, lo que nos permitirá ver los resultados clásicos como resultados en el grupo abeliano compacto $\mathbb{T}$, para así, llevar el análisis de Fourier en $\mathbb{R}^n$ viéndo como grupo abeliano localmente compacto.

3.1. $(\mathbb{R}/\sim_{2\pi}, +)$ es un grupo abeliano

Definición 15. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}$ fijo. $x \sim_r y$ si y solo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = kr$.*

Proposición 3.1.1. *La relación $\sim_r$ es de equivalencia*

Demostración. *Veamos que $\sim_r$ es reflexiva, simétrica y transitiva.*

- *$\sim_r$ es reflexiva.*
  Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \sim_r x$,ya que $x - x = 0 = 0r$

- *$\sim_r$ es simétrica*
  Si $x \sim_r y$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = kr$. Luego,

$$\begin{aligned} y - x &= -(x - y) \\ &= -kx \\ &= (-k)x \end{aligned}$$

Así, existe $-k \in \mathbb{Z}$ tal que $y - x = (-k)r$ y se cumple que $y \sim_r x$.

- *$\sim_r$ es transitiva*
  Si $x \sim_r y$, existe $k_1 \in \mathbb{Z}$, tal que $x - y = k_1 r$
  Si $y \sim_r z$, existe $k_2 \in \mathbb{Z}$, tal que $y - z = k_2 r$
  Luego,

$$\begin{aligned} x - z &= (x - y) + (y - z) \\ &= r(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

  De este modo, $x \sim_r z$.
  Por tanto, $\sim_r$ es una relación de equivalencia.

En particular, si $r = 2\pi$, $\mathbb{R}/\sim_{2\pi}$ será:

$$\mathbb{R}/\sim_{2\pi} = \{[x]\,|0 \leq x < 2\pi\}$$

Podemos definir la adición modulo 2π como:

$$+ : (\mathbb{R}/\sim_{2\pi}, \mathbb{R}/\sim_{2\pi}) \longrightarrow \mathbb{R}/\sim_{2\pi}$$

$$([a],[b]) \longmapsto [a] + [b] = [a+b]$$

Proposición 3.1.2. $(\mathbb{R}/\sim_{2\pi}, +)$ *es un grupo abeliano.*

Demostración. *A ver que + es cerrada, asociativa, modulativa, invertiva y conmutativa.*

- *La operación + es cerrada.*
  Sean $[a],[b] \in \mathbb{R}/\sim_{2\pi}$, para ver que $[a]+[b] \in \mathbb{R}/\sim_{2\pi}$, basta ver que si $x \in [a]$ y $y \in [b]$, entonces, $x+y \in [a+b]$. Como $x \in [a]$, existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $x - a = 2k_1\pi$ y como $y \in [b]$, existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $y - b = 2k_2\pi$. Luego,

$$\begin{aligned} (x-a) + (y-b) &= 2(k_1+k_2)\pi \\ (x+y) - (a+b) &= 2(k_1+k_2)\pi \end{aligned}$$

  De este modo, existe $k_3 = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $(x+y)-(a+b) = 2(k_1+k_2)\pi$, Por tanto, $x + y \in [a+b] \in \mathbb{R}/\sim_{2\pi}$ y la operación + es cerrada.

- *La operación + es asociativa.*

$$\begin{aligned} ([a]+[b])+[c] &= [a+b]+[c] && \textit{Por la definición de } + \\ &= [(a+b)+c] && \textit{Por la definición de } + \\ &= [a+(b+c)] && \textit{Por la asociatividad de } \mathbb{R} \\ &= [a]+[b+c] && \textit{Por la definición de } + \\ &= [a]+([b]+[c]) && \textit{Por la definición de } + \end{aligned}$$

- *La operación + es modulativa.*
Para mostrar este hecho, hallaremos $b \in [0, 2\pi)$ *tal que* $[a] + [b] = [a]$. *En efecto, tomamos* $x \in \mathbb{R}$, *tal que* $x \in [a + b]$ *y* $x \in [a]$, *luego, existe* $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $x - (a + b) = 2k_1\pi$ *y* $x - a = 2k_2\pi$. *Así,*

$$\begin{aligned} x - a - b - (x - a) &= 2(k_1 - k_2)\pi \\ -b &= 2(k_1 - k_2)\pi \\ b &= 2(k_2 - k_1)\pi \\ b &= 2k_3\pi \end{aligned}$$

Luego, $b \in [0]$. *Por tanto, existe* $[0] \in \mathbb{R}/\sim_{2\pi}$ *tal que* $[a] + [0] = [a]$.

- *La operación + es invertiva.*
Para todo $[a] \in \mathbb{R}/\sim_{2\pi}$, *hallaremos* $[b]$ *tal que* $[a] + [b] = [0]$. *Sea* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \in [a + b]$ *y* $x \in [0]$. *Luego, existen* $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $x - (a + b) = 2k_1\pi$ *y* $x = 2k_2\pi$. *De este modo,*

$$\begin{aligned} x - (x - (a + b)) &= 2(k_2 - k_1)\pi \\ a + b &= 2k_3\pi \\ b - (-a) &= 2k_3\pi \end{aligned}$$

Lo que indica que $b \in [-a] = [2\pi - a]$. *Por tanto, existe* $[2\pi - a] \in \mathbb{R}/\sim_{2\pi}$ *tal que* $[a] + [2\pi - a] = [2\pi] = [0]$.

- *La operación + es conmutativa.*

$$\begin{aligned} [a] + [b] &= [a + b] && \textit{Por la definición de } + \\ &= [b + a] && \textit{Por la conmutatividad de } R \\ &= [a] + [b] && \textit{Por la definición de } + \end{aligned}$$

Por tanto, $(\mathbb{R}/\sim_{2\pi})$ *es un grupo abeliano, como queriamos probar.*

3.2. $\mathbb{T}$ es un grupo abeliano compacto

Sea

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Proposición 3.2.1. $(\mathbb{T}, *)$ *es un grupo abeliano compacto, donde* $*$ *es el producto de números complejos.*

Demostración.

