



Algoritmo de optimización multiobjetivo basado en comportamientos emergentes de enjambres

Joaquín Javier Meza Alvarez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ingeniería
Bogotá, Colombia
2017

Algoritmo de optimización multiobjetivo basado en comportamientos emergentes de enjambres

Joaquín Javier Meza Alvarez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ingeniería

Director:

Ing. Dr. Carlos Enrique Montenegro Marin

Co-Director:

Ing. Dr. Victor Hugo Medina García

Grupo de Investigación en Interoperabilidad de Redes Académicas
GIIRA

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ingeniería
Bogotá, Colombia
2017

Comisión de Doctorado

Esta tesis, titulada “Algoritmo de optimización multiobjetivo basado en comportamientos emergentes de enjambres”, escrita por Joaquín Javier Meza Alvarez, ha sido aprobada en cuanto a estilo y contenido intelectual.

Hemos leído esta tesis y la aprobamos,

Ph. D. Ruben González Crespo
Jurado 1

Ph. D. Juan Manuel Cueva Lovelle
Jurado 2

Ph. D. Marco Aurelio Alzate Monroy
Jurado 3

Ph. D. Carlos Enrique Montenegro Marin.
Director

Ph. D. Victor Hugo Medina García
Codirector

Fecha de la defensa: Abril 4 de 2017

Dedicatoria

A Dios Todopoderoso
Soberano del universo
proveedor amoroso.

Agradecimientos

En general a toda la comunidad académica y en particular a:

Carlos Enrique Montenegro Marin
Lilian Astrid Bejarano Garzón
Helbert Eduardo Espitia Cuchango

Resumen

En este documento se propone un algoritmo de optimización multiobjetivo basado en las propiedades emergentes de los enjambres.

El corazón cognitivo de la investigación reposa en el algoritmo PSO (*Particle Swarm Optimization*) con compartimiento turbulento, su desempeño es probado rigurosamente, diseñando experimentos con funciones artificiales que suelen resultar de alta dificultad de resolución tomadas de la literatura de la comunidad científicamente especializada en el tema de optimización multiobjetivo basada en el comportamiento de colectivos vivos.

La sencillez final del algoritmo habla de su robustez mostrada en todo el espacio de la evaluación y la nutrición cognitiva del algoritmo da cuenta de su poder e impacto en las investigaciones que se devienen con prontitud.

Palabras clave: Enjambre de partículas, optimización, turbulencia.

Abstract

In this document is proposes an multiobjctive optimization algorithm based on the emerging proprieties of the swarms.

The cognitive heart of the investigation lies in the PSO (Particle Swarm Optimization) algorithm, that contains a turbulence behavior, its behavior is proven in a rigorous way, designing experiments with artificial functions that happen to arise from the high resolution difficulty taken out of the community literature scientifically specialized in the subject of multi-objective optimization based on the behavior of living collective groups.

The final simplicity of the algorithm talks about its robustness which is shown in the entirety of the evaluation, and the cognitive nutrition of the algorithm accounts for its power and impact in the investigations which very quickly convert themselves.

Keywords: Optimization, particles swarm, turbulence.

Contenido

Resumen	VI
Introducción	1
I Descripción del proyecto	2
1. Formulación del proyecto	3
1.1. Formulación del problema	3
1.2. Justificación	3
1.3. Hipótesis	4
1.4. Grupo y línea de investigación	5
2. Objetivo general y objetivos específicos	6
2.1. Objetivo general	6
2.2. Objetivos Específicos	6
3. Antecedentes	7
3.1. Optimización bio-inspirada	7
3.2. Comportamientos de enjambres	8
3.3. Modelos de partículas con comportamiento turbulento	8

3.4.	Aplicaciones de algoritmos de partículas con comportamiento de vorticidad	8
3.5.	Propuestas desarrolladas de algoritmos PSO multiobjetivo	9
3.5.1.	Algoritmos con exploración separada de funciones objetivo	9
II	Marco teórico	14
4.	Optimización multiobjetivo	15
4.1.	Introducción	15
4.2.	Definiciones previas	15
4.2.1.	Convexidad	15
4.2.2.	Región convexa	16
4.3.	Definición del problema de optimización multiobjetivo	17
4.4.	Conjuntos aproximados y dominancia	18
4.5.	Optimalidad de Pareto	19
4.5.1.	Definición de optimalidad de Pareto	20
4.6.	Clasificación de técnicas	21
4.7.	Métodos no basados en Pareto	22
4.7.1.	Ordenamiento Lexicográfico	22
4.7.2.	Combinación lineal de pesos	23
4.7.3.	VEGA	23
4.7.4.	Método ε -constraint	23
4.7.5.	Satisfacción de metas	24
4.8.	Métodos basados en Pareto	24
4.8.1.	Jerarquización de Pareto pura	24
5.	PSO multiobjetivo	26
5.1.	Introducción	26

5.1.1.	Algoritmo de optimización basado en enjambres mono-objetivo . . .	26
5.2.	PSO multiobjetivo	28
5.2.1.	Enfoques PSO multiobjetivo	30
5.3.	PSO estrategias de selección	31
5.3.1.	Estrategias para la selección y permanencia del mejor individual . .	32
5.3.2.	Estrategias para la selección y permanencia del mejor grupal	32
6.	Comportamiento turbulento en enjambres de partículas	33
6.1.	Introducción	33
6.1.1.	Modelo propuesto por Colin R. McInnes	33
6.1.2.	Modelo de Ryan J. Lukeman	35
6.2.	Estabilidad en enjambres de partículas H-estable con potencial de Morse .	40
III	Desarrollo	41
7.	Modelo empleado	42
7.1.	Introducción	42
7.2.	Esquema general de modelo	42
7.3.	Modelo seleccionado	43
7.3.1.	Términos seleccionados	43
7.4.	Simulación del modelo	44
8.	Propuesta del algoritmo	47
8.1.	Introducción	47
8.2.	Implementación del modelo	47
8.3.	Estrategia propuesta para la búsqueda multiobjetivo	48
8.4.	Algoritmo propuesto	49
8.5.	Estrategia para determinar el punto de convergencia	50

8.6. Componentes del algoritmo	50
8.6.1. Identificación de las fases del algoritmo	50
8.6.2. Factor de interacción	51
8.6.3. Factor de autopropulsión en la fase de convergencia	51
8.6.4. Factor de autopropulsión en la fase de dispersión	51
8.6.5. Velocidad máxima y mínima	52
8.6.6. Función potencial asociada al punto de convergencia	53
8.6.7. Versión estocástica del algoritmo	54
9. Resultados experimentales	55
9.1. Introducción	55
9.2. Funciones de prueba	55
9.3. Configuración de experimentos	58
9.4. Resultados experimentales	59
9.4.1. Resultados cualitativos	61
10. Análisis estadístico de resultados	70
10.1. Introducción	70
10.2. Metodología	70
10.2.1. Pruebas estadísticas de hipótesis	71
10.3. Análisis de resultados	73
10.4. Métricas de desempeño en optimización multiobjetivo	73
10.4.1. Métricas de convergencia	74
10.4.2. Métricas de diversidad	76
10.4.3. Otras métricas de desempeño	78
10.5. Configuración de los algoritmos	78
10.6. Resultados para distancia generacional	79

10.7. Resultados para hipervolumen	83
11. Conclusiones, aportes originales y trabajos futuros	88
11.1. Conclusiones	88
11.2. Aportes originales	89
11.3. Trabajos futuros	89
11.3.1. Recomendaciones	89
A. Resultados experimentales	91
Referencias bibliográficas	96

Lista de Figuras

4.1. Función convexa.	16
4.2. Función cóncava.	16
4.3. Conjunto convexo.	17
4.4. Conjunto no convexo.	17
4.5. Dominio de las variables y las funciones objetivo.	18
4.6. Concepto de dominancia.	19
4.7. Ejemplo del frente de óptimo de Pareto.	20
5.1. Proceso de un algoritmo PSO multiobjetivo	30
6.1. Formación de partículas en anillo.	37
6.2. Fuerza normal y tangencial.	38
6.3. Relación de ángulos.	39
6.4. Diagrama de fase de estabilidad H para un potencial de Morse. Adaptado de [86].	40
7.1. Simulación con $N = 15$ individuos y $\beta = 0,2$	44
7.2. Simulación con $N = 15$ individuos y $\beta = 0,4$	45
7.3. Simulación con $N = 15$ individuos y $\beta = 0,8$	45
7.4. Simulación con $N = 25$ individuos y $\beta = 0,4$	45

7.5. Simulación con $N = 25$ individuos y $\beta = 0,8$	46
8.1. Diagrama de flujo del algoritmo propuesto.	48
9.1. Esquema de la inicialización local de las partículas en dos dimensiones.	58
9.2. Estrategia para el incremento de energía.	61
9.3. Frente de pareto encontrado.	61
9.4. a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.	62
9.5. Frente de pareto encontrado.	62
9.6. a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.	63
9.7. Frente de pareto encontrado.	63
9.8. a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.	64
9.9. Frente de pareto encontrado.	64
9.10. a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.	65
9.11. Frente de pareto encontrado.	66
9.12. a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.	66
9.13. Frente de pareto encontrado.	67
9.14. a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.	67
9.15. Frente de pareto encontrado.	68
9.16. a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.	68
9.17. Frente de pareto encontrado.	69
9.18. a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.	69

10.1. Metodología para establecer la prueba de hipótesis a realizar.	72
10.2. Interpretación gráfica de la distancia generacional.	75
10.3. Interpretación gráfica de la métrica Epsilon.	76
10.4. Representación gráfica del hipervolumen.	77
10.5. Resultados de la comparación para distancia generacional y condiciones iniciales globales.	81
10.6. Resultados de la comparación para distancia generacional y condiciones iniciales locales.	82
10.7. Resultados de la comparación para hipervolumen y condiciones iniciales globales.	85
10.8. Resultados de la comparación para hipervolumen y condiciones iniciales locales.	86

Lista de Tablas

9.1. Parámetros del algoritmo.	59
9.2. Parámetros del algoritmo con $\text{range}(\Omega) = 20$	60
9.3. Parámetros del algoritmo con $\text{range}(\Omega) = 8$	60
9.4. Parámetros del algoritmo con $\text{range}(\Omega) = 6$	60
9.5. Parámetros del algoritmo con $\text{range}(\Omega) = 4$	60
10.1. Error tipo I y tipo II.	71
10.2. Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla A.1.	79
10.3. Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla A.2.	79
10.4. Análisis de datos para los resultados de la tabla A.1.	80
10.5. Análisis de datos para los resultados de la tabla A.2.	80
10.6. Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla A.3.	83
10.7. Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla A.4.	84
10.8. Análisis de datos para los resultados de la tabla A.3.	84
10.9. Análisis de datos para los resultados de la tabla A.4.	84
A.1. Resultados para 50 ejecuciones. Condiciones iniciales globales y métrica de distancia generacional.	92
A.2. Resultados para 50 ejecuciones. Condiciones iniciales locales y métrica de distancia generacional.	93

A.3. Resultados para 50 ejecuciones. Condiciones iniciales globales y métrica de hipervolumen.	94
A.4. Resultados para 50 ejecuciones. Condiciones iniciales locales y métrica de hipervolumen.	95

Introducción

Han pasado ya varias décadas de gran trabajo en torno a la OPTIMIZACIÓN basada en PROGRAMACIÓN BIOINSPIRADA. El presente documento pretende mostrar un avance en ese dominio proponiendo en su primera parte el contexto más sustancial del DISEÑO de la investigación con un protocolo simple y sintético sobre la justificación, formulación del problema y su expresión cuestionante, con la conjetura llevada a HIPÓTESIS, culminando con su pertenencia y pertinencia a un grupo y línea de investigación. Se exponen de manera clara tanto los objetivos general y específicos, como los antecedentes.

En su segunda parte se ha dispuesto el marco teórico específico, esto es, en lo concerniente a OPTIMIZACIÓN MULTI OBJETIVO con la singularidad de observar la técnica PSO (*Particle Swarm Optimization*) y finalmente se revisan los conceptos asociados a la formalización de la turbulencia, en enjambres de partículas como propiedad emergente.

La tercera parte está destinada al desarrollo del proyecto y al cierre del mismo. Primeramente se propone el algoritmo de optimización y se define plenamente, a continuación, éste se somete a prueba en diferentes casos clásicos de la literatura especializada.

El cierre se realiza analizando el desempeño el algoritmo visto desde los resultados obtenidos a partir del diseño riguroso de experimentos avalado por la comunidad científicamente especializada, luego de lo anterior se realizan se realizan la discusión y conclusión para terminar con el interés de continuidad de la investigación con sugerencias y propuestas.

Parte I

Descripción del proyecto

Capítulo 1

Formulación del proyecto

1.1. Formulación del problema

Los algoritmos de optimización multiobjetivo evolutivos han mostrado ser una buena herramienta para la solución de problemas con diferentes funciones objetivo [14]. Sin embargo por su característica evolutiva tienden a requerir una elevada cantidad de iteraciones para obtener un resultado satisfactorio. Por su parte, los algoritmos multiobjetivo basados en enjambres de partículas presentan una alta tasa de convergencia, sin embargo su principal desventaja es lograr un adecuado manejo de la diversidad [14], [49]. La pérdida de la diversidad de enfoques basados en enjambres de partículas se compensa normalmente con operadores de turbulencia sin embargo por el momento no se ha tenido un desarrollo definitivo al respecto [14].

Con esta propuesta se busca compensar la pérdida de diversidad de los enfoques basados en enjambres de partículas, mediante el comportamiento emergente de un enjambre; lo cual permite plantear la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son los elementos básicos cognitivos para el diseño de un algoritmo de optimización multiobjetivo basado en características emergentes de enjambres que permitan manejar la diversidad del enjambre?

1.2. Justificación

Actividades de diseño, distribución, asignación, secuenciación, producción y procesos industriales en general, suelen requerir herramientas de optimización [1]. Lo anterior se presenta porque los métodos de optimización son una excelente herramienta para lograr que los procesos de diseño en ingeniería tengan una mayor precisión y exactitud [2]. Debido a lo anterior, es necesario tener las herramientas adecuadas para poder atender los diversos

requerimientos en el proceso de optimización. El espectro de las diferentes alternativas va desde programación lineal, optimización no lineal, programación dinámica, hasta llegar a técnicas modernas computacionales bio-inspiradas. Considerando lo anterior, es importante la investigación sobre nuevos métodos de optimización, que puedan ayudar a solucionar problemas en las diferentes áreas de la ingeniería y la ciencia.

Por otra parte, la naturaleza es fuente de inspiración para el desarrollo de algoritmos que permitan solucionar problemas en diferentes áreas, en buena proporción los algoritmos desarrollados bajo esta perspectiva se han enfocado a problemas de optimización siendo de los más representativos los algoritmos genéticos, la optimización basada en colonia de hormigas, enjambres de partículas y quimiotaxis bacteriana [3], [4], [5]. Por otro lado, en el área de la biología son de interés los modelos que describan comportamientos de seres vivos como aves, peces, hormigas y bacterias entre otros. En particular cuando se trata de comportamientos colectivos es de importancia modelar las interacciones presentes entre individuos con el fin de reproducir las conductas que describe una congregación de individuos [6]. Enfoques de estos modelos consideran el efecto del liderazgo de un individuo [7], mecanismos de predicción [8] y formas de organización [9]. En particular son de atención los denominados comportamientos emergentes de los cuales se distingue el movimiento de enjambres de individuos con la formación de remolinos (turbulencia) [10], [11].

Una de las grandes limitaciones del proceso de optimización cuando se tienen ecuaciones no lineales, es la dificultad de garantizar la *optimalidad global*, ya que esto sólo es posible cuando se tienen funciones objetivo convexas definidas sobre regiones factibles también convexas [12].

Ahora bien, los desafíos en optimización, se presentan con problemas sin una estructura especial tales como: funciones discontinuas, ecuaciones donde no hay información de las derivadas, restricciones definidas de forma implícita a través de relaciones de tipo caja negra (entrada-salida) o problemas altamente no convexos. Para este tipo de problemas se han desarrollado métodos de búsqueda heurísticos que aunque no garantizan un óptimo global, tienden a aproximarse a éste si el número de iteraciones es suficientemente alto [13]. De los algoritmos heurísticos más empleados para la solución de problemas se encuentran los basados en el comportamiento de seres vivos denominados algoritmos bio-inspirados.

1.3. Hipótesis

Considerando lo anterior, se plantea la siguiente hipótesis:

“La turbulencia como comportamiento emergente de enjambres de partículas ofrece un escenario cognitivo pertinente para lograr el manejo de la diversidad en el desarrollo de un algoritmo de optimización multiobjetivo”.

1.4. Grupo y línea de investigación

La presente propuesta se encuentra soportada por el Grupo de Investigación en Interoperabilidad de Redes Académicas (GIIRA), con la línea de investigación en Optimización Bio-inspirada.

Capítulo 2

Objetivo general y objetivos específicos

2.1. Objetivo general

Desarrollar un algoritmo de optimización multiobjetivo basado en enjambres de partículas con comportamientos emergentes que permita manejar la diversidad del enjambre.

2.2. Objetivos Específicos

- Proponer el algoritmo de optimización basado en enjambres de partículas con comportamiento emergente que permita el manejo de la diversidad.
- Establecer casos de aplicación estándar considerando lo reportado en la literatura.
- Validar el algoritmo propuesto en los casos de aplicación estándar encontrados en la literatura.
- Analizar los resultados obtenidos.

Capítulo 3

Antecedentes

3.1. Optimización bio-inspirada

La naturaleza es una fuente de inspiración para el planteamiento de soluciones en ingeniería especialmente en optimización. Un ejemplo de optimización presente en la naturaleza, ocurre cuando animales o seres vivos con mejores técnicas para la búsqueda de alimento tienen mayor posibilidad de sobrevivir [15]. En este campo son de resaltar los aportes realizados por Hans J. Bremermann sobre la optimización bio-inspirada y en particular en la optimización basada en quimiotaxis bacteriana [3].

Una técnica de optimización bio-inspirada se encuentra basada en el comportamiento de las hormigas [16], [17], [18] y [19], donde se desarrollan diferentes algoritmos y aplicaciones. Por otro lado, se están realizando estudios observando el comportamiento de colonias de abejas, esto con la finalidad de proponer procesos de búsqueda y optimización. Una idea general de optimización empleando colonias de abejas se presenta en [20]. Adicionalmente, una aplicación que combina lógica difusa y el comportamiento de las abejas se tiene en [21], esta aplicación se encuentra enfocada en la solución de problemas multiobjetivo.

La optimización basada en quimiotaxis bacteriana promete ser una buena herramienta para la solución de problemas en ingeniería. Una aplicación práctica se puede apreciar en [22] y [23], donde se propone un algoritmo de optimización basado en quimiotaxis bacteriana para la solución de problemas multiobjetivo, el cual se encuentra enfocado al diseño de un eje mecánico.

Sobre el desarrollo de aplicaciones que involucran enjambres de individuos, originalmente su implementación en procesos de optimización fue propuesta por James Kennedy y Russell Eberhart (*Particle Swarm Optimization* PSO) [24]. Acerca del tema, una aplicación en problemas de optimización multiobjetivo no lineal con restricciones se presenta en [25], en este trabajo se acondiciona el algoritmo al problema multiobjetivo. El comportamiento de enjambres ha sido empleado en problemas de optimización con éxito, logrando

convergencia en problemas multiobjetivo de alta complejidad tal como se aprecia en [26], [27], [28] y [29].

3.2. Comportamientos de enjambres

En la naturaleza se pueden apreciar diferentes comportamientos los cuales han sido estudiados y modelados. En particular son de atención los comportamientos de enjambres siendo uno de los trabajos a resaltar el presentado en [30] donde se desarrolla un modelo básico para representar un enjambre de individuos. Por otro lado, en [10] revisan las propiedades de la auto-regulación y principios del comportamiento de enjambre tales como: integridad, variabilidad, realimentación positiva, realimentación negativa, umbrales de respuesta, dirección, inhibición, redundancia, sincronización y egoísmo. Adicionalmente en [7] se analiza el efecto que tiene el liderazgo de un individuo, en [9] se consideran las diferentes formas de organización que presentan las aves [9] y en [8] se observa el efecto que tiene incorporar mecanismos de predicción en un modelo de enjambre.

3.3. Modelos de partículas con comportamiento turbulento

El movimiento circular de partículas formando un vórtice es un comportamiento asociado por lo general a fluidos cuando se tiene flujo turbulento, sin embargo este tipo de comportamiento se presenta en enjambres de individuos como peces, aves y bacterias, entre otros. Sobre modelos empleados para representar este comportamiento se tiene el de partícula autopropulsada [31] y el de partícula activa Browniana [32].

3.4. Aplicaciones de algoritmos de partículas con comportamiento de vorticidad

Es importante señalar que sobre aplicaciones que emplean modelos de enjambres con características de vorticidad, uno de los trabajos más representativos es el desarrollado en [33] donde se propone un método para la planeación de trayectorias de robots móviles que permite evadir mínimos locales. Este algoritmo es denominado *Local Minimal Avoidance* (LMA), o también *Local Minimal Escape* (LME). Propuestas similares para la planeación de trayectorias de robots móviles se pueden apreciar en [34] y [35] donde se emplea un modelo de partícula activa para el desarrollo del algoritmo de planeación de trayectorias VSP (Vortex Swarm Path Planning Algorithm).

En particular sobre algoritmos de optimización que emplean el concepto de vorticidad se tiene el presentado en [36] donde se desarrolla un algoritmo que considera una analogía con el comportamiento de un fluido en un sumidero (drenaje). Este algoritmo se denomina *Particle Swirl Algorithm* (PSA). Una propuesta donde se plantea un algoritmo de optimización basado en comportamiento de enjambres con características de vorticidad se aprecia en [37], [38] y [39].

3.5. Propuestas desarrolladas de algoritmos PSO multiobjetivo

A continuación se presentan diferentes enfoques para extender el algoritmo PSO a problemas multiobjetivo [40].

3.5.1. Algoritmos con exploración separada de funciones objetivo

En esta categoría se encuentran los enfoques que combinan todas las funciones objetivo en una sola o consideran cada función objetivo por turnos para la evaluación del enjambre. La ventaja de estos enfoques es su sencilla actualización del enjambre y las mejores posiciones. En este algoritmo se emplea un registro externo para el almacenamiento de soluciones no dominadas. Su inconveniente es la falta de una información a priori con respecto a una mejor manipulación de las distintas funciones objetivo [40].

Enfoque de función objetivo agregada

En estos enfoques se agregan mediante una combinación ponderada todas las funciones objetivo en una sola. Si los pesos permanecen fijos durante la ejecución del algoritmo se tiene el caso de la agregación ponderada convencional (CWA) la cual es incapaz de detectar soluciones en las regiones cóncavas de la frontera de Pareto, para evitar esto los pesos son ajustados dinámicamente durante la optimización. Tales enfoques son la agregación *Bang-Bang* ponderada (BWA) y la agregación dinámica ponderada (DWA) [40]. El uso de BWA resulta en cambios bruscos de los pesos que fuerzan el algoritmo a seguir moviéndose hacia el frente de Pareto. El mismo efecto se logra con DWA, aunque el cambio en los pesos es más suave, los enfoques DWA tienen mejor desempeño que los BWA en fronteras de Pareto convexas. En [41] se propone la primera aproximación de PSO multiobjetivo de agregación ponderada usando los enfoques de CWA, BWA y DWA, que proporcionaron fronteras de Pareto con esparcimiento satisfactorio.

En [42] se considera un enfoque similar, donde el enjambre se divide en sub-enjambres

y cada uno utiliza un ajuste de peso específico. La mejor partícula de cada uno sirve como un líder sólo para sí mismo. Se usa una decisión preliminar de Pareto con el fin de buscar más a fondo los puntos que son soluciones candidatas de Pareto óptimas.

Adicionalmente en [43] se propone un enfoque de pesos modificados dinámicamente, incorporando un operador de mutación para evitar el estancamiento del enjambre, así como un término de aceleración que incrementa la convergencia en etapas posteriores del algoritmo. Las dos posiciones nueva y antigua son evaluadas e introducidas en una lista a la cual se aplica la técnica de clasificación no dominada [44] encargada de seleccionar las partículas no dominadas que sufren un proceso de mutación en un intento de mejorarlas. El conjunto de partículas resultante constituye el enjambre en la siguiente iteración del algoritmo.

Enfoque con ordenamiento de las funciones objetivo

Estos enfoques requieren establecer una clasificación de las funciones objetivo, la minimización se realiza para cada función de forma independiente, partiendo por las más importantes.

Originalmente en [45] se propone un esquema que implementa el ordenamiento de funciones. Este algoritmo fija la función objetivo más simple y minimiza el resto de las funciones objetivo, utilizando una variante de PSO con vecindarios dinámicos. No usa ningún registro externo y las soluciones no dominadas son almacenadas como mejores posiciones de las partículas.

Adicionalmente en [46] se propone una extensión del enfoque anterior donde se incorpora un registro externo para almacenar las soluciones no dominadas y reducir el costo computacional.

Enfoques de vector evaluado no basados en Pareto

Inicialmente en [41] se propuso el esquema Vector Evaluado PSO (VEPSO) basado en la idea del Algoritmo Genético Vector Evaluado (VEGA), en este enfoque hay un enjambre dedicado para cada función objetivo y es evaluado solamente para esta función. Las mejores posiciones de un enjambre se utilizan para la actualización de la velocidad de otro enjambre.

Adicionalmente en [47], se desarrolla una nueva versión de VEPSO donde cada enjambre es asignado a un procesador y el número de enjambres no es necesariamente igual al número de funciones objetivo. La comunicación entre los enjambres se realiza a través de un esquema similar a la topología de vecindario tipo anillo.

Un enfoque similar a VEPSO, fue propuesto en [48] llamado PSO *Multi-Species* que

utiliza sub-enjambres que forman especies, una para cada función objetivo. Cada sub-enjambre se evalúa solamente con su propia función objetivo y la información de las mejores partículas se comunica a sub-enjambres vecinos con la forma de un término adicional en la ecuación de actualización de velocidad de las partículas.

Algoritmos basados en dominancia de Pareto

Estos enfoques usan el concepto de dominancia de Pareto para determinar las mejores posiciones (líderes) que guiarán el enjambre durante la búsqueda. En [49] se propuso el PSO multiobjetivo (MOPSO), uno de los primeros enfoques PSO basados en Pareto en el que las soluciones no dominadas detectadas por las partículas se almacenan en un repositorio. El espacio de búsqueda se divide en hipercubos. A cada hipercubo se le asigna un valor de aptitud que es inversamente proporcional al número de partículas que contiene. Utiliza una ruleta clásica para seleccionar un hipercubo y un líder de él. La mejor posición se actualiza en cada iteración, basado en la relación de dominación entre la mejor posición existente de la partícula y su nueva posición. El registro tiene un tamaño limitado y las nuevas posiciones se insertan basándose en el criterio de retención que da prioridad a las soluciones situadas en las zonas menos pobladas del espacio objetivo.

