

# El efecto fotoeléctrico: un estudio desde el punto de vista semi-clásico que permite su explicación sin hacer uso del concepto de cuanto de energía

Presentado por:

Roberto Ruiz Dagua



**UNIVERSIDAD DISTRITAL  
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Facultad de Ciencias y Educación  
Proyecto Curricular de Licenciatura en Física  
Bogotá, 2018

Trabajo de grado dirigido por:

Edwin Munévar Espitia

Trabajo de grado presentado como requisito opcional para optar por el título de  
Licenciado en Física

Copyright © 2018  
All rights reserved

# Agradecimientos

El trabajo que a continuación se presenta es gracias a cada una de las personas que con su apoyo hicieron posible cada uno de los pasos dados en mi formación como licenciado en física. A mis padres y hermanos que sin importar los altos y bajos siempre han estado ahí con palabras de apoyo al igual que a los profesores que se convirtieron en amigos y los amigos que se convirtieron en profesores.

# Tabla de contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Imágenes de la Mecánica Cuántica</b>	<b>9</b>
2.1. Imagen de Schrödinger . . . . .	9
2.2. Imagen de Heisenberg . . . . .	11
2.3. Imagen de Dirac . . . . .	14
<b>3. Teoría de la Perturbación Independiente del Tiempo</b>	<b>16</b>
<b>4. Teoría de la Perturbación Dependiente del Tiempo</b>	<b>21</b>
<b>5. El Efecto Fotoeléctrico sin Fotones</b>	<b>26</b>

# Lista de figuras

1.1. Montaje experimental utilizado por Heinrich Hertz para demostrar la existencia de las ondas electromagnéticas . . . . .	6
5.1. Esquema demostrativo del cambio de nivel energético por parte del electrón cuando sobre el átomo incide una onda electromagnética clásica . . . . .	32
5.2. Gráficas del comportamiento experimental del efecto fotoeléctrico . . . . .	35

# Lista de tablas

1.1. Ecuaciones deducidas por Maxwell para describir los fenómenos electromagnéticos. Las variables corresponden a: $\alpha, \beta, \gamma$ para la intensidad magnética, $F, G, H$ para el momento electromagnético, $p', q', r'$ para la corriente total incluyendo la variación por el desplazamiento, $P, Q, R$ para la fuerza electromotriz, $\Psi$ para el potencial eléctrico, $p, q, r$ para la corriente causada por la conducción real, $f, g, h$ para el desplazamiento eléctrico y $e$ para la cantidad de electricidad libre. . . . .	5
2.1. Dependencias de las imágenes de la mecánica cuántica . . . . .	9

# Resumen

En 1905 Albert Einstein publica su artículo *“Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz”* donde por primera vez se logra dar una explicación al fenómeno del desprendimiento de electrones desde una superficie metálica como consecuencia de la incidencia de un haz de luz sobre dicha superficie. La explicación se basa en el concepto de cuanto de energía introducido por Max Planck. En 1968 Willis E. Lamb Jr. y Marlan O. Scully en su artículo *“El efecto fotoeléctrico sin fotones”* buscan dar una explicación al mismo efecto estudiado y teorizado por Einstein, reemplazando el concepto de fotón por una onda electromagnética clásica la cual será la encargada de estimular los electrones del átomo hasta el punto de lograr desprenderlos del mismo. En este caso, haciendo uso de la imagen de interacción o imagen de Dirac y la teoría de perturbación dependiente del tiempo se busca dar una explicación probabilística a la interacción entre átomo y la radiación. En este trabajo se reproducen los cálculos llevados a cabo por Lamb y Scully, mostrando cómo a partir de un modelo semi-clásico se logra explicar los resultados experimentales del efecto fotoeléctrico de la misma manera como lo hace la explicación basada en el concepto de fotón.

# Abstract

In 1905 Albert Einstein published his article *“On a Heuristic View of the Production and Transformation of Light”* where for the first time in the history of physics an explanation to the detachment of electrons from a metallic surface as a consequence of the incidence of a light ray on it at a certain frequency is given. The explanation was based on the contribution of Max Planck and his concept of photon as a corpuscle of light. In 1968 Willis E. Lamb Jr and Marlan O. Scully in their article *“The photoelectric effect without photons”* look for an explanation to the same effect studied and theorized by Einstein without resorting to the concept of photon which is replaced by a classical wave that will be the one in charge of stimulating the electrons of the atom until the point of releasing them. In this case, by using the interaction picture and the time-dependent perturbation theory, a probabilistic explanation of the radiation-matter interaction is presented. In this work, we reproduce the calculations carried out by Lamb and Scully. It is shown how from a semi-classical model the experimental results from the photoelectric effect can be explained in a similar fashion as the model based on the concept of photon does it.



# Objetivos

## General

Desarrollar desde un punto de vista teórico el efecto fotoeléctrico explicándolo como un fenómeno semi-clásico en ausencia de la noción de fotón, haciendo uso de la teoría de perturbación dependiente del tiempo como herramienta para este fin.

## Específicos

- Utilizar la teoría de perturbación dependiente del tiempo como una alternativa para describir fenómenos donde el tiempo afecta sus comportamientos.
- Demostrar teóricamente la posibilidad de explicar los resultados del efecto fotoeléctrico sin la necesidad de hacer uso del concepto de fotón.
- Mostrar la necesidad de manejar métodos de aproximación para el tratamiento de fenómenos físicos.
- Presentar a los estudiantes de la Licenciatura en Física el análisis de un fenómeno físico específico que muestra una perturbación dependiente del tiempo

# Capítulo 1

## Introducción

James Clerk Maxwell pasó a la historia de la física por su conocido trabajo teórico que logró unificar los fenómenos eléctricos y magnéticos dando origen a la teoría electromagnética en su publicación de 1864 titulada “*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*” [1]. La unificación de las fuerzas eléctrica y magnética abrió un nuevo campo de estudio en la física, el electromagnetismo, que fue descrito por Maxwell a partir de 20 ecuaciones (ver Tabla 1.1).

Ecuaciones que con el paso del tiempo y el desarrollo de nuevas ramas en el estudio de la matemática como lo es el cálculo vectorial fueron unificadas y se redujeron a cuatro que son las que en la actualidad gobiernan y describen el mundo del electromagnetismo tanto en el espacio abierto como en la materia y que reciben el nombre de ecuaciones de Heaviside-Maxwell [2]:

- Ley de Gauss
- Ley de Gauss para el campo magnético
- Ley de Faraday
- Ley de Ampere

El físico alemán Heinrich Rudolf Hertz (1857 - 1894) es quien se da a la tarea de demostrar experimentalmente los estudios teóricos de Maxwell sobre el electromagnetismo y la manifestación del mismo. Dentro de su genialidad, Hertz fue capaz de idear un montaje experimental que consistía en dos esferas metálicas separadas una distancia determinada  $r$  y por las cuales se hacía circular una diferencia de potencial del orden de los kilovoltios

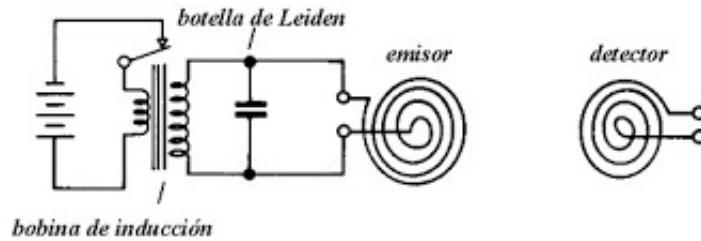
Tabla 1.1: Ecuaciones deducidas por Maxwell para describir los fenómenos electromagnéticos. Las variables corresponden a:  $\alpha, \beta, \gamma$  para la intensidad magnética,  $F, G, H$  para el momento electromagnético,  $p', q', r'$  para la corriente total incluyendo la variación por el desplazamiento,  $P, Q, R$  para la fuerza electromotriz,  $\Psi$  para el potencial eléctrico,  $p, q, r$  para la corriente causada por la conducción real,  $f, g, h$  para el desplazamiento eléctrico y  $e$  para la cantidad de electricidad libre.

Fenómeno	Ecuaciones	Fenómeno	Ecuaciones
Fuerza magnética	$\mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$ $\mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}$ $\mu\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}$	Corriente eléctrica	$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi p'$ $\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi q'$ $\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi r'$
Fuerza electromotriz	$P = \mu \left( \gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}$ $Q = \mu \left( \alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}$ $R = \mu \left( \beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}$	Corrientes totales	$p' = p + \frac{df}{dt}$ $q' = q + \frac{dg}{dt}$ $r' = r + \frac{dh}{dt}$
Elasticidad eléctrica	$P = kf$ $Q = kg$ $R = kh$	Resistencia eléctrica	$P = -\delta p$ $Q = -\delta q$ $R = -\delta r$
Electricidad libre	$e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$	Ecuación de continuidad	$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0$

(ver Figura 1.1) [3]. Con la disminución de dicha distancia  $r$  las esferas eran capaces de generar una descarga eléctrica obteniendo así una perturbación del espacio ocasionada por la misma.