- *La operación $*$ es clausurativa en $\mathbb{T}$.*

  Sean $a, b \in \mathbb{T}$, a ver que $a * b \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} |a * b| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \\ &= |a||b| = 1 \end{aligned}$$

  De este modo, la operación $*$ es cerrada en $\mathbb{T}$

- *La operación es asociativa en $\mathbb{T}$, ya que desde la operación definida en $\mathbb{C}$, se cumple esta propiedad.*

- *La operación $*$ tiene elemento neutro, ya que $1 + 0i \in \mathbb{C}$, como elemento inverso de la operación $*$ definida en $\mathbb{C}$, pertenece a $\mathbb{T}$, porque $|1 + 0i| = \sqrt{1 + 0} = 1$.*

- *$*$ es invertiva, debido a que para cada $a + bi \in \mathbb{T}$, existe $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \in \mathbb{C}$ tal que $(a + bi) * \left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) = 1$. Además, $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \in \mathbb{T}$: debido a que:*

$$\begin{aligned} \left|\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i\right| &= \sqrt{(\frac{a}{a^2 + b^2})^2 + (\frac{b}{a^2 + b^2})^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi| = 1 \end{aligned}$$

- *La operación $*$ es conmutativa en $\mathbb{T}$, por ser conmutativa desde $\mathbb{C}$.*

- *Las funciones*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ x &\longmapsto x^{-1} \\ g : (\mathbb{T}, \mathbb{T}) &\longrightarrow \mathbb{T} \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

Son continuas. En efecto, para la función f, sea $\epsilon > 0$. Tomando $\delta = \epsilon$, tal que $|x - a| < \delta$. Entonces, si $x = (x_1, x_2)$ y $a = (a_1, a_2)$

$$\begin{aligned}\left|x^{-1} - a^{-1}\right| &= \left|\left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) - \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right)\right| \\ &= |(x_1 - a_1, a_2 - x_2)| = |x - a| < \epsilon\end{aligned}$$

Para la función g, si $\epsilon > 0$ y tomando $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, tal que $|x-a| < |(x, y)-(a, b)| < \delta$. Entonces,

$$\begin{aligned}|(x - a) + (y - b)| &\leq |x - a| + |y - b| \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

- *Para mostrar la compacidad, utilizamos el hecho de que $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, en donde por teorema de Heine- Borel los conjuntos cerrados y acotados son los mismos conjuntos compactos. $\mathbb{T}$ es cerrado, ya que $\mathbb{T}^c$ es abierto, porque las bolas centradas en $x \in \mathbb{T}^c$ y de radio $(|x|-1)/2$, están totalmente contenidas en $\mathbb{T}^c$. $\mathbb{T}$ es acotado, ya que existe $B_2(0)$ tal que $\mathbb{T} \subseteq B_2(0)$. Por tanto, $\mathbb{T}$ es compacto.*

3.3. $\mathbb{R}/\sim_{2\pi}$ es isomorfo a $\mathbb{T}$

Teorema 3. *La función $t \mapsto e^{it}$ es un isomorfismo del eje real a la circunferencia unitaria.*

Demostración. *Mostraremos que es un homomorfismo, luego que es inyectiva y por último sobreyectiva.*

- *Por las propiedades de e^z con $z \in \mathbb{C}$, se cumple que*

$$\begin{aligned}g(z_1 + z_2) &= e^{z_1+z_2} \\ &= e^{z^1}e^{z^2} \\ &= g(z_1)g(z_2)\end{aligned}$$

  Lo que muestra que es un homomorfismo.

- *Se toma $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq t_1t_2 < 2\pi$. Ahora, como para $t \in \mathbb{R}$, $0 < t < 2\pi$ se cumple que $e^{it} \neq 1$, entonces*

$$e^{it_2}(e^{it_1})^{-1} = e^{(it_2-it_1)} \neq 1$$

  Luego, $t_1 \neq t_2$

- *Para ver la sobreyectividad, se fija $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| = 1$. Se mostrará que para todo $w \in \mathbb{C}$, existe un real t tal que $w = e^{it}$. Sea $w = u + iv$ y supongamos que $u \geq 0$ y $v \geq 0$. Como $u \leq 1$ y como $\cos t$ es continua, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ tal que $\cos t = u$. Lo que indica que $\operatorname{sen}^2 t = 1 - u^2 = v^2$ y como $\operatorname{sen} t \geq 0$, si $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, se tiene que $\operatorname{sen} t = v$. Por tanto,*

  $$w = u + iv = \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it}$$

  Ahora, supongamos que $u < 0$ y $v \geq 0$. Entonces,

  $$-iw = -i(u + iv) = -iu + v = v - iu.$$

  Luego, se cumplen las condiciones anteriores. Así $-iw = e^{it}$ para álgun $t \in \mathbb{R}$. Por último, si $v < 0$ entonces $-w = -(u + iv) = -u - iv$. Se cumplirá que si $u \geq 0$, se tiene el caso 1, mientras que si $u < 0$ se tiene el caso 2. Por tanto, para algún t, $w = e^{(t+\pi)i}$, lo que prueba la sobreyectividad, y por ende se demuestra el teorema.

3.4. Teorema de representación de Riesz

Este resultado nos permite definir para espacios de Hausdorff localmente compactos, un funcional lineal que representa de manera única, una medida regular de Borel completa. En particular, para $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$ esta medida corresponde a la medida de Lebesgue.

Teorema 4 (Representación de Riesz)**.** *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y Λ un funcional lineal positivo sobre $C_c(X)$. Existe una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en X que contiene a todos los conjuntos de Borel de X y existe una única medida postiva sobre μ que representa a Λ en el sentido de que*

$$\Lambda f = \int_X f d\mu, \qquad \textit{para toda } f \textit{ en } C_c(X)$$

y cumpliendo las siguientes condiciones.

- *(Medida finita en compactos) $\mu(k) < \infty$, para todo compacto $K \subset X$*
- *(Medida regular exterior) Para todo $E \in \mathcal{M}$,*

  $$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \quad \textit{abierto}\}$$

- *(Medida regular interior) La relación dada por*

  $$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \quad \textit{abierto}\}$$

  se verifica para todo abierto $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \infty$

- *(Medida completa) Si $E \in \mathcal{M}$, $A \subset E$ y $\mu(E) = 0$, entonces $A \in \mathcal{M}$*

Idea de la demostración. *La construcción de esta medida se realiza a partir de los abiertos de X, sobre los cuales, se extiende la idea para subconjuntos arbitrarios. En efecto, para todo abierto U de X, se define*

$$\mu(V) = \sup\{\lambda f : f \prec U\}$$

Ahora, si $E \subset X$,

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(U) : E \subset U, U \quad \textit{abierto}\}$$

La construcción de la σ-álgebra $\mathcal{M}$ se realiza definiendo una colección previa $\mathcal{M}_F$, condicionando las definiciones anteriores por medio de compactos, $\mathcal{M}_F$ es la colección de todos los subconjuntos de X tales que

- $\mu(E) < \infty$
- $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \quad \textit{compacto}\}$

Sea $\mathcal{M}$ la colección de todos los $E \subset X$ tales que $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ para K compacto. Sobre la función μ y la colección $\mathcal{M}$ se demuestra la aditividad numerable, la medida sobre compactos y algunos hechos importantes como que $\mathcal{M}_F$ contiene a todos los abiertos de medida finita. A partir de esto se demuestra que μ es una medida única completa y que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra.
Por último se demuestra la representación de cualquier funcional a partir de la integral respecto a μ. Para mayor detalle, ver Rudin [8]

3.5. La medida de Lebesgue es la medida de Haar en $\mathbb{R}^n$

Se mostrará en esta sección que la medida de Haar coincide con la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n$. Además, esta medida es única salvo multiplicación por escalares.

