UNA APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL PASO DE MONTAÑA

Trabajo de Grado
Proyecto Curricular de Matemáticas

Javier David Moreno Paris

Director: Arturo Sanjuán

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C.
2016

Dedicado a mis padres

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente al profesor Arturo Sanjuán, ha sido un excelente mentor, del cual he aprendido mucho en estos 2 últimos años y me ha colaborado en gran medida en mi formación académica, su ayuda y colaboración en este trabajo han sido fundamentales.

También quiero agradecer a mis padres, que me han dado todo lo necesario para llegar a donde me encuentro hoy, junto con su apoyo incondicional. A mi hermano Manuel que siempre me ha ayudado en todo y a mi novia Julieth que estuvo a mi lado durante toda la realización de este trabajo.

Por último quiero agradecer a la Universidad Distrital porque fue la primera en darme la oportunidad de empezar mis estudios de educación superior, los cuales se culminan con este trabajo.

Índice general

INTRODUCIÓN

Desde la aparición de un incipiente concepto de función en el siglo XVII, la matemática ha servido para modelar situaciones físicas o abstractas en todos los campos, desde las ciencias naturales hasta la economía y muchas veces en esas situaciones ha aparecido la necesidad de optimizar estos modelos. Eso llevó a los matemáticos, a preguntarse cómo crear un método de encontrar máximos y mínimos, pero las herramientas matemáticas de la época eran muy escasas y la búsqueda de este método se convertiría en uno de los principales problemas abiertos de la matemática de todo el siglo XVII.

Este problema ha sido trabajado por muchos. Fermat (1601-1665) dio el primer método para calcular máximos y mínimos pero no fue publicado si no hasta después de su muerte [Jabri, 2003, pag. 7]. La necesidad de responder esta pregunta de ¿cómo hallar máximos y mínimos?, fue uno de los motores para la creación de la derivada y el cálculo diferencial. Esta teoría que fue creada por la colaboración de muchos (Fermat, Galileo, Cavalieri, Barrow, etc) y que una primera idea del cálculo fue desarrollada por Newton (1660) y Leibniz (1670) y continuada por muchos más matemáticos hasta el día de hoy [Wussing, 1998, pag 137]. Con el cálculo diferencial y el cálculo vectorial el problema de hallar máximos y mínimos se volvió relativamente fácil para una gama amplia de funciones.

Con la aparición de las matemáticas modernas más precisamente con el análisis funcional, los espacios de Banach, y la derivada de Fréchet, encontrar puntos y valores críticos (máximos y mínimos) entró a un nuevo nivel: la dimensión infinita. Encontrar dichos puntos y valores se convirtió en un nuevo campo de estudio de las matemáticas conocido como cálculo variacional, pero una nueva rama de la matemáticas puede no ser de interés para algunos matemáticos solo por ser más general e incluso puede llegar a ser olvidada. Por esta razón son importantes las aplicaciones. El cálculo variacional (en dimensión infinita) encontró rápidamente aplicaciones en las ecuaciones diferenciales y por ende esta teoría puede ser útil a todos los campos de la ciencia[Jabri, 2003, pag. 9-11].

En este trabajo mostraremos como el cálculo variacional es utilizado para garantizar la existencia de soluciones (débiles) de ecuaciones diferenciales generales que los métodos básicos no pueden resolver, lo haremos a partir del **El Teorema Del Paso De Montaña** demostrado por Antonio Ambrosetti y Paul Rabinowitz en 1973, Este es un extraordinario resultado y es una de las puntas angulares del cálculo variacional y la teoría de minimax [Jabri, 2003, pag. 12].

El trabajo consistirá en 3 capítulos. En el primer capítulo mostraremos los preliminares necesarios para nuestro trabajo, esto será algunos conceptos y teoremas de la teoría de la medida y el análisis funcional. En este capítulo no mostraremos la demostración de la mayoría de los teoremas utilizados, para no extendernos demasiado, pero presentaremos ejemplos para familiarizar al lector con estas teorías y a su vez se demostrarán algunos teoremas que su demostraciones no resulten muy largas. En el segundo capítulo mostraremos los conceptos y teoremas necesarios para enunciar y demostrar el Teorema Del Paso de Montaña. Por último, en el tercer capítulo mostraremos como aplicar el Teorema Del paso De Montaña a las ecuaciones diferenciales.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Notación y Teoremas Previos

Para la lectura de este texto se asumen conocimientos generales de análisis, topología y de la teoría de la medida por parte del lector, principalmente la integral de Lebesgue.

Denotamos con $(X, \mathbf{X}, \mu)$ a un espacio de medida, o mas brevemente X donde $\mathbf{X}$ es la σ-álgebra. Los elementos de $\mathbf{X}$ son llamados conjuntos medibles y μ es la medida sobre ese espacio. Notamos con $M(X, \mathbf{X})$ al conjunto de funciones medibles a valor real. Tiene sentido definir $M^+(X, \mathbf{X})$ como el conjunto de funciones medibles no negativas y serán de suma importancia los siguientes teoremas tomados de [Bartle, 2014, pag. 31] y [Bartle, 2014, pag. 44]

Teorema 1.1 (Teorema de la Convergencia Monótona)**.** *Si (f_n) es una sucesión monótonamente creciente de funciones en $M^+(X, \boldsymbol{X})$ que convergen a f c.t.p. X, entonces*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Teorema 1.2 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue)**.** *Sea (f_n) una sucesión de funciones integrables que convergen a f c.t.p. X. Si existe una función integrable g tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo n y para casi todo $x \in X$, entonces f es integrable y*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Este teorema es de mucha importancia y es más fuerte que el teorema de integración (en el sentido de Riemann) término a término para sucesiones de funciones uniformemente convergentes. Más precisamente dada una sucesión de funciones (f_n) reales Riemann-integrable que convergen uniformemente a una función f, entonces f es Riemann-integrable y $\int f dx = \lim \int f_n dx$. Ilustramos lo anterior con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Si (f_n) es una sucesión en $L(X, \mathbf{X}, \mu)$ que converge uniformemente en X a una función f y si $\mu(X) < \infty$ entonces

$$\int f dx = \lim \int f_n dx.$$

Demostración. Por la convergencia uniforme tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < 1.$$

Por tanto $|f(x)| < 1 + |f_N(x)|$ para todo x, lo que implica que

$$\begin{aligned} \int |f(x)| d\mu &< \int (1 + |f_N(x)|) d\mu \\ &= \int 1 d\mu + \int |f_N(x)| d\mu \\ &= \mu(X) + \int |f_N(x)| d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Por ende f es integrable, por otro lado también se tiene que $|f_n(x)| < 1 + |f(x)|$ para $n \geq N$ y como $1 + |f(x)|$ es integrable por el Teorema de la Convergencia Dominada obtenemos

$$\int f dx = \lim \int f_n dx.$$

□

Ejemplo 2. Existe una sucesión de funciones (f_n) de valor real que convergen a una función f c.t.p.X tal que

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

pero la convergencia no es uniforme

Demostración. Tomemos a $X = [0, 1]$ con la medida usual defínase (f_n) como sigue

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ nx - \frac{n}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Es claro que $f_n(x)$ es continua para todo n y además de eso converge puntualmente c.t.p X a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ahora, la función $g(x) = 1$ es integrable sobre X y además $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo n y para todo $x \in X$ así por el teorema de la convergencia dominada

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

sin embargo la convergencia no es uniforme puesto que si lo fuera como f_n es continua para todo n se tendría que f es continua, lo cual no es cierto. $\square$

También denotamos a $(E, \|\cdot\|)$ como un espacio normado, en caso de ser completo se le llama espacio de Banach y denotamos a $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ su espacio dual topológico o mas brevemente su espacio dual, el cual consiste en todos los funcionales lineales continuos (acotados), $\Phi : E \to \mathbb{R}$, y tiene norma

$$\|\Phi\|_{E^*} = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{|\Phi(x)|}{\|x\|}.$$

El dual de cualquier espacio normado, con esta norma, es siempre un espacio de Banach. Más aún, si definimos a $L(E, F)$ como el conjunto de todos los operadores lineales continuos, $\Phi : E \to F$ y $(F, \|\cdot\|_1)$ un espacio normado, estos operadores tienen norma

$$\|\Phi\|_{L(E,F)} = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|\Phi(x)\|_1}{\|x\|}$$

y de esta manera $(L(E, F), \|\cdot\|_{L(E,F)})$ es siempre un espacio normad, además es de Banach si F es completo.

Necesitaremos de un teorema de gran importancia del análisis funcional, conocido como el teorema de Hahn–Banach. Este teorema tiene varias versiones. Nosotros utilizaremos una consecuencia de la forma análitica del teorema de Hahn–Banach sobre espacios normados. Tomado de [Brezis, 2010, pag. 3], que se enuncia de la siguiente manera.

Teorema 1.3 (Teorema de Hahn–Banach)**.** *Sea G un subespacio vectorial de E. Si $\Phi : G \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo, entonces existe $\overline{\Phi} \in E^*$ una extension de Φ tal que*

$$\|\overline{\Phi}\|_{E^*} = \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{|\Phi(x)|}{\|x\|} = \|\Phi\|_{G^*}.$$

Existe una versión menos general del teorema de Hahn–Banach,sin embargo éste asegura en que casos la extensión es única y es tomada de [Kreyszig, 1989, pag. 100]. Como ejercicio lo demostraremos.

Proposición 1.1. *Sea G un subespacio vectorial de E y Sea $\Phi : G \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo, entonces Φ tiene una única extensión $\overline{\Phi} \in \overline{G}^*$ tal que*

$$\|\overline{\Phi}\|_{\overline{G}^*} = \|\Phi\|_{G^*}.$$

Demostración. Sea $x \in \overline{G}$ entonces existe (x_n) en G tal que $x_n \to x$. Veamos que $(\Phi(x_n))$ es de Cauchy. En efecto, sea $\epsilon > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon / \|\Phi\|_{G^*},$$

luego

$$|\Phi(x_n) - \Phi(x_m)| = |\Phi(x_n - x_m)| \leq \|\Phi\|_{G^*} \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Por tanto $(\Phi(x_n))$ es de Cauchy y como $\mathbb{R}$ es completo, $(\Phi(x_n))$ converge a un único punto $a_x \in \mathbb{R}$, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = a_x.$$

Definimos a

$$\begin{array}{rccc} \overline{\Phi}: & \overline{G} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a_x. \end{array}$$

Veamos que $\overline{\Phi}$ está bien definida, es decir, que no depende de la escogencia de la sucesión. Sea (x_n) y (y_n) en G tal que $x_n \to x$ y $y_n \to x$ y definamos a

$$(v_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots),$$

entonces $v_n \to x$ y por el razonamiento anterior $(\Phi(v_n))$ converge. Ya que $(\Phi(x_n))$ y $(\Phi(y_n))$ son subsucesiones de $(\Phi(v_n))$, convergen y convergen al mismo límite, por tanto a_x no depende de la escogencia de la sucesión.