Aunque parte importante del montaje experimental era la generación de la descarga eléctrica que se encargaba de generar una perturbación en el espacio, se hacía necesario un complemento al mismo que fuera capaz de percibir dicho efecto y que consistía en un juego de esferas similares a las generadoras de la perturbación y con la característica que por ellas no circulara ningún potencial eléctrico. Este par de juegos de esferas complementaban el montaje experimental de generación-recepción de ondas electromagnéticas permitiendo la comprobación de la teoría realizada por Maxwell [1].

Mientras la realización de las pruebas experimentales de Hertz ocurrían, accidentalmente tropezó con un fenómeno inexplicable que se presentaba con la descarga eléctrica ocurrida entre las esferas, se evidenciaba entre las mismas una descarga más luminosa o de mayor



Experimentos con bobinas e espirales, Hertz c. 1886.

Figura 1.1: Montaje experimental utilizado por Heinrich Hertz para demostrar la existencia de las ondas electromagnéticas [3]

potencia cuando sobre ellas se hacia incidir una radiación diferente, luz ultravioleta. Situaciones que con el mismo montaje experimental presentaba resultados diferentes y que al momento de realizar una comparación hacia plantear una gran incognita ¿Por qué se presentaba este fenómeno solo en condiciones de exposición a radiación diferente a la habitual?.

El estudio de este fenómeno, conocido como el efecto fotoeléctrico, haciendo uso de la mecánica clásica se vio enfrentado a grandes inconvenientes que no pudo superar al momento de tratar de explicarse y que se describen de acuerdo a las características que se enunciaron mucho tiempo después [4]:

- El instantáneo desprendimiento de fotoelectrones de las placas metálicas al momento de hacer incidir radiación electromagnética sobre ella.  
Planteando que la radiación electromagnética como una onda clásica que incidía sobre las superficies metálicas y que era capaz de dar energía a los electrones para escapar de las mismas, siempre debía hacerse por oleadas hasta que este último adquiriera la energía suficiente.
- La definición de una frecuencia mínima o frecuencia umbral para cada uno de los materiales en la cual ocurre el desprendimiento de fotoelectrones en el efecto fotoeléctrico.
- Siempre que la intensidad sea mayor a la umbral, el número de fotoelectrones emitidos por la placa metálica será mayor pero siempre tendrán el mismo valor de energía cinética.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Rodriguez Meza, M.A. y Cervantes Cota, J. L. (2006). El efecto fotoeléctrico. Ciencia ergo sum. 13. p 305.

Estas fueron las razones por las cuales la mecánica clásica no era la herramienta adecuada para hacer dicha explicación puesto que entre el comportamiento que predecía y lo que ocurría experimentalmente existía una brecha muy grande, por lo que se hizo necesario buscar una nueva teoría que permitiera el estudio entre la partícula de la luz y la materia y que dio un gran avance con el concepto de cuantización expuesta por Max plank que asociaba valores mínimos e indivisibles a las partículas asociadas a los diferentes fenómenos naturales.

En el año 1905 Albert Einstein publica su artículo “Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz” [5] donde por primera vez en la historia logra dar una explicación teórica a lo que realmente sucede cuando se hace incidir sobre una superficie metálica un haz de luz con determinada frecuencia. Este planteamiento teórico empieza desde el estudio de la radiación de cuerpo negro abordado desde el punto de vista de Max Planck y la explicación teórica del fenómeno ocurrido cuando en una cavidad con paredes perfectamente reflejantes se encuentran un número de partículas que interactúan entre sí ejerciendo solo fuerzas conservativas.

El uso de la mecánica cuántica como herramienta, garantiza la explicación del efecto fotoeléctrico haciendo uso del concepto de cuanto de energía para explicar las características propias de su comportamiento cuando la partícula fundamental de la luz, el fotón, que lleva una frecuencia determinada y por lo tanto una energía propia incide sobre una superficie donde es capaz de desprender electrones de los átomos generando una diferencia de potencial siempre que la frecuencia que posee supere la frecuencia umbral propia de cada material.

En febrero de 1968 Willis E. Lamb y Marlan O. Scully publican un artículo titulado “The photoelectric effect without photons” (el efecto fotoeléctrico sin fotones) [6] cuyo fundamento principal para el desarrollo del mismo, se basa en la cuantización del campo electromagnético y los fenómenos físicos que lo necesitan para ser explicados y que enuncian como:

- La ley de distribución de Plank para la radiación de cuerpo negro (1900)
- El efecto Compton (1926)
- La emisión espontánea (Dirac, 1927)
- Desplazamientos a nivel electrodinámico (1947)<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>The Photoelectric Effect Without Photons. Willis E. Lamb y Marlan O. Scully. Pág. 1

De acuerdo a esta consideración se empieza el desarrollo de la demostración de la posibilidad de explicar el efecto fotoeléctrico sin la necesidad de usar la noción de fotón como la partícula fundamental de la luz utilizando como herramienta las imágenes o representaciones de la mecánica cuántica, en especial la imagen de Dirac o de interacción junto con la teoría de perturbaciones que permiten describir los sistemas cuyo Hamiltoniano depende estrictamente del tiempo.

En el desarrollo de este trabajo se da un vistazo histórico muy general que permite analizar los eventos más importantes en el desarrollo teórico y experimental del efecto fotoeléctrico desde su descubrimiento “accidental” al intentar demostrar la existencia de las ondas electromagnéticas hasta la teorización realizada por Albert Einstein partiendo del estudio de la radiación de cuerpo negro y utilizando el concepto de cuanto de energía dado por Planck. También se busca explicar cada una de las imágenes o representaciones que aparecen en el estudio de fenómenos naturales desde el punto de vista de la mecánica cuántica y la importancia de las mismas según su dependencia o independencia del tiempo dando como resultado, al momento de su aplicación, la teoría de la perturbación dependiente o independiente del tiempo, las cuales muestran fenómenos naturales que se ven afectados en primeras aproximaciones por el tiempo y por último se mostrará el desarrollo del artículo titulado “The photoelectric effect without photons” donde se mostrarán las consideraciones que se tomaron en cuenta por los autores al buscar explicar un fenómeno (que hasta el momento solo era tratado cuánticamente) desde un punto de vista clásico-cuántico o semi-clásico donde el fotón es reemplazado por una onda electromagnética clásica.

## Capítulo 2

# Imágenes de la Mecánica Cuántica

En el estudio de los fenómenos físicos pueden encontrarse funciones que son gobernadas por un Hamiltoniano que no depende del tiempo, pero en otros casos estos mismos dependen explícitamente del tiempo por lo que se hace necesario un método de solución diferente, un método de aproximaciones; la teoría de perturbaciones.

En el estudio de la mecánica cuántica se tienen muchas representaciones de lo que se llaman funciones de onda y operadores junto con sus dependencias espaciales y temporales. Estas últimas son aquellas que permiten definir tres de los cuadros más importantes de la mecánica cuántica que buscan describir las evoluciones de los sistemas que se están estudiando.

### 2.1. Imagen de Schrödinger

El cuadro de Schrödinger es la herramienta utilizada en la mecánica cuántica solo cuando “los vectores de estado dependen explícitamente del tiempo pero sus operadores no”

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle = H | \psi(t) \rangle \quad (2.1)$$

Tabla 2.1: Dependencias de las imagenes de la mecánica cuántica. Tomado de Sakurai, J.J. Modern Quantum Mechanics. Addison-Wesley. 1994. Pág. 319

	Heisenberg picture	Interaction picture	Schrödinger picture
Estado Ket	No cambia	Evolución determinada por $V_I$	Evolución determinada por $H$
Observable	Evolución determinada por $H$	Evolución determinada por $H_o$	No cambia

Estableciendo la ecuación  $H | \psi_n \rangle = E_n | \psi_n \rangle$  para los estados estacionarios del sistema donde  $\frac{d}{dt} | \psi_n \rangle = 0$

Expresando a  $|\psi\rangle$  como una combinación lineal que expresa los  $n$  posibles estados del sistema

$$|\psi(t)\rangle = a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle + \dots$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) |\psi_n\rangle \quad (2.2)$$

reemplazando (2.2) en la ecuación (2.1)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \sum_n a_n(t) |\psi_n\rangle &= H \sum_n a_n(t) |\psi_n\rangle \\ i\hbar \frac{d}{dt} \sum_n a_n(t) |\psi_n\rangle &= \sum_n a_n(t) H |\psi_n\rangle \\ i\hbar \frac{d}{dt} \sum_n a_n(t) |\psi_n\rangle &= \sum_n a_n(t) E_n |\psi_n\rangle \\ i\hbar \sum_n \left( \frac{da_n(t)}{dt} \right) |\psi_n\rangle &= \sum_n a_n(t) E_n |\psi_n\rangle \\ i\hbar \left( \frac{da_n(t)}{dt} \right) &= a_n(t) E_n \end{aligned}$$

$$\frac{da_n(t)}{dt} = \frac{-i}{\hbar} E_n a_n(t) \quad (2.3)$$

Resolviendo la ecuación diferencial (2.3) por el método de separación de variables

$$\frac{da_n(t)}{a_n(t)} = \frac{-iE_n}{\hbar} dt$$

$$a_n(t) = k e^{-itE_n/\hbar} \quad (2.4)$$

Ahora se debe hallar el valor de la constante  $k$  y para ello se utilizará la condición inicial  $t = t_o$  en (2.4)

$$a_n(t_o) = k e^{-it_o E_n/\hbar}$$

Por lo que la constante  $k$  tiene el valor

$$k = a_n(t_o) e^{it_o E_n/\hbar} \quad (2.5)$$



Reemplazando (2.5) en la ecuación (2.4) se obtiene

$$a_n(t) = a_n(t_o)e^{-i(t-t_o)E_n/\hbar} \quad (2.6)$$

Reemplazando (2.6) en (2.2)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(t-t_o)H/\hbar} \sum_n a_n(t_o) |\psi_n\rangle$$

definiendo  $\sum_n a_n(t_o) |\psi_n\rangle = |\psi(t_o)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(t-t_o)H/\hbar} |\psi(t_o)\rangle \quad (2.7)$$