Para tal fin, se toma $E \subseteq \mathbb{R}^n$y $x \in \mathbb{R}^n$. La translación de E por x, se define como

$$E + x = \{y + x : y \in E\}$$

Sea $W = \{x : \alpha_i < x_i < \beta_i; 1 \leq i \leq n\}$ donde el signo $<$ puede ser reemplazado por $\leq$. W se denominará una k-celda. Su volumen está definido por

$$vol(W) = \prod_{i=i}(\beta_i - \alpha_i)$$

Si $a \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$, denominaremos al conjunto

$$Q(a; \delta) = \{x : \alpha_i < x_i < \alpha_i + \delta, 1 \leq i \leq n\}$$

como la δ-*caja con vértice en* a. Sea

$$P_k = \{y \in \mathbb{R}^n | y_i = \frac{m}{2^k}, m \in \mathbb{Z}\}$$

donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y

$$\Omega_k = \{Q(y, 2^{-k}) | y \in P_k, k \in \mathbb{Z}^+\}$$

Ω_k cumple las siguiente propiedades:

1. Si k es fijo y $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in Q(y, 2^{-k})$ para un único $y \in P_k$. Esto se tiene por la densidad de los reales, $\frac{m}{2^k} < x < \frac{m+1}{2^k}$ para álgun $m \in \mathbb{Z}$.

2. Si $Q' \in \Omega_t$, $Q'' \in \Omega_r$ y $t < r$ entonces $Q' \subset Q''$ o $Q' \cap Q'' = \emptyset$. Sea $x \in Q' \in \Omega_t$, luego $\frac{m_t}{2^t} < x < \frac{m_t + 1}{2^t}$, así,

$$\frac{m_t}{2^r} < \frac{m_t}{2^t} < x_i < \frac{m_t + 1}{2^t} < \frac{m_t + 1}{2^r}$$

   Ahora, si $Q' = Q(w, 2^{-t})$ y $Q'' = Q(p, 2^{-r})$ con $w \neq t$, $Q' \cap Q'' = \emptyset$ por el item anterior.

3. Si $Q \in \Omega_r$, entonces $vol(Q) = 2^{-rn}$; y si $m > r$, el conjunto P_m tiene exactamente $2^{(m-r)n}$ puntos en Q. Como $Q \in \Omega_r$, $Q = Q(y, 2^{-r}) = \{x | \frac{h_i}{2^r} < x_i < \frac{h_i + 1}{2^r}\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} vol(Q) &= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{h_i + 1}{2^r} - \frac{h_i}{2^r} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2^r} = \left(\frac{1}{2^r} \right)^n = \frac{1}{2^{rn}} = 2^{-rn} \end{aligned}$$

4. Cada abierto no vacío en $\mathbb{R}^n$ es unión numerable de cajas disjuntas en $\bigcup_{\infty} \Omega_k$.

   Demostración. *Sea V abierto. Todo $x \in V$ estará en una bola abierta que pertenece a V. Por tanto existe $Q \in \Omega_n$ tal que $x \in Q \subset V$. Así V es unión de todas las cajas que están en ella y que pertenecen a algún Ω_n. Es decir, $V = \bigcup_{Q \in \Omega_n} Q$. Sea $\mathcal{Q}_0 = \{Q\}_{Q \subset V, Q \in \Omega_n}$ la colección de las cajas que están en V y pertenecen a Ω_n para algún n. De la misma forma construimos $\mathcal{Q}_k = \{Q\}_{Q \subset V, Q \in \Omega_k, Q \notin \Omega_n, n > k}$. Luego, $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ donde $x_k \in \Omega_k$. Por los items (a) y (b) se tiene que $X_k \cap X_l = \emptyset$ para $k \neq l$*

Teorema 5. *Existe una medida completa m definida en $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^n$, con las siguientes propiedades:*

1. $m(W) = vol(W)$ para toda k-celda W

2. *m es invariante por translación, es decir,* $m(E+x) = m(E)$ *para todo* $E \in \mathcal{M}$ *y* $x \in \mathbb{R}^k$.

3. *Si* μ *es cualquier medida de Borel positiva invariante por translación en* $\mathbb{R}^k$ *tal que* $\mu(K) < \infty$ *para todo compacto* K*, entonces existe una constante* c *tal que* $\mu(E) = cm(E)$ *para todos los conjuntos de Borel* $E \subset \mathbb{R}^k$.

Demostración. 1. *Sea* W *una celda abierta y*

$$E_r = \cup\{Q_r | Q_r \in \Omega_r, \overline{Q_r} \in W\}$$

Sea f *tal que* $\overline{E_r} \prec f \prec W$. *Por el teorema de representación de Riesz, se tiene que*

$$\Lambda f = vol(\overline{E_r}) = \prod_{i=1}^{k}(\beta_i - \alpha_i - 2^{1-r})$$

Si $r \to \infty$ *y hacemos* $m(W) = \sup\{\Lambda f : f \prec W\}$ *por la construcción del teorema de Riesz. Por tanto,* $m(W) = vol(W)$ *para cada celda abierta* W*. Como cada celda es la intersección de una sucesión decreciente de celdas (Teorema de intersección de Cantor), obtenemos (a).*

2. *Mostremos para cada celda. Sea* W *una celda, entonces*

$$W + x = \{x \in \mathbb{R}^n | \alpha_i + x < x_i + x < \beta_i + x\}$$

Luego,

$$\begin{aligned} vol(W+x) &= \prod_{i=1}^{n}(\beta_i + x - (\alpha_i + x)) \\ &= \prod_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) \\ &= vol(W) \end{aligned}$$