Otro adelanto se puede observar en [50] donde se propone un esquema PSO multiobjetivo que se ocupa de las ineficiencias causadas por el truncamiento del registro limitado de soluciones no dominadas, utilizando una estructura árbol sin restricciones para el mantenimiento de registro llamada árbol dominado. Funciona de manera similar a MOPSO, excepto el repositorio, que se mantiene a través de las estructuras antes mencionadas. Usa un operador de mutación (locura) sobre la velocidad de las partículas para preservar la diversidad.

En [51] se presenta un método que emplea el estimador de densidad del vecino más cercano en combinación con un esquema de ruleta para la selección de líderes. Los líderes seleccionados son utilizados para actualizar la posición del resto de partículas. Los líderes con radio de apiñamiento superior tienen una mayor probabilidad de selección ya que promueven la propagación uniforme de soluciones en la frontera de Pareto.

Por otra parte, en [52] se puede observar la propuesta de DOPS, un método basado en un esquema elitista de registro que utiliza dos funciones: una para realizar selección y otra para eliminar un valor de aptitud de cada partícula. La selección del valor de aptitud es una medida de la influencia de la partícula a la propagación de la frontera de Pareto y aumenta con la distancia de sus vecinos más cercanos.

Un desarrollo de algoritmos de optimización multiobjetivo de enjambre de partículas inspirados en Algoritmos Evolutivos (PS-EA) se presenta en [53] donde la actualización de las partículas es completamente diferente a cualquier algoritmo de PSO. Las ecuaciones de actualización de las partículas son sustituidas por un árbol de herencia de probabilidad y las partículas en vez de moverse en el espacio de búsqueda con una velocidad adaptable,

heredan los parámetros de su nueva posición mediante una asignación dinámica de la probabilidad de herencia (DIPA) que controla las probabilidades teniendo en cuenta la retroalimentación del estado convergente del algoritmo y la aptitud de la mejor partícula en general.

Una propuesta de varios algoritmos basados en MOPSO se aprecia en [54], en los cuales se incorporan esquemas especiales para la selección de los miembros del registro que participan en la actualización de la velocidad de las partículas. Se proponen un enfoque MOPSO en combinación con el método sigma que asigna un valor numérico a cada partícula y miembro del registro, una partícula utiliza como líder el miembro del registro con el valor sigma más cercano al suyo y utiliza un factor de turbulencia (mutación) para la actualización de la posición de la partícula.

Una propuesta llamada MaximinPSO se presenta en [55] con este enfoque se utiliza la función de aptitud maximin donde solo los vectores decisión con un valor de la función maximin menor que cero pueden ser soluciones no dominadas con respecto a la población actual. La función maximin promueve la diversidad del enjambre, ya que penaliza a las partículas que se juntan en grupos, favorece las soluciones en medio de fronteras convexas y en los extremos en fronteras cóncavas; las soluciones no dominadas se almacenan en un registro para servir como líderes.

Un MOPSO modificado denominado AMOPSO se propone en [56] donde sub-enjambres son utilizados para explorar las diferentes regiones del espacio de búsqueda. Cada sub-enjambre tiene su propio grupo de líderes que son seleccionados al azar y sirven como guías hacia la frontera de Pareto. Este enfoque no utiliza registro externo y alivia problemas relacionados con espacios de búsqueda discontinuos.

Otro algoritmo denominado OMOPSO, es presentado en [57] el cual emplea una estimación del vecino más cercano y dos registros externos: en el primero se almacenan las mejores posiciones seleccionadas para la iteración actual de PSO y en el otro se guardan las soluciones no dominadas. También hace uso de turbulencia. Además incorpora un mecanismo para retirar los líderes, cuando su número supera un umbral.

En [58] se propone un algoritmo donde se utilizan varios registros externos, uno para las soluciones globales y uno para cada partícula, donde almacena las soluciones de Pareto óptimas recientemente descubiertas. Hace uso de una ruleta para seleccionar e introduce en los registros el envejecimiento de los líderes.

Por otra parte en [59] se desarrolla el MOPSO-CD que incorpora un mecanismo de distancia de hacinamiento para la selección de la mejor partícula global y la eliminación de las soluciones no dominadas del registro externo. Emplea mutación para mantener la diversidad de las soluciones no dominadas. La distancia de hacinamiento se calcula por separado para cada solución no dominada. Una porción de soluciones no dominadas con las distancias de hacinamiento más altas son seleccionadas al azar para servir como líderes del enjambre.

Un trabajo adicional se puede apreciar en [60] donde se proponen las técnicas *Rounds*, *Random* y *Prob* basadas en el concepto de dominancia de Pareto para seleccionar a los líderes del registro externo. *Rounds* utiliza como guía global de una partícula la solución no dominada que domina la menor cantidad de partículas del enjambre. *Random* utiliza como guía global de una partícula una solución no dominada probabilísticamente seleccionada, donde cada solución no dominada tiene la misma probabilidad de selección. *Prob* constituye una extensión de *Random* que favorece a los miembros del registro que dominan el menor número de puntos. También se emplea mutación en este algoritmo.

La presentación del algoritmo MOPSO-fs se realiza en [61], la cual es una variante MOPSO con el intercambio explícito de aptitud donde a cada partícula en el repositorio de soluciones no dominadas se le asigna una aptitud. Este esquema de aptitud compartida asigna valores de aptitud más altos a soluciones con un número pequeño de otras soluciones que la rodean. Los líderes del enjambre son seleccionados a través de una ruleta que utiliza los valores de aptitud asignados.

Un esquema donde cada partícula conserva todas las soluciones no dominadas que se ha encontrado se presenta en [62]. En este enfoque se proponen diferentes técnicas, que van desde la selección aleatoria pura hasta el uso de pesos y técnicas de preservación de la diversidad.

La presentación de SMOPSO se realiza en [63] el cual incorpora una estrategia para la selección de líderes en la cual se evalúa cada partícula de acuerdo con cada función objetivo por separado asumiendo como media de las mejores partículas por función, la mejor posición global, para la actualización de enjambre.

Finalmente en [64] se realiza una revisión sobre optimización tanto de uno como de varios objetivos, analizando de manera experimental los efectos de la inercia, el coeficiente de aceleración y método de selección de probabilidad del algoritmo MOPSO.

Parte II

Marco teórico

Capítulo 4

Optimización multiobjetivo

4.1. Introducción

En el presente capítulo se revisan los aspectos teóricos que fundamentan la optimización multiobjetivo. También se realiza un recuento de las diferentes técnicas que se tienen para la solución del problema asociado con la optimización multiobjetivo, siendo de importancia el concepto de frente Pareto.

4.2. Definiciones previas

En esta sección se presentan las definiciones formales asociadas a concavidad, convexidad y su extrapolación al concepto de región convexa.

4.2.1. Convexidad

Una función $\phi(\vec{x})$ es llamada convexa sobre el dominio de R si para 2 vectores arbitrarios \vec{x}_1 y $\vec{x}_2 \in R$,

$$\phi(\theta\vec{x}_1 + (1 - \theta)\vec{x}_2) \leq \theta\phi(\vec{x}_1) + (1 - \theta)\phi(\vec{x}_2) \quad (4.1)$$

donde θ es un escalar en el rango $0 \leq \theta \leq 1$.

La función $\phi(\vec{x})$ es estrictamente convexa si para la ecuación 4.1 se puede cambiar \leq por $<$.

Una función convexa no puede tener ningún valor mayor que los valores de la función obtenidos mediante interpolación lineal entre $\phi(\vec{x}_1)$ y $\phi(\vec{x}_2)$.

Si la desigualdad de la ecuación 4.1 es \geq , la función es cóncava. Una función $\phi(\vec{x})$ es cóncava (o estrictamente cóncava) si $-\phi(\vec{x})$ es convexa (o estrictamente convexa). En el caso de las funciones lineales estas son convexas y cóncavas [14].

Un ejemplo de función convexa se puede apreciar en la figura 4.1, mientras que en la figura 4.2 se puede observar una función cóncava.

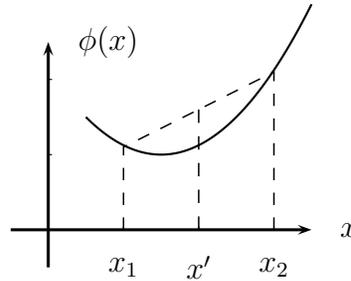


Figura 4.1: Función convexa.

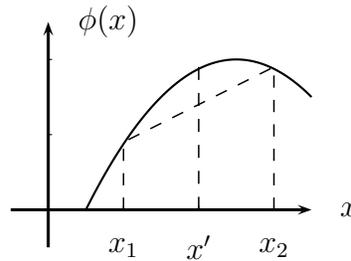


Figura 4.2: Función cóncava.

4.2.2. Región convexa

Una región se define como un conjunto convexo en un espacio n -dimensional si, para todos los pares de puntos \vec{x}_1 y \vec{x}_2 en el conjunto, el segmento rectilíneo que los une está también enteramente dentro del conjunto. De tal forma, todo punto \vec{x} , donde

$$\vec{x} = \theta\vec{x}_1 + (1 - \theta)\vec{x}_2, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (4.2)$$

está también en el conjunto [14].

Un ejemplo de conjunto convexo se puede apreciar en la figura 4.3, mientras que en la figura 4.4 se puede observar un conjunto no convexo.

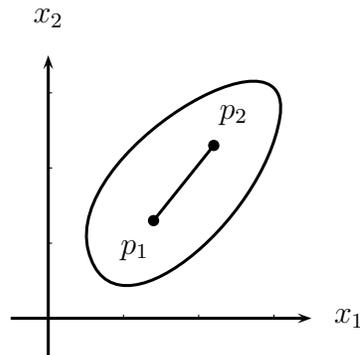


Figura 4.3: Conjunto convexo.

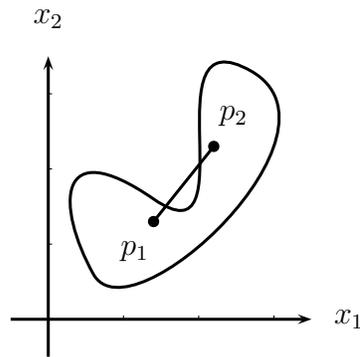


Figura 4.4: Conjunto no convexo.

4.3. Definición del problema de optimización multiobjetivo

Según [14] el Problema de Optimización Multiobjetivo (POM) se puede definir como:

Encontrar un vector de variables de decisión que satisfaga unas restricciones y optimice una función vector cuyos elementos representan las funciones objetivo.

Desde un punto de vista formal esto se puede expresar como: determinar un vector de variables $\vec{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ que satisfaga las m restricciones de desigualdad:

$$g_i(\vec{x}) \leq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad (4.3)$$

las p restricciones de igualdad

$$h_i(\vec{x}) = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p \quad (4.4)$$

y que optimice la función vectorial

$$\vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x})]^T \quad (4.5)$$

Para efectos prácticos todas las funciones objetivo se minimizan o maximizan lo cual se puede lograr mediante la siguiente identidad:

$$\text{mín } f_i(\vec{x}) = \text{máx}(-f_i(\vec{x})) \quad (4.6)$$

El conjunto de restricciones dadas por las ecuaciones anteriores, determina la región factible Ω y cualquier vector $\vec{x}^* \in \Omega$ define una *solución factible*. El vector de funciones $\vec{f}(\vec{x})$ es una función que mapea el conjunto Ω al conjunto Λ y que contiene todos los valores posibles de las funciones objetivo [14]. Lo anterior se puede apreciar en la figura 4.5.

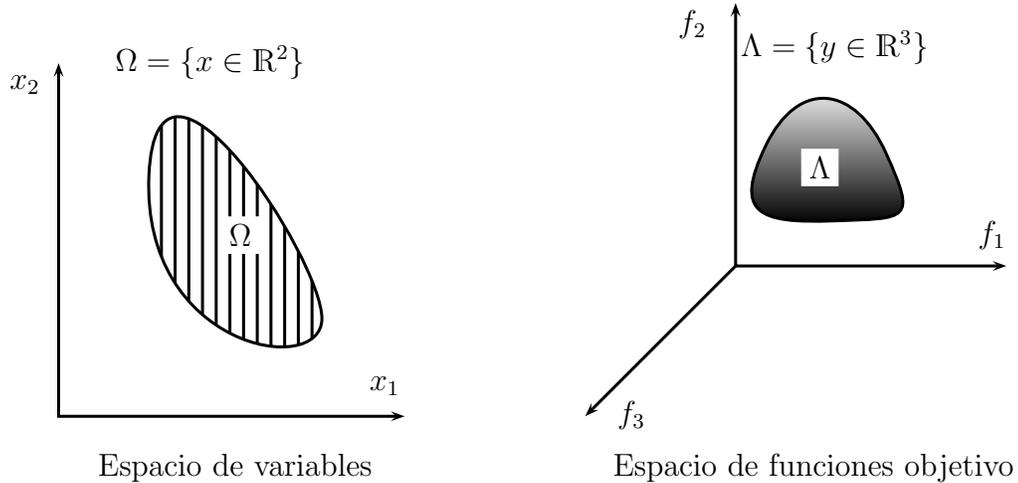


Figura 4.5: Dominio de las variables y las funciones objetivo.

4.4. Conjuntos aproximados y dominancia

Considerando un problema de optimización de n funciones objetivo f_1, f_2, \dots, f_n las cuales se buscan minimizar. Cada función objetivo $f_i : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ asigna a cada posible solución x en el espacio de búsqueda a un valor real $z_i = f_i(\vec{x})$. En este sentido cada $\vec{x} \in \mathbf{X}$ es mapeado en un correspondiente vector $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{Z}$ de valores objetivo $\vec{z} = \mathbf{F}(f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$.

Considerando lo anterior dado un conjunto de vectores objetivo $A \subseteq \mathbf{Z}$. A es denominado conjunto aproximado si algún elemento de A no es débilmente dominado que otro vector solución en A [87].

Para representar el concepto de dominancia se tiene la figura 4.6 donde se puede apreciar que $a \succ b$, $a \succ c$, $a \succ d$, $b \succ d$, $c \succ d$, $a \succ \succ d$, $a \succeq a$, $a \succeq b$, $a \succeq c$, $a \succeq d$, $b \succ b$, $b \succeq d$, $c \succeq c$, $c \succeq d$, $d \succeq d$ y $b \parallel c$ [87].

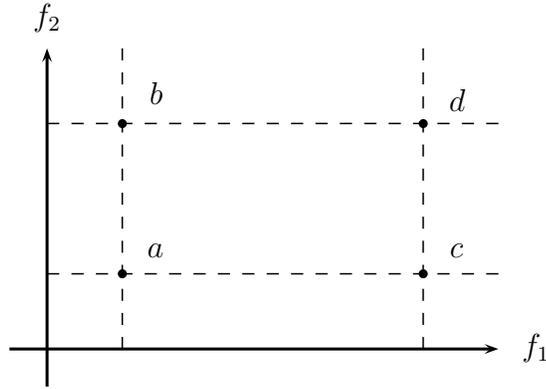


Figura 4.6: Concepto de dominancia.

Una solución \vec{x}_1 domina a otra solución \vec{x}_2 , $\mathbf{F}(\vec{x}_1) \succ \mathbf{F}(\vec{x}_2)$ si para todos los j objetivos $f_j(\vec{x}_1) \leq f_j(\vec{x}_2)$ y adicionalmente existe un objetivo i para el cual $f_i(\vec{x}_1) < f_i(\vec{x}_2)$ [83].

4.5. Optimalidad de Pareto

En optimización multiobjetivo dado que se busca tener el mejor valor de las funciones objetivo, no es posible tener un aumento en su utilidad total, sin que eso implique la disminución en la utilidad de las otras funciones objetivo.

La dominancia de Pareto indica que si una solución domina a otra, ésta debe ser estrictamente mejor en al menos un objetivo y no peor en ninguno de los otros [14].

Para observar el concepto de frente de Pareto, en la figura 4.7 se observa que la solución A domina a la solución B ya que es mejor tanto en f_1 como en f_2 , sin embargo, no domina a C ya que no es mejor.

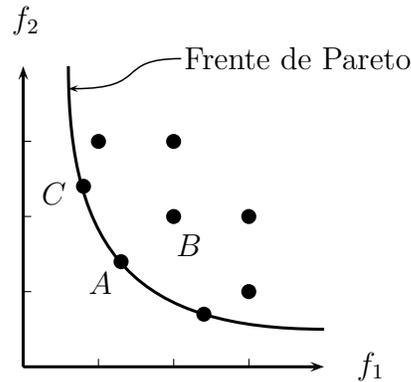


Figura 4.7: Ejemplo del frente de óptimo de Pareto.

En general, no es posible tener una expresión analítica de la línea o superficie que contenga a los puntos que conforman el frente de Pareto. Por tanto, el procedimiento normal para generar el frente de Pareto, es obtener el conjunto de puntos factibles Ω y los valores correspondientes de $\vec{f}(\vec{x})$ para toda $\vec{x}^* \in \Omega$. Cuando hay un número suficiente de ellos, entonces es posible determinar los puntos no dominados y producir el frente de Pareto [14].

El grupo de los vectores \vec{x}^* correspondientes a las soluciones incluidas en el conjunto de óptimos de Pareto son llamados no dominados. La gráfica de las funciones objetivo cuyos vectores no dominados se encuentran en el conjunto de óptimos de Pareto se denominan frente de Pareto [14].

4.5.1. Definición de optimalidad de Pareto

Un vector de variables independientes $\vec{x}^* \in \Omega$ es un óptimo de Pareto si no existe otro $\vec{x} \in \Omega$ tal que $f_i(\vec{x}) \leq f_i(\vec{x}^*)$ para todo $i = 1, \dots, k$ y $f_i(\vec{x}) < f_j(\vec{x}^*)$ para al menos un j .

No dominancia débil

Un punto $\vec{x}^* \in \Omega$ es una solución débilmente no dominada si no hay $\vec{x} \in \Omega$ donde se tiene que $f_i(\vec{x}) < f_i(\vec{x}^*)$, para cada $i = 1, \dots, k$.

No dominancia fuerte

Un punto $\vec{x}^* \in \Omega$ es una solución fuertemente no dominada si no hay $\vec{x} \in \Omega$ donde se tiene que $f_i(\vec{x}) \leq f_i(\vec{x}^*)$, para cada $i = 1, \dots, k$ y para al menos un valor i , $f_i(\vec{x}) < f_i(\vec{x}^*)$.

En problemas multiobjetivo se tienen tres metas en general [57]:

1. Maximizar el conjunto de elementos del conjunto óptimo de Pareto.
2. Minimizar la distancia entre los elementos del conjunto de Pareto.
3. Maximizar la dispersión de soluciones encontradas con el fin de tener un vector uniforme.

4.6. Clasificación de técnicas

En el campo de la optimización se han realizado diferentes propuestas para clasificar las técnicas que existen para resolver problemas multiobjetivo. Como un primer aspecto a considerar, resulta importante distinguir las dos etapas en las cuales se puede dividir la solución de un problema multiobjetivo. La primer instancia consiste en la optimización de las diversas funciones objetivo involucradas y el segundo proceso corresponde a la selección de los compromisos más convenientes. Según [14], una clasificación es:

1. Técnicas generadoras (articulación a posteriori de preferencias).
2. Técnicas que se basan en una articulación preliminar de preferencias (métodos no interactivos).
3. Técnicas que se basan en una articulación progresiva de preferencias (interacción con el tomador de decisiones).

En forma general una clasificación de las técnicas evolutivas aplicadas en optimización multiobjetivo es la siguiente [14]:

- No basadas en Pareto:
 - Ordenamiento lexicográfico.
 - Suma lineal de pesos.
 - VEGA.
 - Método ε -constraint.
 - Satisfacción de metas.
- Basadas en Pareto:
 - Jerarquización de Pareto pura.
 - MOGA.

- NSGA y NSGA II.
- NPGA y NPGA 2.
- Enfoques no generacionales.

4.7. Métodos no basados en Pareto

En este caso las técnicas no incorporan de manera directa el concepto de óptimo de Pareto. Aunque estas técnicas son muy eficientes suelen ser adecuadas sólo para manejar pocas funciones objetivo (menor a tres).

4.7.1. Ordenamiento Lexicográfico

En este método las funciones objetivo se jerarquizan en orden de importancia. El problema se redefine como:

$$\text{mín } f_1(\vec{x}) \quad (4.7)$$

sujeto a

$$g_j(\vec{x}) \leq 0; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.8)$$

obteniendo \vec{x}_1^* y $f_1^* = f_1(\vec{x}_1^*)$.

Luego se plantea un segundo problema como:

$$\text{mín } f_2(\vec{x}) \quad (4.9)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} g_j(\vec{x}) &\leq 0; & j &= 1, 2, \dots, m \\ f_1(\vec{x}) &= f_1^* \end{aligned} \quad (4.10)$$

obteniendo \vec{x}_2^* y $f_2^* = f_2(\vec{x}_2^*)$.

Este procedimiento se repite hasta haber considerado todos los objetivos.

Para esta técnica cuando se utiliza con algoritmos evolutivos se suele elegir aleatoriamente un objetivo en cada generación. Una variante consiste en aplicar el operador de selección empleando el objetivo más importante, en caso de presentarse un empate en el proceso de selección se usa la siguiente función objetivo en importancia y así sucesivamente [14].

La principal ventaja de esta técnica es su eficiencia computacional dada por su simplicidad. Por otro lado, la desventaja está sujeta al ordenamiento de las funciones objetivo.

4.7.2. Combinación lineal de pesos

Esta técnica consiste en convertir el problema multiobjetivo en uno mono-objetivo mediante una suma ponderada de los objetivos:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^k w_i f_i(\vec{x}) \quad (4.11)$$

con $w_i \geq 0$ que son los pesos que ponderan la importancia de cada una de las k funciones objetivo del problema (dichas funciones deben estar escaladas). Suele suponerse que:

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad (4.12)$$

Como es de apreciar, la principal ventaja de esta técnica es su simplicidad y su eficiencia. Por otro lado, sus principales desventajas son en primer lugar la dificultad de definir un conjunto de pesos que permita generar una porción significativa del frente de Pareto y adicionalmente se tiene que esta técnica no permite obtener porciones no convexas del frente de Pareto sin importar la combinación de pesos empleada [14].

4.7.3. VEGA

Vector Evaluated Genetic Algorithm (VEGA) este método fue propuesto originalmente por David Schaffer en 1984, como parte de la tesis doctoral titulada *Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms*.

Esta técnica incorpora un mecanismo de selección donde para una población de tamaño M se generan N sub-poblaciones correspondientes a las funciones objetivo.

Su principal ventaja es la eficiencia y su facilidad de implementación ya que sólo se requiere modificar el mecanismo de selección de un algoritmo genético simple. La principal desventaja consiste en tener resultados similares a una combinación lineal de pesos si se emplea un método de selección proporcional al desempeño de las funciones objetivo. De la misma forma, este método no incorpora explícitamente el concepto de dominancia de Pareto y tampoco utiliza ningún mecanismo para mantener diversidad.

4.7.4. Método ε -constraint

En este método se optimiza la función objetivo considerada de mayor importancia y se toman las funciones objetivo adicionales como restricciones acotadas por ciertos valores permisibles denominados ε_i . En este esquema, se efectúa una optimización mono-objetivo

sujeta a restricciones adicionales. En un paso adicional se modifican los valores ε_i con el fin de generar un frente completo de Pareto, [14].

La principal ventaja del método es su relativa simplicidad y su desventaja es su costo computacional dado por el nivel de variabilidad que se requiere para los valores ε_i [14].

4.7.5. Satisfacción de metas

En esta estrategia se considera un conjunto de metas a satisfacer para cada función objetivo. Al aplicar el algoritmo evolutivo se busca minimizar la diferencia entre la solución actual y el vector de metas deseables.

Estas técnicas son también denominadas de métodos agregativos y bajo ciertas condiciones pueden generar porciones no convexas del frente de Pareto. La principal ventaja consiste en su simplicidad y su eficiencia computacional, puesto que no se requiere un proceso de jerarquización de Pareto.

Por otra parte, su principal desventaja consiste en la dificultad de establecer las metas deseables. Como también bajo ciertas circunstancias se pueden tener resultados ambiguos.

4.8. Métodos basados en Pareto

El concepto de realizar una asignación de aptitud basada en el concepto de óptimo de Pareto fue sugerida originalmente por David E. Goldberg (1989) con lo cual se busca sobrepasar las limitaciones de la estrategia VEGA.

En este método se realiza una selección que emplea una jerarquización de soluciones basada en no dominancia buscando de esta forma dirigir la población hacia el frente de Pareto en un problema multiobjetivo.

El concepto en el cual se fundamenta esta técnica consiste en seleccionar los individuos no dominados con respecto a la población actual y asignarles la jerarquía y la aptitud más elevada. En el paso siguiente se eliminan temporalmente estos individuos de la competencia y se re-jerarquiza la población restante. El proceso se repite hasta jerarquizar toda la población. Adicionalmente resulta adecuada emplear alguna técnica para mantener diversidad.

4.8.1. Jerarquización de Pareto pura

En este método se implementa directamente la idea original de Goldberg (1989) sin considerar ninguna modificación. La principal dificultad de esta técnica es su escalabilidad

ya que el algoritmo de jerarquización es de orden $O(kM^2)$, donde k son las funciones objetivo y M el tamaño de la población. La principal ventaja del método consiste en el uso de una población y la capacidad de lidiar con problemas multiobjetivo de cualquier tipo.

Capítulo 5

PSO multiobjetivo

5.1. Introducción

En esta sección se presentan los fundamentos del algoritmo de optimización multiobjetivo basado en enjambres de partículas. En una primera instancia se revisan los conceptos asociados con la optimización basada en enjambres de partículas y luego se describen los diferentes enfoques que se tienen para el caso multiobjetivo.

5.1.1. Algoritmo de optimización basado en enjambres mono-objetivo

El concepto de la optimización basada en enjambres fue propuesto por James Kennedy y Russell Eberhart en [24]. En esta propuesta se desarrolló un algoritmo de búsqueda basado en el comportamiento social de bandadas de aves.

El objetivo principal de estudiar el comportamiento colectivo de los animales es encontrar un simple y eficiente algoritmo de optimización.

El algoritmo básico PSO Particle Swarm Optimization (Optimización Basada en Comportamiento colectivo) es el siguiente:

1. Inicializar el enjambre en el espacio solución.
2. Evaluar el desempeño de cada individuo (fitness).
3. Encontrar el mejor desempeño individual, colectivo y la velocidad.
4. Realizar el desplazamiento de cada individuo a la nueva posición considerando los valores del punto anterior.