Donde  $e^{-i(t-t_o)E/\hbar}$  se denomina el operador de evolución temporal para la imagen de Schrödinger

$$U(t, t_o) = e^{-i(t-t_o)H/\hbar} \quad (2.8)$$

El cual debe cumplir con todas las propiedades del operador evolución temporal:

$$\hat{U}^\dagger(t, t_o)\hat{U}(t, t_o) = I$$

$$\hat{U}(t, t) = I$$

$$\hat{U}^\dagger(t, t_o) = \hat{U}^{-1}(t, t_o) = \hat{U}(t_o, t)$$

$$\hat{U}(t_1, t_1)\hat{U}(t_2, t_3) = \hat{U}(t_1, t_3)$$

## 2.2. Imagen de Heisenberg

La imagen de Heisenberg se desprende directamente de la imagen de Schrödinger cuando sobre ella se aplica  $\hat{U}$  sobre  $|\psi(t)\rangle_H$  obteniendo

$$|\psi(t)\rangle_H = \hat{H}^\dagger(t) |\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle \quad (2.9)$$

donde se pone como condición  $t_o = 0$  en (2.7) dando como resultado

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_o) |\psi(t_o)\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_o = 0) |\psi(t_o = 0)\rangle$$

$$| \psi(t) \rangle = \hat{U}(t) | \psi(0) \rangle \quad (2.10)$$

donde  $\hat{U}^\dagger$  en  $t_o = 0$  da como resultado

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_o) &= e^{-i(t-t_o)\hat{H}/\hbar} \\ \hat{U}(t, t_o = 0) &= e^{-i(t-t_o=0)\hat{H}/\hbar} \end{aligned}$$

$$\hat{U}(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar} \quad (2.11)$$

$$\hat{U}^\dagger(t) = e^{it\hat{H}/\hbar} \quad (2.12)$$

Reemplazando el valor obtenido de (2.11) en la ecuación (2.10)

$$| \psi(t) \rangle = e^{-it\hat{H}/\hbar} | \psi(0) \rangle \quad (2.13)$$

Como se conoce que la dependencia del tiempo del vector de estado  $| \psi(t) \rangle_H$  es nula (ver tabla 2.1), se tiene que  $\frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle_H = 0$  Por lo tanto el valor esperado de un operador  $\hat{A}$  en el estado  $| \psi(t) \rangle$  evoluciona en el tiempo como se muestra a continuación

$$\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | e^{itH/\hbar} \hat{A} e^{-itH/\hbar} | \psi(0) \rangle =_H \langle \psi(0) | \hat{A}_H | \psi(0) \rangle_H \quad (2.14)$$

donde

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t) \quad (2.15)$$

$$\hat{A}_H(t) = e^{itH/\hbar} \hat{A} e^{-itH/\hbar}$$

Para determinar la evolución temporal del operador  $\hat{A}_H(t)$  se aplica la derivada a (2.15)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) &= \frac{d}{dt} \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t) \\ \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) &= \frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt} \hat{A} \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \frac{d\hat{A}}{dt} \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \frac{d\hat{U}(t)}{dt} \end{aligned}$$

Como el operador  $\hat{A}$  no depende explícitamente del tiempo  $\frac{d\hat{A}}{dt} = 0$ , por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = \frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt} \hat{A} \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \frac{d\hat{U}(t)}{dt} \quad (2.16)$$

Haciendo uso de (2.12) se conoce que

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} e^{itH/\hbar} \\
\frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} \hat{H} e^{itH/\hbar} \\
\frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt} &= -\frac{1}{i\hbar} \hat{H} \hat{U}^\dagger
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Como  $\hat{U}^\dagger$  y  $\hat{H}$  conmutan

$$\frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} \hat{U}^\dagger \hat{H}$$

Por otro lado, haciendo uso de (2.11) se conoce que

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{U}}{dt} &= \frac{d}{dt} e^{-itH/\hbar} \\
\frac{d\hat{U}}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} \hat{H} e^{-itH/\hbar} \\
\frac{d\hat{U}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \hat{U}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Reemplazando (2.17) y (2.18) en (2.16)

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} H e^{it\hat{H}/\hbar} \hat{A} \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \left( -\frac{i}{\hbar} H e^{-it\hat{H}/\hbar} \right) \\
\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} &= -\frac{1}{i\hbar} \hat{H} \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U} + \frac{1}{i\hbar} \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{H} \hat{U}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Introduciendo la unidad como  $\hat{U}(t)\hat{U}^\dagger(t) = 1$  en (2.19) para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} &= -\frac{1}{i\hbar} \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} \hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} + \frac{1}{i\hbar} \hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} \\
\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \left( \hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} - \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} \hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} \right)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Sabiendo que  $\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} = H$

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left( \hat{A}_H(t) \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} - \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} \hat{A}_H(t) \right)$$

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left( \hat{A}_H(t)\hat{H} - \hat{H}\hat{A}_H(t) \right)$$

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \hat{A}_H, \hat{H} \right] \quad (2.21)$$

Siendo esta última expresión aquella que puede describir el comportamiento del operador propio en la imagen de Heisenberg  $\hat{A}_H$

### 2.3. Imagen de Dirac

La imagen de Dirac o de interacción se usa en mecánica cuántica como herramienta para describir fenómenos que poseen Hamiltonianos que tienen una dependencia explícita del tiempo.

$$| \psi(t) \rangle_I = e^{it\hat{H}_o/\hbar} | \psi(t) \rangle \quad (2.22)$$

Para un tiempo igual a cero  $t = 0$

$$| \psi(0) \rangle_I = | \psi(0) \rangle$$

Se evidencia que la evolución temporal de la función  $| \psi(t) \rangle$  es gobernada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle = H | \psi(t) \rangle \quad (2.23)$$

Se establece el Hamiltoniano como  $H = H_o + V$  donde  $H_o$  es el Hamiltoniano independiente del tiempo y  $V$  es una perturbación que depende estrictamente del tiempo. Derivando respecto al tiempo la ecuación (2.22)

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle_I = i\hbar \frac{d}{dt} e^{itH_o/\hbar} | \psi(t) \rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle_I = i\hbar \left( \frac{iH_o}{\hbar} e^{itH_o/\hbar} | \psi(t) \rangle + e^{itH_o/\hbar} \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle \right)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle_I = i^2 H_o e^{itH_o/\hbar} | \psi(t) \rangle + e^{itH_o/\hbar} \left( i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle \right)$$

Haciendo uso de la ecuación (2.23) se obtiene

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle_I = -H_o e^{itH_o/\hbar} | \psi(t) \rangle + e^{itH_o/\hbar} H | \psi(t) \rangle \quad (2.24)$$

Reemplazando el Hamiltoniano  $H = H_o + V$  en el lado derecho de la ecuación (2.24)

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = -H_o e^{itH_o/\hbar} |\psi(t)\rangle + e^{itH_o/\hbar} (H_o + V) |\psi(t)\rangle \quad (2.25)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = -H_o e^{itH_o/\hbar} |\psi(t)\rangle + H_o e^{itH_o/\hbar} |\psi(t)\rangle + V e^{itH_o/\hbar} |\psi(t)\rangle$$

obteniendo finalmente

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = V e^{itH_o/\hbar} |\psi(t)\rangle \quad (2.26)$$

Multiplicando por  $e^{itH_o/\hbar} e^{-itH_o/\hbar}$

$$e^{itH_o/\hbar} V e^{-itH_o/\hbar} e^{itH_o/\hbar} |\psi(t)\rangle$$

donde se definen

$$e^{itH_o/\hbar} V e^{-itH_o/\hbar} = V_I(t) \quad (2.27)$$

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{itH_o/\hbar} |\psi(t)\rangle \quad (2.28)$$

Lo que permite obtener como resultado

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = V_I(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (2.29)$$

Encontrando así la ecuación de Schrödinger para la imagen de Dirac o de interacción que sirve como herramienta para analizar fenómenos físicos cuyo Hamiltoniano posee una perturbación estrictamente dependiente del tiempo.