Por otro lado $\overline{\Phi}$ es lineal, pues para $x, y \in \overline{G}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ existen (x_n) y (y_n) en G tal que $x_n \to x$ y $y_n \to y$, luego $x_n + \alpha y_n \to x + \alpha y$ y

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(x + \alpha y) &= \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n + \alpha y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) + \alpha \Phi(y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) + \alpha \lim_{n\to\infty} \Phi(y_n) \\ &= \overline{\Phi}(x) + \alpha \overline{\Phi}(y). \end{aligned}$$

Por otro lado, $\overline{\Phi}$ es acotada puesto que para $x \in \overline{G}$ existe (x_n) en G tal que $x_n \to x$ y

$$\begin{aligned}
|\overline{\Phi}(x)| &= |\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n)| \\
&= \lim_{n\to\infty} |\Phi(x_n)| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|\Phi\|_{G^*} \|x_n\| \\
&= \|\Phi\|_{G^*} \| \lim_{n\to\infty} x_n\| \\
&= \|\Phi\|_{G^*} \|x\|.
\end{aligned}$$

Por tanto es acotada y

$$\|\overline{\Phi}\|_{\overline{G}^*} \leq \|\Phi\|_{G^*},$$

y como

$$\|\Phi\|_{G^*} = \sup_{x\in G-\{0\}} \frac{|\overline{\Phi}(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in \overline{G}-\{0\}} \frac{|\overline{\Phi}(x)|}{\|x\|} = \|\overline{\Phi}\|_{\overline{G}^*},$$

se obtiene que

$$\|\overline{\Phi}\|_{\overline{G}^*} = \|\Phi\|_{G^*}.$$

Por último veamos que $\overline{\Phi}$ es única. Supongamos que existe $\Psi : \overline{G} \to \mathbb{R}$ tal que $\Psi(x) = \Phi(x)$ para todo $x \in G$ y Ψ es un funcional lineal acotado entonces para $x \in \overline{G}$ existe (x_n) en G tal que $x_n \to x$ y por ser Ψ continua tenemos que

$$\Psi(x) = \lim_{n\to\infty} \Psi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = a_x = \overline{\Phi}(x),$$

como x era arbitrario, obtenemos que $\Psi = \overline{\Phi}$, por tanto $\overline{\Phi}$ es única. $\square$

Note que esta proposición se podía demostrar mucho más fácil a partir del Teorema de Hahn–Banach, pero dimos una demostración más artesanal puesto que la demostración solo utilizó la completitud de $\mathbb{R}$. Por tanto se puede poner en vez de $\mathbb{R}$ cualquier espacio F de Banach y la demostración sería análoga. Así obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Sea G un subespacio vectorial de E y sea F un espacio de Banach y $\Phi : G \to F$ un funcional lineal continuo, entonces Φ tiene una única extensión lineal continua $\overline{\Phi}$ sobre $\overline{G}$ tal que*

$$\|\overline{\Phi}\|_{L(\overline{G},F)} = \|\Phi\|_{L(G,F)}.$$

Es necesario definir los conjuntos L^p y mencionar algunas propiedades de estos espacios.

1.2. Espacios L^p

Definición. Si $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p = L^p(X) = L^p(X, \mathbf{X}, \mu)$ consiste de todas las clases **μ-equivalente** de las funciones de valor real medibles f para las cuales $|f|^p$ tiene integral finita con respecto a μ sobre X. Dos funciones son **μ-equivalente** si son iguales en casi toda parte, es decir, salvo un conjunto de medida cero. Se define

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Las operaciones vectoriales sobre L^p están definidas puntualmente. Ahora las propiedades básicas de estos espacios están dadas por el siguiente teorema tomado de [Bartle, 2014, pag. 59].

Teorema 1.4. *Si $1 \leq p < \infty$ entonces se tienen las siguientes propiedades*

1. *Con las operaciones anteriormente definidas, L^p es un espacio vectorial.*

2. *$\| \cdot \|_p$ es una norma sobre L^p.*

3. *$(L^p, \| \cdot \|_p)$ es completo.*

En pocas palabras $(L^p, \| \cdot \|_p)$ es un espacio de Banach.

Mostramos a continuación algunos ejemplos y ejercicios para familiarizarnos con estos espacios y algunas de sus propiedades.

Ejemplo 3. El conjunto de las funciones medibles simples es denso en L^p para todo $1 \leq p < \infty$. Se entiende por función simple a una función que toma finitos valores.

Demostración. Basta con demostrar que para cada $f \in L^p$ existe (ϕ_n) una sucesión de funciones medibles simples tal que $\phi_n \to f$ en el sentido de $||.||_p$. En efecto, supongamos primero que $f \in L^p$ es no negativa entonces existe una sucesión (ϕ_n) en $M(X, \mathbf{X})$ tal que:

- (ϕ_n) es monótona creciente no negativa.
- $\phi_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in X$.
- ϕ_n es simple para cada n,

Entonces $(f - \phi_n)$ es una sucesión monótona decreciente y por otra parte al ser (ϕ_n) monótona creciente tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n = f(x)$$

para todo $x \in X$, luego

$$0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq f(x).$$

Es decir

$$(|f(x) - \phi_n(x)|)^p \leq (|f(x)|)^p$$

para todo $x \in X$ y para todo n. Como $(f(x) - \phi_n(x))^p \to 0$ para todo $x \in X$ obtenemos por el teorema de la convergencia dominada que

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - \phi_n|^p d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

Esto equivale a

$$\lim_{n\to\infty} ||f - \phi_n||_p = 0.$$

Esto es $\phi_n \to f$ en el sentido de L^p. Ahora si f no necesariamente es no negativa entonces

$$f = f^+ - f^-,$$

pero como la parte positiva y la parte negativa de una función son no negativas entonces por lo demostrado anteriormente existen (ϕ_n^1) y (ϕ_n^2) sucesiones de funciones medibles simples tal que

$$\phi_n^1 \to f^+ \text{ y } \phi_n^2 \to f^-.$$

Luego

$$\phi_n^1 - \phi_n^2 \to f$$

y es claro que $(\phi_n^1 - \phi_n^2)$ es una sucesión de funciones medibles simples pues la resta de funciones simples es simple y la resta de funciones medibles es medible. $\square$

Ejemplo 4. Si $f \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$ y $E = \{x \in X : |f(x)| \neq 0\}$ entonces E es σ-finito

Demostración. : Sea

$$E_n = \{x \in X : |f(x)|^p > 1/n\}$$

entonces se tiene que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Veamos que $\mu(E_n)$ es finito para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, tenemos que $|f(x)|^p > (1/n)\chi_{E_n}$ luego

$$\int |f(x)|^p d\mu > \int (1/n)\chi_{E_n} d\mu = (1/n)\mu(E_n).$$

Es decir

$$\mu(E_n) < n \int |f(x)|^p d\mu.$$

Pero $\int |f(x)|^p d\mu < \infty$ por hipótesis. Es decir $\mu(E_n) < \infty$. $\square$

Ejemplo 5. Si $f \in L^p$ y si $E_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\}$ entonces $\mu(E_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$

Demostración. Tenemos que $|f(x)|^p \geq n^p \chi_{E_n}$ luego

$$\int |f(x)|^p d\mu \geq n^p \mu(E_n),$$

es decir

$$0 \leq \mu(E_n) \leq \frac{\int |f(x)|^p d\mu}{n^p}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\int |f(x)|^p d\mu}{n^p} = 0$, puesto que $\int |f(x)|^p d\mu$ existe y es finita, obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0.$$

$\square$

Para finalizar veamos que para $p \in (0,1)$ la definición de L^p deja de ser un espacio normado.

Ejemplo 6. Para $0 < p < 1$ y $L^p = L^p(X)$ como se definió anteriormente, entonces

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

no es una norma.

Demostración. Consideremos $X = [0,1]$. Basta demostrar que $\overline{B(0,1)}$, la bola cerrada con centro en 0 y radio 1, no es convexa. En efecto, tomemos $f(x) = 1$ y $g(x) = g(x;p) = (2x)^{1/p}$ entonces

$$\int_0^1 |1|^p dx = 1$$

y

$$\int_0^1 |(2x)^{1/p}|^p dx = \int_0^1 (2x) dx = 1.$$

Esto es que $f, g \in \overline{B(0,1)}$. Por otro lado si $\overline{B(0,1)}$ fuera convexo entonces para todo $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\lambda f + (1-\lambda) g \in \overline{B(0,1)}$$

pero para $\lambda = 1/2$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2x)^{1/p} \notin \overline{B(0,1)}.$$

En efecto, definamos

$$h(x) = h(x;p) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2x)^{1/p}\right)^p$$

y veamos que $\int_0^1 h(x)dx > 1$. Entonces

$$\begin{aligned} h'(x) &= p\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2x)^{1/p}\right)^{p-1} \frac{1}{2p}(2x)^{1/p-1}(2) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2x)^{1/p}\right)^{p-1} (2x)^{1/p-1}. \end{aligned}$$

Luego

$$h'(1/2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{p-1} = 1,$$

por tanto la recta tangente a $h(x)$ en $x = 1/2$ tiene pendiente 1. Esto es de la forma

$$y = x + b$$

y esta pasa por $(1/2, 1)$ puesto que $h(1/2) = 1$, así la recta tangente a $h(x)$ es

$$l(x) = x + \frac{1}{2}.$$

Nótese que $h''(x) > 0$ y por consiguiente es cóncava hacia arriba como ilustra la siguiente gráfica, donde muestra a $l(x)$ y a $h(x) = h(x;p)$ variando a p.

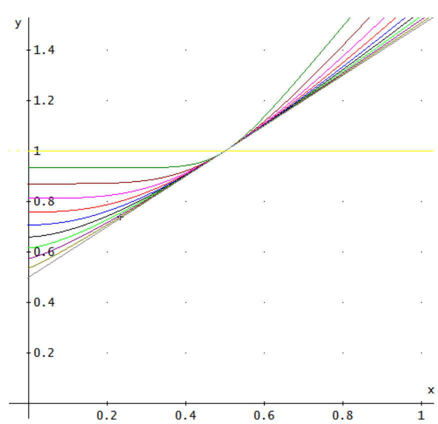

Figura 1.1: gráficas de $h(x)$

Como $h(x)$ es cóncava hacia arriba, implica que

$$h(x) > l(x),$$

por ende

$$\int_0^1 h(x)dx > \int_0^1 (x + 1/2)dx = 1.$$

Es decir,

$$\left\| \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g \right\|_p > 1.$$

□

También será de suma importancia la siguiente desigualdad tomada de [Bartle, 2014, pag. 56].

Teorema 1.5 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea $f \in L^p$ y $g \in L^q$ donde $p > 1$ y $(1/p) + (1/q) = 1$. Entonces $fg \in L^1$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

El elemento q es llamado el conjugado de p, y se denota como $q = p'$. Es claro que $(p')' = p$. Veamos el siguiente ejemplo que será de gran utilidad.