5. Repetir hasta tener convergencia o bajo algún criterio de finalización.

Un algoritmo básico PSO está regido por las ecuaciones de velocidad y posición. Para la velocidad de cada individuo se tiene:

$$\vec{v}_i(n+1) = \vec{v}_i(n) + \beta_{1i}(\vec{x}_{p_i} - \vec{x}_i(n)) + \beta_{2i}(\vec{x}_g - \vec{x}_i(n)) \quad (5.1)$$

y para la posición:

$$\vec{x}_i(n+1) = \vec{x}_i(n) + \vec{v}_i(n+1)$$

Donde:

- i : Índice de cada individuo.
- n : Índice de tiempo discreto.
- \vec{v}_i : Velocidad del i -ésimo individuo.
- \vec{x}_i : Posición del i -ésimo individuo.
- p_i : Mejor evaluación encontrada por el i -ésimo individuo.
- g : Mejor evaluación encontrada por el enjambre (Mejor global ó mejor individual).
- \vec{x}_{p_i} : Mejor posición encontrada por el i -ésimo individuo.
- \vec{x}_g : Mejor posición encontrada por el enjambre (Mejor global ó mejor individual).
- β_1, β_2 : Numeros aleatorios en el intervalo $[0, 1]$ aplicado al i -ésimo individuo.

Un algoritmo PSO más elaborado incorpora un factor de inercia para el cálculo de la velocidad:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i(n+1) = & \phi(n)\vec{v}_i(k) + \alpha_1[\beta_{1i}(\vec{x}_{p_i} - \vec{x}_i(n))] \\ & + \alpha_2[\beta_{2i}(\vec{x}_g - \vec{x}_i(n))] \end{aligned} \quad (5.2)$$

Con:

- ϕ : Función de inercia.
- α_1, α_2 : Constantes de aceleración.

La descripción de los pasos de un algoritmo PSO se pueden apreciar en algoritmo 1.

Algoritmo 1: Algoritmo PSO.

```

1 Inicializar el enjambre en el espacio solución, (por lo general de forma aleatoria). La
  velocidad inicial se considera cero;
2 begin
3   while Hasta tener convergencia o bajo algún criterio de finalización. do
4     Mover cada partícula a la nueva posición:  $\vec{x}_i(n+1) = \vec{x}_i(n) + \vec{v}_i(n+1)$ ;
5     Evaluar el desempeño de cada individuo fitness:  $P_i = f(\vec{x}_i(n))$ ;
6     Encontrar  $p_i$ ;
7     Encontrar  $g$ ;
8     Calcular  $v(k)$  empleando la ecuación 5.1 ó 5.2.
9   end
10 end

```

5.2. PSO multiobjetivo

En problemas multiobjetivo, se pueden distinguir dos enfoques fundamentales para el diseño de algoritmos PSO. El primer enfoque consiste en algoritmos que consideran cada función objetivo por separado, en estos, cada partícula se evalúa solamente para una función objetivo a la vez. El segundo enfoque consiste en algoritmos que evalúan todas las funciones objetivo para cada partícula basándose en el concepto de optimalidad de Pareto, produciendo las mejores posiciones no dominadas, llamadas líderes, que se utilizan para guiar las partículas [40].

En los enfoques mencionados, se debe tratar el problema de mantener las soluciones Pareto óptimas detectadas. Este problema se puede abordar utilizando un conjunto adicional, denominado registro externo, para el almacenamiento de las soluciones no dominadas descubiertas durante la búsqueda. Un registro externo tiene también tamaño limitado, haciendo inevitable la imposición de reglas relativas a la sustitución de las soluciones existentes por soluciones nuevas.

El problema de la selección de los miembros del registro externo se ha abordado a través de medidas que evalúan la calidad de cada miembro del registro, basado en estimadores de densidad. Con estas medidas, los miembros del registro que promueven la diversidad pueden ser seleccionadas. Los estimadores de densidad más comúnmente utilizados son el estimador de densidad del vecino más cercano y el estimador de densidad *kernel* [40].

El problema de la actualización del registro es más complejo. Una nueva solución se incluye en el registro si es no dominada por todos sus miembros. Si algunos miembros están dominados por la nueva solución, entonces por lo general se elimina del registro. La actualización de la mejor posición propia de cada partícula, es más sencilla, en los enfoques basados en Pareto, la mejor posición de una partícula se sustituye sólo por una

nueva dominante. El esquema general PSO multiobjetivo se puede describir con el siguiente pseudocódigo:

Algoritmo 2: Algoritmo PSO multiobjetivo.

```
1 Inicializar enjambre, velocidades y mejores posiciones;
2 Inicializar registro externo (inicialmente vacío);
3 begin
4   while Criterio de parada no satisfecho do
5     for Cada partícula do
6       Seleccione un miembro del registro externo (si es necesario);
7       Actualización de velocidad y posición;
8       Evaluar nueva posición;
9       Actualización de mejor posición y el registro externo.
10    end
11  end
12 end
```

El diagrama de flujo de un algoritmo PSO multiobjetivo se puede apreciar en la figura 5.1.

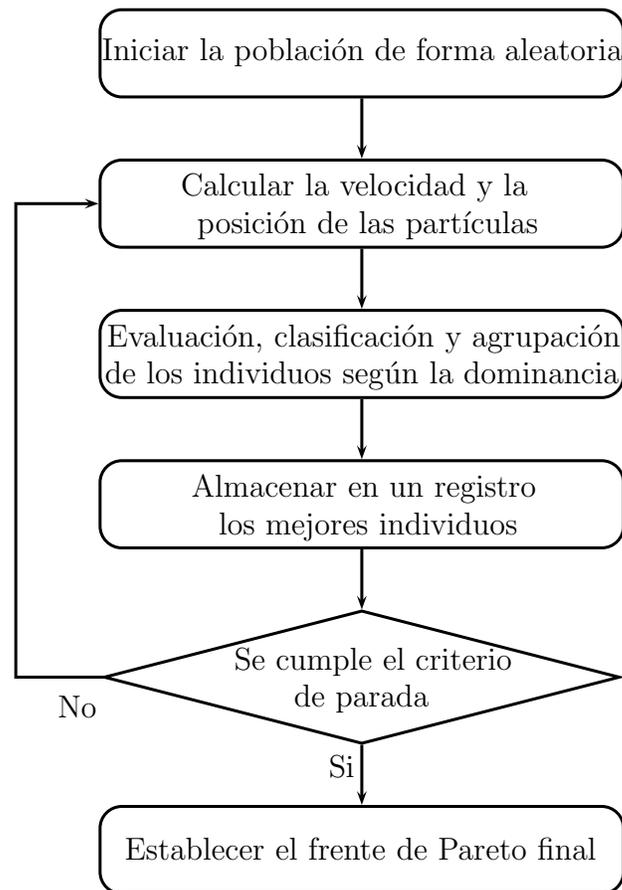


Figura 5.1: Proceso de un algoritmo PSO multiobjetivo

5.2.1. Enfoques PSO multiobjetivo

Sobre los diferentes enfoques para la propuesta de un algoritmo de optimización multiobjetivo basado en enjambres de partículas según [57] se tiene:

- Enfoque de agregación.
- Ordenamiento lexicográfico.
- Enfoque de sub-población.
- Enfoque basado en Pareto.

Enfoque de agregación

En esta categoría se considera la combinación de todos los objetivos en uno solo, es decir un problema multiobjetivo pasa a ser un problema con un solo objetivo. Según [40] el algoritmo tiene tres funciones de agregación que son: una agregación convencional lineal, una agregación dinámica y por último una agregación por pesos, en todos los casos los autores manejan una topología *fully connected* donde todos los miembros están conectados entre sí.

Ordenamiento lexicográfico

En este método los objetivos son ordenados por importancia, la solución óptima es obtenida por la minimización de las funciones objetivo por separado comenzando por la más importante continuando con la siguiente en el orden de importancia.

Enfoque de sub-población

Este enfoque involucra el uso de una subpoblación con la optimización de un solo objetivo, entonces las subpoblaciones de alguna manera intercambian información entre ellas mismas proporcionando una compensación entre las diferentes soluciones previamente encontradas por los objetivos separados.

Enfoque basado en Pareto

Este enfoque usa técnicas de selección del líder teniendo en cuenta la dominancia de Pareto. Las técnicas para la selección del líder varían según el autor, algunas de estas técnicas son: dominación, estimador de densidad, dominación y cercanía, densidad de las soluciones, selección aleatoria, valor sigma, entre otras, la mayoría de estas técnicas manejan una topología *fully connected*.

5.3. PSO estrategias de selección

En un algoritmo de optimización PSO multiobjetivo es de gran importancia el método de selección y permanencia para el mejor resultado grupal e individual, para lo cual se tienen las alternativas citadas a continuación.

5.3.1. Estrategias para la selección y permanencia del mejor individual

Algunas estrategias para la selección y permanencia del mejor resultado individual son:

- Para cada individuo se mantiene un solo p_{best} . Se reemplaza si x_i es mejor que p_i , si no existe dominancia de una respecto de la otra, aleatoriamente se selecciona una de las dos.
- Para cada individuo se mantiene un solo p_{best} . Se reemplaza si x_i es mejor que p_i , si no existe dominancia de una respecto de la otra, x_i se selecciona la más reciente.
- Para cada individuo se mantiene un solo p_{best} . Se reemplaza solo si x_i es mejor que p_i .
- Se mantiene un conjunto de individuos p_i . A este conjunto pertenecen individuos mutuamente no dominados encontrados por x_i durante su movimiento.

5.3.2. Estrategias para la selección y permanencia del mejor grupal

Los métodos para la selección y permanencia del mejor resultado grupal son:

- Aleatorio (G_{random}): Del conjunto de no dominadas globales, seleccionar aleatoriamente una. No se considera la aglomeración.
- Dividido ($G_{partitioned}$): El frente es dividido en grillas. Se hace una selección uniformemente distribuida de la grilla y luego una selección uniformemente distribuida de un individuo de la grilla.
- Dirigido (G_{biased}): En este caso el frente es dividido en grillas, pero se dirige la selección hacia la grilla con menos aglomeración.
- Directo ($G_{directed}$): El mejor grupal es seleccionado de un registro élite.
- Sigma (G_{sigma}): Aplica el método sigma para seleccionar el G de cada individuo.
- Euclidiano ($G_{euclidian}$): Se selecciona para cada individuo como G , al mejor de los vecinos que se encuentre a una determinada distancia euclidiana.

Capítulo 6

Comportamiento turbulento en enjambres de partículas

6.1. Introducción

En las presentes secciones se muestran trabajos donde se describe el comportamiento turbulento en enjambres de partículas. Estos trabajos se toman como referentes para la selección del modelo observando la capacidad del modelo para describir movimientos circulares.

6.1.1. Modelo propuesto por Colin R. McInnes

En [77] se realiza una descripción formal de la generación de vórtices en enjambres de partículas. Aquí se propone que un enjambre con interacción de partículas se define mediante un potencial de interacción y una función de orientación de la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (6.1)$$

$$m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\nabla U_i^a - \nabla U_i^r - \Lambda_i \quad (6.2)$$

Donde $U_i = \sum_j U_{ij}$, la interacción de los individuos del enjambre esta dado por un potencial atractivo de largo rango:

$$U_{ij}^a = -C_a e^{-|\vec{r}_{ij}|/l_a} \quad (6.3)$$

La colisión de las partículas se evita mediante un potencial repulsivo de corto rango:

$$U_{ij}^r = -C_r e^{-|\vec{r}_{ij}|/l_r} \quad (6.4)$$

La fuerza de los anteriores potenciales esta definido por C_a y C_r mientras que el rango de estos esta dado por l_a y l_r tal que $l_a > l_r$.

La función de orientación esta definida como:

$$\Lambda_i = \sum_j C_o(\vec{v}_{ij} \cdot \hat{r}_{ij})e^{-|\vec{r}_{ij}|/l_o}\hat{r}_{ij} \quad (6.5)$$

Siendo \hat{r} la representación de un vector unitario, C_o la fuerza de orientación y l_o el rango de orientación.

Con la anterior ecuación el movimiento hacia o lejos de los vecinos es débilmente frenada proporcional a la componente relativa de velocidad a lo largo del vector formado entre partículas vecinas.

En centro de inercia del enjambre forma un centro relativo el cual se desplaza a velocidad uniforme ya que se presenta una simetría en el movimiento de las partículas [77].

Análisis de energía

La energía total del enjambre se puede determinar como:

$$\sum_i m\vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = - \sum_i \vec{v}_i \cdot \nabla U_i^a - \sum_i \vec{v}_i \cdot \nabla U_i^r - \sum_i \vec{v}_i \cdot \Lambda_i \quad (6.6)$$

La energía cinética del enjambre es:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i mv_i^2 \quad (6.7)$$

La energía potencial esta definida como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (U_{ij}^a + U_{ij}^r) \quad (6.8)$$

De lo anterior se puede apreciar que:

$$\frac{d}{dt}(T + L) = - \sum_i \vec{v}_i \cdot \Lambda_i \quad (6.9)$$

De lo anterior se puede decir que el enjambre de partículas deja escapar lentamente la energía y descansar en un estado mínimo de energía si:

$$\sum_i \vec{v}_i \cdot \Lambda_i = 0 \quad (6.10)$$

La anterior condición se satisface si $\vec{v}_{ij} \cdot \hat{r}_{ij} = 0$ lo cual indica que se tiene un estado de equilibrio con una distancia fija de separación $|\vec{r}_{ij}|$ entre partículas y una alineación local de los vectores de velocidad.

Análisis de momento angular

El momento angular total para el enjambre de partículas es:

$$\sum_i m\vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = - \sum_i \vec{r}_i \times \nabla U_i^a - \sum_i \vec{r}_i \times \nabla U_i^r - \sum_i \vec{r}_i \times \Lambda_i \quad (6.11)$$

El gradiente de las funciones de potencial y la función de orientación están dadas por la interacción de pares de partículas a lo largo de \vec{r}_{ij} . Dada la simetría de las interacciones internas la parte derecha de la ecuación tiende a ser nula.

Los torques internos debido a interacciones de dos partículas tienden a anularse aplicando la identidad $\vec{r}_i \times \vec{r}_j = -\vec{r}_j \times \vec{r}_i$. Por lo tanto, el momento angular total de una partícula es:

$$L_i = m\vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad (6.12)$$

Por lo tanto:

$$\sum_i \frac{dL_i}{dt} = 0 \quad (6.13)$$

Entonces el momento angular total del enjambre es:

$$H = \sum_i L_i \quad (6.14)$$

Lo anterior indica que el momento angular se conserva.

6.1.2. Modelo de Ryan J. Lukeman

En [84], [85] se observan los conceptos fundamentales para la formación de vórtices en enjambres de partículas. Considerando un enjambre de n partículas auto-propulsadas con posición \vec{r}_i y velocidad \vec{v}_i . Se asume que la dirección de la partícula es idéntica a la velocidad de esta i -ésima partícula.

La ecuación de movimiento es:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_i}{dt} &= \vec{v}_i \\ \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= \vec{a}_i + \vec{f}_i - \gamma\vec{v}_i \end{aligned} \quad (6.15)$$

Siendo \vec{a}_i la fuerza autónoma de auto-propulsión producida por el i -ésimo individuo y dependiente de influencias externas y de la localización de la partícula en el enjambre. f_i es la fuerza de interacción de una partícula con sus vecinos. $\gamma\vec{v}_i$ es la fuerza de fricción con su respectivo coeficiente ($\gamma > 0$) la cual permite tener un límite de velocidad.

La fuerza de interacción se puede modelar como:

$$\vec{f}_i = g(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (6.16)$$

Donde \vec{r}_j es la posición del vecino próximo y g es una función de distancia.

Comparación con otros modelos

Para realizar la comparación se considera el modelo:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v}_i \\ \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= \vec{f}_{aut} + \vec{f}_{int} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Donde \vec{f}_{aut} es la fuerza generada de forma autónoma por cada individuo y \vec{f}_{int} es la fuerza de interacción con otros individuos.

- D'Orsogna, Chuang y Niwa proponen que: $\vec{f}_{aut} = (\alpha - \beta|\vec{v}_i|^2)\vec{v}_i$.
- Levine propone: $\vec{f}_{aut} = \alpha\frac{\vec{v}_i}{|\vec{v}_i|} - \beta\vec{v}_i$
- En [84], [85] se propone emplear: $\vec{f}_{aut} = -\beta\vec{v}_i$

Análisis de la formación de remolinos

En un remolino perfecto de n partículas que giran alrededor de un punto con radio r_0 y con velocidad angular constante w_0 . Las partículas se encuentran igualmente espaciadas una distancia d [84]. Para el análisis las partículas se encuentran rotuladas secuencialmente tal como se aprecia en la figura 6.1.

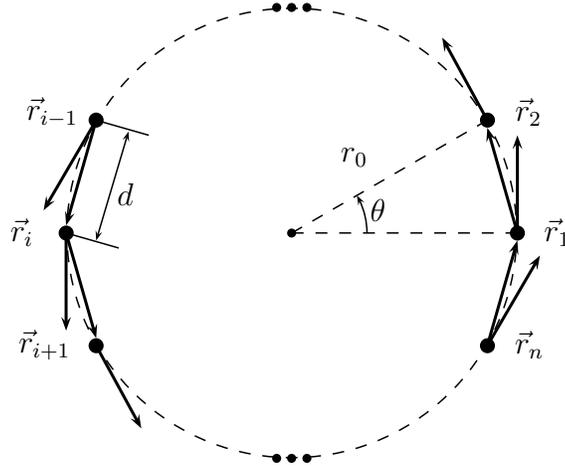


Figura 6.1: Formación de partículas en anillo.

El ángulo formado entre dos partículas adyacentes es: $\theta = 2\pi/n$. Para simplicidad de análisis en [84], [85] se considera \vec{a}_i . Para el anillo de n partículas se tiene el conjunto de ecuaciones:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (6.18)$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_i(\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i) - \gamma\vec{v}_i \quad (6.19)$$

Para $i = 1, \dots, n - 1$ y:

$$\frac{d\vec{r}_n}{dt} = \vec{v}_n \quad (6.20)$$

$$\frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{f}_n(\vec{r}_1 - \vec{r}_n) - \gamma\vec{v}_n \quad (6.21)$$

La solución presentada en 6.1 es el estado estable de una distribución de n partículas en un anillo de radio r_0 y velocidad angular constante w_0 . Solucionando las anteriores ecuaciones para un estado estable considerando la distancia entre individuos d , radio r_0 y velocidad angular w_0 . Para esto primero se descompone la fuerza de interacción \vec{f} en una fuerza tangencial \vec{f}_t y una fuerza centrípeta \vec{f}_c figura 6.2.

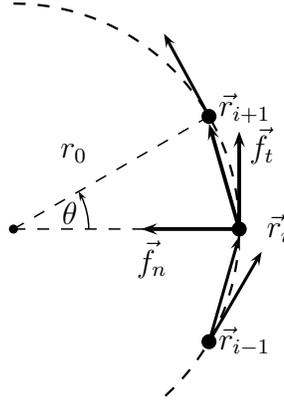


Figura 6.2: Fuerza normal y tangencial.

En estado estable no existe aceleración tangencial por lo tanto el balance de fuerzas tangenciales es:

$$\vec{f}_t - \gamma \vec{v} = 0 \quad (6.22)$$

La fuerza centrípeta considerando una masa $m = 1$ que gira en un círculo de radio r_0 y velocidad angular es:

$$\vec{f}_c = \vec{a}_c = w_0^2 r_0 \vec{u}_c \quad (6.23)$$

Donde \vec{u}_c es un vector unitario radial, dado que $|\vec{v}|r_0w_0$ se tiene:

$$\vec{f}_c = \frac{|\vec{v}|^2}{r_0} \vec{u}_c \quad (6.24)$$

Considerando los ángulos ϕ y ψ de la figura 6.3, se tiene $\theta = 2\pi/n$, $\phi = \theta/2 = \pi/n$ y $\psi = \pi/2 - \pi/n$, aplicando relaciones trigonométricas se establece que:

$$d = 2r_0 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (6.25)$$

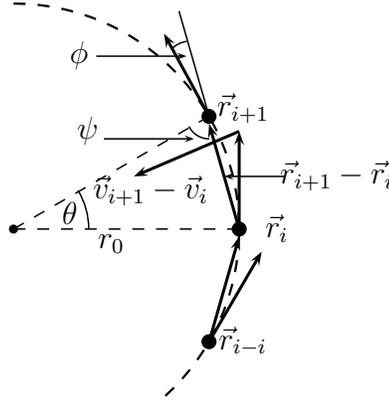


Figura 6.3: Relación de ángulos.

Expresando las magnitud de las fuerzas:

$$|\vec{f}_t| = g(d) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (6.26)$$

$$|\vec{f}_c| = g(d) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (6.27)$$

Despejando las relaciones para la fuerzas tangencial y centrípeta se tiene:

$$g(d) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \gamma |\vec{v}| \quad (6.28)$$

$$g(d) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{|\vec{v}|^2}{r_0} \quad (6.29)$$

Despejando $|\vec{v}|$ y r_0 se tiene:

$$|\vec{v}| = g(d) \frac{\cos(\pi/n)}{\gamma} \quad (6.30)$$

$$r_0 = g(d) \frac{\cos^2(\pi/n)}{\gamma^2 \sin(\pi/n)} \quad (6.31)$$

La velocidad angular es:

$$w_0 = \frac{|\vec{v}|}{r_0} = \gamma \tan(\pi/n) \quad (6.32)$$

Despejando $g(d)$ se obtiene la condición de existencia de la solución:

$$g(d) = sd \quad (6.33)$$

Donde $s = \gamma^2/2 \cos^2(\pi/n)$

Para una $g(d)$, n y γ la formación del remolino en estado estable ocurre si existe un valor de d que satisface la anterior ecuación. Lo anterior indica que se debe presentar la intersección de la función $g(d)$ y la recta sd para que se presente el remolino.

6.2. Estabilidad en enjambres de partículas H-estable con potencial de Morse

La descripción de la estabilidad de enjambres en varios modelos biológicos se realiza empleando el diagrama de estabilidad H. Empleando herramientas de mecánica estadística se logran tener relaciones del diagrama de estabilidad H y comportamientos naturales de enjambres [86].

En la figura 6.4 se muestra un diagrama de fase de estabilidad H para un potencial de Morse. Comportamientos catastróficos y estables se predicen en función de los parámetros (l_r/l_a) y (C_r/C_a) , [86].

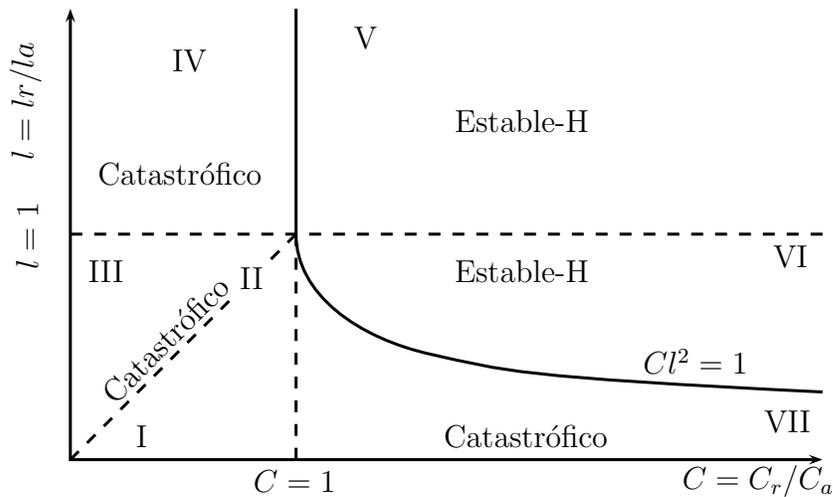


Figura 6.4: Diagrama de fase de estabilidad H para un potencial de Morse. Adaptado de [86].

Parte III
Desarrollo

Capítulo 7

Modelo empleado

7.1. Introducción

El modelo empleado es seleccionado basado trabajos precedentes donde se busca tener un modelo lo más compacto posible que permita describir comportamientos de enjambre como desplazamientos uniformes y movimientos circulares.

7.2. Esquema general de modelo

El modelo seleccionado como referencia se encuentra basado en el comportamiento del zooplancton *Daphnia*. Con este enfoque se busca aprovechar la forma de locomoción con la presencia de turbulencia ya que esta puede ser una buena estrategia para evadir mínimos locales tal como se aprecia en [33].

En términos generales el modelo seleccionado presenta la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (7.1)$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{act} + \vec{F}_{int} + \vec{F}_{esp} \quad (7.2)$$

Donde la primera ecuación corresponde al cálculo de posición \vec{r}_i de la partícula conociendo su velocidad \vec{v}_i . La segunda ecuación corresponde al cálculo de la velocidad de la partícula siendo m_i la masa de la partícula que para un caso práctico se puede tomar como $m_i = 1$. La ecuación de velocidad presenta las siguientes componentes:

- $m_i(d\vec{v}_i/dt)$: Término de inercia, el cual es una fuerza de característica conservativa.

- \vec{F}_{act} : Fuerza correspondiente al movimiento activo asociado a la autopropulsión, por lo general presenta una componente disipativa siendo este término de carácter no conservativo.
- \vec{F}_{int} : Término que involucra las fuerzas de interacción entre individuos, por lo general esta componente es de característica conservativa.
- \vec{F}_{esp} : Término de fuerzas dadas por el espacio donde se encuentra la partícula la cual se puede considerar como una fuerza de característica externa.

7.3. Modelo seleccionado

Considerando lo presentado anteriormente el modelo seleccionado se encuentra descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (7.3)$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = (\alpha - \beta v_i^2) \vec{v}_i - \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) - \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (7.4)$$

7.3.1. Términos seleccionados

Como es de apreciar, para la fuerza dada por el espacio de trabajo y para el término estocástico solo se presenta una alternativa de implementación, por lo cual, estos se toman como fueron descritos anteriormente. Por otro lado, la fuerza de autopropulsión y el término de interacciones entre individuos son de atención en la presente sección para su selección.

Buscando un modelo compacto que logre describir el comportamiento turbulento, fueron seleccionados los términos relacionados a continuación. Para la componente de autopropulsión (movimiento activo) se toma:

$$\vec{F}_{act} = (\alpha - \beta v_i^2) \vec{v}_i \quad (7.5)$$

La anterior expresión también se encuentra en la ecuación de Rayleigh la cual presenta un comportamiento de ciclo limite. Con esta fuerza de autopropulsión la velocidad de las partículas en estado estable tiende a ser $|\vec{v}_i| = \sqrt{\alpha/\beta}$, [31], [86].

La fuerza de interacción seleccionada se encuentra basada en un potencial atractivo parabólico el cual permite un acople global al centro de masa del enjambre. La fuerza de interacción en este caso es:

$$\vec{F}_{int} = \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (7.6)$$

Finalmente la información del entorno en el cual se desplaza la partícula se encuentra dada por $\vec{F}_{esp} = -\vec{\nabla}U_{esp}$ la cual es la fuerza producida por el medio donde la partícula realiza su movimiento.

7.4. Simulación del modelo

Con la finalidad de observar las características del modelo se realiza un conjunto de simulaciones donde se toman diferentes valores de los parámetros del modelo. Los parámetros a considerar son N , a , α , β .