## Capítulo 3

# Teoría de la Perturbación Independiente del Tiempo

Como primer paso para poder iniciar el estudio de la teoría de la perturbación independiente del tiempo se establece la ecuación de valores propios

$$\hat{H}^o \psi_n^o = E_n^o \psi_n^o \quad (3.1)$$

donde se establece la relación que existe entre el ket y el bra para  $\psi$  dando origen al delta de Dirac para dos estados

$$\langle \psi_n^o | \psi_n^o \rangle = \delta_n$$

Estableciendo el Hamiltoniano que permitirá describir el fenómeno que será objeto de estudio

$$\hat{H} = \hat{H}^o + \lambda \hat{H}' \quad (3.2)$$

Se pueden expresar tanto la función  $\psi$  y los valores de energía  $E$  como una serie de potencias dando como resultado diversos valores a diferentes ordenes que serán utilizados en los cálculos de acuerdo a lo que se busca

$$\psi_n = \psi_n^o + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots \quad (3.3)$$

$$E_n = E_n^o + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots \quad (3.4)$$

Reemplazando las series de potencias obtenidas en la ecuaciones (3.3) y (3.4) en la ecuación (3.1) se obtiene

$$(\hat{H}^o + \lambda \hat{H}')(\psi_n^o + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots) = (E_n^o + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots)(\psi_n^o + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots)$$

Realizando los productos correspondientes entre el Hamiltoniano y cada una de las expansiones en series de potencias se obtiene:

$$\begin{aligned} & \hat{H}^o \psi_n^o + \lambda \hat{H}^o \psi_n^1 + \lambda^2 \hat{H}^o \psi_n^2 + \dots + \lambda \hat{H}' \psi_n^o + \lambda^2 \hat{H}' \psi_n^1 + \lambda^3 \hat{H}' \psi_n^2 + \dots \\ & = E_n^o \psi_n^o + \lambda E_n^o \psi_n^1 + \lambda^2 E_n^o \psi_n^2 + \dots + \lambda E_n^1 \psi_n^o + \lambda^2 E_n^1 \psi_n^1 + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Agrupando los miembros de ambos lados de la igualdad según la dependencia de  $\lambda$  en (3.5)

- Para  $\lambda^0$

$$\hat{H}^o \psi_n^o = E_n^o \psi_n^o \quad (3.6)$$

- Para  $\lambda^1$

$$\begin{aligned} \lambda \hat{H}^o \psi_n^1 + \lambda \hat{H}' \psi_n^o &= \lambda E_n^o \psi_n^1 + \lambda E_n^1 \psi_n^o \\ \lambda (\hat{H}^o \psi_n^1 + \hat{H}' \psi_n^o) &= \lambda (E_n^o \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^o) \end{aligned}$$

$$\hat{H}^o \psi_n^1 + \hat{H}' \psi_n^o = E_n^o \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^o \quad (3.7)$$

Reescribiendo la expresión (3.7) en términos de los vectores de estado  $|\psi_n\rangle$

$$\hat{H}^o |\psi_n^1\rangle + \hat{H}' |\psi_n^o\rangle = E_n^o |\psi_n^1\rangle + E_n^1 |\psi_n^o\rangle \quad (3.8)$$

Con el fin de poder aplicar el producto interno entre vectores de estado, se hace necesario que  $\langle \psi_n^o |$  actúe sobre toda la expresión (3.8)

$$\langle \psi_n^o | \hat{H}^o | \psi_n^1\rangle + \langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^o\rangle = \langle \psi_n^o | E_n^o | \psi_n^1\rangle + \langle \psi_n^o | E_n^1 | \psi_n^o\rangle \quad (3.9)$$

Sabiendo que cada uno de los valores de las energías es constante, estos pueden salir de la notación

$$\langle \psi_n^o | \hat{H}^o | \psi_n^1\rangle + \langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^o\rangle = E_n^o \langle \psi_n^o | \psi_n^1\rangle + E_n^1 \langle \psi_n^o | \psi_n^o\rangle$$

Por la hermiticidad de  $\hat{H}^o$

$$\begin{aligned} E_n^o \langle \psi_n^o | \psi_n^1\rangle + \langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^o\rangle &= E_n^o \langle \psi_n^o | \psi_n^1\rangle + E_n^1 \langle \psi_n^o | \psi_n^o\rangle \\ \langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^o\rangle &= E_n^1 \langle \psi_n^o | \psi_n^o\rangle \end{aligned}$$

Como se habla de bases ortonormales el producto interno entre  $\langle \psi_n^o | \psi_n^o \rangle = 1$

$$\langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^o \rangle = E_n^1 \quad (3.10)$$

Ya conociendo el valor de la energía a primer orden se hace necesario conocer igualmente el valor de la función de onda a primer orden  $\psi_n^1$ . Para ello se inicia de nuevo con la ecuación obtenida con el producto entre expansiones de  $\psi_n$  y  $E_n$  a primer orden (3.7)

$$\hat{H}^o \psi_n^1 + \hat{H}' \psi_n^o = E_n^o \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^o$$

$$\hat{H}^o \psi_n^1 - E_n^o \psi_n^1 = E_n^1 \psi_n^o - \hat{H}' \psi_n^o$$

$$(\hat{H}^o - E_n^o) \psi_n^1 = (E_n^1 - \hat{H}') \psi_n^o \quad (3.11)$$

Utilizando la expresión para  $\psi_n^1$  que permite escribirla en términos de una suma que será sustituida en (3.11)

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} C_m^n \psi_m^o \quad (3.12)$$

$$\sum_{m \neq n} (E_m^o - E_n^o) C_m^n \psi_m^o = -(\hat{H}' - E_n^1) | \psi_n^o \rangle$$

$$\sum_{m \neq n} (E_m^o - E_n^o) C_m^n \psi_m^o = -\hat{H}' | \psi_n^o \rangle + E_n^1 | \psi_n^o \rangle \quad (3.13)$$

Haciendo que  $\langle \psi_l^o |$  actúe sobre toda la expresión (3.13)

$$\sum_{m \neq n} (E_m^o - E_n^o) C_m^n \langle \psi_l^o | \psi_m^o \rangle = -\langle \psi_l^o | \hat{H}' | \psi_n^o \rangle + E_n^1 \langle \psi_l^o | \psi_n^o \rangle \quad (3.14)$$

Haciendo la consideración  $l = n$  para (3.14)

$$\sum_{m \neq n} (E_m^o - E_n^o) C_m^n \langle \psi_n^o | \psi_m^o \rangle = -\langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^o \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^o | \psi_n^o \rangle$$

Se trabaja con bases ortonormales por lo tanto:

$$0 = -\langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^o \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^o | \psi_n^o \rangle$$



$$\langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^o \rangle = E_n^1 \quad (3.15)$$

Haciendo la consideración  $l \neq n$  para (3.14)

$$(E_m^o - E_n^o)C_m^n \langle \psi_m^o | \psi_m^o \rangle = -\langle \psi_m^o | \hat{H}' | \psi_n^o \rangle + E_n^1 \langle \psi_m^o | \psi_n^o \rangle$$

$$(E_m^o - E_n^o)C_m^n = -\langle \psi_m^o | \hat{H}' | \psi_n^o \rangle$$

$$\frac{\langle \psi_m^o | \hat{H}' | \psi_n^o \rangle}{E_n^o - E_m^o} = C_m^n \quad (3.16)$$

Habiendo hallado la expresión de los coeficientes  $C_m^n$  en la ecuación (3.16) solo queda reemplazarlos en la ecuación (3.12) para hallar la expresión de la función  $\psi_n^1$

$$\psi_n^1 = \sum \frac{\langle \psi_m^o | \hat{H}' | \psi_n^o \rangle}{E_n^o - E_m^o} \psi_m^o \quad (3.17)$$

A partir del desarrollo anterior, se pueden conocer los valores para los coeficientes y la función solamente a primer orden.

Tomando en cuenta los productos entre las expansiones en serie de potencias de los términos  $\psi_n$  expuestos en (3.3) y  $E_n$  en (3.4) se obtiene la expresión a segundo orden

$$\lambda^2 \hat{H}^o \psi_n^2 + \lambda^2 \hat{H}' \psi_n^1 = \lambda^2 E_n^o \psi_n^2 + \lambda^2 E_n^1 \psi_n^1 + \lambda^2 E_n^2 \psi_n^o$$

$$\hat{H}^o \psi_n^2 + \hat{H}' \psi_n^1 = E_n^o \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^o \quad (3.18)$$

Utilizando la notación de Dirac para transformar la función de onda  $\psi_n = | \psi_n \rangle$  en la ecuación (3.18)

$$\hat{H}^o | \psi_n^2 \rangle + \hat{H}' | \psi_n^1 \rangle = E_n^o | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 | \psi_n^o \rangle \quad (3.19)$$

Con el fin de poder aplicar el producto interno entre funciones se hace necesario que  $\langle \psi_n^o |$  actúe sobre toda la expresión

$$\langle \psi_n^o | \hat{H}^o | \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^1 \rangle = \langle \psi_n^o | E_n^o | \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^o | E_n^1 | \psi_n^1 \rangle + \langle \psi_n^o | E_n^2 | \psi_n^o \rangle$$

Conociendo el hecho de que los valores de la energía son constantes

$$\langle \psi_n^o | \hat{H}^o | \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^1 \rangle = E_n^o \langle \psi_n^o | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^o | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^o | \psi_n^o \rangle$$

Usando la hermiticidad de  $\hat{H}^o$

$$\begin{aligned}\langle \hat{H}^o \psi_n^o | \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^1 \rangle &= E_n^o \langle \psi_n^o | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^o | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^o | \psi_n^o \rangle \\ E_n^o \langle \psi_n^o | \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^1 \rangle &= E_n^o \langle \psi_n^o | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^o | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^o | \psi_n^o \rangle \\ \langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^1 \rangle &= E_n^1 \langle \psi_n^o | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^o | \psi_n^o \rangle\end{aligned}$$

Utilizando la ortonormalidad entre las bases  $\langle \psi_n^o | \psi_n^o \rangle = 1$

$$\langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^1 \rangle = E_n^1 \langle \psi_n^o | \psi_n^1 \rangle + E_n^2$$

$$\langle \psi_n^o | \hat{H}' | \psi_n^1 \rangle - E_n^1 \langle \psi_n^o | \psi_n^1 \rangle = E_n^2 \quad (3.20)$$

Demostrando así que los valores para las energías y las funciones de ordenes superiores siempre van a depender estrictamente de los valores hallados a primeros términos.