3. *Supongamos que* μ *es una medida de Borel invariante por translación. Sea* $c = \mu(Q_0)$*, donde* Q_0 *es una 1-caja.* P_0 *tendrá exactamente* 2^{nk} *puntos en* Q_0*. Luego, cada uno de estos puntos tendrá una* 2^{-n}*-caja que serán disyuntas. Es decir, debemos probar que*

$$Q_0 = \bigcup_{i=1}^{2^{nk}} Q(w, 2^{-n})$$

$$Q(w_i; 2^{-n}) \cap Q(w_j; 2^{-n}) = \emptyset, \qquad i \neq j$$

Supongamos que existe $y_0 \in Q(w_i; 2^{-n}) \cap Q(w_j; 2^{-n})$. *Luego,*

$$\begin{aligned} w_{ik} &\leq y_k < w_{ik} + 2^{-n} \\ w_{jk} &\leq y_k < w_{jk} + 2^{-n} \quad \textit{para } w_{ik} \neq w_{jk} \end{aligned}$$

Supongamos $w_{ik} > w_{jk}$, *entonces* $w_{ik} = y_k = w_{jk}$. *Lo cual es una contradicción. Por tanto,* $Q(w_i; 2^{-n}) \cap Q(w_j; 2^{-n}) = \emptyset$. *Dado que estas son translaciones de otras y dado que* $m(Q_0) = 1$.

$$\begin{aligned} m(Q_0) &= m\left(\bigcup_{i=1}^{2^{nk}} Q(w_i, 2^{-n})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2^{nk}} m(Q(w, 2^{-n})) \\ &= \sum_{i=1}^{2^{nk}} 2^{-nk} = 2^{nk} 2^{-nk} = 1 \\ m(Q) &= 2^{-nk} \quad Q \textit{ es una } 2^{-n} \textit{ caja} \\ &= 2^{-nk} \cdot 1 \\ &= 2^{-nk} \cdot m(Q) \end{aligned}$$

Por tanto, $m(Q_0) = 2^{nk} m(Q)$, *lo cual se aplica a cualquier medida invariante por translación, en particular, a* μ

$$\begin{aligned} 2^{nk} \mu(Q) &= \mu(Q_0) \\ &= c = cm(Q_0) \\ &= c(2^{nk} m(Q)) \end{aligned}$$

Como cualquier abierto E *puede escribirse como unión de cajas disyuntas que pertenecen a* $\bigcup_{i=1} \Omega_n$ *y por la regularidad del teorema de representación de Riesz, se cumple, la unicidad, excepto por escalares.*

Capítulo 4

Primeros desarrollos abstractos

Los resultados en análisis de Fourier clásico permiten ver de forma clara, como se puede pasar de trabajar funciones periódicas en $\mathbb{R}$ a un grupo compacto como $\mathbb{T}$; lo que hizo pensar en la necesidad de generalizar resultados en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{T}^n$ a grupos abelianos localmente compactos, grupos abelianos compactos o simplemente grupos compactos.

Verificaremos lo resultados involucrados desde la teoría de la medida y el análisis funcional para los grupos ALC y el espacio $L^1(G)$. En esta parte, corresponde demostrar que para cada grupo ALC, existe una medida regular de Borel invariante por traslaciones llamada *medida de Haar*, como se define la convolución en los espacios $L^1(G)$, y efectivamente comprobar que con esta operación, el espacio $L^1(G)$ es un álgebra de Banach.

4.1. Existencia de la medida de Haar para todo grupo ALC

Definición 16. *Sea E un conjunto acotado y F un conjunto con interior no vacío. El* ***radio*** *$E : F$ es el mínimo entero no negativo n tal que existe un conjunto $x_1, \ldots, x_n \in G$ tal que $E \subset \cup_{n=1}^{n} x_i F$.*

Propiedad 1. *$E : F$ es finito Como E es acotado existe C tal que $E \subset C$. Como $F^o \neq \emptyset$, existe $x^{-1} \in F$. Consideremos el conjunto xF, el cual es una abierto que contiene a e, el elemento neutro de X, ya que $x^{-1} \in F$. Sea $h \in C$. Dado que $e \in xF$, $h \in xF$ y se cumple que*

$$E \subseteq C \subseteq \cup_{x \in X} xF$$

Como C es compacto, existe un subrecubrimiento finito

$$E \subseteq C \subseteq \cup_{i=1}^{n} x_i F \to E \subseteq \cup_{i=1}^{n} x_i F$$

Por lo tanto, el radio $E : F$ es finito.

Propiedad 2. *Si A es acotado y de interior no vacío, entonces*

$$E : F \leq (E : A)(A : F)$$

Para probar este hecho, hacemos $m = E : A$ y $p = A : F$, luego

$$\begin{aligned} E \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} x_j A &\subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \left(\bigcup_{l=1}^{p} y_l F \right) \\ &\subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{l=1}^{p} x_j y_l F \\ &\subseteq \bigcup_{k=1}^{mp} w_k F \quad \textit{donde } w_k = x_j y_l \end{aligned}$$

luego, $mp = (E : A)(A : F)$ translaciones a izquierda de F también cubren a E, pero por definición, $E : F = n$ es el mínimo entero positivo tal que E es cubierto por translaciones a izquierda de F. Así $E : F \leq (E : A)(A : F)$, que era lo que se quería verificar.

Teorema 6. *Para cada conjunto abierto no vacío fijo U y un conjunto compacto A con interior no vacío, la función λ_U, definida para todo conjunto compacto C como*

$$\lambda_U(C) = \frac{C : U}{A : U}$$

Esta función es no negativa, finita, monotóna, subaditiva e invariante por izquierda; Es aditiva si C y D son compactos para los cuales $CU^{-1} \cap DU^{-1} = 0$, entonces

$$\lambda_U(C \cup D) = \lambda_U(C) + \lambda_U(D)$$

Demostración. *Probaremos que λ_U cumple las anteriores condiciones. En efecto,*

- $\lambda_U(C) \geq 0$, *por definición, $C : U \geq 0$ y $A : U \geq 0$, por ser enteros positivos.*
- $\lambda_C < \infty$ *ya que la propiedad 1, verifica la finitud de $C : U$ y $A : U$ es estrictamente positiva.*
- *Sean C, M compactos tal que $C \subseteq M$. Luego, $C \subseteq M \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} x_i U$. Dado que $C : U$ es el mínimo entero positivo que cumple $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i U$. De esta forma, $C : U \leq M : U$, que al dividir entre $A : U$, da como resultado*

$$\lambda_U(C) = \frac{C : U}{A : U} \leq \frac{M : U}{A : U} = \lambda_U(M)$$

- *Sea $C : U = m$, $D : U = n$ y $C \cup D = p$, entonces*

$$C \subseteq \bigcup x_i U, D \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} y_j U$$