La simulación se realiza empleando una aproximación de Euler con un paso fijo de $\Delta t = 0,1$. Con el fin de lograr un movimiento de traslación las condiciones iniciales son las mismas para todas las partículas, para la posición se toma el origen y la velocidad se considera con componentes de 0,001 en las dos direcciones. En la figura 7.1 se puede apreciar el movimiento de traslación que presentan las partículas.

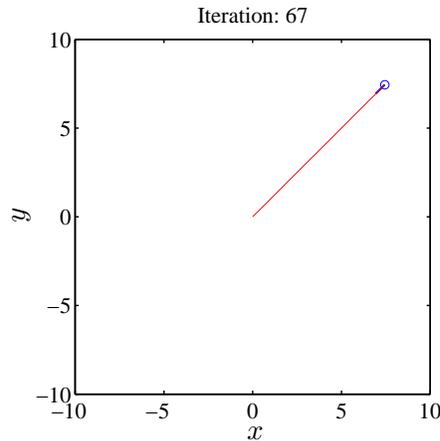


Figura 7.1: Simulación con $N = 15$ individuos y $\beta = 0,2$.

Para condiciones iniciales aleatorias de la posición y la velocidad se tienen los resultados presentados en las figuras 7.2, 7.3, 7.4 y 7.5. En este caso se aprecia que el enjambre logra describir una trayectoria circular de forma adecuada.

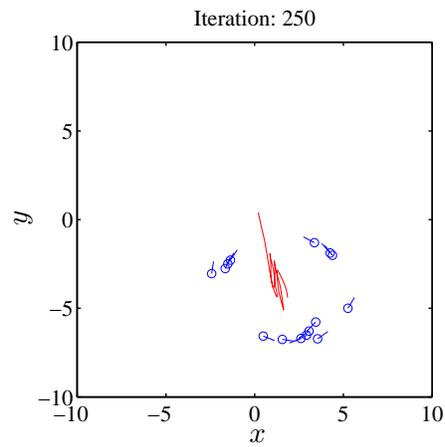


Figura 7.2: Simulación con $N = 15$ individuos y $\beta = 0,4$.

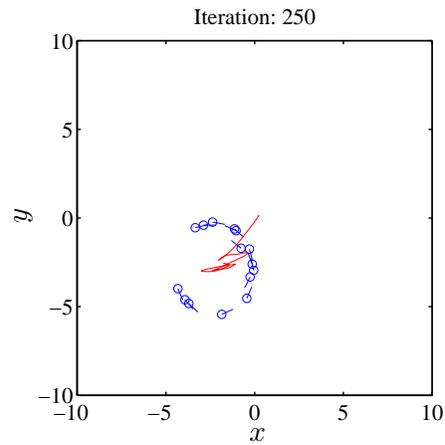


Figura 7.3: Simulación con $N = 15$ individuos y $\beta = 0,8$.

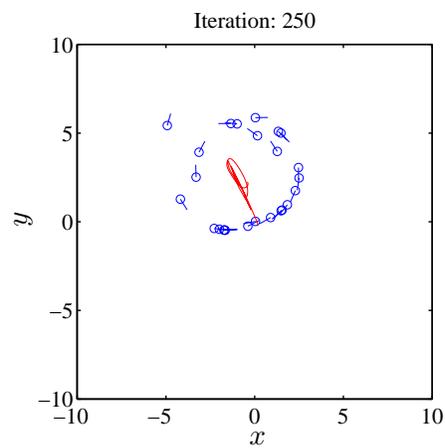


Figura 7.4: Simulación con $N = 25$ individuos y $\beta = 0,4$.

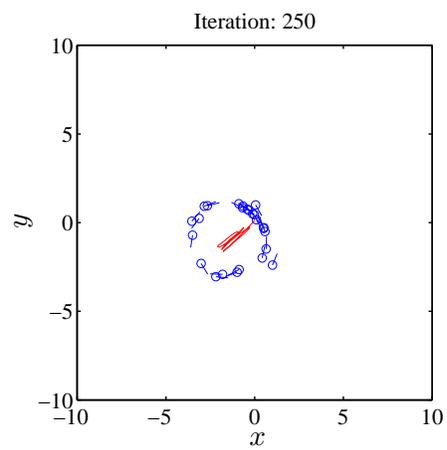


Figura 7.5: Simulación con $N = 25$ individuos y $\beta = 0,8$.

Capítulo 8

Propuesta del algoritmo

8.1. Introducción

En este capítulo se describe el algoritmo propuesto el cual se encuentra basado en el modelo seleccionado. Para la implementación del modelo las ecuaciones diferenciales se convierten a tiempo discreto. La estrategia de búsqueda multiobjetivo se encuentra basada en la convergencia y dispersión del enjambre empleando movimientos lineales y circulares. En esta propuesta para guiar la búsqueda y desplazamiento de las partículas se emplea un potencial de atracción unimodal centrado sobre el punto de rotación (vórtice) sobre el cual se quiere realizar la búsqueda (empleando la dispersión circular de las partículas).

8.2. Implementación del modelo

Para incorporar en el algoritmo el modelo dinámico del enjambre se discretizan las ecuaciones diferenciales tomando un intervalo de tiempo Δt , de tal forma que se tiene:

$$\vec{r}_i[n+1] = \vec{r}_i[n] + \vec{v}_i[n]\Delta t \quad (8.1)$$

$$\vec{v}_i[n+1] = \vec{v}_i[n] + \quad (8.2)$$

$$\left[(\alpha - \beta v_i^2[n]) \vec{v}_i[n] - \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i[n] - \vec{r}_j[n]) - \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i[n]) \right] \frac{\Delta t}{m_i}$$

Para tener un algoritmo más eficiente la fuerza dada por la interacción entre individuos se puede calcular de la siguiente forma:

$$\frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i[n] - \vec{r}_j[n]) = a \left(\vec{r}_i[n] - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{r}_j[n] \right) = a \left(\vec{r}_i[n] - \vec{R} \right) \quad (8.3)$$

8.3. Estrategia propuesta para la búsqueda multiobjetivo

El algoritmo desarrollado se encuentra basado en primer lugar en el comportamiento turbulento que presentan las partículas lo cual se emplea en el proceso de dispersión mientras que los movimientos lineales se utilizan para la convergencia. El diagrama de flujo del algoritmo se muestra en la figura 8.1.

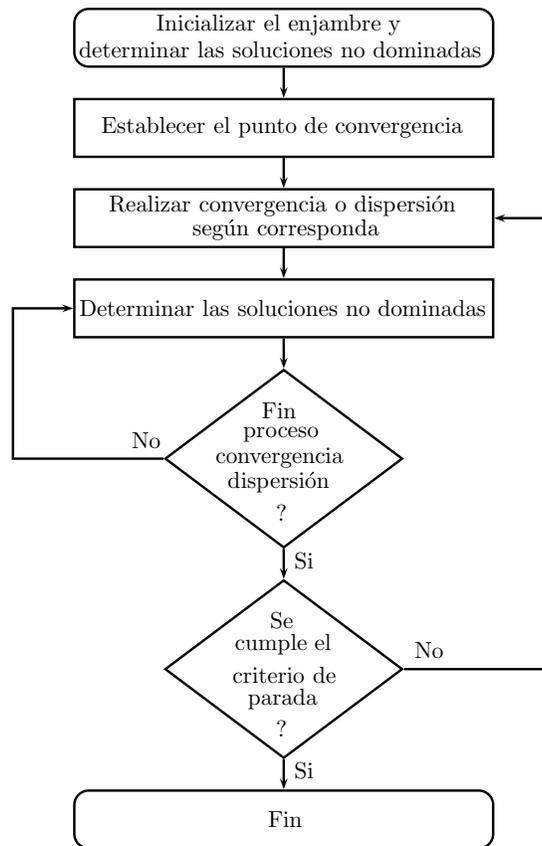


Figura 8.1: Diagrama de flujo del algoritmo propuesto.

En una primera instancia del algoritmo se realiza la inicialización aleatoria de las partículas sobre el espacio de búsqueda estableciendo las soluciones no dominadas, posteriormente se observa cuál de las soluciones presentan los vecinos más alejados esto con la finalidad de establecer las regiones del espacio de búsqueda con posibles soluciones pero con poca exploración. Con el fin de lograr una mejor exploración del espacio de búsqueda sobre la posición anteriormente determinada se construye un potencial de atracción para guiar las partículas a este punto. Luego de tener la convergencia del enjambre a este punto se realiza la dispersión empleando para esto movimientos circulares. Tanto en el proceso de convergencia como de dispersión se actualiza el frente de Pareto con las posiciones de

las partículas. Por otra parte, en el proceso de dispersión cuando las partículas escapen del espacio de búsqueda se determina otra nueva posición con vecinos alejados de tal forma que se realiza una nueva convergencia a este punto. De esta forma se sigue el proceso de convergencia y dispersión con lo cual se busca establecer mejores valores del frente de Pareto. Para la finalización del algoritmo se establece un valor máximo de separación entre una partícula y su vecino más proximo.

Como es de apreciar el algoritmo para realizar la búsqueda presenta dos fases:

1. **Convergencia:** En esta fase el enjambre converge a un punto del espacio de búsqueda sobre el cual se desea realizar el proceso de dispersión.
2. **Dispersión:** Después de realizar el proceso de convergencia se efectúa la dispersión del enjambre teniendo como vórtice el punto de convergencia.

8.4. Algoritmo propuesto

El algoritmo de optimización propuesto es denominado MOBEBS *Multi Objective Based on Emerging Behavior of Swarms*, el cual consiste en un algoritmo de *Optimización Multiobjetivo Basado en Comportamientos Emergentes de Enjambres* como lo es el movimiento circular de partículas con la formación de un vórtice.

Algoritmo 3: Algoritmo propuesto MOBEBS.

```

1 Inicializar el enjambre en el espacio solución. La posición inicial es aleatoria y la
  velocidad es cero;
2 Determinar las soluciones no dominadas;
3 begin
4   while Bajo el criterio de finalización. do
5     Establecer el punto de convergencia;
6     while Se realiza el proceso de convergencia-dispersión do
7       Determinar el proceso a realizar: convergencia o dispersión;
8       Realizar convergencia o dispersión;
9       for  $i = 1$  hasta  $N$  do
10        Calcular la nueva posición de las partículas con la ecuación 8.1;
11        Calcular la nueva velocidad de las partículas empleando la ecuación
           8.2;
12      end
13      Pasar a la siguiente iteración incrementando  $n$ .
14    end
15  end
16  Establecer el frente de Pareto.
17 end

```

8.5. Estrategia para determinar el punto de convergencia

Como es de apreciar en el algoritmo uno de los aspectos de importancia consiste en determinar el punto de convergencia del enjambre sobre el cual se realiza la dispersión de las partículas con lo cual se espera encontrar mejores soluciones.

Para determinar el punto de convergencia se busca establecer la zona en la cual existen pocas soluciones no dominadas, por lo cual, se propone un criterio basado en la distancia entre partículas.

El criterio de selección busca determinar la posición de una partícula que presenta la máxima separación entre sus vecinos más cercanos. Para lo anterior primero se establecen las posibles distancias entre una partícula i y otra j con $i \neq j$ tomando para la partícula i el menor de estos valores, es decir, la distancia con el vecino más próximo. Del conjunto de distancias entre vecinos de las i -partículas se toma el mayor valor, es decir, la mayor separación con su vecino más cercano. Este valor se puede determinar como:

$$d_M = \max_{i=1,2,3,\dots,N} \left(\min_{j=1,2,3,\dots,N} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right) \quad (8.4)$$

Finalmente el punto de convergencia \vec{r}_{esp} se toma como la posición que presenta la distancia d_M .

$$\{\vec{r}_{esp} = \vec{r}_i | d_M = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \forall i = 1, \dots, N \ j = 1, \dots, N\} \quad (8.5)$$

8.6. Componentes del algoritmo

En esta sección se revisan los aspectos relevantes de las componentes del algoritmo donde se describe la forma de identificar las fases, el potencial de atracción al mejor punto encontrado y el factor de autopropulsión para las fases de dispersión y convergencia.

8.6.1. Identificación de las fases del algoritmo

Con el fin de establecer cuándo el enjambre converge se observa si la partícula más alejada de \vec{r}_{esp} se localiza dentro de un determinado radio de convergencia R_{con} .

Para determinar la posición del punto más alejado se tiene la ecuación 8.6 la cual es evaluada en cada iteración para cada partícula.

$$\vec{r}_{ale} = \begin{cases} \vec{r}_i, & \text{si; } |\vec{r}_i - \vec{r}_{esp}| \geq |\vec{r}_{ale} - \vec{r}_{esp}|; \\ \vec{r}_{ale}, & \text{si; } |\vec{r}_i - \vec{r}_{esp}| < |\vec{r}_{ale} - \vec{r}_{esp}|. \end{cases} \quad (8.6)$$

Considerando la mejor posición encontrada y la posición de la partícula más alejada se pueden establecer los estados del algoritmo mediante la siguiente condición:

$$\begin{cases} \textit{Convergencia}, & \text{si;} |\vec{r}_{esp} - \vec{r}_{ale}| > R_{con}; \\ \textit{Dispersión}, & \text{si;} |\vec{r}_{esp} - \vec{r}_{ale}| \leq R_{con}. \end{cases} \quad (8.7)$$

8.6.2. Factor de interacción

El factor de interacción aunque se puede considerar el mismo para las fases de convergencia y dispersión, este se toma por separado ya que se deben cumplir con restricciones dadas por la velocidad máxima y mínima de las partículas, de tal forma que se tiene:

$$a = \begin{cases} a_c, & \text{si;} \textit{Convergencia}; \\ a_d, & \text{si;} \textit{Dispersión}. \end{cases} \quad (8.8)$$

8.6.3. Factor de autopropulsión en la fase de convergencia

Para lograr un comportamiento similar al descenso de gradiente en la fase de convergencia se propone hacer $\beta = 0$ y $\alpha = -m_i/\Delta t$ de tal forma que se tiene:

$$\vec{r}_i[n+1] = \vec{r}_i[n] + \vec{v}_i[n]\Delta t \quad (8.9)$$

$$\vec{v}_i[n+1] = \vec{v}_i[n] + \left[-\frac{m_i}{\Delta t}\vec{v}_i[n] - \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i[n] - \vec{r}_j[n]) - \vec{\nabla}U_{esp}(\vec{r}_i[n]) \right] \frac{\Delta t}{m_i} \quad (8.10)$$

Por lo cual, las ecuaciones del modelo en la fase de convergencia son:

$$\vec{r}_i[n+1] = \vec{r}_i[n] + \vec{v}_i[n]\Delta t \quad (8.11)$$

$$\vec{v}_i[n+1] = \left[-\frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i[n] - \vec{r}_j[n]) - \vec{\nabla}U_{esp}(\vec{r}_i[n]) \right] \frac{\Delta t}{m_i} \quad (8.12)$$

Las anteriores ecuaciones son similares a las presentes en el método de descenso del gradiente con un término adicional correspondiente a un acople global al punto medio de las partículas.

8.6.4. Factor de autopropulsión en la fase de dispersión

Como un primer aspecto a considerar se tiene la condición 8.13 para la selección del parámetro β , donde β_0 es un valor constante dado para la etapa de dispersión.

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{si;} \textit{Convergencia}; \\ \beta_0, & \text{si;} \textit{Dispersión}. \end{cases} \quad (8.13)$$

La adición de energía se realiza mediante el factor de propulsión el cual se considera como:

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{m_i}{\Delta t}, & \text{si; } \textit{Convergencia}; \\ \frac{d\alpha}{dt} = g, & \text{si; } \textit{Dispersión}. \end{cases} \quad (8.14)$$

Es importante señalar que la energía adicionada se encuentra limitada de la forma: $0 \geq \alpha \geq \alpha_{\text{máx}}$. El cálculo de α en tiempo discreto se realiza como:

$$\begin{cases} \alpha[n+1] = -\frac{m_i}{\Delta t}, & \text{si; } \textit{Convergencia}; \\ \alpha[n+1] = \alpha[n] + g\Delta t, & \text{si; } \textit{Dispersión}. \end{cases} \quad (8.15)$$

Incremento constante

Una alternativa para la función g considera un tiempo T_α para el incremento de energía y un tiempo T_V para esperar mientras las partículas se dispersan de forma circular sobre el espacio de búsqueda. El número total de iteraciones que toma este ciclo es $K_\alpha + K_V$, donde, $K_\alpha = T_\alpha/\Delta t$ y $K_V = T_V/\Delta t$. Para lo anterior se emplea la variable K_C con la cual se realiza el conteo de las iteraciones. La expresión para g en este caso es:

$$g = \begin{cases} \tau_c, & \text{si; } 0 \leq K_C < K_\alpha; \\ 0, & \text{si; } K_\alpha \leq K_C < K_\alpha + K_V. \end{cases} \quad (8.16)$$

Con la anterior función se espera que la energía de propulsión aumente hasta que las partículas logren evadir el mínimo local. El aumento de la energía está dado por el parámetro τ_c el cual corresponde a la tasa de incremento para la energía de autopropulsión.

8.6.5. Velocidad máxima y mínima

Para evitar una situación donde las partículas escapan del espacio de búsqueda por presentar una velocidad elevada se propone tener una velocidad máxima $v_{\text{máx}}$ para estas. Por otro lado, al acercarse las partículas al valor mínimo de U_{esp} la fuerza asociada a este potencial disminuye haciendo que la velocidad de las partículas baje, por lo cual, se considera un valor mínimo de velocidad $v_{\text{mín}}$ para evitar el colapso del enjambre.

Con el fin de establecer el efecto que tienen los valores máximos y mínimos de la velocidad en el desplazamiento de una partícula se tiene:

$$\frac{|\vec{r}_i[n+1] - \vec{r}_i[n]|}{\Delta t} = |\vec{v}_i| \quad (8.17)$$

El avance máximo $\Delta r_{\text{máx}}$ y mínimo $\Delta r_{\text{mín}}$ asociados a una partícula se pueden relacionar con la respectiva velocidad máxima y mínima de la siguiente forma:

$$\Delta r_{\text{máx}} = v_{\text{máx}} \Delta t$$

$$\Delta r_{\text{mín}} = v_{\text{mín}} \Delta t$$

Por otro lado, se tiene que la magnitud de la velocidad producida por la fuerza \vec{F}_i es:

$$|\vec{F}_i| = m_i \frac{|\vec{v}_i[n+1] - \vec{v}_i[n]|}{\Delta t} \quad (8.18)$$

Considerando el caso particular en la fase de convergencia donde $|\vec{v}_i[n+1] - \vec{v}_i[n]| = |\vec{v}_i[n+1]|$, entonces, la fuerza máxima $F_{\text{máx}}$ y mínima $F_{\text{mín}}$ asociada a la velocidad máxima y mínima es:

$$F_{\text{máx}} = v_{\text{máx}} \frac{m_i}{\Delta t} \quad (8.19)$$

$$F_{\text{mín}} = v_{\text{mín}} \frac{m_i}{\Delta t} \quad (8.20)$$

Otro aspecto a considerar en la fase de convergencia consiste en que la fuerza total que actúa sobre una partícula está dada por la fuerza de interacción y la fuerza asociada al punto de convergencia. En esta propuesta se considera que la magnitud de cada fuerza se encuentra limitada por la velocidad máxima y mínima que se puede generar. Empleando la desigualdad triangular para vectores (ecuación 8.21) se puede establecer una cota para el valor máximo y mínimo total que pueden generar estas fuerzas.

$$|\vec{F}_{int,i} + \vec{F}_{mej,i}| \leq |\vec{F}_{int,i}| + |\vec{F}_{mej,i}| \quad (8.21)$$

Considerando lo anterior se puede determinar un valor máximo y mínimo total para la velocidad de las partículas en la fase de convergencia de tal forma que se tiene:

$$v_{\text{máx}T} = 2v_{\text{máx}}$$

$$v_{\text{mín}T} = 2v_{\text{mín}}$$

8.6.6. Función potencial asociada al punto de convergencia

Para la función potencial asociada al punto de convergencia se considera su descripción por separado para las fases de convergencia y dispersión. En el caso de convergencia se emplea un potencial de tipo parabólico limitado por la velocidad máxima y mínima que este puede producir.

Por otro lado, en la fase de dispersión se tiene un potencial de tipo cónico para centrar el enjambre en el punto encontrado y realizar el proceso de dispersión sobre este punto.

Función potencial en la fase de convergencia

El potencial asociado al mejor punto individual se considera de tipo parabólico y acotado por el valor máximo y mínimo de la velocidad ($v_{\text{máx}}$, $v_{\text{mín}}$) que esta fuerza puede producir en una iteración. La consideración para emplear un valor mínimo de velocidad consiste en mantener el enjambre de partículas en movimiento incluso cuando están en la cercanía del punto de convergencia.

Empleando las expresiones 8.17 y 8.18 se puede establecer $U_{esp}(\vec{r}_i)$ de la siguiente forma:

$$U_{esp}(\vec{r}_i) = \begin{cases} F_{\text{mín}}|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i|, & \text{si; } k_{mc}|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i| \leq F_{\text{mín}}; \\ k_{mc}\frac{1}{2}|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i|^2, & \text{si; } F_{\text{mín}} < k_{mc}|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i| \leq F_{\text{máx}}; \\ F_{\text{máx}}|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i|, & \text{si; } F_{\text{máx}} < k_{mc}|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i|. \end{cases} \quad (8.22)$$

La fuerza asociada al potencial U_{esp} es:

$$\vec{F}_{esp,i}(\vec{r}_i) = \begin{cases} -F_{\text{mín}}\frac{(\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i|}, & \text{si; } k_{mc}|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i| \leq F_{\text{mín}}; \\ -k_{mc}(\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i), & \text{si; } F_{\text{mín}} < k_{mc}|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i| \leq F_{\text{máx}}; \\ -F_{\text{máx}}\frac{(\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i|}, & \text{si; } F_{\text{máx}} < k_{mc}|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i|. \end{cases} \quad (8.23)$$

Función potencial en la fase de dispersión

En la fase de dispersión el potencial asociado al mejor punto encontrado se encarga de mantener centrado el vórtice de las partículas sobre este punto. Para poder estimar de forma adecuada el radio de giro de las partículas este potencial se considera de tipo cónico de tal forma que la fuerza producida sea constante. Considerando lo anterior se propone un potencial de la forma:

$$U_{esp}(\vec{r}_i) = k_{md}|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i| \quad (8.24)$$

Donde k_{md} es un factor de escala de tal forma que la fuerza asociada a este potencial es:

$$\vec{F}_{esp,i}(\vec{r}_i) = -k_{md}\frac{(\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_{esp} - \vec{r}_i|} \quad (8.25)$$

8.6.7. Versión estocástica del algoritmo

Con el fin de tener una mejor dispersión de las partículas cuando estas se desplazan se propone realizar una ponderación de la fuerza asociada al entorno $\vec{F}_{esp,i}(\vec{r}_i)$ mediante un número aleatorio $\beta_g \in [0, 1]$ uniformemente distribuido en el intervalo $[0, 1]$. Considerando lo anterior esta componente en la implementación del algoritmo toma la forma $\beta_g\vec{F}_{esp,i}(\vec{r}_i)$.

Capítulo 9

Resultados experimentales

9.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos. En una primera instancia se observan las diferentes configuraciones de los experimentos realizados considerando las funciones objetivo, tipo de inicialización y configuración de los algoritmos.

Adicionalmente en este capítulo se presenta el comportamiento dinámico del algoritmo para las funciones multiobjetivo consideradas.

9.2. Funciones de prueba

Idealmente, las funciones de prueba elegidas para evaluar un MOEA (*Multi-Objective Evolutionary Algorithm*) debieran contener características similares al problemas del mundo real. Sin embargo, la literatura especializada se ha caracterizado por el uso de funciones *artificiales* que suelen resultar difíciles para la mayoría de los algoritmos evolutivos multiobjetivo actuales, pero que no necesariamente representan las dificultades que caracterizan a los problemas del mundo real.

Considerando lo descrito en [14] y [87] las funciones de prueba consideradas son:

F_1 : Binh

- Número de variables: $n = 2$.
- Límites de las variables: $[-10, 10]$.

- Funciones objetivo:

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 + y^2 \\ f_2 &= (x - 5)^2 + (y - 5)^2 \end{aligned}$$

F_2 : Fonseca

- Número de variables: $n = 2$.
- Límites de las variables: $[-4, 4]$.
- Funciones objetivo:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - \exp(-((x - 1)^2) - ((y + 1)^2)) \\ f_2 &= 1 - \exp(-((x + 1)^2) - ((y - 1)^2)) \end{aligned}$$

F_3 : Fonseca-2

- Número de variables: $n = 3$.
- Límites de las variables: $[-4, 4]$.
- Funciones objetivo:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^3 \left(x_i - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) \\ f_2 &= 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^3 \left(x_i + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) \end{aligned}$$

F_4 : Poloni

- Número de variables: $n = 2$.
- Límites de las variables: $[-3, 3]$.
- Funciones objetivo:

$$\begin{aligned} f_1 &= -[1 + (A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2] \\ f_2 &= -[(x + 3)^2 + (y + 1)^2] \end{aligned}$$

$$A_1 = 0,5 \sin(1) - 2 \cos(1) + \sin(2) - 1,5 \cos(2)$$

$$A_2 = 1,5 \sin(1) - \cos(1) + 2 \sin(2) - 0,5 \cos(2)$$

$$B_1 = 0,5 \sin(x) - 2 \cos(x) + \sin(y) - 1,5 \cos(y)$$

$$B_2 = 1,5 \sin(x) - \cos(x) + 2 \sin(y) - 0,5 \cos(y)$$

F_5 : Rendon

- Número de variables: $n = 2$.
- Límites de las variables: $[-3, 3]$.
- Funciones objetivo:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \\ f_2 &= x^2 + 3y^2 + 1 \end{aligned}$$

 F_6 : Viennet

- Número de variables: $n = 2$.
- Límites de las variables: $[-2, 2]$.
- Funciones objetivo:

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 + (y - 1)^2 \\ f_2 &= x^2 + (y + 1)^2 + 1 \\ f_3 &= (x - 1)^2 + y^2 + 2 \end{aligned}$$

 F_7 : Viennet-2

- Número de variables: $n = 2$.
- Límites de las variables: $[-4, 4]$.
- Funciones objetivo:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{(x - 2)^2}{2} + \frac{(y + 1)^2}{13} + 3 \\ f_2 &= \frac{(x + y - 3)^2}{36} + \frac{(-x + y + 2)^2}{8} - 17 \\ f_3 &= \frac{(x + 2y - 1)^2}{175} + \frac{(2y - x)^2}{17} - 13 \end{aligned}$$

 F_8 : Viennet-3

- Número de variables: $n = 2$.
- Límites de las variables: $[-3, 3]$.