## Capítulo 4

# Teoría de la Perturbación Dependiente del Tiempo

Para el caso de sistemas físicos en los que existe una perturbación dependiente del tiempo, el Hamiltoniano del sistema se divide generalmente en dos partes: un Hamiltoniano  $\hat{H}_o$  que se toma del sistema no perturbado y del cual se conocen sus soluciones y un segundo término  $V(t)$  que depende estrictamente del tiempo y que es una perturbación externa y pequeña comparada con  $\hat{H}_o$ . Por lo tanto del Hamiltoniano que describe el sistema queda dado por:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_o + V(t) \quad (4.1)$$

del cual se conocen sus valores y estados propios

$$\hat{H}_o | \psi_n \rangle = E_n | \psi_n \rangle \quad (4.2)$$

donde se puede representar la función en términos de  $\hat{H}_o$  o  $E_n$  según se estableció en la imagen de interacción (2.2)

$$| \psi_n(t) \rangle = e^{-it\hat{H}_o/\hbar} | \psi_n \rangle = e^{-iE_n t/\hbar} | \psi_n \rangle \quad (4.3)$$

Analizando el tiempo en el cual la perturbación incide sobre el sistema, se dan las dos opciones en el tiempo en las que  $V(t)$  actúa

$$V(t) = \begin{cases} V(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{si } t < 0, t > \tau \end{cases}$$

Analizando que la perturbación solo ocurre en el intervalo de tiempo entre  $0 \leq t \leq \tau$  se plantea la ecuación de Schrödinger para el Hamiltoniano aplicable en el mismo

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle = \left( \hat{H}_o + V(t) \right) | \psi(t) \rangle \quad (4.4)$$

que tiene como solución en términos del coeficiente  $C_n$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) e^{-iE_n t} |\psi_n\rangle \quad (4.5)$$

Utilizando la ecuación de la imagen de interacción (2.29)

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle_I}{dt} = V_I(t) |\psi(t)\rangle_I$$

donde se conoce  $|\psi(t)\rangle_I$  de (2.22) y  $V_I(t)$  de (2.27) de acuerdo con la imagen de interacción.

Haciendo uso de la ecuación de evolución temporal (2.7)

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_o) |\psi(t_o)\rangle$$

Reemplazando (2.22) en (2.7)

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{it\hat{H}_o/\hbar} |\psi(t)\rangle = e^{it\hat{H}_o/\hbar} \hat{U}(t, t_o) |\psi(t_o)\rangle = e^{it\hat{H}_o/\hbar} \hat{U}(t, t_o) e^{-it\hat{H}_o/\hbar} |\psi(t_o)\rangle_I$$

Por lo tanto

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}_I(t, t_o) |\psi(t_o)\rangle_I \quad (4.6)$$

donde

$$\hat{U}_I(t, t_o) = e^{it\hat{H}_o/\hbar} \hat{U}(t, t_o) e^{-it\hat{H}_o/\hbar}$$

Reemplazando (4.6) en la ecuación de la imagen de interacción (2.27)

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_I(t, t_o) |\psi(t_o)\rangle_I}{dt} = V_I(t) \hat{U}_I(t, t_o) |\psi(t_o)\rangle_I$$

dando como resultado la ecuación diferencial

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_I(t, t_o)}{dt} = V_I(t) \hat{U}_I(t, t_o) \quad (4.7)$$

Cuya solución luego de ser realizada utilizando las Series de Dyson es

$$d\hat{U}_I(t, t_o) = -\frac{i}{\hbar} V_I(t) \hat{U}_I(t, t_o) dt$$

$$\hat{U}_I(t, t_o) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_o}^t V_I(t') \hat{U}_I(t', t_o) dt' \quad (4.8)$$

Haciendo que  $\hat{U}_I = (t', t_o) = 1$

$$\hat{U}_I(t, t_o) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_o}^t V_I(t') dt' \quad (4.9)$$

Haciendo  $\hat{U}_I = (t', t_o) = \hat{U}_I^1(t', t_o)$

$$\hat{U}_I^1(t, t_o) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_o}^t V_I(t') dt' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_o}^t V_I(t_1) dt_1 \int_{t_o}^{t_1} V_I(t_2) dt_2$$

para el n-ésimo término

$$\begin{aligned} \hat{U}_I^{n-1}(t, t_o) = & 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_o}^t V_I(t') dt' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_o}^t V_I(t_1) dt_1 \int_{t_o}^{t_1} V_I(t_2) dt_2 + \dots \\ & + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_o}^t V_I(t_1) dt_1 \int_{t_o}^{t_1} V_I(t_2) dt_2 \int_{t_o}^{t_2} V_I(t_3) dt_3 \dots \int_{t_o}^{t_{n-1}} V_I(t_n) dt_n + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

Donde se puede evidenciar que el operador temporal  $\hat{U}_I^n(t, t_o)$  se puede representar como una serie ordenada en el tiempo que dependerá de todos los resultados anteriores al orden  $n$  que se quiere hallar.

## Probabilidad de transición

La probabilidad de transición de un estado inicial  $|\psi_i\rangle$  a un estado final  $|\psi_f\rangle$  está dada por:

$$P_{if}(t) = \left| \langle \psi_f | \hat{U}_I(t, t_o) | \psi_i \rangle \right|^2 \quad (4.11)$$

Sustituyendo la expresión encontrada en (4.10) dentro de (4.11) se obtiene

$$\begin{aligned} P_{if}(t) = & \left| \langle \psi_f | 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_o}^t V_I(t') dt' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_o}^t V_I(t_1) dt_1 \int_{t_o}^{t_1} V_I(t_2) dt_2 + \dots \right. \\ & \left. + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_o}^t V_I(t_1) dt_1 \int_{t_o}^{t_1} V_I(t_2) dt_2 \int_{t_o}^{t_2} V_I(t_3) dt_3 \dots \int_{t_o}^{t_{n-1}} V_I(t_n) dt_n + \dots | \psi_i \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

distribuyendo el bra  $\langle \psi_f |$  y el ket  $| \psi_i \rangle$  en cada una de las expresiones que dependen

estrictamente del tiempo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_{if}(t) = & \left| \langle \psi_f | \psi_i \rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle \psi_f | V_I(t') | \psi_i \rangle dt' \right. \\
& + \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t \langle \psi_f | V_I(t_1) | \psi_i \rangle \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi_f | V_I(t_2) | \psi_i \rangle dt_2 + \dots \\
& + \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^3 \int_{t_0}^t \langle \psi_f | V_I(t_1) | \psi_i \rangle dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi_f | V_I(t_2) | \psi_i \rangle dt_2 \int_{t_0}^{t_2} \langle \psi_f | V_I(t_3) | \psi_i \rangle dt_3 \\
& \dots \left. \int_{t_0}^{t_{n-1}} \langle \psi_f | V_I(t_n) | \psi_i \rangle dt_n \right|^2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Utilizando la expresión encontrada en (2.27)

$$\begin{aligned}
P_{if}(t) = & \left| \langle \psi_f | \psi_i \rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle \psi_f | e^{it'\hat{H}_o/\hbar} V(t) e^{-it'\hat{H}_o/\hbar} | \psi_i \rangle dt' + \right. \\
& \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t \langle \psi_f | e^{it_1\hat{H}_o/\hbar} V(t_1) e^{-it_1\hat{H}_o/\hbar} | \psi_i \rangle dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi_f | e^{it_2\hat{H}_o/\hbar} V(t_2) e^{-it_2\hat{H}_o/\hbar} | \psi_i \rangle dt_2 + \dots \left. \right|^2
\end{aligned}$$