Utilizando ambas contenencias obtenemos

$$\begin{aligned} C \cup D &\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} x_i U \cup \bigcup_{i=1}^{m} y_j U \\ &\subseteq \bigcup_{k=1}^{m+n} z_k U \end{aligned}$$

Como p es el mínimo entero positivo, $C \cup D : U \leq C : U + D : U$. Así,

$$\lambda_U(C \cup D) \leq \lambda_U(C) + \lambda_U(D)$$

- *Sea $U^{-1} = \{u^{-1} | uu^{-1} = e = u^{-1}u, u \in U\}$. Supongamos que $x \in CU^{-1} \cap DU^{-1}$, así que $x = cu^{-1}$ y $y = du^{-1}$. Luego, $xu = c$, $xu = d$ para algún $c \in C, d \in D$. Por tanto, $x \in (C \cap D) \cap xU$.*

Teorema 7. *Sea G un grupo abeliano localmente compacto. Entonces existe al menos una medida regular de Haar.*

Demostración. *Sea A un conjunto compacto fijo con interior no vacio y sea N la clase de todas las vecindades de la identidad. Para cada $U \in N$, construimos la función λ_U, definida para todos los subconjuntos compactos C como*

$$\lambda_U(C) = \frac{C : U}{A : U};$$

Como $(C : U) \leq (C : A)(A : U)$, se sigue que $0 \leq \lambda_U(C) \leq C : A$ para cada C compacto. El teorema anterior nos muestra que λ_U esta casi contenida, solo falla que no es necesariamente aditiva. Utilizaremos el teorema de Tychonoff para obtener un limite de λ_U que cumpla la aditividad.

Cada conjunto $C \in \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es la colección de todos los subconjuntos compactos de X, le corresponde un intervalo cerrado $[0, C : A]$ y denotamos por Φ al producto cartesiano de todos los intervalos. Luego, Φ es un espacio compacto de Hausdorff cuyos puntos son funciones de valor real ϕ definidas en $\mathbb{C}$, tal que, para cada $C \in \mathbf{C}$, $0 \leq \phi(C) \leq C : A$. Para cada U en $\mathcal{N}$ la función λ_U es un punto en el espacio Φ.

Para cada $U \in \mathbf{N}$ denotamos:

$$\Lambda(U) = \{\lambda_V : V \subset U; V \in \mathbf{N}\}$$

Si $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es cualquier colección finita de vecindades de la identidad, entonces $\cap_{i=1}^{n} U_i$ es también una vecindad de la identidad y además, para $j = 1, \ldots, n$

$$\cap_{i=1}^{n} U_i n \subset U_j$$

Se sigue que

$$\Lambda\left(\cap_{i=1}^{n} U_i\right) \subset \cap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)$$

y como Λ_U siempre contiene a Λ_U y es no vacío, entonces la colección de conjuntos Λ_U, $U \in \mathbf{N}$, tiene propiedad de intersección finita. La compacidad de Φ implica que existe un punto λ tal que

$$\lambda \in \cap \left\{ \overline{\lambda(U)} : U \in \mathbf{N} \right\}$$

Probaremos que λ es la función deseada, es decir, la medida de Haar para grupos ALC.

- *Se cumple que λ es no negativa y finita, ya que $0 \leq \lambda(C) \leq C : A < \infty$ para cada $C \in \mathcal{C}$.*

- *Para ver que λ es monótona, definimos $\xi_C(\phi) = \phi(C)$, la cual es una función continua en Φ y para dos compactos C y D cualesquiera el conjunto*

  $$\Delta = \{\phi : \phi(C) \leq \phi(D)\} \subset \Phi$$

  es cerrado.Si $C \subset D$ y $U \in \mathcal{N}$, entonces $\lambda_U \in \Delta$ y $\Lambda(U) \subset \Delta$, luego λ es monotona.

- *Sean C y D compactos tales que $C \cap D = 0$. Existe una vecindad $U \in \mathcal{N}$ tal que $CU^{-1} \cap DU^{-1} = \emptyset$. Si $V \in \mathbf{N}, V \subset U$, entonces $CV^{-1} \cap DV^{-1} = \emptyset$ y por el teorema anterior*

  $$\lambda_V(C \cup D) = \lambda_V(C) + \lambda_V(D)$$

  lo que indica que si $V \subset U$,

  $$\lambda_V \in \Delta = \{\phi : \phi(C \cup D) = \phi(C) + \phi(D)\}$$

  y $\Lambda(U) \subset \Delta$. Por lo tanto, $\lambda \in \overline{\Lambda(U)} \subset \Delta$ y λ sería aditiva, lo que concluye la existencia de la medida de Haar para los grupos ALC.

lo que prueba el teorema.

4.2. Rudin:$L^1(\mathbb{R}) * L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R})$

Teorema 8. *Sea $f \in L(\mathbb{R})$. Existen funciones $g, h \in L(\mathbb{R})$ tal que $f = g * h$.*

Demostración. Para $t > 0$, sea K_t la función cuya transformada de Fourier es

$$\hat{K}_t(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|y|}{t}, & \text{Si } |y| < t \\ 0, & \text{Si } |y| \geq t \end{cases}$$

Sea $\sigma_t = f * K_t$, y $\alpha(t) = \|f - \sigma_t\|$. Es bien sabido que $\alpha(t) \to 0$ cuanto $t \to \infty$.
Se elige una sucesión $\{t_n\}$ como sigue:

- $t_1 = 0$; y
- Para $n \geq 2$, $t_n > 2t_{n-1}$
- $\alpha(t) < n^{-2}$ si $t \geq t_n$.

Sea una función ϕ, cóncava y con segunda derivada continua en $[0, \infty)$, tal que $\phi(t_n) = n$. La consideración del gráfico de ϕ muestra que $t_n\phi'(t_n) < 2$ para $n \geq 2$. Como ϕ es cóncava en $[0, \infty]$. Veamos que se cumple por inducción. A tener en cuenta que si $c \in (0, \infty)$, $\phi(x) < \phi(c) + \phi'(c)(x - c)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a c. Si $n = 2$, sea $0 < a < t_2 < t_3 < b$, entonces

$$\begin{aligned}
\phi(t_2) &< \phi(t_3) + \phi'(t_3)(t_2 - t_3) \quad \text{Como } 2t_2 < t_3 \text{ entonces } t_2 - t_3 < -t_2 \\
2 &< 3 + \phi'(t_3)(-t_2) \\
-1 &< -t_2\phi'(t_3) \\
t_2\phi'(t_3) &< 1
\end{aligned}$$