- Funciones objetivo:

$$f_1 = 0,5(x^2 + y^2) + \sin(x^2 + y^2)$$

$$f_2 = \frac{(3x - 2y + 4)^2}{8} + \frac{(x - y + 1)^2}{27} + 15$$

$$f_3 = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} - 1,1 \exp(-(x^2 + y^2))$$

9.3. Configuración de experimentos

Para el desarrollo de los experimentos se considera la inicialización de las partículas de forma global y local. La inicialización global consiste en localizar las partículas de forma aleatoria sobre todo el espacio de búsqueda. Por su parte, la inicialización local consiste en restringir la posición de las partículas para la primera iteración en un subespacio alejado del mínimo global. Siguiendo las recomendaciones de [88] se propone emplear una forma de inicialización como la mostrada en la figura 9.1.

Para los experimentos realizados se toma $L = 0,8\text{range}(\Omega)/2$ y $c = 0,2\text{range}(\Omega)/2$ es decir una separación del punto medio correspondiente al 80% de R_Ω y un subespacio con un ancho del 40% de R_Ω .

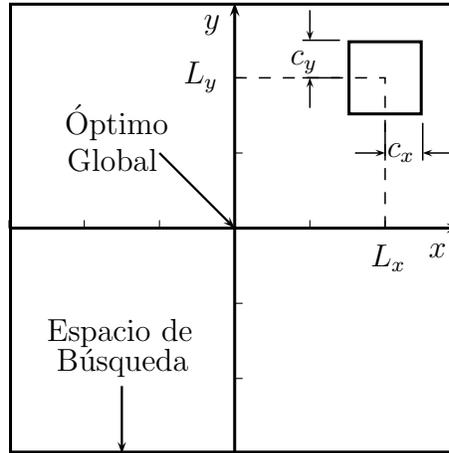


Figura 9.1: Esquema de la inicialización local de las partículas en dos dimensiones.

Con el fin de realizar la configuración de los experimentos se considera en primer lugar la función multiobjetivo, luego se tiene el tipo de inicialización y por último se considera las configuraciones respectivas de los algoritmos MOPSO y MOBEBS.

La configuración de los experimentos se presenta a continuación.

- Funciones objetivo: 8.

- Condiciones iniciales:
 - Globales.
 - Locales.
- MOBEBS:
 - Configuración 1: Determinístico.
 - Configuración 2: Estocástico.
- MOPSO:
 - Configuración 1: $w = 0,6$, $c_1 = 1,7$, $c_2 = 1,7$.
 - Configuración 2: $w = 0,729$, $c_1 = 1,494$, $c_2 = 1,494$.

9.4. Resultados experimentales

La configuración de parámetros se encuentra dada principalmente por el espacio de búsqueda para las diferentes funciones de prueba, teniendo así las siguientes posibilidades:

- $\text{range}(\Omega) = 20$.
- $\text{range}(\Omega) = 8$.
- $\text{range}(\Omega) = 6$.
- $\text{range}(\Omega) = 4$.

Como es de apreciar, se tienen diferentes rangos para el espacio de búsqueda lo cual influye principalmente en la velocidad con la cual se desplazan las partículas. En primer lugar los parámetros de libre elección comunes a las funciones de prueba son:

N	Δt	m_i	$\lambda_{\text{máx}}$	$\lambda_{\text{mín}}$	γ_{md}	N_V
20	0,1	1	0,1	0,005	1	2

Tabla 9.1: Parámetros del algoritmo.

La estrategia para el incremento de energía se determina considerando el número de veces que se desea realizar los incrementos de energía, por lo cual, resulta ser igual para todas las funciones de prueba. A continuación se muestran los parámetros empleados considerando los casos presentados anteriormente.

En primer lugar, para el caso donde $\text{range}(\Omega) = 20$ se tienen los parámetros de la tabla 9.2.

$\Delta r_{\text{máx}}$	$\Delta r_{\text{mín}}$	$v_{\text{máx}}$	$v_{\text{mín}}$	$F_{\text{máx}}$	$F_{\text{mín}}$	$\alpha_{\text{máx}}$
2	0,1	20	1	200	10	10
β_0	R_D	R_{con}	a_d	a_c	k_{mc}	k_{md}
0,025	12	0,2	1,39	1,39	25	16,7

Tabla 9.2: Parámetros del algoritmo con $\text{range}(\Omega) = 20$.

Por su parte con $\text{range}(\Omega) = 8$ se tienen los parámetros de la tabla 9.3.

$\Delta r_{\text{máx}}$	$\Delta r_{\text{mín}}$	$v_{\text{máx}}$	$v_{\text{mín}}$	$F_{\text{máx}}$	$F_{\text{mín}}$	$\alpha_{\text{máx}}$
0,8	0,04	8	0,4	80	4	10
β_0	R_D	R_{con}	a_d	a_c	k_{mc}	k_{md}
0,156	4,8	0,08	1,39	1,39	25	6,67

Tabla 9.3: Parámetros del algoritmo con $\text{range}(\Omega) = 8$.

Para $\text{range}(\Omega) = 6$ los respectivos parámetros se pueden apreciar en la tabla 9.4.

$\Delta r_{\text{máx}}$	$\Delta r_{\text{mín}}$	$v_{\text{máx}}$	$v_{\text{mín}}$	$F_{\text{máx}}$	$F_{\text{mín}}$	$\alpha_{\text{máx}}$
0,8	0,04	8	0,4	80	4	10
β_0	R_D	R_{con}	a_d	a_c	k_{mc}	k_{md}
0,156	4,8	0,08	1,39	1,39	25	6,67

Tabla 9.4: Parámetros del algoritmo con $\text{range}(\Omega) = 6$.

Finalmente, con $\text{range}(\Omega) = 4$ se tienen los parámetros de la tabla 9.5.

$\Delta r_{\text{máx}}$	$\Delta r_{\text{mín}}$	$v_{\text{máx}}$	$v_{\text{mín}}$	$F_{\text{máx}}$	$F_{\text{mín}}$	$\alpha_{\text{máx}}$
0,4	0,02	4	0,2	40	2	10
β_0	R_D	R_{con}	a_d	a_c	k_{mc}	k_{md}
0,625	2,4	0,04	1,39	1,39	25	3,33

Tabla 9.5: Parámetros del algoritmo con $\text{range}(\Omega) = 4$.

Al realizar los cálculos para K_α y K_V empleando los anteriores valores se tienen las estrategias para el incremento de energía mostradas en la figura 9.2.

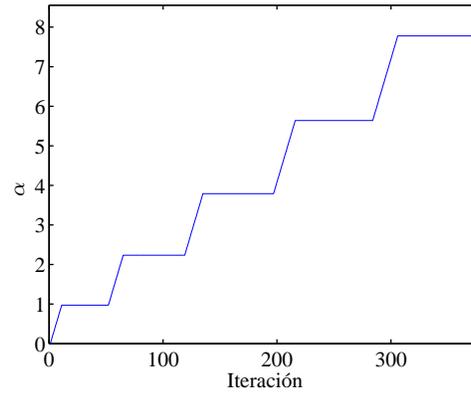


Figura 9.2: Estrategia para el incremento de energía.

9.4.1. Resultados cualitativos

En estos resultados para cada función de prueba se observa de forma cualitativa un caso representativo del comportamiento del algoritmo teniendo las figuras correspondientes al frente de pareto encontrado, velocidad de las partículas, energía suministrada y radio de giro de las partículas.

Resultados para F_1

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo F_1 son, figura 9.3 correspondiente al frente de pareto obtenido, y figura 9.4 donde se presenta la energía suministrada, velocidad y radio de giro de las partículas.

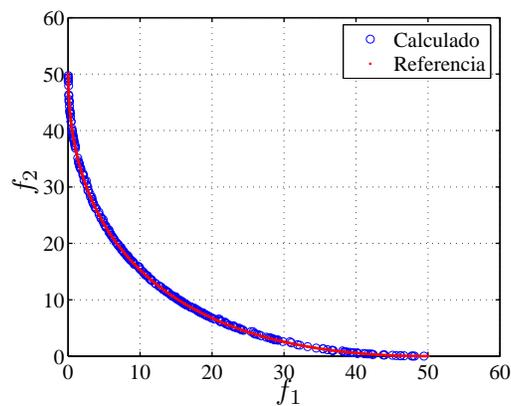


Figura 9.3: Frente de pareto encontrado.

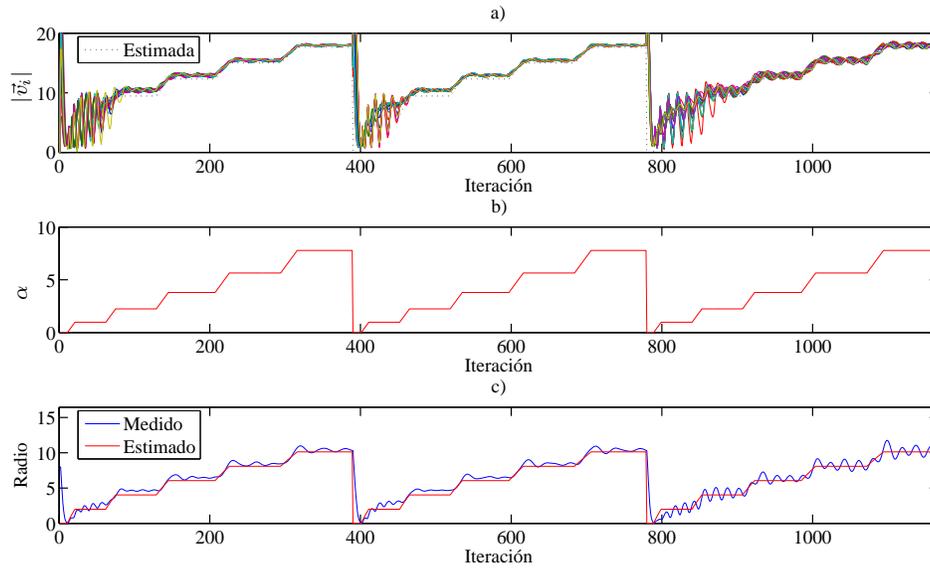


Figura 9.4: a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.

En un primer lugar, para la función de prueba F_1 , en la figura 9.3 se aprecia una buena aproximación al frente de pareto ideal. Por su parte en la figura 9.4 se observa el incremento de energía y la velocidad medida la cual se aproxima a la estimada. Adicionalmente se puede apreciar que el radio medido se encuentra cerca al estimado.

Resultados para F_2

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo F_2 son, figura 9.5 correspondiente al frente de pareto obtenido y figura 9.6 donde se presenta la energía suministrada, velocidad y radio de giro de las partículas.

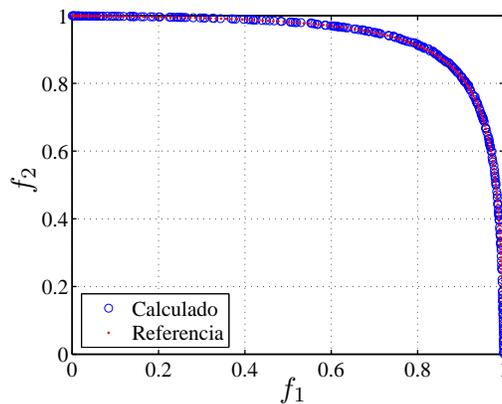


Figura 9.5: Frente de pareto encontrado.

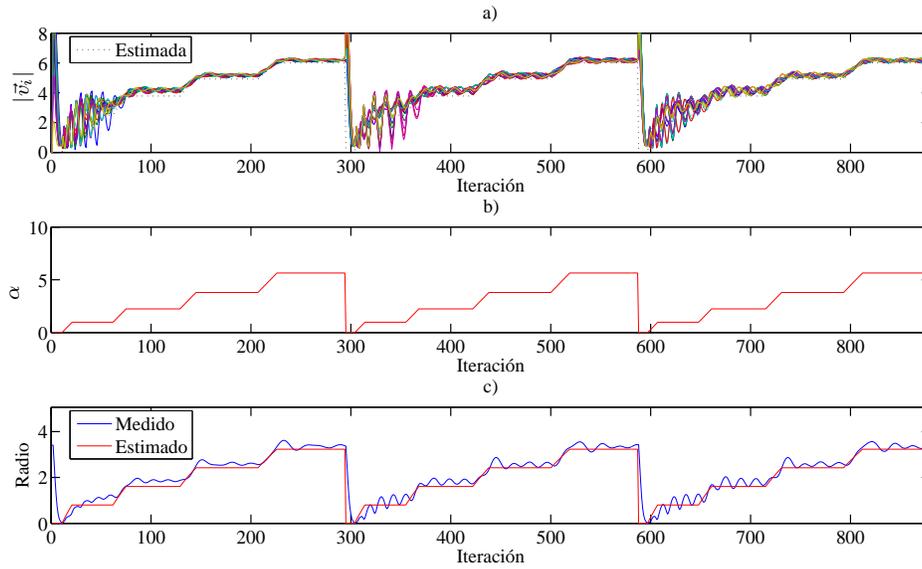


Figura 9.6: a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.

En este caso en la figura 9.5 se observa una adecuada convergencia del algoritmo al frente de pareto de referencia. También se aprecia que la velocidad medida se aproxima a la estimada (figura 9.6). Finalmente se observa que el radio medido se encuentra cerca al radio estimado.

Resultados para F_3

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo F_3 son, figura 9.7 correspondiente al frente de pareto obtenido y figura 9.8 donde se presenta la energía suministrada, velocidad y radio de giro de las partículas.

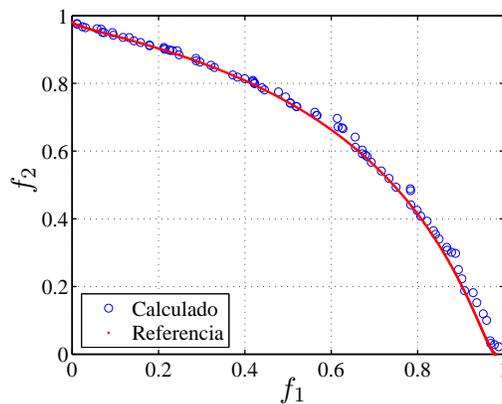


Figura 9.7: Frente de pareto encontrado.

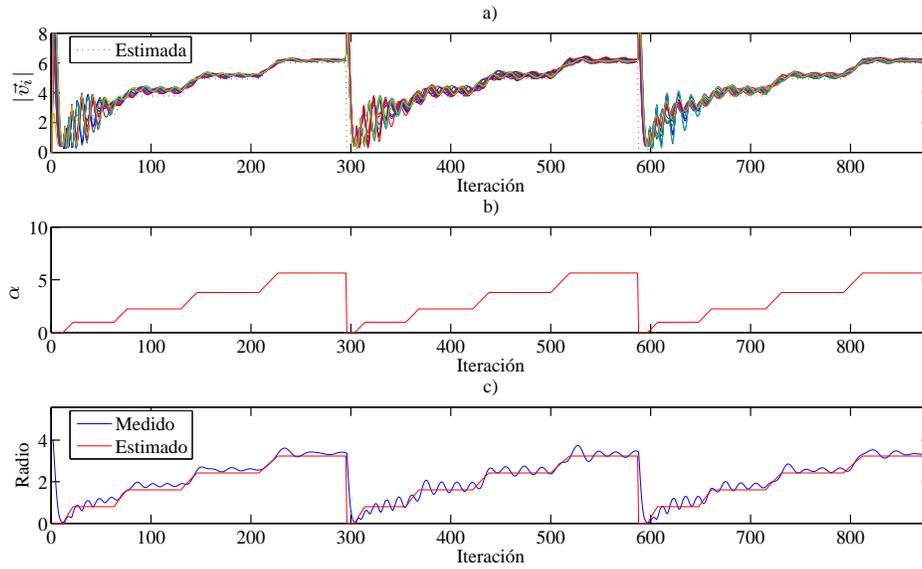


Figura 9.8: a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.

En la figura 9.8 se observa que el algoritmo logra encontrar una buena cantidad de soluciones del frente de Pareto. Por su parte, en la figura 9.8 se aprecia que la velocidad de las partículas está dada por el incremento de energía teniendo una mejor aproximación con la velocidad estimada en las últimas iteraciones. Finalmente es de apreciar que el radio medido se aproxima al estimado.

Resultados para F_4

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo F_4 son, figura 9.9 correspondiente al frente de Pareto obtenido y figura 9.10 donde se presenta la energía suministrada, velocidad y radio de giro de las partículas.

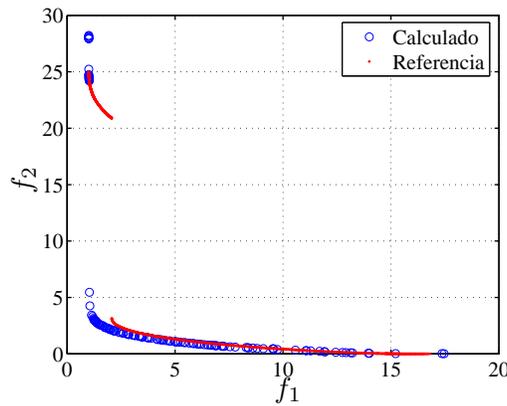


Figura 9.9: Frente de Pareto encontrado.

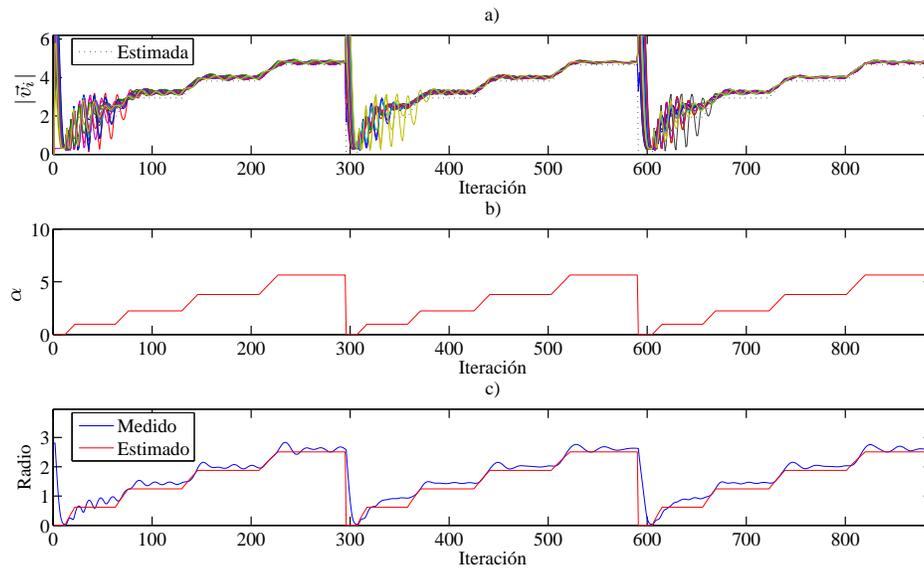


Figura 9.10: a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.

En primer lugar es de apreciar que las partículas logran encontrar una buena cantidad de soluciones del frente óptimo de pareto. En este grupo de figuras se puede observar los procesos de convergencia y dispersión realizados por el enjambre.

Como es de apreciar en la figura 9.10 en la medida que se incrementa la energía el radio de giro también aumenta. En estos resultados también se puede apreciar que para las iteraciones finales se tiene una mejor aproximación entre la velocidad medida y estimada.

Resultados para F_5

En este caso las figuras 9.11 y 9.12 presentan los resultados cualitativos para la función objetivo F_5 . Estas figuras muestran el frente de pareto encontrado y el comportamiento dinámico del enjambre.

La figura 9.11 corresponde al frente de pareto obtenido, por su parte en la figura 9.12 se presenta la energía suministrada, velocidad media de cada partícula y el radio de giro tanto estimado como medido para el enjambre de partículas.

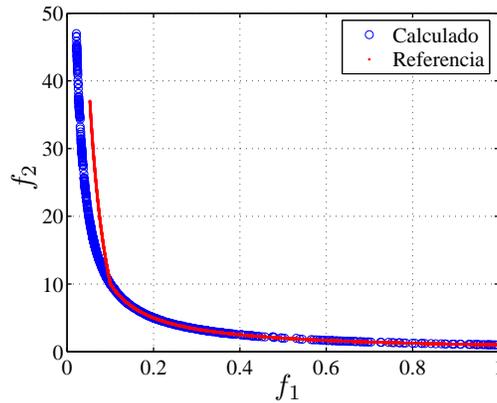


Figura 9.11: Frente de Pareto encontrado.

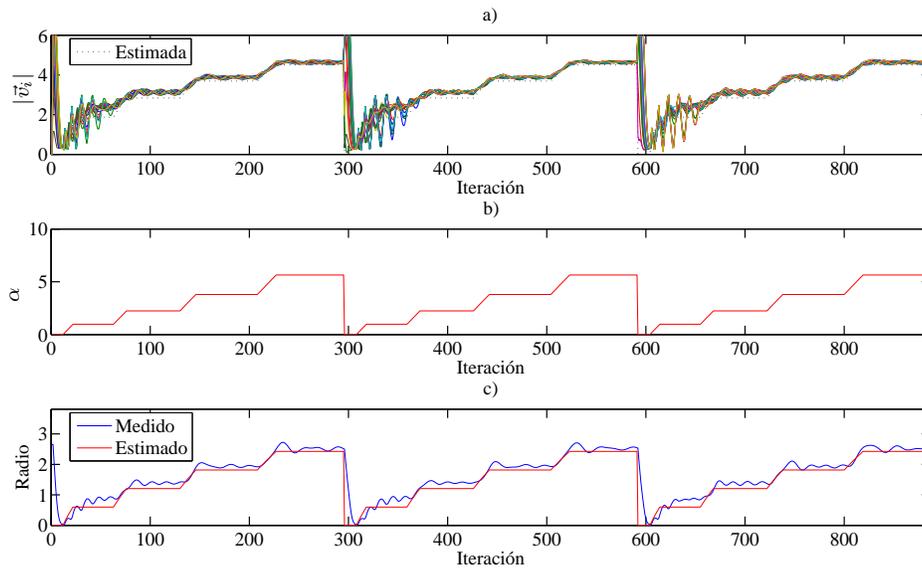


Figura 9.12: a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.

En este grupo de resultados se puede observar que el enjambre encuentra de forma adecuada una buena cantidad de soluciones del frente de Pareto realizando procesos de dispersión mediante incrementos de energía. Finalmente también se aprecia que el radio medido se aproxima al estimado.

Resultados para F_6

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo F_6 son, figura 9.13 correspondiente al frente de Pareto obtenido y figura 9.14 donde se presenta la energía suministrada, velocidad y radio de giro de las partículas.

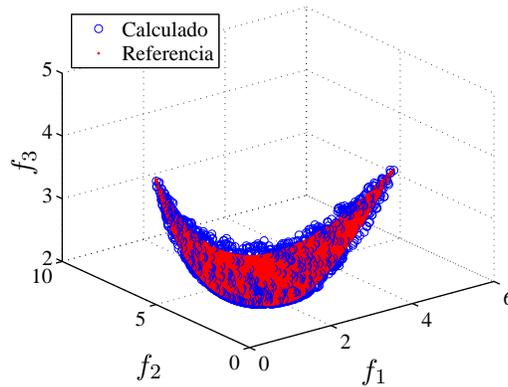


Figura 9.13: Frente de pareto encontrado.

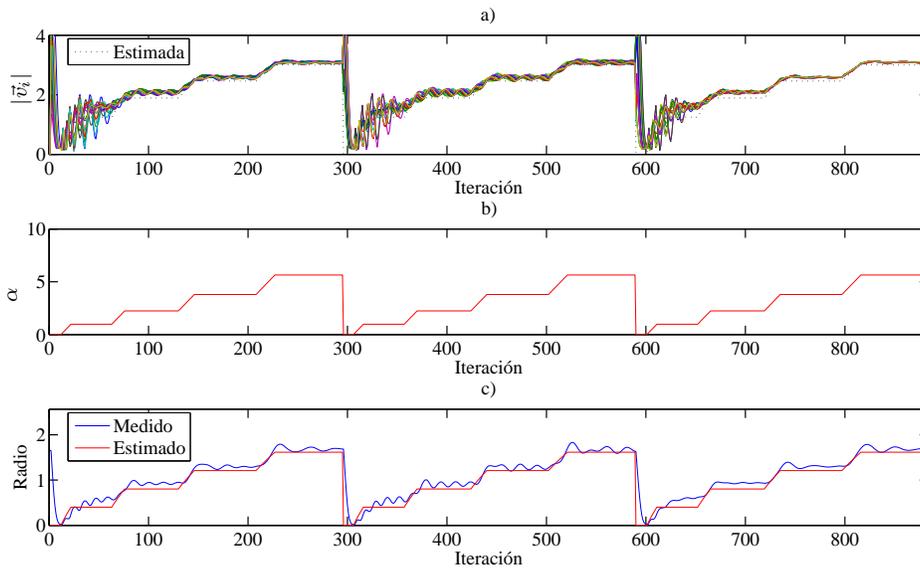


Figura 9.14: a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.

En estas figuras se observa que mediante el proceso de dispersión el enjambre logra encontrar los valores del frente óptimo de pareto. También se aprecia que la velocidad medida se aproxima a la estimada en buena parte de las iteraciones. Finalmente es de notar que el radio medido se aproxima al estimado.

Resultados para F_7

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo F_7 son, figura 9.15 correspondiente al frente de pareto obtenido y figura 9.16 donde se presenta la energía suministrada, velocidad y radio de giro de las partículas.

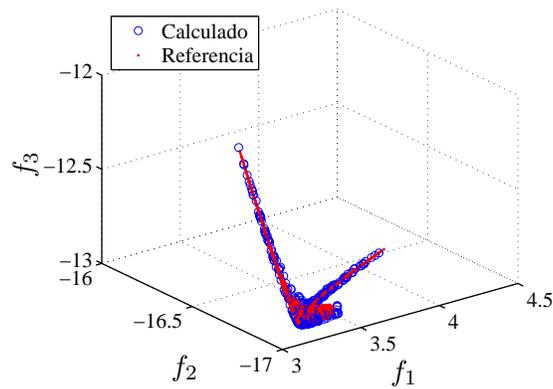


Figura 9.15: Frente de pareto encontrado.

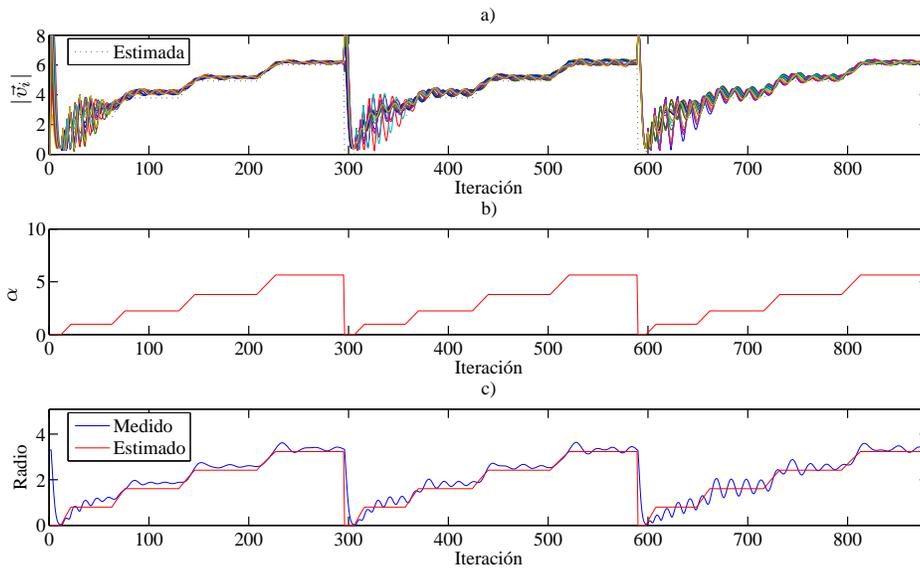


Figura 9.16: a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.