Utilizando  $\hat{H}_o | \psi_n \rangle = E_n | \psi_n \rangle$

$$\begin{aligned}
P_{if}(t) = & \left| \langle \psi_f | \psi_i \rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{it'E_f/\hbar} \langle \psi_f | V(t) | \psi_i \rangle e^{-it'E_i/\hbar} dt' + \right. \\
& \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t e^{it_1E_f/\hbar} \langle \psi_f | V(t_1) | \psi_i \rangle e^{-it_1E_i/\hbar} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{it_2E_f/\hbar} \langle \psi_f | V(t_2) | \psi_i \rangle e^{-it_2E_i/\hbar} dt_2 + \dots \left. \right|^2
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Definiendo la frecuencia de transición como  $\omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar}$

$$\begin{aligned}
P_{if}(t) = & \left| \langle \psi_f | \psi_i \rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{it'\omega_{fi}} \langle \psi_f | V(t) | \psi_i \rangle dt' + \right. \\
& \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t e^{it_1\omega_{fi}} \langle \psi_f | V(t_1) | \psi_i \rangle dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{it_2\omega_{fi}} \langle \psi_f | V(t_2) | \psi_i \rangle dt_2 + \dots \left. \right|^2
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Si se representa la probabilidad de transición en términos de coeficientes de la forma  $C_n(t)$  se obtiene una forma más reducida

$$P_{if}(t) = |C_f^0 + C_f^1(t) + C_f^2(t) + \dots|^2 \tag{4.16}$$

donde

$$C_f^0 = \langle \psi_f | \psi_i \rangle = \delta_{fi}$$

y al momento de igualar las expresiones (4.15) y (4.16) se puede deducir

$$C_f^1(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle \psi_f | V(t') | \psi_i \rangle e^{i\omega_{fi}t'} dt' \quad (4.17)$$

Debido a que la perturbación  $V(t)$  es pequeña comparada con  $\hat{H}_0$  solo se hace necesaria la primera expansión y en términos de los coeficientes queda dado por  $P_{if}(t) = \left| C_f^0 + C_f^1(t) \right|^2$ . Ahora, puesto que  $f \neq i$  la expresión  $\langle \psi_f | \psi_i \rangle = 0$  obteniendo

$$P_{if}(t) = \left| C_f^1(t) \right|^2$$

$$P_{if}(t) = \left| -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle \psi_f | V(t') | \psi_i \rangle e^{i\omega_{fi}t'} dt' \right|^2 \quad (4.18)$$

## Capítulo 5

# El Efecto Fotoeléctrico sin Fotones

El efecto fotoeléctrico es un fenómeno natural que se presenta en el momento en que la radiación electromagnética incide sobre una superficie metálica. La radiación, con determinada frecuencia, es la encargada de excitar los electrones de los átomos logrando así el desprendimiento de electrones y la generación de una diferencia de potencial. Esta explicación tiene en cuenta la existencia del fotón y su interacción con los átomos, permitiendo que el electrón cambie de nivel energético; este comportamiento fue explicado por Albert Einstein de una manera netamente cuántica por medio de la relación  $h\nu = E + \phi$ . [7] Para dar inicio al estudio del efecto fotoeléctrico desde un punto de vista semi-clásico se plantea una expresión para el Hamiltoniano del electrón que no ha sido perturbado por ningún agente externo lo cual permite relacionar la masa del electrón  $m_e$  y el potencial estático  $V_o(\vec{r})$  debido a la interacción con los otros electrones como

$$H = \frac{p^2}{2m_e} + V_o(\vec{r}) \quad (5.1)$$

En el momento en que el átomo se ve perturbado por una onda electromagnética el Hamiltoniano que describe al electrón varía dando origen a una nueva expresión que relaciona el vector potencial  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  y el potencial eléctrico  $\phi(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m_e} \left( \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 - e\phi(\vec{r}, t) + V_o(\vec{r}) \\ H &= \frac{1}{2m_e} \left( p^2 + 2\frac{e}{c} pA + \left( \frac{e}{c} \right)^2 A^2 \right) - e\phi(\vec{r}, t) + V_o(\vec{r}) \\ H &= \frac{p^2}{2m_e} + \frac{e}{m_e c} pA + \frac{e^2 A^2}{2c^2 m_e} - e\phi(\vec{r}, t) + V_o(\vec{r}) \\ H &= \frac{p^2}{2m_e} + V_o(\vec{r}) - e\phi(\vec{r}, t) + \frac{e}{m_e c} pA + \frac{e^2 A^2}{2c^2 m_e} \end{aligned}$$



$$H = H_o - e\phi(\vec{r}, t) + \frac{e}{m_e c} pA + \frac{e^2 A^2}{2c^2 m_e} \quad (5.2)$$

Se hace la aproximación de no considerar los efectos magnéticos con el fin de poder simplificar la ecuación, además de permitir trabajar expansiones a primer orden. Teniendo en cuenta estas dos consideraciones la ecuación resultante es <sup>1</sup>

$$H = H_o - e\phi(\vec{r}, t) \quad (5.3)$$

donde

$$\phi(\vec{r}, t) = E(t)X$$

Aunque el operador posición solo está dado en el eje x, el desarrollo que se aplicará se puede generalizar a los otros dos ejes coordenados. Por lo tanto la expresión se puede escribir como

$$H = H_o - eE(t)X \quad (5.4)$$

Analizando la forma del Hamiltoniano (4.1) que pertenece a la teoría de la perturbación dependiente del tiempo

$$H = H_o + V(t)$$

donde  $H_o$  es el Hamiltoniano del sistema en ausencia de perturbaciones y  $V(t)$  la perturbación que depende estrictamente del tiempo. Comparando ambos Hamiltonianos se puede escribir

$$V(t) = -eE(t)X \quad (5.5)$$

Conociendo la ecuación de movimiento para los operadores en la imagen de Dirac (2.27) y aplicándola al operador posición se obtiene

$$X(t) = e^{iH_o t/\hbar} X e^{-iH_o t/\hbar} \quad (5.6)$$

Para expresar la probabilidad de transición entre un estado fundamental discreto  $|g\rangle$  a un estado cuasi-continuo  $|k\rangle$  se deben tener en cuenta de manera general que debe existir la probabilidad que el Hamiltoniano  $H_o$  con estado propio  $H_o |i\rangle = E_i |i\rangle$  en el estado inicial

---

<sup>1</sup>Aunque se están pasando por alto las interacciones magnéticas que ocurren en el átomo por facilidad en el desarrollo matemático, no se desliga el electrón en ningún momento de sus interacciones eléctricas propias de las partículas cargadas, por lo cual, se sigue hablando de un electrón que sigue siendo parte del átomo y que está unido al mismo por medio de las fuerzas de Coulomb

se convierta en otro  $H_o$  con estado propio  $H_o | f \rangle = E_f | f \rangle$  en un estado final debido a una perturbación externa que depende del tiempo  $V(t)$ .

Vinculando esta condición general con el caso particular que se está trabajando se puede decir

$$\begin{aligned} |g\rangle &= |i\rangle \\ |k\rangle &= |f\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$H_o |g\rangle = E_g |g\rangle \quad (5.7)$$

$$H_o |k\rangle = E_k |k\rangle \quad (5.8)$$

La probabilidad de transición (4.11) de un estado inicial  $|i\rangle$  a un estado final  $|f\rangle$  está dada de manera general por la expresión

$$P(i \rightarrow f) = \langle f | U(t) | i \rangle \quad (5.9)$$

Conociendo la forma del operador  $U(t)$  que se determinó haciendo uso de la serie de Dyson que permite calcular una expansión perturbativa hasta un orden  $n$  cualquiera

$$U(t) = e^{-iH_o t/\hbar} U_I(t) \quad (5.10)$$

Reemplazando la expresión (5.10) en (5.9) obteniendo

$$P(i \rightarrow f) = \langle f | e^{-iH_o t/\hbar} U_I(t) | i \rangle$$

$$P(i \rightarrow f) = e^{-iH_o t/\hbar} \langle f | U_I(t) | i \rangle \quad (5.11)$$

Haciendo uso de (5.8) y aplicando la expresión general de la probabilidad de transición a la perturbación  $V(t)$

$$P(g \rightarrow k) = e^{-iH_o t/\hbar} \langle g | V(t) | k \rangle \quad (5.12)$$

$$P(k \rightarrow g) = e^{iH_o t/\hbar} \langle k | V(t) | g \rangle \quad (5.13)$$

En haciendo uso de (5.5) y utilizando los términos de la notación de Dirac

$$\langle g | V(t) | k \rangle = e^{-iH_o t/\hbar} \langle g | -eE(t)X | k \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle g | V(t) | k \rangle &= -eE(t)e^{-iH_0t/\hbar} \langle g | X | k \rangle \\
\langle g | V(t) | k \rangle &= -eE(t)e^{-iH_0t/\hbar} X_{g,k} \\
\langle g | V(t) | k \rangle &= -eX_{g,k}E(t)e^{-iE_kt/\hbar}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Igualmente

$$\begin{aligned}
\langle k | V(t) | g \rangle &= e^{iH_0t/\hbar} \langle k | -eE(t)X | g \rangle \\
\langle k | V(t) | g \rangle &= -eE(t)e^{iH_0t/\hbar} \langle k | X | g \rangle \\
\langle k | V(t) | g \rangle &= -eE(t)e^{iH_0t/\hbar} X_{k,g} \\
\langle k | V(t) | g \rangle &= -eX_{k,g}E(t)e^{iE_kt/\hbar}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

donde  $E_k$  es la energía del k-ésimo estado excitado medido en relación con la energía del estado fundamental.