Ejemplo 7. $L^{p_2}(X) \subseteq L^{p_1}(X)$ con $p_1 < p_2$ si $\mu(X) < \infty$

Demostración. Sea $f \in L^{p_2}(X)$ entonces

$$\int |f|^{p_2} d\mu < \infty.$$

Ahora defínamos $E = \{x \in X : |f(x)| < 1\}$ por tanto $|f|^{p_1}\chi_E < 1$ luego

$$\int_E |f|^{p_1} d\mu < \int_E 1 d\mu = \mu(E) \leq \mu(X) < \infty.$$

Para $x \in E^c$

$$|f(x)| \geq 1.$$

Es decir

$$|f(x)|^{p_1} \leq |f(x)|^{p_2},$$

por consiguiente

$$|f|^{p_1}\chi_{E^c} \leq |f|^{p_2}\chi_{E^c}.$$

Esto es

$$\int_{E^c} |f|^{p_1} d\mu \leq \int_{E^c} |f|^{p_2} d\mu \leq \int |f|^{p_2} d\mu < \infty,$$

por tanto

$$\begin{aligned}\int |f|^{p_1} d\mu &= \int_X |f|^{p_1} d\mu \\ &= \int_{E\cup E^c} |f|^{p_1} d\mu \\ &= \int_E |f|^{p_1} d\mu + \int_{E^c} |f|^{p_1} d\mu < \infty\end{aligned}$$

luego $f \in L^{p_1}(X)$. $\square$

Esta proposición anterior también puede ser demostrada a partir de la desigualdad de Hölder como sigue.

Demostración. (Usando la desigualdad de Hölder) Sea $f \in L^{p_2}(X)$ y sea $p_2^{'}$ tal que $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^{'}} = 1$. Veamos que $|f|^{p_2^{'}(p_1-1)} \in L^{\beta}(X)$ con $\beta = \frac{p_2-1}{p_1-1} > 1$. En efecto, como

$$p_2^{'}(p_1-1)\left(\frac{p_2-1}{p_1-1}\right) = p_2^{'}(p_2-1) = p_2,$$

entonces

$$\int (|f|^{p_2^{'}(p_1-1)})^{\beta} d\mu = \int |f|^{p_2} d\mu < \infty.$$

Por otro lado, como $\mu(X) < \infty$, $1 \in L^p(X)$ para todo $1 \leq p < \infty$. Por tanto $1 \in L^{\beta'}(X)$ con $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1$. Por la desigualdad de Hölder

$$|f|^{p_2^{'}(p_1-1)}(1) \in L^1(X)$$

y

$$\begin{aligned}\int (|f|^{p_2^{'}(p_1-1)}) d\mu &\leq \left(\int (|f|^{p_2^{'}(p_1-1)})^{\beta} d\mu\right)^{1/\beta} \left(\int 1^{\beta'} d\mu\right)^{1/\beta'} \\ &= \left(\int |f|^{p_2} d\mu\right)^{1/\beta} (\mu(X))^{1/\beta'} .\end{aligned}$$

Esto es $|f|^{p_1-1} \in L^{p_2^{'}}(X)$. Nuevamente por la desigualdad de Hölder $|f|_1^p \in L^1(X)$, esto es, $f \in L^{p_1}(X)$ como queríamos demostrar y además

$$\begin{aligned}\int |f|^{p_1} d\mu &= \int |f||f|^{p_1-1} d\mu \\ &\leq \|f\|_{p_2} \left(\int |f|^{p_2^{'}(p_1-1)} d\mu\right)^{1/p_2^{'}} \\ &\leq \|f\|_{p_2} \left[\left(\int |f|^{p_2} d\mu\right)^{1/\beta} (\mu(X))^{1/\beta'}\right]^{1/p_2^{'}},\end{aligned}$$

pero $\beta = \frac{p_2-1}{p_1-1} = \frac{(p_2-1)(p_2)}{p_2(p_1-1)} = \frac{p_2}{p_2^{'}(p_1-1)}$, es decir $\frac{1}{\beta} = \frac{p_2^{'}(p_1-1)}{p_2}$, por ende

$$\begin{aligned}
\int |f|^{p_1} d\mu &\leq \|f\|_{p_2} \left(\int |f|^{p_2} d\mu \right)^{1/\beta p_2^{'}} (\mu(X))^{1/\beta' p_2^{'}} \\
&= \|f\|_{p_2} \left(\int |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{(p_1-1)}{p_2}} (\mu(X))^{1/\beta' p_2^{'}} \\
&= \|f\|_{p_2} \|f\|_{p_2}^{p_1-1} (\mu(X))^{1/\beta' p_2^{'}} \\
&= \|f\|_{p_2}^{p_1} (\mu(X))^{1/(\beta' p_2^{'})}.
\end{aligned}$$

De donde

$$\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2} (\mu(X))^{1/\beta' p_2^{'} p_1}$$

□

Aunque la primera demostración es más natural, la segunda, a pesar de ser muy técnica, da una información extra sobre la existencia de una constante real C que cumple

$$\|f\|_{p_1} \leq C \|f\|_{p_2}$$

esto implica que la inclusión

$$i : L^{p_2} \longrightarrow L^{p_1}$$

es continua. Además de esto se conoce explícitamente cual es la constante C ya que $\frac{1}{p_2^{'}} = \frac{p_2-1}{p_2}$ y

$$\frac{1}{\beta'} = \frac{\beta - 1}{\beta} = \frac{\frac{p_2-1}{p_1-1} - 1}{\frac{p_2-1}{p_1-1}} = \frac{\frac{(p_2-1)-(p_1-1)}{p_1-1}}{\frac{p_2-1}{p_1-1}} = \frac{p_2 - p_1}{p_2 - 1}.$$

De este modo

$$\frac{1}{\beta' p_2^{'} p_1} = \left(\frac{p_2 - p_1}{p_2 - 1} \right) \left(\frac{p_2 - 1}{p_2} \right) \left(\frac{1}{p_1} \right) = \frac{p_2 - p_1}{p_2 p_1}$$

obtenemos que

$$C = \mu(X)^{\frac{p_2 - p_1}{p_2 p_1}}.$$

Es decir

$$\|f\|_{p_1} \leq \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_2 p_1}} \|f\|_{p_2}.$$

En el caso de normas en $\mathbb{R}^n$ dadas por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

con $1 \leq p < \infty$, se sabe que

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, donde el resultado del límite es a su vez una norma para $\mathbb{R}^n$. Ésta es llamada la norma del sup y es denotada por

$$\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

De modo que es natural definir el siguiente espacio como una generalización de $\mathbb{R}^n$ con la norma del sup, el cual esta relacionado con los espacios L^p, que al igual que estos espacios, será de suma importancia.

Definición. El espacio $L^\infty = L^\infty(X) = L^\infty(X, \mathbf{X}, \mu)$ consiste de todas las clases μ **-equivalente** de funciones de valor real medibles f las cuales están acotadas en casi toda parte sobre X. Es decir acotadas salvo un conjunto de medida cero.

Si $f \in L^\infty$ y $N \in \mathbf{X}$ con $\mu(N) = 0$ se define

$$S(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\}$$

y

$$\|f\|_\infty = \inf\{S(N) : N \in \mathbf{X},\ \mu(N) = 0\}.$$

Un elemento de L^∞ es llamado **función esencialmente acotada** y $\|f\|_\infty$ es llamado el **supremo esencial de** $|f|$ y se denota también con essup $|f|$.

Al igual que en L^p, L^∞ tiene algunas propiedades, que se enuncian en el siguiente teorema tomado de [Bartle, 2014, pag. 61]

Teorema 1.6. *El espacio L^∞ tiene las siguientes propiedades:*

1. *Es un espacio vectorial con las mismas operaciones definidas sobre L^p.*

2. *$\|\cdot\|_\infty$ es una norma sobre L^∞.*

3. *$(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es completo.*

Es decir $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Para terminar con los espacios L^p con $1 \leq p \leq \infty$, introduciremos dos teoremas más de suma importancia. Uno de ellos es **El Teorema de Representación de Riesz para L^p** tomado de [Bartle, 2014, pag. 89].

Éste teorema se divide en dos partes, que se enuncian a continuación.

Teorema 1.7 (Teorema de Representación de Riesz para L^1)**.** *Si $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finito y G es un funcional lineal acotado sobre $L^1(X, \boldsymbol{X}, \mu)$, entonces existe un $g \in L^\infty(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ tal que*

$$G(f) = \int fg \; d\mu$$

para todo $f \in L^1$. Más aun, $\|G\| = \|g\|_\infty$ y $g \geq 0$ si G es un funcional lineal positivo.

Teorema 1.8 (Teorema de Representación de Riesz para L^p con $1 < p < \infty$)**.** *Si $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finito y G es un funcional lineal acotado sobre $L^p(X, \boldsymbol{X}, \mu)$, con $1 < p < \infty$ entonces existe un $g \in L^q(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tal que*

$$G(f) = \int fg \; d\mu$$

para todo $f \in L^p$. Más aun, $\|G\| = \|g\|_q$.

El libro [Bartle, 2014] de donde es tomado la primera version del Teorema de Representación de Riesz no demuestra que $\|G\| = \|g\|_\infty$, sino que lo deja como ejercicio. Por ello lo demostraremos a continuación.

Ejemplo 8. Si se define a G sobre L^p por

$$G(f) = \int fg \; d\mu$$

con $g \in L^\infty$ entonces G es un funcional lineal acotado sobre L^p con $\|G\| = \|g\|_\infty$.

Demostración. Tenemos por las propiedades de la integral de Lebesgue que G es un funcional lineal, veamos que es acotado. En efecto, sea $f \in L^1$ entonces

$$\begin{aligned}
|G(f)| &= \left|\int fg \ d\mu\right| \\
&\leq \int |f||g| \ d\mu \\
&\leq \int |f|\|g\|_\infty \ d\mu \\
&= \|g\|_\infty \int |f| \ d\mu \\
&= \|f\|_1\|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Por tanto G es acotado y $\|G\| \leq \|g\|_\infty$. Por otro lado demostramos que

$$\int |f||g| \ d\mu \leq \|f\|_1\|g\|_\infty.$$

Esta es la desigualdad de Hölder en el caso $p = 1$ y $q = \infty$. Generalizándola para todo p. Por último, veamos que $\|G\| \geq \|g\|_\infty$ para concluir con la demostración.