En estos resultados se puede apreciar que el algoritmo realiza varios incrementos de energía lo cual le permite encontrar varios puntos del frente de pareto. También se observa que la velocidad de las partículas depende de los incrementos realizados al factor de propulsión.

Resultados para F_8

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo F_8 son, figura 9.17 correspondiente al frente de pareto obtenido y figura 9.18 donde se presenta la energía suministrada, velocidad y radio de giro de las partículas.

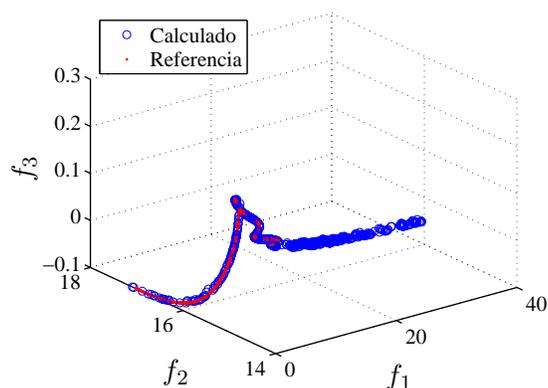


Figura 9.17: Frente de pareto encontrado.

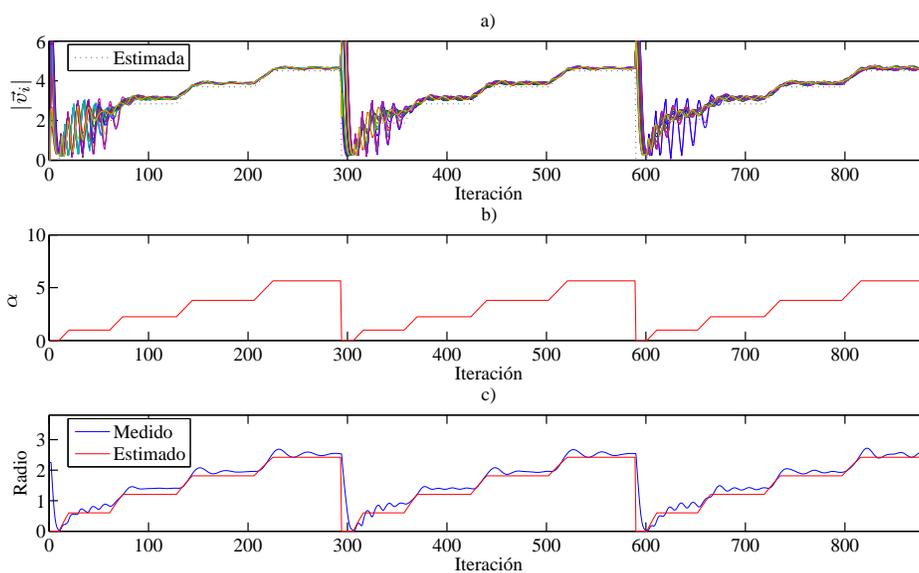


Figura 9.18: a) Magnitud de las velocidades, b) Energía suministrada, c) Radio medido y estimado.

Para esta función objetivo se observa que el enjambre realiza varios procesos de dispersión lo cual permite encontrar varios puntos del frente de pareto. Por otra parte, se aprecia que la diferencia entre la velocidad medida y estimada tiende a ser menor para velocidades altas de las partículas. Finalmente es de notar que el radio medido se aproxima al estimado.

Capítulo 10

Análisis estadístico de resultados

10.1. Introducción

En este capítulo se realiza el análisis estadístico de los resultados obtenidos. La metodología empleada para el análisis de datos consiste inicialmente en pruebas de normalidad y homocedasticidad (igualdad de varianzas) con las cuales se determina la prueba de hipótesis a realizar para comparar los resultados obtenidos para diferentes configuraciones. La comparación entre los diferentes grupos de parámetros se realiza considerando el número de iteraciones requeridas para que el enjambre de partículas logre llegar al objetivo. En la primera parte del capítulo se realiza una revisión de conceptos sobre la prueba de hipótesis como las diferentes pruebas a realizar y posteriormente se aplican estas pruebas a los datos recolectados.

10.2. Metodología

Cuando existe variabilidad en los datos recolectados de un experimento se suele emplear prueba estadística de hipótesis. Cuando se quiere establecer si los resultados obtenidos para dos configuraciones de parámetros son iguales, las hipótesis a considerar son:

- H_0 Hipótesis nula. Los resultados obtenidos para los dos grupos de parámetros presentan valores medios iguales.
- H_1 Hipótesis alternativa. Los resultados obtenidos para los dos grupos de parámetros no presentan valores medios iguales.

Cuando se acepta o rechaza la hipótesis nula existe la posibilidad de cometer un error el cual se puede clasificar tal como se muestra en la tabla 10.1. En el error tipo I se rechaza

la hipótesis nula cuando esta es verdadera, mientras que para el error tipo II se acepta la hipótesis nula siendo esta falsa.

Decisión \ Condición real	H_0 verdadera	H_0 falsa
Rechazar H_0	Error Tipo I	Correcto
Aceptar H_0	Correcto	Error Tipo II

Tabla 10.1: Error tipo I y tipo II.

Luego de realizar los experimentos con la respectiva recolección de datos el procedimiento general para la prueba de hipótesis es:

1. Establecer la hipótesis nula y alternativa.
2. Fijar el estadístico de prueba (tipo de prueba a realizar).
3. Establecer la región de rechazo de la hipótesis nula (nivel de significancia).
4. Tomar los datos y calcular el estadístico de prueba.
5. Establecer si se acepta o rechaza la hipótesis nula.

En muchas oportunidades la prueba de hipótesis se realiza considerando un nivel de significancia α -value el cual corresponde a la probabilidad de cometer un error tipo I. Para pruebas de una cola si el estadístico de prueba calculado con los datos es mayor que el calculado para el valor de significancia la hipótesis nula se rechaza. Otro enfoque para la prueba de hipótesis consiste en el p -value el cual es la probabilidad de obtener un resultado donde la hipótesis nula es cierta. Bajo este enfoque la hipótesis nula se rechaza si el p -value del estadístico de prueba es igual o menor que el nivel de significancia establecido.

10.2.1. Pruebas estadísticas de hipótesis

Para determinar si se acepta o rechaza la hipótesis nula existen diferentes pruebas estadísticas las cuales principalmente se pueden clasificar como paramétricas y no paramétricas. Las pruebas paramétricas están basadas en suposiciones sobre los datos sin embargo son más robustas, por otro lado las pruebas no paramétricas no requieren suposiciones para su aplicación. En el caso de emplear pruebas paramétricas es necesario comprobar previamente las suposiciones mediante pruebas estadísticas las cuales suelen ser de normalidad y homocedasticidad, la primera determina si los datos siguen una distribución normal y la segunda consiste en establecer si los grupos de datos a comparar presentan la misma varianza.

Considerando que las pruebas paramétricas son más confiables pero requieren de una verificación preliminar de las suposiciones que las soportan, entonces, una posible metodología para realizar este tipo de pruebas según [89] y [65] se describe a continuación. En el caso de tener normalidad y homocedasticidad lo recomendado es realizar un análisis de varianza (ANOVA), cuando se presente la normalidad de los datos pero no la homocedasticidad, se puede emplear la prueba de Welch o de Kruskal Wallis, finalmente si no se presenta normalidad la prueba recomendada es la de Kruskal Wallis. Esta metodología se puede apreciar en la figura 10.1.

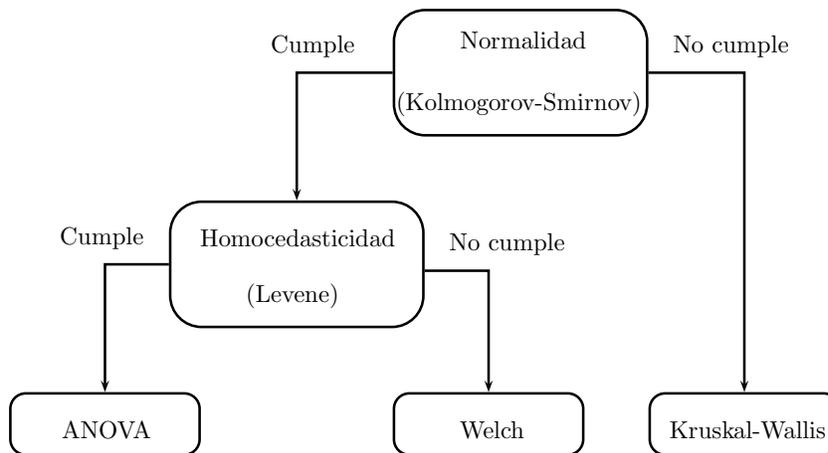


Figura 10.1: Metodología para establecer la prueba de hipótesis a realizar.

Si luego de aplicar la metodología indicada anteriormente se rechaza la hipótesis nula se concluye que existen diferencias significativas entre los grupos de resultados, por lo cual, el siguiente paso consiste en realizar pruebas de comparaciones múltiples para establecer que grupos presentan diferencias entre sí [89].

Si se cumplen los supuestos de normalidad y homocedasticidad, las comparaciones múltiples se pueden realizar empleando los contrastes de: Duncan, Newman-Keuls, Bonferroni, Scheffé o HSD de Tukey [89], [92].

En el caso de no cumplirse los supuestos de normalidad y homocedasticidad se pueden emplear pruebas no paramétricas para comparaciones múltiples de: Nemenyi, Holm, Bonferroni-Dunn [93], [94] o la prueba de Bonferroni como método complementario a la prueba de Kruskal-Wallis [95].

El test de Friedman es un equivalente no paramétrico al test de medidas-repetidas ANOVA. La prueba de Bonferroni-Dunn es similar al test de Tukey para ANOVA y es útil cuando se quiere comparar un algoritmo de control en relación a otros. El de Test de Holm prueba secuencialmente las hipótesis ordenadas según su significancia. Finalmente la prueba de Ranking de Signos de Wilcoxon es una alternativa no paramétrica al t -test por parejas.

Para determinar que grupos de resultados son significativos entre si se tienen dos enfoques, el primero consiste de una comparación de todos a todos para lo cual se emplea el test de Nemenyi, el cual es similar al test de Tukey para ANOVA. El otro enfoque consiste en realizar la comparación con un algoritmo de control donde se tienen menos comparaciones, ejemplos de este tipo de pruebas son Bonferroni-Dunn y Step-down.

Un método válido para muestras grandes equivalente al procedimiento de Bonferroni (Bonferroni tiene un método paramétrico para comparaciones) para comparaciones múltiples puede emplearse en este caso, siempre que el tamaño de las muestras no sea muy pequeño.

Como resultado de aplicar el método no paramétrico de Bonferroni se tienen intervalos de confianza los cuales permiten determinar si los grupos a comparar no presentan diferencias significativas. Una representación aproximada del resultado de esta prueba se realiza de forma gráfica donde se muestra el ranking promedio de cada grupo y un intervalo equivalente. Dos grupos de resultados se consideran con diferencias significativas si sus intervalos se traslapan [96].

10.3. Análisis de resultados

Considerando que el algoritmo propuesto consiste en un enjambre de partículas, entonces, para establecer el número de corridas que se debe ejecutar el algoritmo con cada grupo de parámetros se pueden tomar como referencia los trabajos presentados en [29] donde se emplean algoritmos de optimización basados en enjambres de partículas realizando 50 corridas para cada caso de aplicación. Los datos que se muestran en las siguientes tablas consisten en la media, la varianza (VAR), la desviación estándar (STD) y en rango medio (MR) el cual se emplea para las pruebas no paramétricas de Kruskal-Wallis y Bonferroni.

Para las pruebas de normalidad, homocedasticidad y comparación entre grupos de datos se toma un nivel de significancia de 0,05 lo cual corresponde a un error del 5% de aceptar la hipótesis nula.

10.4. Métricas de desempeño en optimización multi-objetivo

Con las métricas de desempeño se busca establecer si un conjunto de soluciones es mejor que otro, también cuál conjunto de soluciones contiene más información del Frente Óptimo de Pareto real.

Al respecto se puede decir que la distancia del conjunto óptimo obtenido al Frente Óptimo de Pareto debe ser minimizada. Es deseable una buena distribución (en muchos casos

uniforme) de las soluciones encontradas. La extensión del frente no dominado obtenido, debe ser maximizada [98], [99].

Aquí se tienen dos conceptos importantes:

- Convergencia: Calidad de las soluciones encontradas.
- Diversidad: Cantidad de soluciones encontradas.

Según [100] en el diseño de métricas de desempeño se tienen tres criterios principales: capacidad, convergencia y diversidad, lo cuales por lo general se han tomado en consideración. Sobre la base de estos criterios se categorizan las métricas en cuatro grupos principales:

- Métricas Capacidad: En este grupo de métricas coinciden el número o la proporción de soluciones no dominadas en el conjunto de soluciones óptimas S que satisface los requisitos dados predefinidos.
- Métricas de convergencia: Son las métricas para medir la proximidad del conjunto de soluciones óptimas a S frente de Pareto FP.
- Métricas de diversidad: Estas métricas incluyen dos tipos de información:
 1. Las medidas de distribución de forma uniformemente dispersas son las soluciones de S en el espacio objetivo
 2. Spread indica lo bien que hacen las soluciones de S cuando llegan a los extremos de los verdaderos PFs.
- Métricas Convergencia-Diversidad: Indican tanto la convergencia y la diversidad de S en una sola escala.

10.4.1. Métricas de convergencia

A continuación se realiza la respectiva descripción de los principales índices de desempeño que permiten establecer la convergencia de un algoritmo de optimización multiobjetivo.

Distancia generacional

Esta métrica devuelve un valor que representa la distancia media de las soluciones en el frente de Pareto construido por un algoritmo multiobjetivo (PF_{known}) y el frente de Pareto real PF_{true} y se define como:

$$GD = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2} \quad (10.1)$$

Donde n es el número de soluciones en PF_{known} y d_i es la distancia euclidiana (en el espacio objetivo) entre cada vector en PF_{known} y el miembro más cercano de PF_{true} . Un resultado de cero indica que ambos frentes son el mismo, cualquier otro valor indica PF_{known} se desvía de PF_{true} [83].

En la figura 10.2 se puede apreciar la interpretación gráfica de esta métrica.

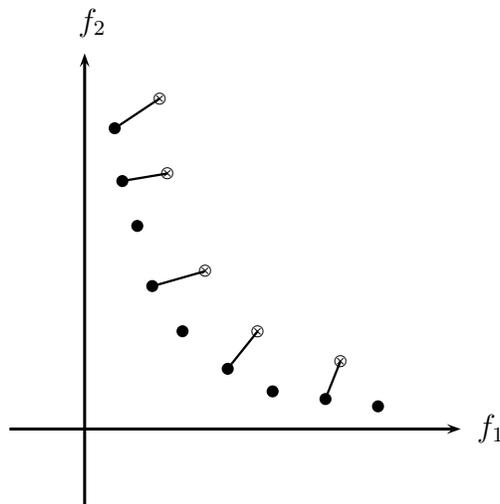


Figura 10.2: Interpretación gráfica de la distancia generacional.

Métrica Υ

Se tiene un conjunto H de 500 soluciones uniformemente distribuidas del Frente Óptimo de Pareto. Para cada solución se calcula la mínima distancia Euclidiana con H . La métrica Υ es la media de esas distancias [97].

Indicador Epsilon

El indicador de Epsilon corresponde a la distancia del peor caso de las soluciones encontradas. El indicador de Epsilon es considerado una dura métrica de cumplir. Se basa en la idea de tener el mejor desempeño en ambos objetivos. Por lo anterior la métrica es más difícil de cumplir si se tiene un gran vacío en la aproximación encontrada del frente de Pareto. Un ejemplo de esta métrica se puede apreciar en la figura 10.3.

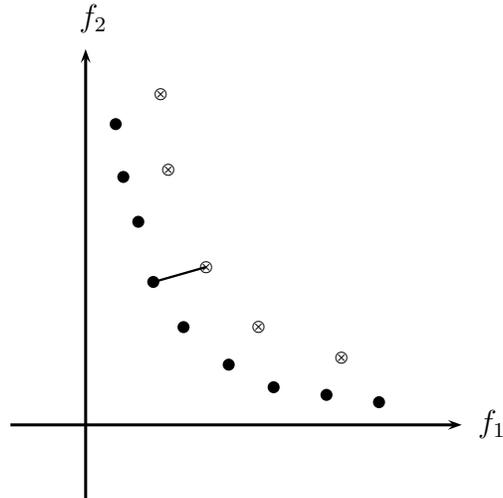


Figura 10.3: Interpretación gráfica de la métrica Epsilon.

Métrica de proximidad

Esta métrica se encuentra dada por la siguiente relación:

$$Prox = \frac{\left(\sum_{i=1}^{FOP^*} d_i^M \right)^{\frac{1}{M}}}{FOP^*} \quad (10.2)$$

Donde:

- M : número de objetivos.
- FOP^* : frente óptimo encontrado.
- d_i : distancia Euclidiana entre la solución I del conjunto de soluciones óptimas encontradas y el miembro más próximo del FOP.

10.4.2. Métricas de diversidad

En esta parte se realiza la respectiva descripción de los principales índices de desempeño que permiten establecer la diversidad de las soluciones obtenidas con un algoritmo de optimización multiobjetivo.

Métrica de hipervolumen

Esta métrica considera el tamaño del área no dominada en el espacio de funciones como indicador de la diversidad. El hipervolumen compara un volumen multidimensional determinada por la aproximación con el volumen determinado por la aproximación más conocida, con relación a un punto de referencia (ver figura 10.4).

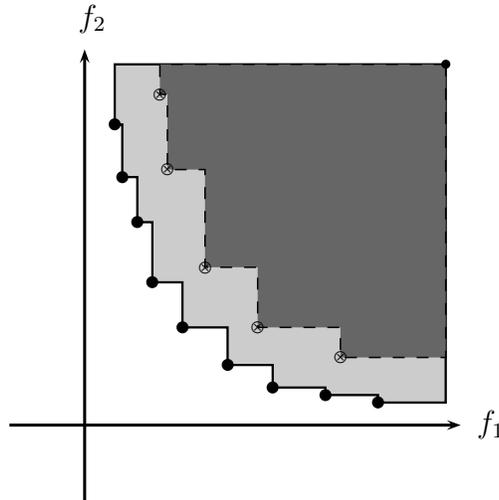


Figura 10.4: Representación gráfica del hipervolumen.

La métrica hipervolumen captura tanto la convergencia y la diversidad, esto se hace calculando el volumen multidimensional creado por cada conjunto, con relación a un punto de referencia. Estos volúmenes están ilustrados en la figura 10.4. Es de apreciar que no se puede tener una buena cantidad de hipervolumen a menos que tenga casi todos los puntos a través de la cobertura total de la función multiobjetivo. Un aspecto negativo consiste en el costo computacional, lo cual se está mejorando con nuevos algoritmos, algunos de los cuales son compatibles con el marco MOEA.

Siendo R el espacio de decisión y Leb denota la medida de Lebesgue, entonces, el indicador hipervolumen $I_{HV}(A)$ de un $A \subseteq R$ conjunto de soluciones se puede definir como el hipervolumen del espacio que está dominado por el conjunto A y está delimitada por un punto de referencia $\vec{r} = (r_1, \dots, r_k) \in \mathbb{R}^n$:

$$I_{HV}(S) = Leb \left(\bigcup_{x \in S} [f_1(x), r_1] \times [f_2(x), r_2] \dots \times [f_n(x), r_n] \right) \quad (10.3)$$

donde $[f_1(x), r_1] \times [f_2(x), r_2] \dots \times [f_n(x), r_n]$ es el hypercubo k dimensional el cual consiste en todos los puntos que están dominados por el punto x , pero no por el punto de referencia [101].

Métrica de espaciamento

Mide el rango de la varianza en las soluciones vecinas en el Frente Óptimo encontrado [98], esta métrica se encuentra dada por la siguiente expresión:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{d} - d_i)^2} \quad (10.4)$$

Donde:

- $d_i = \min_j (|f_1(\vec{x}_i) - f_1(\vec{x}_j)| + |f_2(\vec{x}_i) - f_2(\vec{x}_j)| + \dots + |f_M(\vec{x}_i) - f_M(\vec{x}_j)|)$.
- \bar{d} : es la media de todos los d_i .
- n : es número de soluciones.

Métrica Δ

Mide la distancia Euclidiana entre soluciones y dos soluciones adicionales extremas [97], [98]. Para el caso, esta métrica se puede calcular como:

$$\Delta = \frac{d_f + d_l + \sum_{i=1}^{N-1} |d_i - \bar{d}|}{d_f + d_l + (N-1)\bar{d}} \quad (10.5)$$

10.4.3. Otras métricas de desempeño

- Cantidad de soluciones óptimas.
- Tiempos de ejecución.
- Complejidad computacional.

10.5. Configuración de los algoritmos

Para los diferentes experimentos la configuración de los algoritmos son:

- MOBEBS-C1: Versión determinística.
- MOBEBS-C2: Versión estocástica.
- MOPSO-C1: Configuración 1: $w = 0,6$, $c_1 = 1,7$, $c_2 = 1,7$.
- MOPSO-C2: Configuración 2: $w = 0,729$, $c_1 = 1,494$, $c_2 = 1,494$.

10.6. Resultados para distancia generacional

En esta sección se compara el desempeño del algoritmo MOBEBS con el algoritmo MOPSO tomado como referente considerando como métrica de desempeño la distancia generacional. En las tablas A.1 y A.2 del Anexo A se pueden apreciar los resultados obtenidos de los algoritmo MOBEBS y MOPSO.

Con los datos recolectados se realizan las respectivas pruebas de normalidad homocedasticidad y comparación entre grupos registrando los respectivos p -value. En las tablas 10.2 y 10.3 se presentan los resultados obtenidos para las pruebas de normalidad, por su parte, en las tablas 10.4 y 10.5, se muestran los resultados para las pruebas de homocedasticidad y comparación entre grupos.

Función	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
$F1$	0.298 93	0.278 91	0.112 65	0.3672
$F2$	0.6105	0.603 73	0.474 08	0.462 39
$F3$	0.016 227	0.034 959	0.265 63	0.230 26
$F4$	7.6018×10^{-7}	3.1073×10^{-6}	0.133 28	0.586 51
$F5$	0.082 154	0.344 11	0.332 52	0.652 34
$F6$	0.484 39	0.101 03	0.489 74	0.685
$F7$	0.021 252	0.079 574	0.277 44	0.418 34
$F8$	2.1089×10^{-6}	4.6267×10^{-5}	0.1124	0.571 89

Tabla 10.2: Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla A.1.

Función	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
$F1$	0.098 441	0.471 94	0.258 88	0.2338
$F2$	0.363 96	0.805 75	0.666 56	0.505 57
$F3$	0.026 055	0.000 905 48	0.002 136 4	0.117 49
$F4$	2.1779×10^{-7}	1.5105×10^{-5}	0.776 11	0.673 97
$F5$	0.397 41	0.676 23	0.301 57	0.514 88
$F6$	0.112 04	0.280 98	0.632 74	0.552 57
$F7$	2.467×10^{-5}	0.000 541 97	0.069 07	0.009 526 3
$F8$	7.5418×10^{-6}	0.000 371 88	0.469 58	0.135 68

Tabla 10.3: Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla A.2.

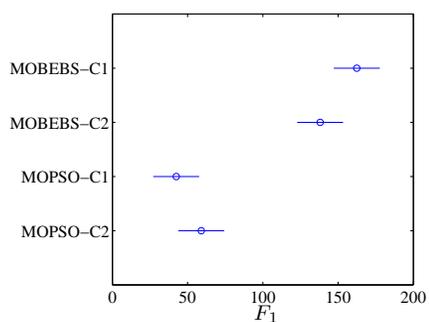
Con el fin de establecer los casos que presentan diferencias se realiza la prueba de Bonferroni (no paramétrica) obteniendo los resultados mostrados en las figuras 10.5 y 10.6.

Función	Normalidad	Homocedasticidad	Kruskal-Wallis	ANOVA
F_1	No	0	0	0
F_2	No	3.8104×10^{-8}	6.2147×10^{-5}	5.1885×10^{-5}
F_3	No	0	0	0
F_4	No	1.7675×10^{-7}	0	7.8524×10^{-8}
F_5	No	0	0	0
F_6	No	0.047942	0	0
F_7	No	3.2302×10^{-6}	3.1704×10^{-6}	3.6621×10^{-6}
F_8	No	3.6668×10^{-12}	0	1.3391×10^{-7}

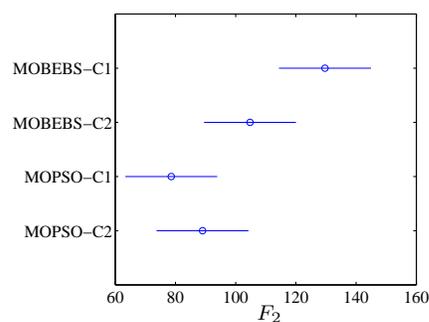
Tabla 10.4: Análisis de datos para los resultados de la tabla A.1.

Función	Normalidad	Homocedasticidad	Kruskal-Wallis	ANOVA
F_1	No	1.7306×10^{-11}	0	0
F_2	No	3.3307×10^{-16}	6.6613×10^{-16}	0
F_3	No	5.3468×10^{-13}	0	7.7716×10^{-16}
F_4	No	0.021595	0	0
F_5	No	2.0691×10^{-7}	0.009838	0.040874
F_6	No	3.7296×10^{-7}	4.1658×10^{-5}	6.2948×10^{-6}
F_7	No	9.9349×10^{-6}	0	1.1745×10^{-5}
F_8	No	1.4111×10^{-13}	0	0

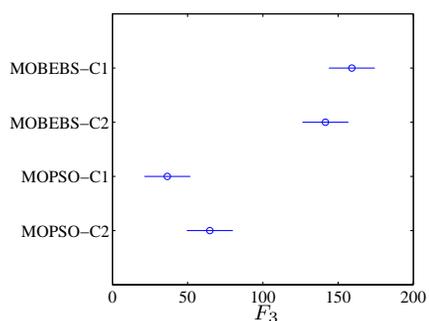
Tabla 10.5: Análisis de datos para los resultados de la tabla A.2.