Utilizando la ecuación de Schrödinger (2.1) para los operadores  $|\alpha\rangle$

$$i\hbar \frac{d|\alpha\rangle}{dt} = H|\alpha\rangle$$

$$i\hbar \frac{d|\alpha\rangle}{dt} = (H_0 + V(t))|\alpha\rangle \tag{5.16}$$

$$-i\hbar \frac{d\langle\alpha|}{dt} = \langle\alpha| H$$

$$-i\hbar \frac{d\langle\alpha|}{dt} = \langle\alpha| (H_0 + V(t)) \tag{5.17}$$

Enunciando la forma general del operador o matriz densidad  $\rho$ <sup>2</sup>

$$\rho = \sum_i P_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \tag{5.18}$$

Para toda probabilidad normalizada  $\sum_i P_i = 1$  por lo tanto el operador o matriz densidad se convierte en  $\rho = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ .

---

<sup>2</sup>Se hace uso de la matriz densidad u operador densidad probabilístico para hablar del estado cuasi-continuo en el cual se va a encontrar el electrón después de ser excitado por la onda electromagnética clásica, debido a que se concibe el estado cuasi-continuo como una región del espacio donde se puede hablar de un ensamble de estados individuales cuya separación espacial es pequeña.

Hallando la evolución temporal de  $\rho$

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{d}{dt} (|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|) \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d|\alpha_i\rangle}{dt}\langle\alpha_i| + |\alpha_i\rangle\frac{d\langle\alpha_i|}{dt}\end{aligned}\quad (5.19)$$

Obteniendo de las ecuaciones de Schrödinger las equivalencias (5.16) y (5.17) para los operadores y reemplazándolas en (5.19)

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} (H_o + V(t)) |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| + \frac{i}{\hbar} |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| (H_o + V(t)) \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} (H_o + V(t)) \rho + \frac{i}{\hbar} \rho (H_o + V(t)) \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} (H_o\rho + V(t)\rho - \rho H_o - \rho V(t)) \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} [V(t), \rho(t)] - \frac{i}{\hbar} [H_o, \rho(t)] \\ \frac{d\rho}{dt} &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right) [V(t), \rho(t)]\end{aligned}\quad (5.20)$$

que tiene una solución formal de acuerdo a las series de Dyson

$$\rho(t) = \rho(0) - \left(\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')] \quad (5.21)$$

Reemplazando la expresión (5.21) en la ecuación (5.20)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{-i}{\hbar} \left[ V(t), \rho(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')] \right] \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} \left( V(t) \left( \rho(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')] \right) - \left( \rho(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')] \right) V(t) \right) \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} \left( V(t)\rho(0) - \frac{i}{\hbar} V(t) \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')] - \rho(0)V(t) + \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')] V(t) \right) \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} \left( V(t)\rho(0) - \rho(0)V(t) - \frac{i}{\hbar} V(t) \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')] + \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')] V(t) \right) \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} \left( V(t)\rho(0) - \rho(0)V(t) - \frac{i}{\hbar} \left( V(t) \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')] - \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')] V(t) \right) \right)\end{aligned}$$

Sabiendo que:

$$V(t)\rho(0) - \rho(0)V(t) = [V(t), \rho(0)]$$

$$V(t) \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')] - \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')]V(t) = [V(t), \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')]]$$

se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right) [V(t), \rho(0)] + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \left[ V(t), \int_0^t dt' [V(t'), \rho(t')] \right] \quad (5.23)$$

Tomando en cuenta la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico para poder analizar los valores de energía

$$h\nu = E + \phi \quad (5.24)$$

Integrando la ecuación (5.23) que es resultado de la aplicación de las series de Dyson da como resultado una expresión que muestra el comportamiento de la densidad  $\rho$  en el estado continuo, luego de dejar de lado la expresión que denota resonancia negativa o antiresonancia debido a que se busca es el desprendimiento del electrón y la emisión de energía.

$$\rho_{kk}(t) \approx \frac{4 \left| \frac{eX_{k,g}E_o}{2\hbar} \right|^2 \sin^2 \left[ (\varepsilon_k \hbar^{-1} - \nu) \frac{t}{2} \right]}{(\varepsilon_k \hbar^{-1} - \nu)^2} \quad (5.25)$$

La ecuación de probabilidad (5.25) a partir del elemento matricial  $X_{kg}$  describe el posible paso del electrón desde un nivel energético fundamental  $|g\rangle$  a un nivel energético de un estado cuasi-continuo  $|k\rangle$  al momento en que una onda electromagnética clásica incide sobre el átomo. (ver Figura 5.1)

Análogamente a la ecuación postulada por Albert Einstein se puede decir que la energía del fotón liberado puede ser representada por

$$\varepsilon_k \approx \hbar\nu \quad (5.26)$$

$$|\Delta\varepsilon_k| \approx \frac{\hbar}{t}$$

Reemplazando (5.26) en la ecuación (5.24)

$$\varepsilon_k = \phi + E$$

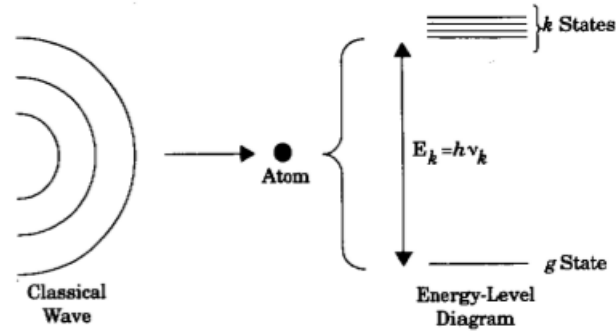


Figura 5.1: Esquema demostrativo del cambio de nivel energético por parte del electrón cuando sobre el átomo incide una onda electromagnética clásica. Tomado de Greenstein, G. and Zajonc, A. G. Quantum Challenge: Modern Research on the Foundations of Quantum Mechanics. Jones and Bartlett Publishers. 2006. Pág. 27

$$\hbar\nu = \phi + E \quad (5.27)$$

donde se puede observar que la probabilidad de la emisión del fotón se puede dar en uno de todos los estados energéticos que se encuentran en el continuo donde se puede modelar de la siguiente manera

$$P(t) = \sum_k \rho_{k,k}(t) \quad (5.28)$$

Representando el continuo no como una serie de estados discretos sino como un todo, la representación cambiaría a una forma integral

$$\sum_k \dots \rightarrow \int d\varepsilon \sigma(\varepsilon) \dots$$

donde se pueden indentificar el número de estado posibles en términos de  $\varepsilon$  como  $\sigma(\varepsilon)$  dando resultado a una nueva representación de la densidad en el k-ésimo estado como

$$\rho_{k,k}(t) \approx 2\pi \left| \frac{eX_{k,g}E_o}{2\hbar} \right|^2 \delta(\varepsilon\hbar^{-1} - \nu) t \quad (5.29)$$

Representando la probabilidad como

$$P(t) = \gamma t \quad (5.30)$$

donde el término  $\gamma$  es igual a

$$\gamma = 2\pi\hbar\sigma(\hbar\nu) \left| \frac{eX_{k,g}}{2\hbar} \right|^2 E_o^2 \quad (5.31)$$

Buscando analizar la evolución temporal de la probabilidad  $P(t)$  se aplica la derivada respecto al tiempo a (5.28)

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_k \rho_{k,k}(t)$$

donde se reemplaza el valor para  $\rho_{kk}$  de la ecuación (5.23) en el estado cuasi-continuo  $k$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_k \langle k | \left[ V(t), \int_0^t dt' \left[ V(t'), \rho(t') \right] \right] | k \rangle \quad (5.32)$$

Haciendo la expansión de los corchetes presentes en la ecuación (5.32)

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} = & - \left(\frac{1}{\hbar^2}\right) \int_0^t dt' \sum_k \left[ V_{k,g}(t) V_{g,k}(t') \rho_{k,k}(t') + \rho_{k,k}(t' V_{k,g}(t') V_{g,k}(t)) \right] + \\ & \left(\frac{1}{\hbar^2}\right) \int_0^t dt' \sum_k \left[ V_{k,g}(t') \rho_{g,g}(t') V_{g,k}(t) + V_{k,g}(t) \rho_{g,g}(t') V_{g,k}(t') \right] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Tomando el valor energético para el  $k$ -ésimo término aproximadamente igual a lo expuesto por la teoría de Einstein

$$| \Delta \varepsilon_k | \approx \frac{\hbar}{t}$$

donde  $N$  es el número de estados posibles en el estado cuasi-continuo donde se produce el desprendimiento del electrón

$$N = \left(\frac{\hbar}{t}\right) \sigma(\hbar\nu)$$

$$\rho_{k,k}(t') \approx N^{-1} \sum_k \rho_{k,k}(t') = \frac{[1 - P(t')]}{N} \quad (5.34)$$

donde se puede definir para un tiempo  $t'$  posterior a  $t$  la densidad de probabilidad del estado base  $\rho_{gg}$

$$\rho_{g,g}(t') = 1 - P(t') \quad (5.35)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \sum_k \int_0^t dt' \left| \frac{eX_{k,g}E_o}{2\hbar} \right|^2 e^{i(\varepsilon_k \hbar^{-1} - \nu)(t-t')} \rho_{g,g}(t') + c.c.$$