Sean $c > 1$ y $E_c = \{x \in X : |g(x)| \geq c\|G\|\}$. Defínase a $E_c^+ = \{x \in X : g(x) \geq c\|G\|\}$ y $E_c^- = \{x \in X : -g(x) \geq c\|G\|\}$. Entonces es claro que $E_c = E_c^+ \cup E_c^-$ y $E_c^+ \cap E_c^- = \emptyset$. Por tanto definamos

$$f_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E_c^+ \\ -1 & \text{si } x \in E_c^- \\ 0 & \text{si } x \notin E_c. \end{cases}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
G(f_c) &= \int f_c g \ d\mu \\
&= \int_{E_c} f_c g \ d\mu \\
&= \int_{E_c^+} f_c g \ d\mu + \int_{E_c^-} f_c g \ d\mu \\
&= \int_{E_c^+} g \ d\mu + \int_{E_c^-} g \ d\mu \\
&\geq c\|G\|\mu(E_c^+) + c\|G\|\mu(E_c^-) \\
&= c\|G\|\mu(E_c).
\end{aligned}$$

Por lo que

$$G(f_c) \geq c\|G\|\mu(E_c). \tag{1.1}$$

Por otro lado tenemos que

$$\frac{G(f_c)}{\|f_c\|_1} \leq \|G\|,$$

pero $\|f_c\|_1 = \int f_c d\mu = \int_{E_c} 1 d\mu = \mu(E_c)$. Es decir que

$$G(f_c) \leq \|G\|\mu(E_c).$$

De lo anterior y de (1.1) obtenemos

$$c\|G\|\mu(E_c) \leq G(f_c) \leq \|G\|\mu(E_c).$$

Como $c > 1$ la desigualdad anterior es contradictoria, a menos que $\mu(E_c) = 0$, luego

$$|g(x)| \leq c\|G\|$$

c.t.p X. Esto implica que

$$\|g\|_\infty \leq c\|G\|$$

para todo $c > 1$. Por ende

$$\|G\| \leq \|g\|_\infty.$$

$\square$

Para introducir el último teorema que necesitamos sobre los espacios L^p es necesario la siguiente definición.

Definición. Dada una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ se define a

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

como el **soporte de** f, y se denotan a $C_c(\Omega)$ y $C_c^\infty(\Omega)$ como el conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continuas con soporte compacto e infinitamente diferenciables con soporte compacto respectivamente.

A continuación enunciamos el último teorema relacionado con los espacios L^pque es de gran importancia para los fundamentos de nuestro trabajo, tomados de [Brezis, 2010, pag. 109].

Teorema 1.9 (Teorema de la Densidad)**.** *Dado un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\boldsymbol{L}$ la σ- álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, la cual es regular y contiene el álgebra (σ- álgebra) de Borel y μ la medida de Lebesgue (o Borel), entonces para $1 \leq p < \infty$ el conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \boldsymbol{L}, \mu)$. En particular $C_c(\Omega)$ también es denso en $L^p(\Omega)$.*

Un ejemplo clásico de una función $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es el siguiente

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{1/(|x|^2-1)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Que en el caso $n = 1$ tiene la siguiente gráfica.

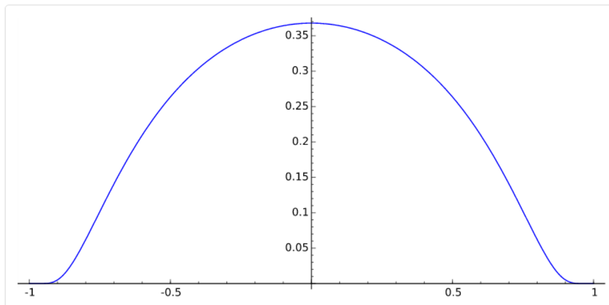

Figura 1.2: gráfica de $\rho(x)$

Ahora bien, existe un tipo especial de sucesión de funciones $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ llamadas **molificadores** que se definen de la siguiente manera.

Definición. Una sucesión de **molificadores** $(\rho_m)_{m=1}^\infty$ es una sucesión de funciones sobre $\mathbb{R}^n$ tal que $\rho_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \rho_m \subset \overline{B(0, 1/m)}$, $\int \rho_m d\mu = 1$ y $\rho_m(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Es fácil construir una sucesión de molificadores a partir de una $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\rho \subset \overline{B(0,1)}$ y $\rho(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y ρ no idénticamente 0. Por ejemplo si tomamos nuevamente a

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{1/(|x|^2-1)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

obtenemos una sucesión de molificadores dejando a

$$\rho_m = Cm^n\rho(mx)$$

con $C = 1/\int \rho d\mu$. Mostramos los primeros elementos de esta sucesión en la siguiente gráfica en el caso $n = 1$.

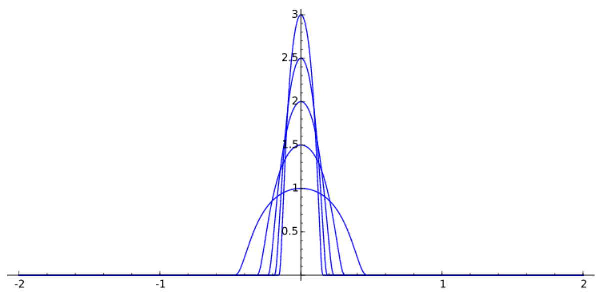

Figura 1.3: gráfica de $\rho_m(x)$

Son de importancia estas sucesiones de molificadores porque es a partir de ellas que se puede construir una sucesión (f_m) de funciones en $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $f_m \to f$ en $L^p(\Omega)$, con $f \in L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Para poder construir esta sucesión debemos definir la siguiente operación.

Definición. Dadas dos funciones f y g definidas sobre $\mathbb{R}^n$. La convolución de f y g se define como

$$f * g = \int_{R^n} f(x-y)g(y)dy.$$

En seguida definimos a $g_m = \chi_{K_m}\overline{f}$, donde

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}$$

y (K_m) es una sucesión de compactos sobre $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega \text{ y } \operatorname{dist}(K_m, \Omega^c) \geq 2/n.$$

Por último se define la sucesión deseada como sigue

$$f_m = \rho_m * g_m.$$

Se puede encontrar en [Brezis, 2010, pag. 109] la demotración de que esta suseción (f_m) así definida, efectivamente converge a f en L^p. La siguiente gráfica muestra los primeros 3 elementos de esta sucesión si se toma a $\Omega = (-1, 1)$ y

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-1, 0) \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1) \end{cases}$$

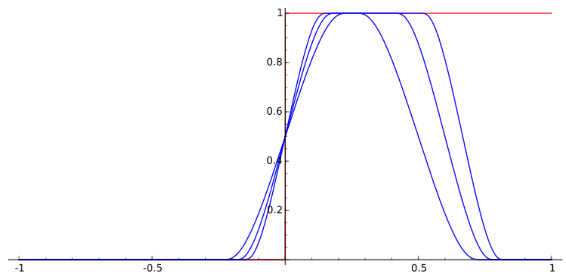

Figura 1.4: gráfica de $f_m(x)$

1.3. Espacios de Sobolev

Además de los espacios L^p, también es necesario definir unos subespacios que serán de suma importancia y mencionaremos algunas de sus propiedades más importantes.

Definición. Sea $I = (a, b)$ un intervalo abierto, no necesariamente acotado. Sea $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Sobolev $W^{1,p} = W^{1,p}(I)$ es definido como

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' d\mu = -\int_I g\varphi d\mu, \ \forall \varphi \in C_c^1(I)\}.$$

También defininos a

$$H^1(I) = W^{1,2}(I)$$

y para un $u \in W^{1,p}(I)$ denotamos a $g = u'$, ésta es llamada la derivada débil de u.

Mostraremos dos ejemplos para familiarizar al lector con este espacio. Con el fin de ver que esta derivada débil es una generalización de la derivada usual.

Ejemplo 9. Sea u una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ diferenciable en I, con I un intervalo acotado, entonces $u \in W^{1,p}(I)$ y la derivada usual coincide con la derivada débil.

Demostración. Dado $\varphi \in C_c^1(I)$, tenemos por integración por partes que

$$\int_I u\varphi' dx = u\varphi|_I - \int_I u'\varphi dx$$

con u' la derivada usual de u. Ya que φ es de soporte compacto obtenemos que

$$\int_I u\varphi' dx = -\int_I u'\varphi dx$$

y como u' es continua por hipótesis tenemos que $u' \in L^p$ por ende $u \in W^{1,p}$ y su derivada débil es u', la derivada usual. □

Con este ejemplo mostramos que las funciones derivables, con la derivada usual, están contenidas en el espacio de Sobolev $W^{1,p}$. Veamos que esta contenencia es propia.

Ejemplo 10. Existe una función en $W^{1,p}$ pero ésta no es derivable en el sentido usual.

Demostración. Considere $I = (-1, 1)$. Veamos que la función $u(x) = |x|$ pertenece a $W^{1,p}(I)$, para cualquier $1 \leq p \leq \infty$. En efecto, Como $u(x) \in C(I)$ entonces está acotada, luego $u \in L^\infty(I) \subseteq L^p(I)$ pues al ser I acotado tiene medida finita. Veamos ahora que u tiene derivada débil.

Sea $\varphi \in C_c^1(I)$ entonces por integración por partes y usando que φ se anula en la frontera de I obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx &= \int_{-1}^{0} -x\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx \\ &= -\int_{-1}^{0} -\varphi(x)dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Por tanto, si definimos a

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in (-1, 0) \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1) \end{cases}$$

obtenemos que

$$\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx = -\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx,$$

de donde $u(x) = |x|$ pertenece a $W^{1,p}(I)$, pero esta función no es derivable en I. □

Ya tenemos que L^p es un espacios de Banach y, aunque no lo mencionamos, con el Teorema de Representación de Riez se puede demostrar que L^p con $1 < p < \infty$ es reflexivo. Por otro lado este espacio también es separable para $1 \leq p < \infty$ y la demostración de esto se puede ver en [Brezis, 2010]. Con el siguiente teorema se tiene que los espacios de Sobolev también tienen estas propiedades, el cual es tomado de [Brezis, 2010, pag. 203].

Teorema 1.10. *El espacio $W^{1,p}$ equipado con la siguiente norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, es reflexivo para $1 < p < \infty$, y separable para $1 \leq p < \infty$. Además el espacio H^1 equipado con el siguiente producto interno

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

es un espacio de Hilbert.

Ahora, la derivada débil conserva varias propiedades importantes de la derivada usual, como es de esperarse al ser una generalización de la derivada normal. No es difícil demostrar la linealidad de la derivada débil. Esto es, para todo $u, v \in W^{1,p}$ y cualquier real α, se tiene que

$$(u+v)' = u' + v' \text{ y } (\alpha u)' = \alpha u'.$$

las demás propiedades se encuentran demostradas en [Brezis, 2010, pag. 205,206,215 y 216] las cuales enunciaremos a continuación con el siguiente teorema.

Teorema 1.11 (Propiedades de la Derivada Débil)**.** *Sea $u, v \in W^{1,p}(I)$ para $1 \leq p \leq \infty$ y I acotado o no acotado entonces se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si $u' = 0$ entonces existe una constante C tal que $u = C$ c.t.p I.*

2. ***Primer Teorema Fundamental del Cálculo:** Dado $g \in L^p_{loc}(I)$ si se define para un y_0 fijo en I a*

$$w(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)dt, \; x \in I$$

entonces $w \in C(I)$ y

$$\int_I w\varphi' dt = -\int_I g\varphi dt, \; \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

esto es, si $g \in L^p(I)$ entonces w tiene derivada débil ($w \in W^{1,p}(I)$) y $w' = g$.