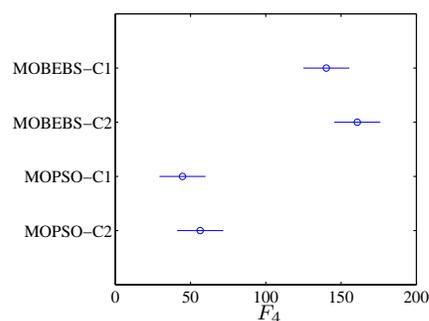
(a) Comparación para F_1 .



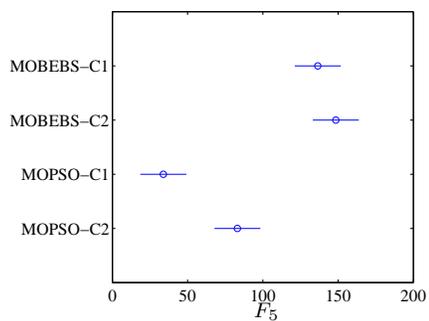
(b) Comparación para F_2 .



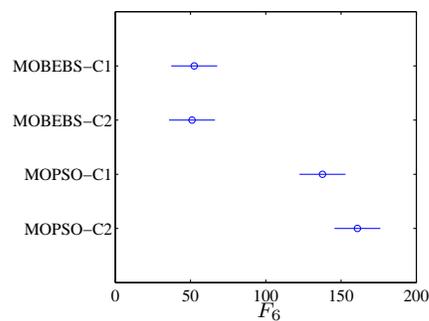
(c) Comparación para F_3 .



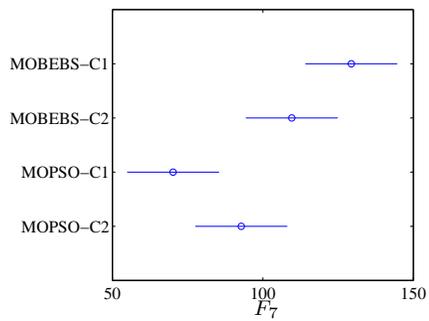
(d) Comparación para F_4 .



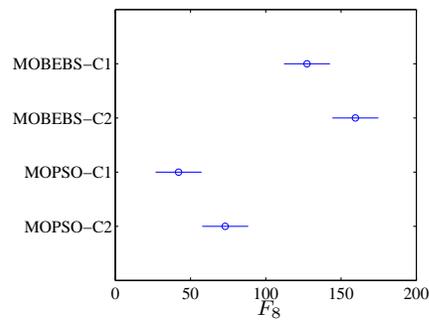
(e) Comparación para F_5 .



(f) Comparación para F_6 .

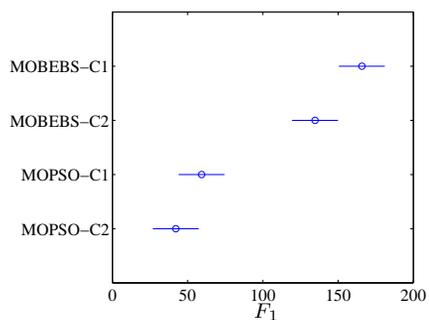


(g) Comparación para F_7 .

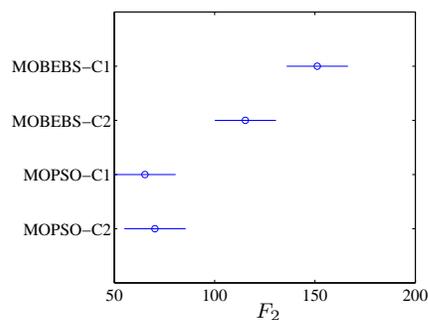


(h) Comparación para F_8 .

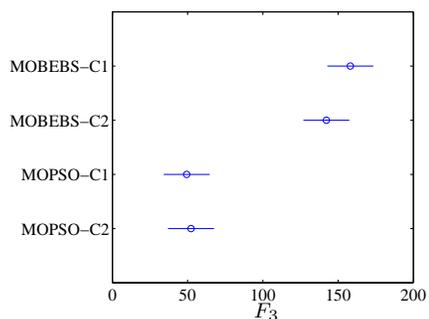
Figura 10.5: Resultados de la comparación para distancia generacional y condiciones iniciales globales.



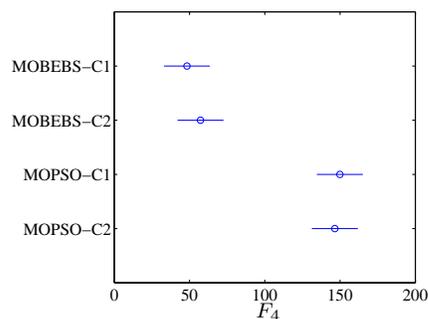
(a) Comparación para F_1 .



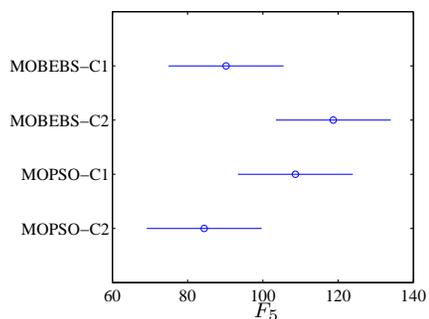
(b) Comparación para F_2 .



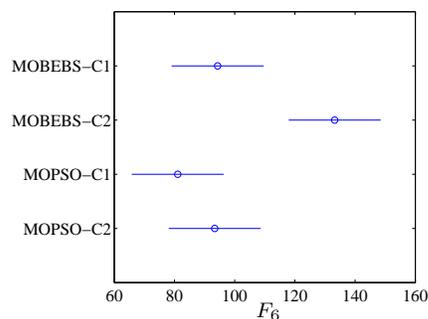
(c) Comparación para F_3 .



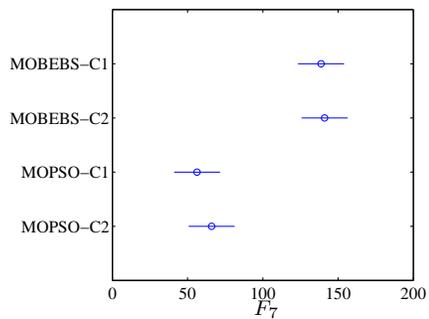
(d) Comparación para F_4 .



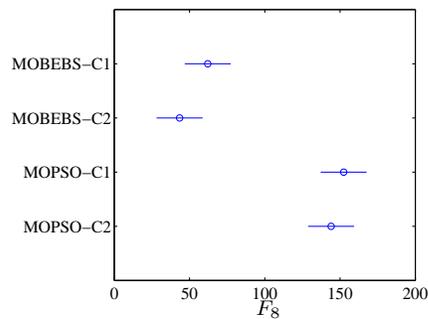
(e) Comparación para F_5 .



(f) Comparación para F_6 .



(g) Comparación para F_7 .



(h) Comparación para F_8 .

Figura 10.6: Resultados de la comparación para distancia generacional y condiciones iniciales locales.

En estos resultados es de apreciar el comportamiento del algoritmo desde una perspectiva estadística. Para condiciones iniciales globales el algoritmo MOBEBS obtuvo un mejor desempeño en la función multiobjetivo F_6 . Por su parte para las funciones F_2 y F_7 no se observa diferencia significativa desde una perspectiva estadística.

Para condiciones iniciales locales el algoritmo MOBEBS logra mejores resultados en las funciones F_4 y F_8 . Con las funciones objetivo F_5 y F_6 no se aprecia diferencia significativa.

Por otra parte, en estos resultados se observa que el algoritmo MOBEBS estocástico tiende a presentar un mejor desempeño que el algoritmo MOBEBS determinístico tanto para condiciones iniciales globales como locales.

10.7. Resultados para hipervolumen

En esta sección se compara el desempeño del algoritmo MOBEBS con el algoritmo MOPSO tomado como referente considerando como métrica de desempeño la distancia generacional. En las tablas A.3 y A.4 del Anexo A se pueden apreciar los resultados obtenidos de los algoritmos MOBEBS y MOPSO.

Con los datos recolectados se realizan las respectivas pruebas de normalidad homocedasticidad y comparación entre grupos registrando los respectivos p -value. En las tablas 10.6 y 10.7 se presentan los resultados obtenidos para las pruebas de normalidad, por su parte, en las tablas 10.8 y 10.9, se muestran los resultados para las pruebas de homocedasticidad y comparación entre grupos.

Función	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
$F1$	0.774 04	0.532 81	0.562 23	0.358 87
$F2$	0.579 68	0.606 37	0.497 07	0.544 27
$F3$	0.046 435	0.070 116	0.619 05	0.109 79
$F4$	4.001×10^{-6}	4.2118×10^{-10}	2.1637×10^{-5}	0.010 17
$F5$	0.088 333	0.000 296 83	0.085 467	0.635 82
$F6$	0.768 61	0.408 45	0.417 69	0.487 22
$F7$	0.287 54	0.350 53	0.1395	0.3973
$F8$	0.080 617	0.158 01	0.298 63	0.5481

Tabla 10.6: Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla A.3.

Con el fin de establecer los casos que presentan diferencias se realiza la prueba de Bonferroni (no paramétrica) obteniendo los resultados mostrados en las figuras 10.7 y 10.8.

Función	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
F_1	0.470 17	0.537 25	0.093 193	0.588 16
F_2	0.596 95	0.1703	0.685 95	0.070 957
F_3	0.406 72	0.195 24	0.261 39	0.134 64
F_4	0.015 543	0.025 257	0.009 963 7	0.141 56
F_5	0.716 36	0.353 48	0.135 55	0.010 467
F_6	0.248 25	0.129 82	0.022	0.012 099
F_7	0.387 91	0.081 184	0.013 322	0.020 603
F_8	0.005 451 3	0.124 94	0.098 811	5.1709×10^{-6}

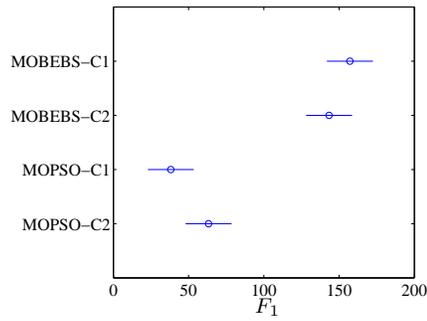
Tabla 10.7: Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla A.4.

Función	Normalidad	Homocedasticidad	Kruskal-Wallis	ANOVA
F_1	No	1.8374×10^{-11}	0	0
F_2	No	4.885×10^{-15}	0	0
F_3	No	7.3175×10^{-13}	0	0
F_4	Si	0.136 26	0.174 49	0.644 41
F_5	No	0.001 392 7	0	0
F_6	No	0.003 723 5	0	0
F_7	No	0.056 06	0.000 135 1	0.000 685 36
F_8	No	4.2505×10^{-5}	1.5321×10^{-14}	0

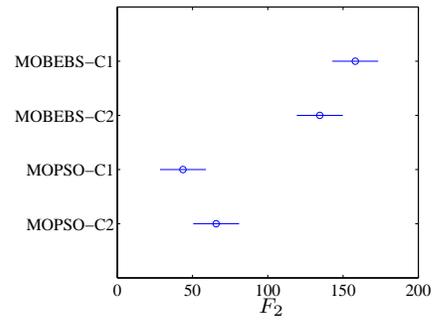
Tabla 10.8: Análisis de datos para los resultados de la tabla A.3.

Función	Normalidad	Homocedasticidad	Kruskal-Wallis	ANOVA
F_1	No	4.4639×10^{-8}	0	0
F_2	No	7.2697×10^{-13}	0	0
F_3	No	0	0	0
F_4	No	0	0	2.2204×10^{-16}
F_5	No	1.7764×10^{-15}	0.012 23	0.194 07
F_6	No	3.3307×10^{-16}	0	0
F_7	No	0.003 357 5	0.036 915	0.006 420 4
F_8	No	2.3982×10^{-12}	5.9443×10^{-5}	1.7334×10^{-7}

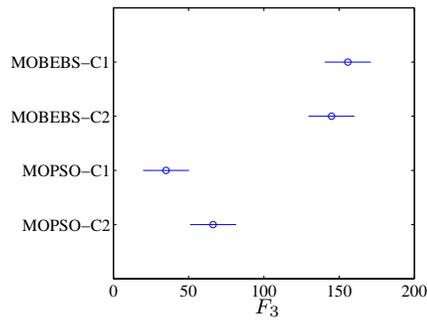
Tabla 10.9: Análisis de datos para los resultados de la tabla A.4.



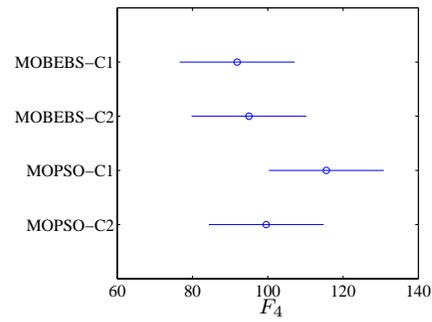
(a) Comparación para F_1 .



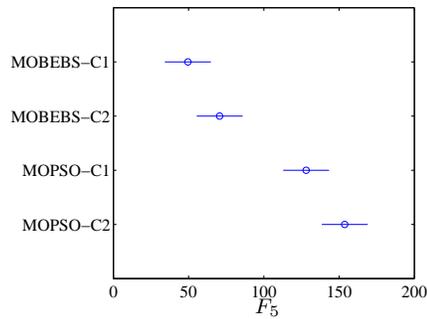
(b) Comparación para F_2 .



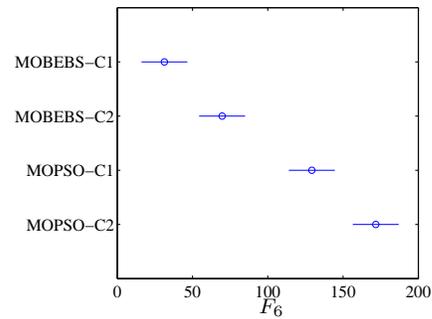
(c) Comparación para F_3 .



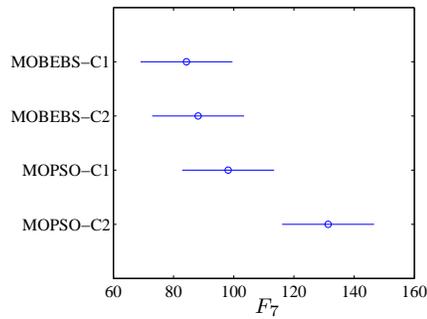
(d) Comparación para F_4 .



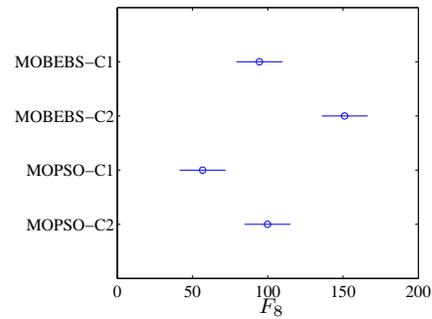
(e) Comparación para F_5 .



(f) Comparación para F_6 .

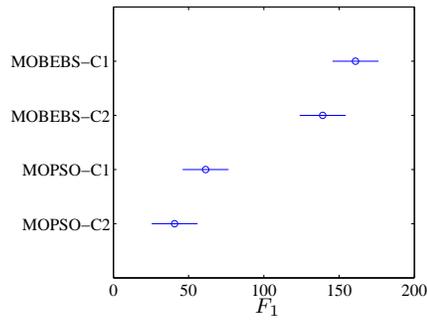


(g) Comparación para F_7 .

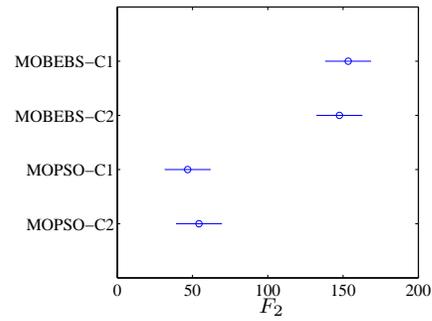


(h) Comparación para F_8 .

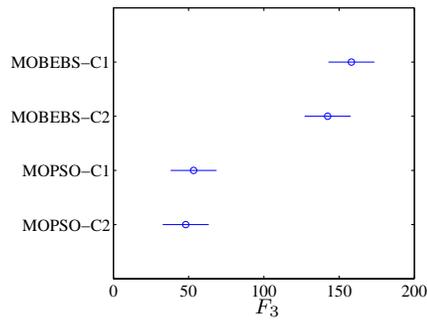
Figura 10.7: Resultados de la comparación para hipervolumen y condiciones iniciales globales.



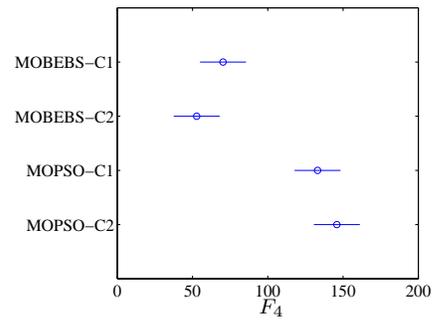
(a) Comparación para F_1 .



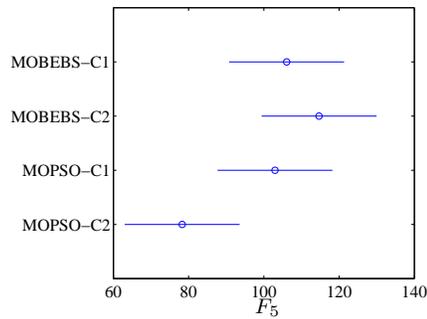
(b) Comparación para F_2 .



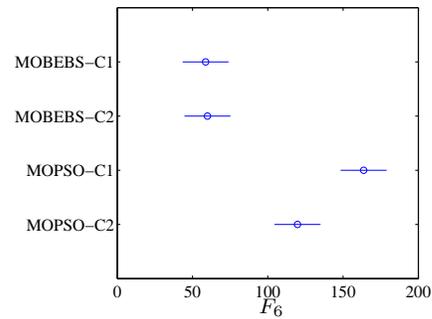
(c) Comparación para F_3 .



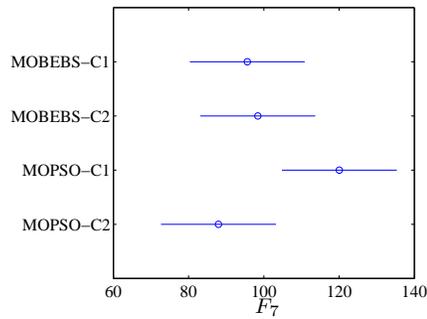
(d) Comparación para F_4 .



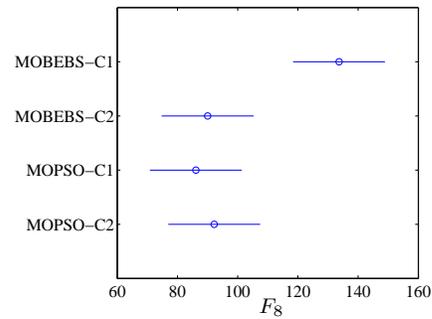
(e) Comparación para F_5 .



(f) Comparación para F_6 .



(g) Comparación para F_7 .



(h) Comparación para F_8 .

Figura 10.8: Resultados de la comparación para hipervolumen y condiciones iniciales locales.

En el caso de tener condiciones iniciales globales se tiene un mejor desempeño del algoritmo MOBEBS en las funciones de prueba F_1 , F_2 y F_3 . Adicionalmente en las funciones F_4 , F_7 y F_8 no se aprecia diferencia significativa.

Al tener condiciones iniciales locales se tiene un mejor desempeño del algoritmo MOBEBS para las funciones de prueba F_1 , F_2 y F_3 . Finalmente no se observa diferencia significativa con las funciones F_5 , F_7 y F_8 .

Capítulo 11

Conclusiones, aportes originales y trabajos futuros

11.1. Conclusiones

La propuesta realizada permite abordar con otro enfoque el problema de convergencia y exploración en algoritmos de optimización multiobjetivo. Fue posible observar las características del algoritmo propuesto de forma cualitativa y cuantitativa, mediante figuras demostrativas y con un adecuado análisis estadístico. De forma puntual las conclusiones del proyecto son:

- En este trabajo se propuso un algoritmo de optimización multiobjetivo basado en el comportamiento emergente de un enjambre de partículas.
- La turbulencia empleada como estrategia de búsqueda permite establecer diferentes soluciones del espacio solución que se encuentran cerca del frente de Pareto.
- El algoritmo permite tener una forma sistemática de búsqueda de las posibles soluciones del frente de Pareto.
- El modelo empleado permite tener comportamientos de enjambre como desplazamientos uniformes y movimientos circulares los cuales se aprecian en diferentes grupos de seres vivos.
- En los resultados experimentales se apreció que el algoritmo logra encontrar una buena cantidad de soluciones sobre el frente de Pareto.

11.2. Aportes originales

El algoritmo permite abordar el proceso de exploración mediante un comportamiento emergente que presentan los seres vivos, esta propuesta permite tener una alternativa para el proceso optimización multiobjetivo. Con este algoritmo se tienen los siguientes aportes originales:

- Se propone una estrategia de búsqueda multiobjetivo basada en el comportamiento de seres vivos que realizan movimientos circulares para la búsqueda de alimento.
- La estrategia propuesta emplea proceso de convergencia y dispersión para la exploración del espacio de búsqueda.
- Se propone una estrategia para mejorar la exploración del algoritmo donde se tienen pocas soluciones del frente de pareto.

11.3. Trabajos futuros

Aunque se ha tenido un avance en el desarrollo de algoritmos basados en comportamientos emergentes particularmente, aplicados en optimización multiobjetivo los trabajos que se pueden desarrollar posteriormente son:

- En trabajos futuros se espera evaluar más estrategias para terminar el punto de convergencia con lo cual se busca mejorar las capacidades de exploración del algoritmo.
- En un trabajo futuro se espera evaluar el desempeño del algoritmo con más funciones de prueba.
- Extender la aplicación del algoritmo a problemas con restricciones.

11.3.1. Recomendaciones

Con el fin poder mejorar el desempeño del algoritmo para posteriores investigaciones se recomienda tener presente los siguientes aspectos:

- Para mejorar el desempeño del algoritmo se pueden emplear otras funciones de potencial de atracción asociadas al punto de convergencia.
- También se pueden proponer otros esquemas para determinar el punto de convergencia.

- En un trabajo adicional se puede considerar otro modelo de partículas que permita controlar de mejor forma la dispersión del enjambre.

Anexo A

Resultados experimentales

En este anexo se muestran los resultados experimentales obtenidos para el algoritmo MOBEBS. Los resultados se consignan en tablas donde se tiene:

- Máx: valor máximo.
- Mín: valor mínimo.
- Media: promedio.
- STD: desviación estándar.

También se presentan resultados del algoritmo MOPSO estándar los cuales se toman como referentes de comparación. Las tablas con los respectivos resultados son:

- Tabla A.1: Condiciones iniciales globales y métrica de distancia generacional.
- Tabla A.2: Condiciones iniciales locales y métrica de distancia generacional.
- Tabla A.3: Condiciones iniciales globales y métrica de hipervolumen.
- Tabla A.4: Condiciones iniciales locales y métrica de hipervolumen.

Las configuraciones de los algoritmos son las siguientes:

- MOBEBS-C1: Versión determinística.
- MOBEBS-C2: Versión estocástica.
- MOPSO-C1: Configuración 1: $w = 0,6$, $c_1 = 1,7$, $c_2 = 1,7$.
- MOPSO-C2: Configuración 2: $w = 0,729$, $c_1 = 1,494$, $c_2 = 1,494$.

F_1	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.009 218 7	0.008 399	0.003 189 1	0.003 199
Mín	0.003 241 6	0.002 753 5	0.001 648 7	0.001 837 6
Media	0.005 760 2	0.004 548 3	0.002 192 9	0.002 361 1
STD	0.001 495 6	0.001 196 8	0.000 309 18	0.000 326 84
F_2	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	1.0476×10^{-5}	9.6722×10^{-6}	8.7094×10^{-6}	9.0051×10^{-6}
Mín	7.3167×10^{-6}	5.5655×10^{-6}	7.406×10^{-6}	7.6949×10^{-6}
Media	8.7045×10^{-6}	8.3495×10^{-6}	8.1593×10^{-6}	8.2663×10^{-6}
STD	7.4518×10^{-7}	7.934×10^{-7}	3.2257×10^{-7}	3.4806×10^{-7}
F_3	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.000 368 03	0.000 321 6	1.5245×10^{-5}	2.4295×10^{-5}
Mín	2.351×10^{-5}	1.5209×10^{-5}	4.7394×10^{-6}	6.5106×10^{-6}
Media	0.000 123 3	8.3954×10^{-5}	8.5158×10^{-6}	1.1975×10^{-5}
STD	8.1234×10^{-5}	5.9462×10^{-5}	2.1778×10^{-6}	4.0651×10^{-6}
F_4	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	3.7437	6.5236	0.053 452	0.047 534
Mín	0.088 532	0.050 546	0.010 271	0.023 092
Media	0.342 23	0.708 22	0.037 316	0.039 848
STD	0.538 81	1.1207	0.007 624 4	0.004 313 5
F_5	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.000 534 64	0.000 744 19	0.000 165 61	0.000 193 87
Mín	7.9181×10^{-5}	6.6816×10^{-5}	3.8674×10^{-5}	6.1745×10^{-5}
Media	0.000 291 05	0.000 372 21	7.9362×10^{-5}	0.000 129 24
STD	0.000 136 25	0.000 16	2.7067×10^{-5}	2.6699×10^{-5}
F_6	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.002 127 6	0.002 356 8	0.003 138 3	0.003 349
Mín	0.001 152 5	0.001 045 7	0.001 903 4	0.001 883 4
Media	0.001 562 3	0.001 567 9	0.002 467 3	0.002 733 2
STD	0.000 232 94	0.000 313 93	0.000 319 44	0.000 339
F_7	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.000 129 61	0.000 128 62	5.0358×10^{-5}	4.4224×10^{-5}
Mín	1.0719×10^{-5}	7.823×10^{-6}	6.9464×10^{-6}	1.1026×10^{-5}
Media	4.0932×10^{-5}	3.7197×10^{-5}	2.2848×10^{-5}	2.716×10^{-5}
STD	2.3614×10^{-5}	2.6177×10^{-5}	1.0022×10^{-5}	9.1249×10^{-6}
F_8	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.001 062 4	0.002 735 3	3.0196×10^{-5}	4.7016×10^{-5}
Mín	8.5353×10^{-6}	2.4532×10^{-5}	2.7759×10^{-6}	2.6398×10^{-6}
Media	0.000 118 79	0.000 295 66	1.1792×10^{-5}	2.0225×10^{-5}
STD	0.000 209 16	0.000 480 81	7.1839×10^{-6}	1.0258×10^{-5}

Tabla A.1: Resultados para 50 ejecuciones. Condiciones iniciales globales y métrica de distancia generacional.