Obteniendo como resultado

$$\frac{dP(t)}{dt} = \int d\varepsilon \sigma(\varepsilon) \int_0^t dt' \left| \frac{eX_{k,g}E_o}{2\hbar} \right|^2 e^{i(\varepsilon \hbar^{-1} - \nu)} [1 - P(t')] + c.c. \quad (5.36)$$

Utilizando las expresiones (5.31) se obtiene como resultado la ecuación diferencial

$$\frac{dP(t)}{dt} = \gamma [1 - P(t)] \quad (5.37)$$

cuya solución empieza

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{1 - P(t)} &= \gamma dt \\ \int \frac{dP(t)}{1 - P(t)} &= \int \gamma dt \end{aligned}$$

Solucionando cada una de las integrales

$$\begin{aligned} -\ln |1 - P(t)| &= \gamma t \\ \ln |1 - P(t)|^{-1} &= \gamma t \end{aligned}$$

Aplicando la función exponencial

$$\begin{aligned} [1 - P(t)]^{-1} &= e^{\gamma t} \\ \frac{1}{1 - P(t)} &= e^{\gamma t} \\ \frac{1}{e^{\gamma t}} &= 1 - P(t) \\ e^{-\gamma t} &= 1 - P(t) \end{aligned}$$

$$P(t) = 1 - e^{-\gamma t} \quad (5.38)$$

Siendo esta última expresión la solución a la ecuación diferencial encontrada y que es capaz de explicar la probabilidad de que se presente la liberación de energía al momento del desprendimiento del electrón del átomo cuando entra en resonancia con el campo eléctrico aplicado.

Cualquier modelo que intente explicar el efecto fotoeléctrico debe reproducir los siguientes cuatro aspectos o resultados experimentales [8]:

- Los electrones son emitidos siempre en tiempos muy cortos después del comienzo de la iluminación
- La fotocorriente aumenta linealmente con la intensidad de la luz



- La corriente al cátodo disminuye con el incremento del potencial retardante creciente, convirtiéndose en cero en el potencial de frenado  $V_0$
- El potencial de frenado  $V_0$  es directamente proporcional a la frecuencia de la luz incidente y muestra una frecuencia umbral definitiva  $\nu_0$

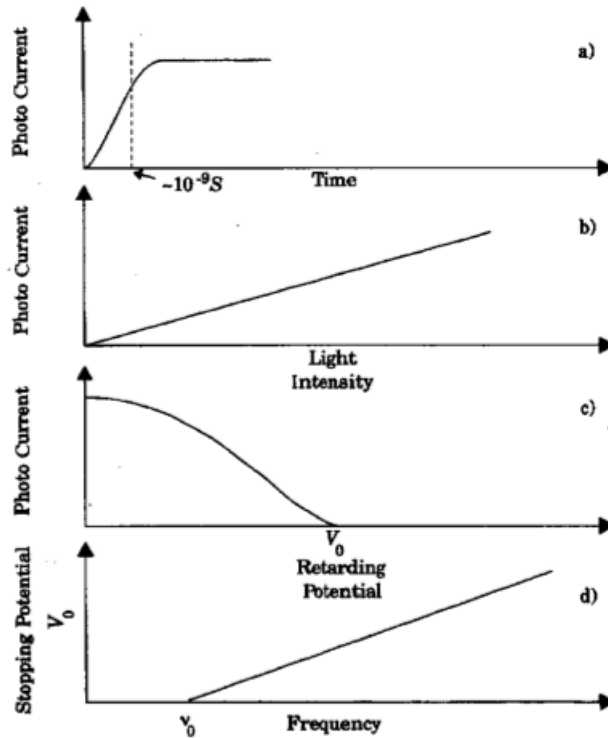


Figura 5.2: Gráficas del comportamiento experimental del efecto fotoeléctrico. Tomado de Greenstein, G. and Zajonc, A. G. Quantum Challenge: Modern Research on the Foundations of Quantum Mechanics. Jones and Bartlett Publishers. 2006. Pág. 25

A partir de la ecuación (5.25) se pueden evidenciar cómo el modelo planteado por Lamb y Scully reproduce los cuatro aspectos mencionados anteriormente

- La ecuación representa la condición de resonancia para la excitación la cual ocurre sólo cuando la frecuencia  $\omega$  de la radiación electromagnética incidente coincide con la cantidad  $\omega_k = E_k/\hbar$ .
- La relación entre la fotocorriente generada por el desprendimiento de los electrones de los átomos se da en términos de la intensidad  $E_0^2$  de la onda clásica que está incidiendo sobre la materia. Explicando así la linealidad presentada por ambas variables.

- La emisión de electrones (fotoelectrones) por tanto no se da para frecuencias de la onda incidente por debajo de  $\omega_k$ . De esta manera se conecta con la función de trabajo del metal usado. La ecuación (5.27) puede entonces interpretarse como una consecuencia natural de la condición de resonancia para la excitación por una onda electromagnética más que como consecuencia de la conservación de la energía a escala microscópica para la luz (como es propuesto por Einstein).
- Dado que la ecuación (5.25) representa la probabilidad de transición de un electrón de un estado base  $g$  a un estado  $k$  del continuo, sumando sobre todos los posibles estados del continuo se obtiene la probabilidad de emisión de un fotoelectrón. Dicha suma (no incluida en este trabajo) fue demostrada por Lamb y Scully para ser proporcional al tiempo. Esto significa que la tasa de transición  $\frac{dP}{dt}$  es constante tal que para cualquier tiempo (incluso tiempos cortos) se pueden emitir electrones.

Estas consideraciones dan evidencia que el efecto fotoeléctrico puede ser explicado por medio de un modelo cuántico o desde un modelo semi-clásico mostrando a su vez que el efecto fotoeléctrico no necesariamente representa una prueba de la existencia de los fotones.

# Conclusiones

- En concordancia con el artículo escrito por Lamb y Murray, el efecto fotoeléctrico puede ser descrito de una manera semi-clásica donde se permite representar al fotón como una onda electromagnética clásica que perturba un átomo con estados de energía cuantizados logrando el desprendimiento de un electrón y generando una diferencia de potencial. Cabe mencionar que a manera de facilitar los cálculos envueltos en el desarrollo teórico, no se tienen en cuenta las interacciones eléctricas y magnéticas electrón-electrón y electrón-núcleo.
- La teoría de la perturbación dependiente del tiempo puede presentarse en los cursos de mecánica cuántica como una herramienta que permite el estudio de fenómenos naturales que en su Hamiltoniano poseen una dependencia del tiempo aunque sea mínima, dando un acercamiento más preciso a la realidad, consiguiendo así, alejar al estudiante en gran medida de las explicaciones convencionales que por medio de modelos que obvian los parámetros temporales obtienen resultados ideales.
- Las imágenes de la mecánica cuántica (Schrödinger, Heisenberg, Dirac o de interacción) son herramientas que permiten el estudio de diversos fenómenos naturales donde su expresión Hamiltoniana puede depender o no del tiempo. Para su desarrollo teórico se hace necesario la implementación de herramientas matemáticas como lo son los métodos de aproximación, que permiten expresar las interacciones como una serie lineal de términos que dejan identificar el orden a los cuales se desean estudiar las dependencias y así poder hacer su posterior aplicación en el modelo teórico que se está desarrollando.
- El efecto fotoeléctrico descubierto por Hertz y posteriormente estudiado desde un punto de vista práctico y teórico por Phillip Lenard y por Albert Einstein, respectivamente, no contempla una explicación desde un punto de vista clásico ya que las herramientas matemáticas con las que se contaba no eran suficientes. Con la explicación de Einstein sólo se aborda el problema del efecto fotoeléctrico desde una mirada

cuantizada gracias a los conceptos de Max Plank, sin poder conciliar ambas miradas de la física; aunque Lamb y Scully logran conciliar ambas miradas para dar explicación al efecto fotoeléctrico, es sólo bajo la condición de despreciar las interacciones electromagnéticas que ocurren entre los constituyentes del átomo (electrones y núcleo).

# Bibliografía

- [1] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *The Royal Society*, 155:459–512, 1864.
- [2] N. Aquino J. L. Jimenez and I. Campos. Heaviside y las ecuaciones de maxwell. *ContactoS*, 33:48–58, 1999.
- [3] [http://histel.com/z\\_histel/biografias.php?id\\_nombre=53](http://histel.com/z_histel/biografias.php?id_nombre=53),
- [4] M.A. Rodriguez Meza and J. L. Cervantes Cota. El efecto fotoeléctrico. *Ciencia ergo sum*, 13:303–311, 2006.
- [5] A. Einstein. Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz. *Annalen der Physics*, 17:132–148, 1905.
- [6] Jr W. E. Lamb and M. O. Scully. The photoelectric effect without photons.
- [7] R. Eisberg and R. Resnick. *Física Cuántica, Átomos, Moléculas, sólidos, Núcleos and Partículas*, pages 47–55. Limusa Wiley, 1989.
- [8] George Greenstein and Arthur G. Zajonc. *The Quantum Challenge: Modern Research on the Foundations of the Quantum Mechanics*. Jones and Bartled Publishers, 2006.