3. ***Segundo Teorema Fundamental del Cálculo:** Existe una única función $\overline{u} \in C(\overline{I})$ tal que*

$$u = \overline{u} \text{ c.t.p } I$$

y

$$\int_x^y u'(t)dt = \overline{u}(y) - \overline{u}(x)$$

para todo $x, y \in I$

4. ***Regla del producto:** $uv \in W^{1,p}$ y*

$$(uv)' = u'v + uv',$$

además se tiene la fórmula de integración por partes

$$\int_x^y u'v dt = uv|_x^y - \int_x^y uv' dt$$

para todo $x, y \in I$.

5. ***Regla de la cadena:*** *Sea* $G \in C^1(I)$ *tal que* $G(0) = 0$ *entonces* $G \circ u \in W^{1,p}$ *y*

$$(G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Como $W^{1,p}(I) \subseteq L^p(I)$ y $L^p(I)$ es un conjunto de clases de equivalencia donde $u = v$ en $L^p(I)$ si y solo si $u = v$ c.t.p I, entonces en el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo tendremos que $u = \overline{u}$ en $L^p(I)$. Es decir, son indistinguibles en este espacio. Por otro lado, por este teorema tenemos que $\overline{u}$ es continuo, entonces cada $u \in W^{1,p}$ tiene un representante continuo, el cual es indistinguible de u; y más aun si $u' \in C(I)$ entonces $\overline{u} \in C^1(I)$ y por tanto $u \in C^1(I)$, por ser indistinguibles.

Con todo lo mostrado anteriormente podemos decir que la derivada débil es, en efecto, una gerneralización de la derivada usual o fuerte. Sin embargo, no hemos hablado de qué propiedades tiene el espacio de Banach $W^{1,p}$. Para empezar demos el siguiente resultado, éste es un importante prototipo de la **desigualdad de Sobolev**. El cual es tomado de [Brezis, 2010, pag. 212].

Teorema 1.12. *Sea* I *un intervalo no necesariamente acotado entonces existe una constante* C *tal que para todo* $1 \leq p \leq \infty$ *y para todo* $u \in W^{1,p}(I)$ *se tiene que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

En otras palabras, la inclusión $i : W^{1,p}(I) \longrightarrow L^\infty(I)$ *es continua. Además, si* I *es acotado entonces las inclusiones*

$$i : W^{1,p}(I) \longrightarrow C(\overline{I}) \quad y \quad i : W^{1,1}(I) \longrightarrow L^q(I)$$

son compactas para todo $1 < p \leq \infty$ *y* $1 \leq q < \infty$*.*

Ahora daremos algunos ejemplos. Con el fin de presentrar una información extra de este importante teorema, además de algunas aplicaciones.

Por la desigualdad de Sobolev tenemos que $i : W^{1,p}(I) \longrightarrow C(\overline{I})$ es compacta para $1 < p \leq \infty$. Es natural preguntarnos si el teorema es cierto para el caso $p = 1$. La respuesta es no. Para mostrar esto, es decir, que $i : W^{1,1}(I) \longrightarrow C(\overline{I})$ no es compacta, se da el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11. Sea $I = [0, 1]$ entonces la sucesión

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ nx - \frac{n}{2} & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

es una sucesión acotada de $W^{1,1}(I)$ y no admite subsucesiones convergentes en $L^\infty(I)$.

Demostración. Veamos e primer lugar que $u_n \in W^{1,1}(I)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varphi \in C_c^1(I)$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_I u_n \varphi' &= \int_{1/2}^{1/2+1/n} n(x-1/2)\varphi'(x)dx + \int_{1/2+1/n}^{1} \varphi'(x)dx \\
&= n(x-1/2)\varphi(x)|_{1/2}^{1/2+1/n} - \int_{1/2}^{1/2+1/n} n\varphi(x)dx + \varphi(x)|_{1/2+1/n}^{1} \\
&= -\int_{1/2}^{1/2+1/n} n\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Por tanto si se define

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ n & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

queda que

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I g_n \varphi.$$

Por ende $u_n \in W^{1,1}(I)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $u_n' = g_n$. Ahora veamos que (u_n) es acotada en $W^{1,1}(I)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{W^{1,1}(I)} &= \|u_n\|_{L^1(I)} + \|u_n'\|_{L^1(I)} \\
&= \int_0^1 u_n(x)dx + \int_0^1 u_n'(x)dx \\
&= \int_{1/2}^{1/2+1/n} n(x-1/2)dx + \int_{1/2+1/n}^{1} 1dx + \int_{1/2}^{1/2+1/n} ndx \\
&= (1/2n) + (1-(1/2+1/n)) + n(1/n) \\
&= 1/2n + 1/2 - 1/n + 1 \\
&= 3/2 - 1/2n \\
&\leq 3/2.
\end{aligned}$$

Por último veamos que (u_n) no admite subsucesiones convergentes en $L^\infty(I)$. En efecto, sea $m > n$, entonces

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|_\infty &= \sup_{x\in(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{m})} \left(mx - \frac{m}{2} - nx + \frac{n}{2}\right) + \sup_{x\in[\frac{1}{2}+\frac{1}{m},\frac{1}{2}+\frac{1}{n})} \left(1 - nx + \frac{n}{2}\right) \\
&= \sup_{x\in(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{m})} \left((m-n)x - \frac{1}{2}(m-n)\right) + \sup_{x\in[\frac{1}{2}+\frac{1}{m},\frac{1}{2}+\frac{1}{n})} \left(1 - nx + \frac{n}{2}\right) \\
&= (m-n)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{2}(m-n) + 1 - n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) + \frac{n}{2} \\
&= (m-n)\frac{1}{m} + 1 - \frac{n}{2} - \frac{n}{m} + \frac{n}{2} = 2 - 2\frac{n}{m}.
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que existe una subsucesión (u_{n_k}) de (u_n) convergente en $L^\infty(I)$ y por tanto de Cauchy. Luego, existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k, l \geq K_0$ entonces

$$\|u_{n_k} - u_{n_l}\|_\infty < \frac{1}{2}.$$

Pero, si tomamos $k \geq K_0$ y $l \in \mathbb{N}$ tal que $n_l \geq 2n_k$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u_{n_k} - u_{n_l}\|_\infty &= 2 - 2\frac{n_k}{n_l} \\
&\geq 2 - \frac{2n_k}{2n_k} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por tanto se concluye que (u_n) no admite subsucesiones convergentes en $L^\infty(I)$, es decir, $i : W^{1,1}(I) \longrightarrow L^\infty(I)$ no es compacta. $\square$

Se tiene inmediatamente por el ejemplo anterior que $i : W^{1,1}(I) \longrightarrow C(\overline{I})$ no es compacta. Ahora, aunque ya mostramos que una sucesión (u_n) en $W^{1,1}(I)$ acotada no necesariamente tiene una subsucesión convergente en $L^\infty(I)$, que es equivalente a tener una subsucesión uniformemente convergente c.t.p I, pero se puede demostrar que (u_n) siempre tendrá una subsucesión (u_{n_k}) que converge puntualmente c.t.p I. Demostramos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12. Sea (u_n) en $W^{1,p}(I)$ con I acotado, si (u_n) es acotada entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) de (u_n) tal que converge puntualmente c.t.p I.

Demostración. Sea (u_n) en $W^{1,p}(I)$ acotada. Por la desigualdad de Sobolev tenemos que $i : W^{1,1}(I) \longrightarrow L^1(I)$ es compacta, por ende existe una subsucesión (u_{n_k}) de (u_n) tal que $u_{n_k} \to u$ en $L^1(I)$ para algún $u \in L^1(I)$. Ahora, no es dificíl demostrar que si una sucesión (f_n) en $L^p(X)$ converge a una función f en $L^p(X)$ entonces $f_n \to f$ en medida. Una demostración de esto se puede encontrar en [Bartle, 2014, pag. 69].

Por tanto $u_{n_k} \to u$ en medida y una de las propiedades de la convergencia en medida, tomada de [Bartle, 2014, pag. 69,70], nos dice que dada una sucesión (f_n) de un espacio de medida X y si $f_n \to f$ en medida entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tal que $f_{n_k} \to f$ puntualmente c.t.p X. En conclusión, existe una subsucesión $(u_{n_{k_l}})$ de (u_{n_k}) y por ende de (u_n), tal que $u_{n_{k_l}} \to u$ puntualmente c.t.p I. $\square$

Como dato curioso, para demostrar el teorema anterior pudimos tomar sin perdida de generalidad que u_n es monótona creciente, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13. Si asumimos la siguiente afirmación como verdadera

- Si (u_n) en $W^{1,p}(I)$ es acotada y u_n es monótonamente creciente para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) de (u_n) tal que $u_{n_k} \to u$ puntualmente c.t.p I, para alguna función u.

Entonces la afirmación es cierta para toda (u_n) en $W^{1,p}(I)$ acotada.

Demostración. Sea (u_n) en $W^{1,1}(I)$ acotada y definamos a $v_n(x) = \int_0^x |u_n'(t)|dt$. Como $|u_n'(t)| \geq 0$ entonces si $y \leq x$ implica que $\int_0^y |u_n'(t)|dt \leq \int_0^x |u_n'(t)|dt$ por tanto $v_n(x)$ es monótonamente creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definamos a $w_n(x) = v_n(x) - u_n(x)$ y ya que

$$u(x) - u(0) = \int_0^x u_n'(t)dt$$

entonces

$$w_n(x) = \int_0^x |u_n'(t)|dt - u(0) - \int_0^x u_n'(t)dt.$$

Es decir,

$$w_n(x) + u(0) = \int_0^x |u_n'(t)| - u_n'(t)dt.$$

Y como $f_n(t) = |u_n'(t)| - u_n'(t) \geq 0$ para todo $t \in I$, si $y \leq x$, entonces

$$\int_0^y f_n(t)dt \leq \int_0^x f_n(t)dt.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} w_n(y) + u(0) &= \int_0^y f_n(t)dt \\ &\leq \int_0^x f_n(t)dt \\ &= w_n(x) + u(0). \end{aligned}$$

Es decir, $w_n(y) \leq w_n(x)$ siempre que $y \leq x$, luego $w_n(x)$ es monótonamente creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, por hipótesis existe una subsucesión $(v_{(1,n)})$ de (v_n) convergente puntualmente en c.t.p I a una función v y como w_n es monótonamente creciente para todo n entonces $w_{(1,n)}$ es monótonamente creciente para todo $(1,n) \in \mathbb{N}$. Así, existe una subsucesión $(w_{(2,n)})$ de $(w_{(1,n)})$ convergente puntualmente c.t.p I a una función w. Como toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y converge al mismo límite, se obtiene que la subsucesión $(v_{(2,n)})$ de $(v_{(1,n)})$ converge puntualmente c.t.p I a v.