F_1	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.022 96	0.009 478 9	0.003 182 8	0.002 692 1
Mín	0.003 929 4	0.002 287 8	0.001 615 1	0.001 666 6
Media	0.007 683 6	0.005 372	0.002 215 9	0.002 04
STD	0.002 989	0.001 28	0.000 333 38	0.000 254 43
F_2	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	1.3737×10^{-5}	1.1213×10^{-5}	9.0204×10^{-6}	9.1648×10^{-6}
Mín	7.7855×10^{-6}	5.848×10^{-6}	7.4892×10^{-6}	7.4876×10^{-6}
Media	1.0089×10^{-5}	8.9673×10^{-6}	8.2658×10^{-6}	8.3138×10^{-6}
STD	1.4673×10^{-6}	1.0176×10^{-6}	3.617×10^{-7}	3.6963×10^{-7}
F_3	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.001 231 7	0.001 347 9	5.1187×10^{-5}	2.2016×10^{-5}
Mín	4.056×10^{-5}	1.412×10^{-5}	6.0471×10^{-6}	6.3895×10^{-6}
Media	0.000 273 88	0.000 215 22	1.1759×10^{-5}	1.1042×10^{-5}
STD	0.000 239	0.000 262 69	7.0224×10^{-6}	3.0148×10^{-6}
F_4	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	32.742	15.339	15.307	15.494
Mín	0.009 130 7	0.013 165	1.1386	2.7017
Media	1.1274	0.942 43	10.008	9.6163
STD	4.6093	2.2682	3.0665	3.1125
F_5	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.000 680 37	0.000 878 85	0.000 593 98	0.000 537 15
Mín	0.000 112 48	0.000 159 7	0.000 319 77	0.000 247 54
Media	0.000 423 72	0.000 473 68	0.000 450 14	0.000 415 88
STD	0.000 126 04	0.000 157 72	7.2265×10^{-5}	5.8836×10^{-5}
F_6	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.007 040 9	0.007 374 9	0.003 445 5	0.002 874 9
Mín	0.000 744 76	0.000 771 56	0.001 215 3	0.001 154 5
Media	0.002 353 8	0.002 952 5	0.002 083	0.002 193 6
STD	0.001 091 9	0.001 246 2	0.000 497 61	0.000 380 25
F_7	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.000 612 93	0.000 491 83	3.3199×10^{-5}	4.2531×10^{-5}
Mín	8.3725×10^{-6}	8.2409×10^{-6}	3.1285×10^{-6}	8.2858×10^{-6}
Media	5.45×10^{-5}	5.8859×10^{-5}	1.37×10^{-5}	1.5209×10^{-5}
STD	8.7965×10^{-5}	7.3321×10^{-5}	4.648×10^{-6}	5.8694×10^{-6}
F_8	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.054 154	0.004 858 1	1.9648	1.8339
Mín	1.6892×10^{-5}	1.3968×10^{-5}	3.5113×10^{-5}	5.8658×10^{-5}
Media	0.008 362 1	0.000 791 76	1.492	1.3597
STD	0.014 073	0.001 178 8	0.293 33	0.436 55

Tabla A.2: Resultados para 50 ejecuciones. Condiciones iniciales locales y métrica de distancia generacional.

F_1	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	7.3335	7.5373	4.0987	4.3496
Mín	4.5694	3.7285	2.7476	2.9861
Media	5.769	5.4481	3.2529	3.5462
STD	0.641 38	0.863 97	0.281 96	0.331 28
F_2	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.001 759 4	0.001 590 7	0.000 938 22	0.001 051 8
Mín	0.000 877 39	0.000 736 48	0.000 633 11	0.000 671 92
Media	0.001 263 6	0.001 132	0.000 771 25	0.000 824 83
STD	0.000 201 02	0.000 223 92	7.402×10^{-5}	7.8208×10^{-5}
F_3	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.020 301	0.024 195	0.005 183 5	0.006 078 3
Mín	0.007 238 8	0.004 836 3	0.002 730 3	0.003 596 1
Media	0.011 636	0.010 69	0.003 833 9	0.004 483 6
STD	0.002 857 3	0.003 409 8	0.000 499 6	0.000 553 92
F_4	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	6.2804	29.279	6.1296	1.2241
Mín	0.190 04	0.146 67	0.226 83	0.2414
Media	0.681 96	1.0423	0.734 11	0.490 17
STD	1.0577	4.0838	0.982 75	0.261 57
F_5	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.056 529	0.069 466	0.069 47	0.060 957
Mín	0.016 425	0.017 09	0.030 027	0.033 534
Media	0.026 26	0.030 93	0.043 273	0.047 736
STD	0.008 201 6	0.012 863	0.007 897 1	0.005 779 2
F_6	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.103 41	0.116 38	0.180 34	0.187 66
Mín	0.083 624	0.091 29	0.132 69	0.150 99
Media	0.094 215	0.102 98	0.150 94	0.165 91
STD	0.004 367 7	0.006 168	0.007 557 1	0.008 374 9
F_7	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.001 896 9	0.002 450 2	0.002 476 5	0.002 162 1
Mín	0.000 973 17	0.000 830 55	0.001 109 2	0.001 199 5
Media	0.001 392 3	0.001 419 8	0.001 449	0.001 579 3
STD	0.0002	0.000 301 66	0.000 226 81	0.000 220 58
F_8	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.038 154	0.079 973	0.048 033	0.044 291
Mín	0.014 824	0.013 715	0.008 461 5	0.008 112 4
Media	0.023 78	0.037 052	0.018 186	0.024 404
STD	0.006 022 2	0.014 127	0.007 863 4	0.008 714 8

Tabla A.3: Resultados para 50 ejecuciones. Condiciones iniciales globales y métrica de hipervolumen.

F_1	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	8.6683	9.1207	4.9309	4.5777
Mín	4.6407	3.7448	2.9629	2.7624
Media	6.644	5.9477	3.7579	3.4543
STD	0.933 87	0.927 99	0.451 73	0.3722
F_2	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.002 868 4	0.002 799 7	0.001 203 1	0.001 178 4
Mín	0.001 249 5	0.001 193 7	0.000 568 11	0.000 672 45
Media	0.001 852 8	0.001 828 3	0.000 817 03	0.000 852 97
STD	0.000 287 82	0.000 412 7	0.000 123 21	0.000 111 41
F_3	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.027 103	0.032 842	0.008 415 1	0.005 765 4
Mín	0.008 043 7	0.005 436 6	0.003 176 7	0.003 147 9
Media	0.016 003	0.014 023	0.004 493	0.004 261 2
STD	0.003 988 8	0.005 987 9	0.001 031 2	0.000 561 71
F_4	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	5.3378	4.7238	39.307	55.043
Mín	0.345 67	0.271 48	0.157 53	0.138 19
Media	1.6691	1.1363	8.7538	14.215
STD	1.1743	0.901 01	9.0798	12.905
F_5	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.061 191	0.070 077	0.300 61	0.2152
Mín	0.021 207	0.019 144	0.001 057 9	0.001 412 8
Media	0.044 613	0.046 885	0.057 449	0.040 451
STD	0.010 142	0.011 853	0.061 857	0.050 425
F_6	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.242 24	0.233 25	1.347	0.436 06
Mín	0.114 07	0.116 76	0.164 74	0.149 06
Media	0.161 28	0.162 33	0.403 92	0.212 89
STD	0.023 924	0.024 617	0.2535	0.055 845
F_7	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.003 138	0.003 494 9	0.005 328	0.003 991 5
Mín	0.001 107 1	0.001 106 2	0.001 230 4	0.001 168 5
Media	0.001 920 6	0.001 933 1	0.002 277 8	0.001 893 8
STD	0.000 533 33	0.000 508 35	0.000 841 54	0.000 560 13
F_8	MOBEBS-C1	MOBEBS-C2	MOPSO-C1	MOPSO-C2
Máx	0.542 11	0.126 81	0.108 26	0.640 93
Mín	0.013 779	0.018 418	0.013 256	0.016 121
Media	0.132 82	0.051 164	0.047 331	0.069 365
STD	0.120 81	0.025 872	0.020 769	0.097 561

Tabla A.4: Resultados para 50 ejecuciones. Condiciones iniciales locales y métrica de hipervolumen.

Referencias bibliográficas

- [1] Castillo Enrique, Conejo Antonio, Pedregal Pablo, García Ricardo, Alguacil Natalia, *Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia*, Universidad De Castilla La Mancha, 2002.
- [2] Boyd Stephen, Vandenberghe Lieven, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [3] Anderson Russell W., Conrad Michael, *Hans J. Bremermann: A pioneer in mathematical biology*, BioSystems, 1995.
- [4] Abidin Zulkifli Zainal, Arshad Mohd Rizal, Ngah Umi Kalthum, *A Survey: Animal-Inspired Metaheuristic Algorithms*, Proceedings of the Electrical and Electronic Post-graduate Colloquium EEPC, 2009.
- [5] Nitschke G.S., Schut M.C., Eiben A.E., *Emergent Specialization in Biologically Inspired Collective Behavior Systems*, Chapter in A. Yang and Y. Shan (eds.), *Intelligent Complex Adaptive Systems*, IGI Publishing, 2008.
- [6] Ballerini M., Cabibbo N., Candelier R., Cavagna A., Cisbani E., Giardina I., Lecomte V., Orlandi A., Parisi G., Procaccini A., Viale M., Zdravkovic V., *Interaction ruling animal collective behavior depends on topological rather than metric distance: Evidence from a field study*, PNAS January 29, 2008.
- [7] Couzin Iain D., Krause Jens, Franks Nigel R., Levin Simon A., *Effective leadership and decision making in animal groups on the move*, Letters to nature, 2005.
- [8] Zhang Hai, Chen Michael, Stan Guy, Zhou Tao, Maciejowski Jan, *Collective Behavior Coordination with Predictive Mechanisms*, IEEE Circuits and Systems Magazine, 2008.
- [9] Bajec Iztok Lebar, Heppner Frank H., *Organized flight in birds*, Animal Behaviour 78, 2009.

- [10] Sumpter D. J. T., *The principles of collective animal behaviour*, Philosophical Transactions of the Royal Society B, 2006.
- [11] Vicsek T., *Universal patterns of collective motion from minimal models of flocking*, Second IEEE International Conference on Self-Adaptive and Self-Organizing Systems, 2008.
- [12] Mora Héctor, *Optimización no lineal y dinámica*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Unibiblios, 2001.
- [13] Caballero José, Grossmann Ignacio, *Una revisión del estado del arte en optimización*, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, 2007.
- [14] Coello Coello Carlos A., Van Veldhuizen David A., Lamont Gary B., *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*, Springer, Second Edition, 2007.
- [15] Passino Kevin, *Biomimicry of Bacterian Foraging for Distributed Optimization and Control*, IEEE Control Systems Magazine, 2002.
- [16] Zecchin Aaron, Simpson Angus, Maier Holger, Nixon John, *Parametric Study for an Ant Algorithm Applied Water Distribution System Optimization*, IEEE Transactions On Evolutionary Computation, Vol. 9, No. 2, April 2005.
- [17] Dorigo Marco, Gambardella Luca, *Ant Algorithms for Discrete Optimization*, Massachusetts Institute of Technology, Artificial Life 5: 137-172, 1999.
- [18] Dorigo Marco, Birattari Mauro, Stützle Thomas, *Ant Colony Optimization. Artificial Ants as a Computational Intelligence Technique*, Université Libre de Bruxelles, BELGIUM, IEEE Computational Intelligence Magazine, November 2006.
- [19] Birattari Mauro, Pellegrini Paola, Dorigo Marco, *On the Invariance of Ant Colony Optimization*, IEEE Transactions On Evolutionary Computation, Vol. 11, No. 6, December 2007.
- [20] Karaboga Dervis, *An Idea Based On Honey Bee Swarm For Numerical Optimization*, Technical Report-TR06, October 2005.
- [21] Niknam Taher, Olamaie Javad, Khorshidi Reza, *A Hybrid Algorithm Based on HBMO and Fuzzy Set for Multi-Objective Distribution Feeder Reconfiguration*, World Applied Sciences Journal, 2008.
- [22] Guzmán Maria, Delgado Alberto, De Carvalho Jonas, *Optimización Multiobjetivo De Un Eje Con Algoritmo Basado En Quimiotaxis De Bacterias*, 8° Congreso Iberoamericano De Ingenieria Mecanica. Cusco, 23 al 25 de Octubre de 2007.
- [23] Guzmán Maria, Delgado Alberto, De Carvalho Jonas, *A Bacterial Chemotaxis Multiobjective Optimization Algorithm*, International Conference on Engineering Optimization, Rio de Janeiro, Brazil, 01 - 05 June 2008.

- [24] Russell Eberhart, James Kennedy, *Particle Swarm Optimization*, IEEE Proceedings Neural Networks, 1995.
- [25] Freitas António, Pinto Edite, *Optimization Of Nonlinear Constrained Particle Swarm*, Ukio Technologinis Ir Ekonominis Vystymas, 2006.
- [26] Abido M. A., *Multiobjective particle swarm optimization for optimal power flow problem*, MEPCON 12th International Middle-East Power System Conference, 2008.
- [27] Heo J. S., Lee K. Y., Garduno-Ramirez R, *Multiobjective control of power plants using particle swarm optimization techniques*, IEEE Transactions on Energy Conversion, 2006.
- [28] Yen G. G., Wen Fung Leong, *Dynamic multiple swarms in multiobjective particle swarm optimization*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, 2009.
- [29] Zhang Y., Wu L., *Weights Optimization Of Neural Network Via Improved Bacterial Chemotaxis Optimization (BCO) Approach*, Progress In Electromagnetics Research, PIER 83, 185-198, 2008.
- [30] Vicsek Tamás, Czirók András, Ben-Jacob Eshel, Cohen Inon, Shochet Ofer, *Novel type of phase transition in a system of self-driven particles*, Physical Review Letters, Volume 75, Number 6, 1995.
- [31] Levine Herbert, Rappel Wouter-Jan, Cohen Inon. *Self-organization in systems of self-propelled particles*, Physical Review E 63, 2000.
- [32] Ebeling Werner, Erdmann Udo, *Nonequilibrium Statistical Mechanics of Swarms of Driven Particles*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Volume 314, 2002.
- [33] M. Abdel, C. McInnes, *Wall following to escape local minima for swarms of agents using internal states and emergent behavior*, International Conference of Computational Intelligence and Intelligent Systems ICCIIS, 2008.
- [34] H. Espitia, J. Sofrony, *Path planning of mobile robots using potential fields and swarms of Brownian particles*, IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), pp. 123-129, 2011.
- [35] H. Espitia, J. Sofrony, C. Gonzalez, *Vortex Swarm Path Planning Algorithm*, IEEE Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference (CERMA), pp. 184-190, 2011.
- [36] S. Menser, J. Hereford, *A new optimization technique*, Proceedings of the IEEE Digital Object Identifier SoutheastCon, 2006.
- [37] H. Espitia, J. Sofrony, *Vortex Particle Swarm Optimization*, IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2013.

-
- [38] H. Espitia, J. Sofrony, *Algoritmo de optimización basado en enjambres de partículas con comportamiento de vorticidad y búsqueda individual y grupal*. Tecnura, vol. 18, no. 42, pp. 24-37, 2014,
- [39] H. Espitia, J. Sofrony, *Vortex Particle Swarm Optimization in 2D Cases*. International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE), 2015.
- [40] Parsopoulos Konstantinos E., Vrahatis Michael N., *Multi-Objective Particles Swarm Optimization Approaches*, IGI Global, 2008.
- [41] Parsopoulos, K. E., Vrahatis, M. N., *Particle swarm optimization method in multi-objective problems*, In Proceedings of the ACM Symposium on Applied Computing, 2002.
- [42] Baumgartner U., Magele C., Renhart W., *Pareto optimality and particle swarm optimization*, IEEE Transactions on Magnetics, 2004.
- [43] Mahfouf M., Chen M. Y., Linkens D. A., *Adaptive weighted particle swarm optimization for multi-objective optimal design of alloy steels*, Springer, Lecture notes in computer science, 2004.
- [44] Li X., *A non-dominated sorting particle swarm optimizer for multi-objective optimization*, Springer-Verlag, Lecture notes in computer science, 2003.
- [45] Hu X., Eberhart R., *Multi-objective optimization using dynamic neighborhood particle swarm optimization*, In Proceedings of the IEEE Congress Evolutionary Computation, 2002.
- [46] Hu X., Eberhart R. C., Shi Y., *Particle swarm with extended memory for multi-objective optimization*, In Proceedings of the IEEE Swarm Intelligence Symposium, 2003.
- [47] Parsopoulos K. E., Vrahatis M. N., *On the computation of all global minimizers through particle swarm optimization*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2004.
- [48] Chow, C. K., Tsui H. T., Autonomous agent response learning by a multi-species particle swarm optimization. In Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2004.
- [49] Coello C. A., Salazar Lechuga M., *MOPSO: A proposal for multiple objective particle swarm optimization*, In Proceedings of the IEEE Congress of Evolutionary Computation, 2002.
- [50] Fieldsend J. E., Singh S., *A multiobjective algorithm based upon particle swarm optimisation, An efficient data structure and turbulence*, In Proceedings of the UK Workshop on Computational Intelligence, Birmingham, UK, 2002.

- [51] Ray T., Liew K. M., *A swarm metaphor for multi-objective design optimization*, Engineering Optimization, 2002.
- [52] Bartz-Beielstein T., Limbourg P., Mehnen J., Schmitt K., Parsopoulos K. E., Vrahatis M. N., *Particle swarm optimizers for Pareto optimization with enhanced archiving techniques*, In Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2003.
- [53] Srinivasan D., Seow T. H., *Particle swarm inspired evolutionary algorithm (PSEA) for multi-objective optimization problem*, In Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2003.
- [54] Mostaghim S., Teich J., *Strategies for finding good local guides in multi-objective particle swarm optimization (MOPSO)*, In Proceedings of the IEEE Swarm Intelligence Symposium, 2003.
- [55] Li X., *Better spread and convergence: Particle swarm multi-objective optimization using the maximin fitness function*, Springer-Verlag, Lecture notes in computer science, 2004.
- [56] Toscano Pulido G., Coello C. A., *Using clustering techniques to improve the performance of a particle swarm optimizer*, Springer, Lecture notes in computer science, 2004.
- [57] Reyes-Sierra M., Coello C. A., *Online adaptation in multi-objective particle swarm optimization*, In Proceedings of the IEEE Swarm Intelligence Symposium, 2006.
- [58] Ho S. L., Yang S., Ni G., Lo E. W. C., Wong H. C., *A particle swarm optimization-based method for multi-objective design optimizations*, IEEE Trans. Magnetics, 2005.
- [59] Raquel C. R., Naval P. C. Jr., *An effective use of crowding distance in multi-objective particle swarm optimization*, ACM Press, In Proceedings of the GECCO, 2005.
- [60] Alvarez-Benitez J. E., Everson R. M., Fieldsend J. E., *A MOPSO algorithm based exclusively on Pareto dominance concepts*, Springer-Verlag, Lecture notes in computer science, 2005.
- [61] Salazar Lechuga M., Rowe J. E., *Particle swarm optimization and fitness sharing to solve multi-objective optimization problems*, In Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2005.
- [62] Mostaghim S., Teich J., *About selecting the personal best in multi-objective particle swarm optimization*, Springer, Lecture notes in computer science, 2006.
- [63] Huo X. H., Shen L. C., Zhu H. Y., *A smart particle swarm optimization algorithm for multiobjective problems*, Springer-Verlag, Lecture notes in computer science, 2006.
- [64] Reyes-Sierra M., Coello C. A., *Online adaptation in multi-objective particle swarm optimization*, In Proceedings of the IEEE Swarm Intelligence Symposium, 2006.

- [65] Cagnina Leticia Cecilia, *Optimización mono y multiobjetivo a través de una heurística de inteligencia colectiva*, Tesis de Doctorado, Doctorado en Ciencias de la Computación, Universidad Nacional de San Luis, Argentina, 2010.
- [66] Mesa Delgado Eddy, *Supernova: un algoritmo novedoso de optimización global*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, 2010.
- [67] López Ramírez Blanca Cecilia, *Comparación de Algoritmos Evolutivos y Bio-Inspirados en Problemas de Optimización con Restricciones*, Tesis de Maestría, Laboratorio Nacional de Informática Avanzada, Centro de Enseñanza LANIA, México, 2007.
- [68] Flores Mendoza Jorge Isacc, *Propuesta de Optimización mediante Cúmulos de Partículas para Espacios Restringidos*, Tesis de Maestría, Laboratorio Nacional de Informática Avanzada, Centro de Enseñanza LANIA, México, 2007.
- [69] Schutte Jaco Francois, *Particle swarms in sizing and global optimization*, University of Pretoria, Master's Dissertation, 2002.
- [70] Van den Bergh Frans, *An Analysis of Particle Swarm Optimizers*, PhD. Thesis, University of Pretoria, Pretoria, 2001.
- [71] Bratton Daniel, Kennedy James, *Defining a Standard for Particle Swarm Optimization*, Proceedings of IEEE Swarm Intelligence Symposium SIS, 2007.
- [72] Clerc Maurice, Kennedy James, *The Particle Swarm-Explosion, Stability, and Convergence in a Multidimensional Complex Space*, IEEE Transactions On Evolutionary Computation, Volume 6, 2002.
- [73] Bhattacharya Sayantani, Konar Amit, Das Swagatam, Han Sang Yong, *A Lyapunov-Based Extension to Particle Swarm Dynamics for Continuous Function Optimization*, Sensors 2009.
- [74] Kadirkamanathan Visakan, Selvarajah Kirusnapillai, Fleming Peter J., *Stability Analysis of the Particle Dynamics in Particle Swarm Optimizer*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Volume 10, 2006.
- [75] Trelea Ioan Cristian, *The particle swarm optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection*, Elsevier Science, Information Processing Letters, Volume 85, 2003.
- [76] Das Swagatam, Dasgupta Sambarta, Biswas Arijit, Abraham Ajith, Konar Amit, *On Stability of the Chemotactic Dynamics in Bacterial-Foraging Optimization Algorithm*, IEEE Transactions On Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems And Humans, Volume 39, 2009.
- [77] McInnes Colin R., *Vortex formation in swarms of interacting particles*, Physical Review E 75, 2007.

- [78] Krishnanand K.N., Ghose D., *Glowworm swarm optimization for simultaneous capture of multiple local optima of multimodal functions*, Springer Science, Swarm Intell, 2009.
- [79] Suganthan P.N., Hansen N., Liang J.J., Deb K., Chen Y.P., Auger A., Tiwari S., *Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2005 Special Session on Real-Parameter Optimization*, Congress on Evolutionary Computation CEC, 2005.
- [80] Birattari Mauro, Dorigo Marco, *How to assess and report the performance of a stochastic algorithm on a benchmark problem: Mean or best result on a number of runs?*, IRIDIA - Technical Report Series, No 007, 2005.
- [81] Cohen Paul, *Empirical Methods for Artificial Intelligence*, The MIT Press, 1995.
- [82] Zitzler Eckart, Thiele Lothar, Laumanns Marco, Fonseca Carlos, Grunert da Fonseca Viviane, *Performance Assessment of Multiobjective Optimizers: An Analysis and Review*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 7, No. 2, 2003.
- [83] Cagnina Leticia, Esquivel Susana, Coello Carlos, *A Particle Swarm Optimizer for Multi-Objective Optimization*, JCS&T, Vol. 5, No. 4, 2005.
- [84] Lukeman Ryan J., *Modeling collective motion in animal groups: From mathematical analysis to field data*, Doctor Of Philosophy Thesis, 2009.
- [85] Lukeman Ryan, Li Yue-Xian, Edelstein-Keshet Leah, *A conceptual model for milling formations in biological aggregates*, Bulletin of Mathematical Biology, 2009.
- [86] D'Orsogna M. R., Chuang Y. L., Bertozzi A. L., Chayes L., *Self-Propelled Agents With Soft-Core Interactions: Patterns, Stability, and Collapse*, Phys. Rev. Lett., Volume 96, 2006.
- [87] Zitzler Eckart, DebKalyanmoy, Thiele Lothar, *Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results*, Evolutionary Computation, Volume 8, Number 2, pp. 173-195, 1999.
- [88] Gehlhaar Daniel, Fogel David, *Tuning evolutionary programming for conformationally flexible molecular docking*, Evolutionary Programming, 1996.
- [89] Arriaza Gómez A. J., Fernández Palacín F. M., López Sánchez A., Muñoz Márquez M., Pérez Plaza S., Sánchez Navas A., *Estadística básica con R y R-Commander*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2008.
- [90] Peer E. S., Engelbrecht A. P., Van den Bergh F., *CIRG@UP OptiBench: a statistically sound framework for benchmarking optimisation algorithms*, IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2003.
- [91] Brownlee Jason, *A Note on Research Methodology and Benchmarking Optimization Algorithms*, CIS Technical Report 070125A, 2007.

- [92] Montgomery Douglas, *Diseño y análisis de experimentos*, Limusa Wiley, 2003.
- [93] Demsar Janez, *Statistical comparisons of classifiers over multiple data sets*, Journal of Machine Learning Research 7, 2006.
- [94] García Salvador, Molina Daniel, Lozano Manuel, Herrera Francisco, *A study on the use of non-parametric tests for analyzing the evolutionary algorithms' behaviour: a case study on the CEC'2005 Special Session on Real Parameter Optimization*, Journal of Heuristics, Volume 15, Issue 6, 2009.
- [95] Moreno Torres Luis Alberto, *Texto y software en diseños experimentales no-paramétricos más importantes*, Tesis profesional, Universidad de las Américas Puebla, México, 2005.
- [96] Hochberg Yosef, Tamhane Ajit C., *Multiple Comparison Procedures*, Wiley, New York, 1987.
- [97] Deb Kalyanmoy, Pratap Amrit, Agarwal Sameer, Meyarivan T. *A fast and elitist multiobjective Genetic algorithm: NSGA-II*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, v. 6, n. 2, p. 182-197, 2002.
- [98] Yan Jingyu, Li Chongguo, Wang Zhi, Deng Lei, Sun Demin, *Diversity Metrics in Multi-objective Optimization: Review and Perspectives*, Proceedings of the IEEE International Conference on Integration Technology, 2007.
- [99] Okabe Tatsuya, Jin Yaochu, Sendhoff Bernhard, *A Critical Survey of Performance Indices for Multi-Objective Optimisation*, Congress on Evolutionary Computation CEC '03, Volume 2, 2003.
- [100] Jiang Siwei, Ong Yew-Soon, Zhang Jie, Feng Liang. *Consistencies and Contradictions of Performance Metrics in Multiobjective Optimization*, IEEE Transactions on Cybernetics, Volume:PP, Issue: 99, 2014.
- [101] Bhagavatula Sowmya, Sanjeevi Sriram, Kumar Divya, Yadav Chitranjan, *Multi-Objective Indicator Based Evolutionary Algorithm for Portfolio optimization*, IEEE International Advance Computing Conference (IACC), 2014.