Por ser cóncava en $[0, \infty)$, ϕ' es decreciente en $[0, \infty)$, luego

$$\begin{aligned}
\phi'(t_3) &< \phi'(t_2) \\
t_2\phi'(t_3) &< t2\phi'(t_2) \\
0 &< 1 - t_2\phi'(t_2) \\
t_2\phi'(t_2) &< 1 < 2
\end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para n, es decir, $t_n\phi'(t_n) < 2$. Sea $0 < a < t_n < t_{n+1} < b$. Como ϕ' es decreciente, se cumple que $t_n\phi'(t_{n+1}) < t_n\phi'(t_n) < 2$, por hipótesis de inducción. Luego,

$$\begin{aligned}
\phi(t_n) &< \phi(t_{n+1}) + \phi'(t_{n+1})(t_n - t_{n+1}) \\
&< \phi(t_{n+1}) + t_n\phi'(t_{n+1}) - t_{n+1}\phi'(t_{n+1}) \\
n &< n + 1 + 1 - t_{n+1}\phi'(t_{n+1}) \\
0 &< 2 - t_{n+1}\phi'(t_{n+1})
\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado que para $n \geq 2$, $t_n\phi'(t_n) < 2$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{t_n}^{t_{n+1}} \alpha(t)|\phi''(t)|dt &< -n^{-2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} t\phi''(t)dt \\
&= -n^{-2} \left[[t\phi'(t)]_{t_n}^{t_{n+1}} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \right] \\
&= -n^{-2}\{t_n\phi'(t_n) - t_{n+1}\phi'(t_{n+1}) + \phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)\} \\
&< 3n^{-2}.
\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \alpha(t)t|\phi''(t)|dt &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \alpha(t)|\phi''(t)|dt \\ &< 3\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \\ &= 3\left(\frac{\pi^2}{6}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int_0^\infty \alpha(t)t|\phi''(t)|dt < \infty \tag{4.1}$$

Ahora defina

$$g(x) = f(x)+\int_0^\infty \{\sigma_t(x)-f(x)\}t\phi''(t)dt = f(x)+\int_0^\infty \{(f*K_t)(x)-f(x)\}t\phi''(t)dt \tag{4.2}$$

Por la relación (4.1) y el teorema de Fubini, la integral en la ecuación (4.2) converge absolutamente para casi todo x, entonces $g \in L$. También,

$$\begin{aligned}g(x) &= f(x) + \int_0^\infty \{\sigma_t(x) - f(x)\}t\phi''(t)dt \\ g(x) &= f(x) + \int_0^\infty \{f * K_t(x) - f(x)\}t\phi''(t)dt \\ \hat{g}(y) &= \hat{f}(y) + \int_0^\infty \left\{\hat{f}(y)\hat{K}_t(y) - \hat{y}\right\} t\phi''(t)dt \\ \hat{g}(y) &= \hat{f}(y) + \hat{f}(y)\int_0^\infty \{\hat{K}_t(y) - 1\}t\phi''(t)dt\end{aligned}$$

Haciendo, $m(y) = \int_0^\infty \{\hat{K}_t(y) - 1\}t\phi''(t)dt$, m es una función par de y. Para $y > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left\{\hat{(}K)_t(y) - 1\right\} t\phi''(t)dt &= -\int_0^y t\phi''(t)dt - \int_y^\infty \frac{y}{t}t\phi''(t)dt \\ &= -\int_0^y t\phi''(t)dt - y\int_y^\infty \phi''(t)dt \\ &= -y\phi'(y) + \phi(y) - \phi(0) + y\phi'(y) \\ &= \phi(y) - 1\end{aligned}$$

Por tanto, si se define ϕ tal que $\phi(-t) = \phi(t)$, se tiene para todo $y > 0$,

$$\begin{aligned}\hat{g}(y) &= \hat{f}(y) + \hat{f}(y)(\phi(y) - 1)\\ \hat{g}(y) &= \hat{f}(y)\phi(y) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Después, ponemos $\lambda(t) = 1/\phi(t)$, y

$$h(x) = \int_0^\infty K_t(x) t \lambda''(t) dt. \tag{4.4}$$

Note que λ es convexo en $(0, \infty)$, y que $\lambda(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, y que en consecuencia

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t\lambda''(t)dt &= \lim_{b\to\infty} t\lambda'(t)|_0^b - \int_0^\infty \lambda'(t)dt\\ &= -\int_0^\infty \lambda'(t)dt\\ &= -\lim_{b\to\infty} \lambda(t)|_0^b\\ &= \lambda(0) = \frac{1}{\phi(0)} = 1 < \infty\end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty |h(x)|dx &= \int_{-\infty}^\infty |\int_0^\infty K_t(x)t\lambda''(t)dt|dx\\ &= \int_{-\infty}^\infty |\int_0^\infty t\lambda''(t)dt|dx\\ &= \int_{-\infty}^\infty |k_t(x)\lambda(0)|dx\\ &= \lambda(0)\int_{-\infty}^\infty |k_t(x)|dx\\ &< \infty\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{h}(y) &= \int_0^\infty \hat{k}_t(y) t\lambda''(t)dt \quad \text{para } y > 0\\
&= \int_y^\infty \left(1 - \frac{y}{t}\right) t\lambda''(t)dt\\
&= \int_y^\infty t\lambda''(t)dt - y\int_y^\infty \lambda''(t)dt\\
&= \lim_{b\to\infty} t\lambda'(t)|_y^b - \int_y^\infty \lambda'(t)dt\\
&= -y\left(\lim_{b\to\infty} \lambda'(t)|_y^b\right)\\
&= \lim_{b\to\infty} b\lambda'(b) - y\lambda'(y) - \lim_{b\to\infty} \lambda(t)|_y^b - \left(\lim_{b\to\infty} \lambda'(b) - \lambda'(y)\right)\\
&= -y\lambda'(y) - \lim_{b\to\infty} \lambda(b) + \lambda(y) + y\lambda'(y)\\
&= \lambda(y)
\end{aligned}
$$

Por tanto $h \in L$, y

$$\hat{h}(y) = \int_0^\infty \hat{K}_t(y) t\lambda''(t)dt.$$

Para $y > 0$, como $\hat{g}(y) = \hat{f}(y)\phi(y)$,

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(y) &= \frac{\hat{g}(y)}{\phi(y)}\\
&= \hat{g}(y)\lambda(y)\\
&= \hat{g}(y)\hat{h}(y)
\end{aligned}
$$

que era lo que queríamos probar. □

4.3. $L^1(G)$ es un álgebra de Banach

Para las estructuras clásicas se tiene que tanto $L^1(\mathbb{R})$ como $L^1(\mathbb{T})$ son álgebras de Banach como veremos a continuación.