En resumen, tenemos que $v_{(2,n)}(x) \to v(x)$ y $w_{(2,n)}(x) \to w(x)$ para todo $x \in I - N$ con N un conjunto de medida 0, luego

$$u_{(2,n)}(x) = v_{(2,n)}(x) - w_{(2,n)}(x) \to v(x) - w(x).$$

Es decir (u_n) tiene una subsucesión convergente puntualmente en c.t.p I. $\square$

Se deja como ejercicio dar una demostración del teorema tomando, sin perdida de generalidad, que u_n es monótonamente creciente. Obteniendo así una demostración que no utilice tanta teoría de la medida, como la que se dio en el ejemplo 12.

Por la desigualdad de Sobolev tenemos que $i : W^{1,p}(I) \longrightarrow L^\infty(I)$ es continua, es natural preguntarnos ¿es compacta? La repuesta es no, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14. Sea una función $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, con $\varphi \neq 0$, y sea $u_n(x) = \varphi(x+n)$ entonces (u_n) es acotada en $W^{1,p}(\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq \infty$ y no admite subsucesiones convergentes en $L^q(\mathbb{R})$ con $1 \leq q \leq \infty$.

Demostración. Puesto que $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ implica que $\varphi \in L^q(\mathbb{R})$. Veamos que $\varphi' \in L^q(\mathbb{R})$. En efecto, como $\varphi = 0$ sobre K^c, con K un compacto, entonces $\varphi' = 0$ sobre K^c. Por tanto $\varphi' \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ así $\varphi' \in L^q(\mathbb{R})$. Por consiguiente $\varphi \in W^{1,q}(\mathbb{R})$ para todo $1 \leq q \leq \infty$. De donde $\|\varphi\|_{W^{1,q}} < \infty$.

Ahora $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq W^{1,q}(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues u_n es sólo una traslación de φ. Por otro lado

$$\begin{aligned}\|u_n\|_q &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+n)|^q dx\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(v)|^q dv\right)^{1/q} \\ &= \|\varphi\|_q.\end{aligned}$$

Como $u_n'(x) = \varphi'(x+n)$ obtenemos análogamente que $\|u_n'\|_q = \|\varphi'\|_q$. Así

$$\|u_n\|_{W^{1,q}} = \|\varphi\|_{W^{1,q}} < \infty,$$

por tanto (u_n) es una sucesión acotada en $W^{1,q}(\mathbb{R})$ para todo $1 \leq q \leq \infty$. Veamos ahora que (u_n) no admite subsucesiones convergentes en $L^q(\mathbb{R})$. En efecto,

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|_q^q &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+n) - \varphi(x+m)|^q dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x) - \varphi(x+(m-n))|^q dx \\ &= \int_{K \cup K_{m-n}} |\varphi(x) - \varphi(x+(m-n))|^q dx,\end{aligned}$$

con $K = \operatorname{supp}\varphi$ y $K_n = \operatorname{supp} u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Debemos tener que $K_n = K + \{-n\}$, como ilustra la Figura 1.5, pues u_n es sólo una trasalación de φ.

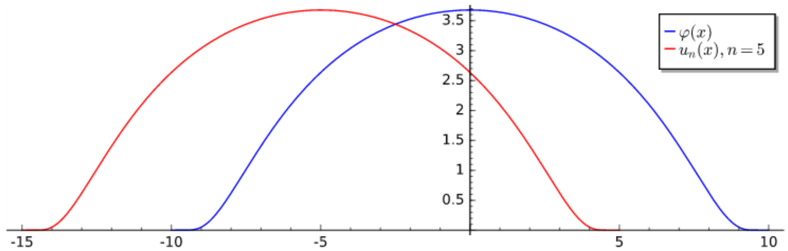

Figura 1.5: Comparación de $\varphi(x)$ con $u_n(x)$

Por otra parte mostremos que para n suficientemente grande $K_n \cap K = \emptyset$.Como K es un compacto, existe $I = [a, b]$ tal que $K \subseteq I$ y por propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$b - a < N.$$

Luego, si $x \in K$ y $x \in K_N$ entonces $x = y - N$ con $y \in K$, así $y - x = N$, pero como $x, y \in K \subseteq I$ entonces $N = y - x \leq b - a$, lo cual es una contradicción. Por tanto si tomamos n, m tal que $m - n \geq N$ tenemos que

$$K \cap K_{m-n} = \emptyset,$$

de esta manera

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_q^q &= \int_K |\varphi(x) - \varphi(x + (m-n))|^q dx + \int_{K_{m-n}} |\varphi(x) - \varphi(x + (m-n))|^q dx \\ &= \int_K |\varphi(x)|^q dx + \int_{K_{m-n}} |\varphi(x + (m-n))|^q dx \\ &= \|\varphi\|_q^q + \|u_{m-n}\|_q^q \\ &= 2\|\varphi\|_q^q. \end{aligned}$$

Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $m \in N$ tal que $m \geq N + n$ se tiene que

$$\|u_n - u_m\|_q = 2^{1/q}\|\varphi\|_q.$$

Por tanto (u_n) no admite subsucesiones convergentes en $L^q(\mathbb{R})$ con $1 \leq q < \infty$. Para el caso $q = \infty$ la demostración es análoga. $\square$

Dado un intervalo I por el Teorema 1.9, o Teorema de la Densidad, tenemos que $C_c^\infty(I)$ es denso en $L^p(I)$ con $1 \leq p < \infty$. Es natural preguntarnos si ocurre lo mismo en los espacios $W^{1,p}$, es decir, ¿La clausura de $C_c^\infty(I)$, con la topología inducida por la norma de $W^{1,p}$, es igual al espacio de Sobolev? La respuesta es no. Sin embargo existe un resultado más debíl en estos espacios, éste se muestra a continuación y es tomado de [Brezis, 2010, pag. 211].

Teorema 1.13 (Teorema de la Densidad para $W^{1,p}$)**.** *Sea $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n|I \to u$ en $W^{1,p}(I)$.*

Como ya mencionamos, en general no existe una sucesión (u_n) en C_c^∞ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(I)$, como si ocurre en $L^p(I)$. Más aun, el conjunto $C_c^k(I)$ tampoco es denso en $W^{1,p}(I)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En particular, $C_c^1(I)$ no es denso, pero su clausura sí es un espacio importante, por ello lo mencionamos a continuación.

Definición. Dado $1 \leq p < \infty$, se denota a $W_0^{1,p}(I)$ por la clausura de $C_c^1(I)$ en $W^{1,p}(I)$ y además se define

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

El espacio $W_0^{1,p}(I)$ es equipado con la norma de $W^{1,p}(I)$.

Ya que $C_c^1(I)$ es un subespacio vectorial de $W^{1,p}(I)$ obtenemos que $W_0^{1,p}(I)$ es un subespacio normado de $W^{1,p}(I)$ y como es cerrado, por definición, entonces $W_0^{1,p}(I)$ es completo. Por tanto $W_0^{1,p}(I)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

Ahora como todo subconjunto de un espacio separable es a su vez separable, queda que $W_0^{1,p}(I)$ es un espacio separable para $1 \leq p < \infty$ y de igual manera todo subespacio de un espacio reflexivo es reflexivo, implica que $W_0^{1,p}(I)$ es un espacio reflexivo para $1 < p < \infty$.

Existe una importante propiedad de este espacio que además de ser muy útil, con toda la teoría anteriormente expuesta, su demostración no resulta larga y por esto enunciaremos este resultado a continuación con su respectiva demostración.

Teorema 1.14 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea I un intervalo acotado. Entonces existe una constante C tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(I)$, con $1 \leq p \leq \infty$. En otras palabras, si sobre $W_0^{1,p}(I)$ se define la siguiente norma

$$\|u\| = \|u'\|_{L^p(I)},$$

ésta es equivalente a la norma de $W^{1,p}$.

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p}(I)$ con $I = (a, b)$ y sea (u_n) en $C_c^1(I)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(I)$. Por la desigualdad de Sobolev se tiene que $u_n \to u$ en $L^\infty(I)$, por consiguiente $u_n \to u$ uniformemente en I (al menos en casi toda parte).

Como $u_n \in C_c^1(I)$ implica que $u_n = 0$ sobre ∂I, entonces $u = 0$ sobre ∂I, por tanto $u(a) = 0$, de donde

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t)dt \right| \leq \|u'\|_{L^1(I)},$$

esto es,

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^1(I)}. \tag{1.2}$$

Como ya demostramos, cuando la medida del espacio es finita, la inclusión

$$i : L^{p_2}(X) \longrightarrow L^{p_1}(X)$$

es continua con $p_1 \leq p_2$. En particular

$$i : L^p(I) \longrightarrow L^1(I) \ \text{ y } \ i : L^\infty(I) \longrightarrow L^p(I)$$

son continuas para todo $1 \leq p \leq \infty$. Por tanto existen constantes C_1 y C_2 tal que

$$\|u'\|_{L^1(I)} \leq C_1 \|u'\|_{L^p(I)} \tag{1.3}$$

y

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C_2 \|u\|_{L^\infty(I)}. \tag{1.4}$$

De (1.2) y (1.3) se tiene que

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C_1 \|u'\|_{L^p(I)}$$

y junto con (1.4) se obtiene que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C_1 C_2 \|u'\|_{L^p(I)}.$$

De modo que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{1,p}(I)} &= \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} \\
&\leq C_1 C_2 \|u'\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} \\
&= C \|u'\|_{L^p(I)}.
\end{aligned}$$

Con $C = C_1 C_2 + 1$. $\square$

A partir de la anterior demostración obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.1 (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger)**.** *Sea I un intervalo acotado y sea $1 \leq p \leq \infty$, entonces existe una constante C tal que para todo $u \in W^{1,p}(I)$*

$$\|u - u_I\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}$$

con u_I una constante definida por

$$u_I = \frac{1}{\mu(I)} \int_I u(t)dt.$$

Demostración. Definamos a $I = (a, b)$ entonces

$$u_I = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)dt$$

y como $u \in W^{1,p}(I)$ entonces existe $\overline{u} \in C(\overline{I})$, tal que $u = \overline{u}$ c.t.p I. Por tanto, sin perdida de generalidad supongamos que $u = \overline{u}$, es decir $u \in C(\overline{I})$ y definamos

$$w(x) = \int_a^b u(t)dt.$$

Luego, por el Teorema Fundamental de Cálculo (clásico), w es diferenciable en el sentido usual en I y $w' = u$. Así por el teorema de valor medio, existe $c \in I$ tal que

$$\frac{w(b) - w(a)}{b-a} = w'(c).$$

Es decir,

$$u_I = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b u(t)dt \right) = u(c),$$

por tanto

$$|u(x) - u_I| = |u(x) - u(c)| = \left| \int_c^x u'(t)dt \right| \leq \|u'\|_{L^1(I)}$$

esto es,

$$\|u - u_I\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^1(I)}.$$

Y usando que la inclusión

$$i : L^{p_2}(X) \longrightarrow L^{p_1}(X)$$

es acotada con $p_1 \leq p_2$, como se uso en la demostración anterior, se obtiene que existe una constante C tal que

$$\|u - u_I\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}.$$

$\square$

Ahora note que para demostrar la desigualdad anterior sólo necesitamos el hecho de que $u_I = u(c)$ para algún $c \in I$. A partir de esto obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.2. *Sea I un intervalo acotado y sea $1 \leq p \leq \infty$, entonces existe una constante C tal que para todo $c \in I$ y para todo $u \in W^{1,p}(I)$*

$$\|u - u(c)\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}.$$

Ahora mostraremos los siguientes ejemplos, para ilustrar al lector de algunas propiedades más de estos espacios y familiarizarlo un poco más de cómo se trabaja en esta teoría.

Ejemplo 15 (Desigualdad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg para L^∞). Sean $I = (0,1)$, $1 \leq q < \infty$ y $1 < r \leq \infty$ entonces existe una constante $C = C(q,r)$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|^a_{W^{1,r}(I)}\|u\|^{1-a}_{L^q(I)}$$

para todo $u \in W^{1,r}(I)$, donde $0 < a < 1$ es definido por

$$a\left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{q}.$$

Demostración. Para empezar definamos de una forma más clara a a. Ya que $1 \leq q < \infty$ y $1 < r \leq \infty$ entonces $0 < \frac{1}{q} \leq 1$ y $0 \leq \frac{1}{r} < 1$ y por tanto $0 \leq \frac{1}{q} < \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}$, luego

$$1 < q\left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right).$$

Por consiguiente si definimos a $\alpha = q\left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right)$ tendremos que existe α^{-1} y $0 < \alpha^{-1} < 1$ y definimos $a := \alpha^{-1}$.

En primer lugar veamos que se cumple la desigualdad para el caso $u(0) = 0$. Definamos $G(t) = |t|^{\alpha-1}t$ entonces

$$G(u(x)) = |u(x)|^{\alpha-1}u(x).$$

No es dificíl demostrar que G es diferenciable y

$$G'(t) = \alpha|t|^{\alpha-1}.$$

Como $G(u(0)) = G(0) = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} G(u(x)) &= \int_0^x G'(u(t))u'(t)dt \\ &= \int_0^x \alpha|u(t)|^{\alpha-1}u'(t)dt. \end{aligned}$$

Por ende

$$\begin{aligned}|u(x)|^\alpha &= \left|\int_0^x \alpha|u(t)|^{\alpha-1}u'(t)dt\right| \\ &\leq \int_I \alpha|u(t)|^{\alpha-1}|u'(t)|dt.\end{aligned}$$

Entonces por la desigualdad de Hölder aplicado a r queda que

$$|u(x)|^\alpha \leq \alpha\left(\int_I |u|^{(\alpha-1)r'}\right)^{1/r'}\left(\int_I |u'|^r\right)^{1/r} \tag{1.5}$$

con r' el conjugado de r. Por otro lado

$$\begin{aligned}(\alpha-1)r' &= (\alpha-1)\left(1-\frac{1}{r}\right) \\ &= \left(\left(1+q-\frac{q}{r}\right)-1\right)\left(1-\frac{1}{r}\right) \\ &= q\left(1-\frac{1}{r}\right)^2 \\ &< q.\end{aligned}$$

Luego, por el ejemplo 7, tenemos que

$$\|u\|_{(\alpha-1)r'} \leq \mu(I)^{\frac{1}{(\alpha-1)r'}-\frac{1}{q}}\|u\|_q = \|u\|_q.$$

Esto es,

$$\left(\int_I |u|^{(\alpha-1)r'}\right)^{1/r'} \leq \|u\|_q^{\alpha-1}. \tag{1.6}$$

De (1.5) y (1.6) se obtiene que

$$\begin{aligned}|u(x)|^\alpha &\leq \alpha\|u\|_q^{\alpha-1}\|u'\|_r \\ &\leq \alpha\|u\|_q^{\alpha-1}\|u\|_{W^{1,r}}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty &\leq (\alpha)^{1/\alpha}\|u\|_q^{(\alpha-1)/(\alpha)}\|u\|_{W^{1,r}}^{1/\alpha} \\ &= (1/a)^a\|u\|_q^{1-a}\|u\|_{W^{1,r}}^a.\end{aligned}$$

Ahora veamos que la desigualdad se cumple en el caso general. Sea $u \in W^{1,r}(I)$ y sea $\varphi \in C^1(\overline{I})$ con $\varphi(0) = 0$. Entonces para $v = u\varphi$, tenemos que $v \in W^{1,r}(I)$ y $v(0) = 0$, luego por el caso anterior

$$\|v\|_\infty \leq C\|v\|_q^{1-a}\|v\|_r^a \tag{1.7}$$

con $C = (1/a)^a$. Por otra parte, para $g \in L^p(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in C(\overline{I})$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int |f|^p |g|^p &\leq \|g^p\|_1 \|f^p\|_\infty \\ &= \|g\|_p^p \|f^p\|_\infty\end{aligned}$$

y por tanto

$$\|fg\|_p \leq \|g\|_p \|f^p\|_\infty^{1/p}.$$

Como f es continua en $\overline{I}$ implica que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

y por propiedades del sup tenemos que

$$\|f^p\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|^p = \left(\sup_{x \in I} |f(x)| \right)^p = \|f\|_\infty^p.$$

Se concluye que para todo $f \in C(\overline{I})$ y para todo $g \in L^p(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$ se cumple que

$$\|fg\|_p \leq \|g\|_p \|f\|_\infty.$$

Luego obtenemos que

$$\|v\|_q^{1-a} = \|\varphi u\|_q^{1-a} \leq \|\varphi\|_\infty^{1-a} \|u\|_q^{1-a}$$

y

$$\begin{aligned}\|v\|_{w^{1,r}}^a &= \|\varphi u\|_{w^{1,r}}^a \\ &= (\|\varphi u\|_r + \|\varphi' u + \varphi u'\|_r)^a \\ &\leq (\|\varphi\|_\infty \|u\|_r + \|\varphi'\|_\infty \|u\|_r + \|\varphi\|_\infty \|u'\|_r)^a \\ &= ([\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty] \|u\|_r + \|\varphi\|_\infty \|u'\|_r)^a \\ &\leq (\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty)^a (\|u\|_r + \|u'\|_r)^a \\ &= \|\varphi\|_{W^{1,\infty}}^a \|u\|_{W^{1,r}}^a.\end{aligned}$$

Es decir, para todo $\varphi \in C^1(\overline{I})$ con $\varphi(0) = 0$ tenemos

$$C \|v\|_{w^{1,r}}^a \|v\|_q^{1-a} \leq \left[C \|\varphi\|_{W^{1,\infty}}^a \|\varphi\|_\infty^{1-a} \right] \|u\|_{W^{1,r}}^a \|u\|_q^{1-a}. \tag{1.8}$$

Supongamos ahora que para todo $\varphi \in C^1(\overline{I})$ con $\varphi(0) = 0$ y para todo $b > 0$ existe un $u_0 \in W^{1,r}(I)$ tal que

$$\|u_0\|_\infty > b \|\varphi u_0\|_\infty,$$

pero esto ocurre sólo si $\|\varphi u_0\|_\infty = 0$ para todo $\varphi \in C^1(\overline{I})$ con $\varphi(0) = 0$, luego $\varphi u_0 = 0$ c.t.p I. Pero $u_0(x) \neq 0$ c.t.p I, pues si suponemos lo contrario entonces

$$0 = \|u_0\|_\infty > b\|\varphi u_0\|_\infty \geq 0$$

y esto es una contradicción, por ende $\varphi = 0$ c.t.p I. Además como $\varphi \in C^1(\overline{I})$ implica que $\varphi = 0$, lo cual es una contradicción ya que φ era arbitrario. Por tanto existe almenos un $\varphi_0 \neq 0 \in C^1(\overline{I})$ con $\varphi_0(0) = 0$ y existe un $b_0 > 0$ tal que para todo $u \in W^{1,r}(I)$ tenemos que

$$\|u\|_\infty \leq b_0\|\varphi_0 u\|_\infty. \tag{1.9}$$

De (1.7), (1.8) y (1.9) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_\infty &\leq b_0\|\varphi_0 u\|_\infty \\
&\leq b_0 C\|\varphi_0 u\|^a_{w^{1,r}}\|\varphi_0 u\|_q^{1-a} \\
&\leq [b_0 C\|\varphi_0\|^a_{W^{1,\infty}}\|\varphi_0\|_\infty^{1-a}]\|u\|^a_{W^{1,r}}\|u\|_q^{1-a},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\|u\|_\infty \leq C_0\|u\|^a_{W^{1,r}}\|u\|_q^{1-a}$$

con $C_0 = b_0 C\|\varphi_0\|^a_{W^{1,\infty}}\|\varphi_0\|_\infty^{1-a}$. □

Ejemplo 16 (Desigualdad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg para L^p). Sean $I = (0,1)$, $1 \leq q < p < \infty$ y $1 \leq r \leq \infty$ entonces existe una constante $C = C(p,q,r)$ tal que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C\|u\|^b_{W^{1,r}(I)}\|u\|^{1-b}_{L^q(I)}$$

para todo $u \in W^{1,r}(I)$, donde $0 < b < 1$ es definido por

$$b\left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

Demostración. Al igual que en la demostración anterior, definamos de una forma más clara a b. Tenemos por el ejemplo anterior que

$$1 < q\left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right)$$

y como $q < p$ entonces $0 < p - q < p$ y así

$$1 < \frac{p}{p-q},$$

luego

$$1 < \frac{pq}{p-q}\left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right).$$

Por consiguiente si definimos a $\beta = \frac{pq}{p-q}\left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right)$ tendremos que existe β^{-1} con $0 < \beta^{-1} < 1$, por lo que definimos a $b := \beta^{-1}$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\|u\|_p^p &= \int_I |u|^q |u|^{p-q} dt \\
&\leq \|u^q\|_1 \|u^{p-q}\|_\infty \\
&= \|u\|_q^q \|u\|_\infty^{p-q}
\end{aligned}$$

por otro lado, por el ejemplo anterior tenemos que existe una constante C tal que

$$\|u\|_\infty^{p-q} \leq C^{p-q} \|u\|_{W^{1,r}}^{a(p-q)} \|u\|_q^{(1-a)(p-q)}$$

con $a = 1/\alpha$ y $\alpha = q\left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right)$. Luego

$$\|u\|_p^p \leq C^{p-q} \|u\|_{W^{1,r}}^{a(p-q)} \|u\|_q^{(1-a)(p-q)+q}. \tag{1.10}$$

Ahora note que $\beta = \frac{p}{p-q}\alpha$, es decir, $a = \frac{p}{p-q}b$, por tanto

$$a(p-q) = pb \tag{1.11}$$

y

$$\begin{aligned}
(1-a)(p-q) + q &= (p - q - (p-q)a) + a \\
&= (p - q - pb) + q \\
&= p - pb.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$(1-a)(p-q) + q = p(1-b). \tag{1.12}$$