Teorema 9. *$L^1(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach, donde el producto definido en él es la convolución, es decir, $fg = f * g$.*

Demostración. *Veamos que $L^1(\mathbb{R}) = (L^1(\mathbb{R}), +, *)$ es un anillo. En efecto, $(L^1(\mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano, porque es un espacio vectorial.*

- *Veamos que se cumple la asociatividad del producto. Por la invarianza de trans-*

lación y aplicaciones sucesivas del Teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned}(f*(g*h)) &= \int_0^\infty f(x-v)(g*h)(v)dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x-v)g(v-t)dtdv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x-v-t)g(v)h(t)dtdv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty (f*g)(x-t)h(t)dt \\ &= ((f*g)*h)\end{aligned}$$

De forma similar, se cumple la distributividad de la suma con respecto al producto. Sea $h \in L^1(G)$

$$\begin{aligned}(f*(g+h))(x) &= \int_0^\infty f(x-t)(g+h)(t)dt \\ &= \int_0^\infty f(x-t)g(t)dt + \int_0^\infty f(x-t)h(t)dt \\ &= (f*g)(x) + (f*g)(t)\end{aligned}$$

- *Veamos que si* $k \in \mathbb{C}$*, entonces* $k((f*g)(x)) = ((kf)*g)(x) = (f*kg)(x)$*. En efecto,*

$$\begin{aligned}k((f*g)(x)) &= k\int_0^\infty f(x-t)g(t)dt \\ &= \int_0^\infty (kf(x-t))g(t)dt = ((kf)*g)(x) \\ k((f*g)(x)) &= \int_0^\infty f(x-t)(kg(t))dt = (f*kg)(x)\end{aligned}$$

- *Veamos que* $\|f*g\| = \|f\|_1\|g\|_1$*. Después de aplicaciones sucesivas del teorema de Fubini y de Tonelli.*

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &= \int_0^\infty \left|\int_0^\infty f(x-t)g(t)dt\right| dx \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |f(x-t)g(t)|\, dtdx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty |f(x-t)g(t)|\, dx\right) dt = \int_0^\infty g(t)\left(\int_0^\infty |f(x-t)|\, dx\right) dt \\ &= \int_0^\infty |f(x-t)g(t)|\, dx \int_0^\infty g(t)dt = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty\end{aligned}$$

Así, $L^1(\mathbb{R})$ *es un álgebra de Banach. En sentido similar ocurre con* $L^1(\mathbb{T})$*.*

Ahora, podremos ver la demostración para un grupo abeliano localmente compacto.

Teorema 10. *Sea G un grupo ALC. El álgebra de grupo $L^1(G)$ es un álgebra de Banach.*

Demostración. *Sea $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un grupo ALC finito. Definimos la norma de $L^1(G)$ como*

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|$$

Sean $f, g \in L^1(G)$. Se define la convolución entre f y g como

$$(f * g)(x_k) = \sum_{x_i x_j = x_k} f(x_i)g(x_j)$$

$(L^1(G), +)$ es un grupo abeliano por ser un espacio normado. La operación $*$ cumple la asociatividad y distributividad. Igualmente, se cumple la relación entre la multiplicación por escalar y la convolución. Ahora, se debe ver que se cumple $\|f * g\| \leq \|f\|\|g\|$. Utilizaremos el hecho de que $x_i = x_k x_j^{-1}$, con lo que se puede escribir.

$$(f * g)(x_k) = \sum_{i=1}^{n} f(x_k x_j^{-1})g(x_j)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\|f * g\| &= \sum_{k=1}^{n} |(f * g)(x_k)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_k x_j^{-1})g(x_j) \right| \\
&\leq \sum_{k} \sum_{j} |f(x_k x_{j^{-1}})g(x_j)| \\
&= \sum_{k} \sum_{j} |f(x_k x_{j^{-1}})|\,|g(x_j)| \\
&= \sum_{j} |g(x_j)| \sum_{k} |f(x_k x_j^{-1})| \\
&= \|f\|\|g\|
\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. Para ver, el caso general, ver [7].

Capítulo 5

Análisis de Fourier moderno: Del teorema de factorización de Cohen hasta la conjetura L^p

Según Ross [5], el teorema de factorización de Cohen, publicado en 1957, fue la ruptura o el punto de quiebre de la teoría. A partir de ahí , todos los resultados aparecieron de forma natural para estructuras cada vez más generales, como módulos y álgebras.
Se obtuvieron teoremas de representación de funciones integrables en grupos compactos, teoremas de tasas de decrecimiento de coeficientes de Fourier para grupos ALC, entre otros. Resultados que permitieron un avance vertiginoso de la teoría en los años restantes del siglo XX hasta la conjetura L^p.

5.1. Representación de funciones en $L^1(G)$

En 1957, se conoció el teorema de Rudin, que permite encontrar una representación de la funciones integrables en $\mathbb{R}$, como convolución de dos funciones integrables en $\mathbb{R}^n$, un resultado que J. Dieudonné había considerado falso, por la construcción de un contraejemplo, al que Rudin pudo refutar por medio de esta demostración . Esto trajo un reto de Dieudonné que consistía en la generalización del resultado anterior a grupos ALC, a lo que Rudin pudo llegar en 1958, cuando demostró que una función integrable en G, un grupo ALC, se puede escribir como convolución de dos funciones integrables en G [9].

Teorema 11. *Sea G abeliano y localmente euclídeo entonces $L^1(G) * L^1(G) = L^1(G)$.*

Idea de la demostración. *Para mostrar este teorema se utiliza el hecho de que si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ y el teorema de representación de funciones integrables por convolución. El argumento principal utiliza la generalización para $L^1(\mathbb{R}^n)$ y para $L^1(\mathbb{T}^n)$. Como $G = \mathbb{T}^n \oplus \mathbb{R}^n \oplus D$ donde D es discreto, se obtiene el resultado.*

5.2. Teorema de factorización de Cohen

Paul Cohen (1934-2004) fue un matemático, ganador de la medalla Fields en 1966 y el primero en resolver uno de los problemas de Hilbert. En análisis de Fourier, demostró un resultado que por su simpleza y elegancia llevó a desarrollar la teorá en ámbitos más generales. Paul Cohen se doctoró en 1957 bajo la tutoría de Antoni Zygmund. Luego de ver el teorema demostrado por Rudin para grupos ALC, se fijó que implicitamente llevaban unidades aproximadas y en 1959 demostró el teorema que lleva su nombre.

Definición 17. *Un álgebra de Banach B se dice que tiene una unidad aproximada a izquierda, si existe una constante M, tal que para todo $\epsilon > 0$ y x_i, para $1 \leq i \leq n$, elementos de B, entonces existe $e \in B$, que satisface*

$$\|e\| < M, \qquad \|ex_i - x_i < \epsilon\| \tag{5.1}$$

Análogamente se define una unidad aproximada a derecha.

Teorema 12 (Teorema de factorización de Cohen)**.** *Si B es un álgebra de Banach con una unidad aproximada acotada, entonces $AA = A$*

Como $L^1(G)$ es un álgebra de Banach con unidad aproximada acotada, entonces que cumple

Teorema 13. *$L^1(G) * L^1(G) = L^1(G)$ para todos los grupos localmente compactos G. Incluso los no abelianos.*

5.3. Otros resultados

Estos resultados comprenden teorema de representación en módulos de Banach, en espacios de funciones y por último la conjetura L^p.

5.3.1. Teorema de factorización de módulos de Banach

Dado un álgebra de Banach B, un B-módulo de Banach a izquierda es un espacio de Banach L, en el que el álgebra actúa. Notaremos $(b, \chi) \to b \bullet \chi$ a la acción de B en L.Además se cumple para tdo $(b, \chi) \in B \times L$

$$\|b \bullet \chi\|_L \leq \|b\|_B \|\chi\|_L$$

Teorema 14 (Factorización de módulos de Banach)**.** *Si B es un álgebra de Banach con una unidad aproximada acotada, y si L es un B-módulo de Banach a izquierda, entonces $A \bullet L$ es un subespacio vectorial cerrado. En particular, si $A \bullet L$ es denso en L, entonces $A \bullet L = L$.*

Que tiene como consecuencias los siguientes resultados:

Teorema 15 (Hewitt-Ross)**.** *Para $1 \leq p < \infty$, se tiene que $L^1(G) * L^p(G) = L^p(G)$ donde G es un grupo localmente compacto.*

Teorema 16 (Curtis-Figa Talamanca)**.** *Sea $C_{ru}(G)$ el espacio de las funciones en G uniformemente continuas acotadas a izquierda, donde G es localmente compacto. Entonces*

$$L^1(G) * L^\infty(G) = C_{ru}(G) = L^1(G) * C_{ru}(G)$$

5.3.2. La conjetura L^p

Esta conjetura fue propuesta en 1963, por M. Rajagolapan en su tesis de doctorado, pensando que ya se había resuelto para el caso abeliano. Varios autores durante las siguientes décadas se empeñaron en su resolución sin lograr obtener una prueba. Esta conjetura fue dejada de lado en la década de los 80. Hasta que en 1990, Sadahiro Saeki pudo demostrarla en su artículo "La conjetura L^p y la desigualdad de Young", publicada en la revista de la Universidad de Illinois. Este teorema nos muestra como a partir de la representación en espacios funcionales podemos verificar la compacidad del grupo G.

Teorema 17. *Suponga que existe $p \in (1, \infty)$ tal que $f * g \in L^p(G)$ para todas las funciones simétricas $f, g \in L^p(G)$. Entonces G es compacto.*

Idea de la demostración. *Para demostrar este teorema se utilizan tres lemas:*

- *Sea A un subconjunto simétrico de un grupo localmente compacto. Entonces tenemos*
$$|A|^2|A^{m+n}| \leq |A^4| \cdot |A^m| \cdot |A^n| \textit{para } m, n \geq 1$$
- *Sea $p, q, r \in (1, \infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \neq 1$. Suponga que $L^p_s * L^q_s \subset L^r$. Entonces G es unimodular, $L^p * L^q \subset L^r$ y existe una constante positiva C_0 tal que*
$$\|f * g\|_r \leq C_0 \|f\|_p \|g\|_1 \qquad \textit{para } f \in L^p \textit{ y } g \in L^q$$
- *Sea $p, q, r \in [1, \infty]$ y C_0 como en el lema anterior, entonces se tiene que*
$$(|A| \cdot |B|)^{1/p' + 1/q'} \leq C_0 |AB|^{2/r'}$$
para todos los subconjuntos compactos A, B de G.

Capítulo 6

Conclusiones

- El desarrollo del análisis de Fourier incluyó desde sus principios la creación de nuevas formas, estructuras y teorías, como puede verse en la secuencia cronológica. Durante el siglo XIX y XX, se lograron muchos resultados importantes que le abrieron el camino a las preguntas y a los retos que varios matemáticos enfrentaron y resolvieron de manera brillante.

- Las estructuras clásicas se empezaron a ver desde un enfoque general. Ya no se veía a $\mathbb{T}$ simplemente como un subconjunto particular de los complejos, sino que visto como un grupo topológico compacto y aprovechando la isomorfía con el grupo de las funciones 2π- periódicas, se preguntaban que propiedades se tenían y si se podían generalizar.

- Los teoremas de factorización en estructuras clásicas, le dieron la idea a Paul Cohen para demostrar el teorema de factorización que marcó un antes y después en la teoría. A partir de aquí, y de forma natural se fueron formulando resultados cada vez más sorprendentes e importantes, como la conjetura L^p.

Bibliografía

[1] Bachman, Richard, Elements of Abstract Harmonic Analysis. Academic Press, New York. 1964.

[2] Bartle, Robert, The elements of integration. John Wiley Sons, Inc. New York. 1966.

[3] Cañadas, Antonio. Una perspectiva histórica de las series de Fourier. Universidad de Granada. Granada. 1991

[4] Halmos, Paul, Measure Theory. Springer- Verlag, Inc. New York. 1974.

[5] Ross, Kenneth. A trip from Classical to Abstract Fourier Analysis. En: Notices of the AMS, Volumen 61 N. 9 (Octubre 2014), páginas 1032-1038.

[6] Rudin, Walter, Factorization in the group algebra of the real line, En: Proc. Nat. Acad Sci.USA N. 43(1953),páginas 339-340

[7] Rudin, Walter, Fourier Analysis on Groups. 1 Edición. Groningen, Paises Bajos, Interscience publishers, 1962

[8] Rudin, Walter, Real and Complex Analysis, McGraw Hill, Tercera edición. 1966

[9] Rudin, Walter, The Way I Remember It, American Mathematical Society, London Mathematical Society. 1996

[10] Salem, Raphael, Sur les tranformations des séries de Fourier. Fund. Math. N. 33 (1939),108-114

[11] Saeki, Sadahiro, The L^p-conjecture and Young's Inequality, Illinois J. Math. N. 34 (1990),614-627

[12] Szekelyhidi, Laszlo, Harmonic and Spectral analysis. Singapur, World scientific publishing co., 2014