De (1.10), (1.11) y (1.12) obtenemos que

$$\|u\|_p^p \leq C^{p-q} \|u\|_{W^{1,r}}^{pb} \|u\|_q^{p(1-b)},$$

esto es,

$$\|u\|_p \leq C^{\frac{p-q}{p}} \|u\|_{W^{1,r}}^{b-} \|u\|_q^{(1-b)}.$$

$\square$

Ejemplo 17. (Desigualdad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg caso especial) Sean $I = (0,1)$, $1 \leq q < p \leq \infty$ y $1 \leq r \leq \infty$ entonces existe una constante $C = C(p,q,r)$ tal que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C \|u'\|_{L^r(I)}^b \|u\|_{L^q(I)}^{1-b}$$

para todo $u \in W^{1,r}(I)$ con $\int_I u = 0$, donde $b = 1/\beta$ y

$$\beta = \frac{pq}{p-q}\left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right)$$

Demostración. Por la desigualdad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg tenemos que existe una constante C_1 tal que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,r}(I)}^b \|u\|_{L^q(I)}^{1-b} \tag{1.13}$$

y por la desigualdad de Poincaré-Wirtinger, existe una constante C_2 tal que

$$\|u - u_I\|_{W^{1,r}(I)} \leq C_2 \|u'\|_{L^r(I)}$$

con $u_I = \frac{1}{\mu(I)} \int_I u(t)dt$. Por hipótesis obtenemos que $u_I = 0$ y por ende

$$\|u\|_{W^{1,r}(I)} \leq C_2 \|u'\|_{L^r(I)}.$$

Reemplazando en (1.13) queda que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C_1 C_2 \|u'\|_{L^r(I)}^b \|u\|_{L^q(I)}^{1-b}.$$

□

Necesitaremos algunas propiedades del dual de $W^{1,p}$, pero antes de poder enunciar algunas propiedades de este espacio tenemos que trabajar el dual de un espacio de Hilbert. Para empezar necesitaremos del siguiente teorema tomado de [Brezis, 2010, pag. 135].

Teorema 1.15 (Teorema de Representación de Riesz-Fréchet)**.** *Sea $(H, (,))$ un espacio de Hilbert y sea $\|\cdot\|$ su correspondiente norma asociada a su producto interno. Dado $\varphi \in H^*$ existe un único $v \in H$ tal que*

$$\varphi(u) = (v, u)$$

para todo $u \in H y$ además

$$\|v\| = \|\varphi\|_{H^*}.$$

De este teorema se desprenden dos resultados. Por un lado, todo funcional lineal continuo de φ de H se comporta como un producto interno pues si identificamos a φ con v obtenemos, con un abuso de la notación,

$$\varphi(u) = (\varphi, u).$$

Esto inspira a la notación de que todo funcional lineal φ evaluado en u, se escribe

$$\langle \varphi, u \rangle.$$

Haciendo la alusión de que evaluar un elemento en el funcional es prácticamente el producto interno de dos elementos de H, podemos reescribir el teorema de la siguiente manera:

- Sea $(H, (,))$ un espacio de Hilbert y sea $\|\cdot\|$ su correspondiente norma asociada a su producto interno. Dado $\varphi \in H^*$ existe un único $v \in H$ tal que

$$\langle \varphi, u \rangle = (v, u)$$

para todo $u \in H$ y además

$$\|v\| = \|\varphi\|_{H^*}.$$

Así es como muchas veces se encuentra en la literatura.

Por otro lado, a partir de este teorema se puede probar fácilmente que H es isométrico H^*, donde diremos que dos espacios normados son isométricos o isomorfos si existe una aplicación lineal biyectiva isométrica entre ellos, la cual en este caso será

$$\begin{array}{rccc} I_H : & H & \longrightarrow & H^* \\ & v & \mapsto & \varphi, \end{array}$$

con $\varphi(u) = (u, v)$ para todo $u \in H$. A esta aplicación lineal biyectiva isométrica la llamamos la isométria canónica de H en H^*. Por lo tanto es legítimo identificar a H con H^*, es decir

$$H \simeq H^*.$$

Usualmente se hace esto, pero no siempre. Ahora una situación típica que manejaremos adelante, donde tenemos que tener cuidado con esta identificación, es la siguiente:

Sea $H = (H, (,))$ un espacio de Hilbert y sea $\|\cdot\|_1$ su correspondiente norma asociada a su producto interno. Asumamos que $V \subset H$ es un subespacio vectorial denso en H. Supongamo además que V tiene su propia norma $\|\cdot\|_2$, con la cual V es un espacio de Banach. Por último supongamos que la inclusión $i : (V, \|\cdot\|_2) \to (H, \|\cdot\|_1)$ es continua. Con la teoría que llevamos hasta aquí tenemos varios ejemplos de esta situación. Por ejemplo.

- $H = L^2(X)$ y $V = L^p(X)$ con $p > 2$ y X un espacio de medida con medida finita.
- $H = L^2(\Omega)$ y $V = C(\Omega)$ con la $\|\cdot\|_\infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y acotado.
- $H = L^2(I)$ y $V = W^{1,2}(I)$, con I un intervalo.

No es dificíl demostrar que estos ejemplos cumplen todas las hipótesis anteriormente dichas.

Ahora definimos la siguiente función

$$\begin{array}{rccc} T : & H^* & \longrightarrow & V^* \\ & \varphi & \mapsto & \varphi|_V, \end{array}$$

con V^* el dual de V asociado a la norma $\|\cdot\|_2$ y $\varphi|_V$ la restricción de φ sobre V. Es decir, para todo $v \in V$

$$T(\varphi)[v] = \varphi(v),$$

o con la notación anteriormente mencionada

$$\langle T(\varphi), v\rangle = \langle \varphi, v\rangle.$$

A T se le llama el mapeo canónico de H^* en V^* y tiene las siguientes propiedades.

Proposición 1.3. *Sean H y V como se definieron anteriormente y T el mapeo canónico de H^* en V^* entonces*

1. *T es una aplicación lineal continua y más aun para toda constante C tal que $\|v\|_1 \leq C\|v\|_2$ para todo $v \in V$, se cumple que*

$$\|T\varphi\|_{V^*} \leq C\|\varphi\|_{H^*}$$

para todo $\varphi \in H^*$.

2. *T es inyectiva.*

3. *$R(T)$ es denso en V^* si V es reflexivo.*

Demostración. En primer lugar veamos que T esta bien definida, para esto basta ver que $T\varphi = \varphi|_V \in V^*$ para todo $\varphi \in H^*$. En efecto, sea $v \in V$ y $\varphi \in H^*$, como $i : (V, \|\cdot\|_2) \to (H, \|\cdot\|_1)$ es continua existe $C > 0$ tal que

$$\|v\|_1 \leq C\|v\|_2$$

para todo $v \in V$, entonces

$$|(T\varphi)[v]| = |\varphi(v)| \leq \|\varphi\|_{H^*}\|v\|_1 \leq C\|\varphi\|_{H^*}\|v\|_2. \tag{1.14}$$

Así $T\varphi$ es acotada en $(V, \|\cdot\|_2)$ y como es lineal, puesto que es la restricción de una transformación lineal, queda que $T\varphi \in V^*$. Veamos que T es una aplicación lineal continua. Es lineal pues para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in H^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha\varphi_1 + \varphi_2) = (\alpha\varphi_1 + \varphi_2)|_V = \alpha\varphi_1|_V + \varphi_2|_V = \alpha T(\varphi_1) + T(\varphi_1),$$

y de (1.14) tenemos que

$$\frac{|(T\varphi)[v]|}{\|v\|_2} \leq C\|\varphi\|_{H^*}$$

para todo $v \in V - \{0\}$. Luego

$$\|T\varphi\|_{V^*} = \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{|(T\varphi)[v]|}{\|v\|_2} \leq C\|\varphi\|_{H^*}.$$

Por tanto T es una aplicación lineal continua. Veamos que es inyectiva. Para esto recordemos que $(V, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach con su respectivo espacio dual V^* asociado a la $\|\cdot\|_2$. Pero a su vez $(V, \|\cdot\|_1)$ es un subespacio normado denso en $(H, \|\cdot\|_1)$ y por tanto podemos hablar de su espacio dual asociado a la norma $\|\cdot\|_1$ que notaremos por V'. Este es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{V'}$. Ahora, sean $\varphi_1, \varphi_2 \in H^*$ tal que $T(\varphi_1) = T(\varphi_2) = \Phi$, esto es,

$$\varphi_1|_V = \varphi_2|_V = \Phi.$$

Tenemos que $\Phi \in V'$ y por lo anterior $\varphi_1 : H \to \mathbb{R}$ y $\varphi_2 : H \to \mathbb{R}$ son dos extensiones de Φ con φ_1, φ_2 operadores lineales acotados, pero por la Proposición 1.1 Φ tiene una única extención $\overline{\Phi} : \overline{V} = H \to \mathbb{R}$, con $\overline{\Phi}$ un operador lineal acotado. Por tanto

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \overline{\Phi}.$$

Es decir, T es inyectiva. Por último veamos que es densa. Para ver que $R(T)$ es densa en V^* basta ver que para todo funcional lineal continuo sobre V^* que se anula en $R(T)$, tiene que anularse en todo V^* [Brezis, 2010, pag. 8].

Sea $g_0 \in V^{**}$ tal que $g_0(\Phi) = 0$ para todo $\Phi \in R(T)$, como V^* es reflexivo entonces la inmersion canonica de V en V^{**}

$$\begin{array}{rccc} C: & V & \longrightarrow & V^{**} \\ & x & \mapsto & g_x \end{array}$$

con $g_x(\Phi) = \Phi(x)$ para todo $\Phi \in V^*$, es una isometría lineal biyectiva. Luego existe $x_0 \in V$ tal que $g_0(\Phi) = \Phi(x_0)$ para todo $\Phi \in V^*$. Ahora por hipótesis tenemos que

$$\Phi(x_0) = 0$$

para todo $\Phi \in R(T)$. Esto implica que para todo $\varphi \in H^*$, $\varphi(x_0) = T(\varphi)[x_0] = 0$. Luego por el Teorema de Representación de Riesz-Fréchet, para todo $x \in H$

$$(x, x_0) = 0.$$

En particular para x_0 se tiene que $(x_0, x_0) = 0$ luego $x_0 = 0$ y por consiguiente para todo $\Phi \in V^*$, $g_0(\Phi) = \Phi(x_0) = \Phi(0) = 0$. Por tanto $R(T)$ es denso en V^*. $\square$

De la proposición anterior, se escribe usualmente que

$$H^* \subset V^*.$$

Hay que recordar que no son subconjuntos sino que existe entre ellos una inmersión canónica acotada y densa en caso de V ser reflexivo, adicionalmemte si identificamos a H con su espacio dual se escribe normalmente

$$V \subset H \simeq H^* \subset V^*,$$

donde las inmersiones son continuas y densas (en caso de V ser reflexivo). Sin embargo siempre se debe recordar que lo que ocurre es el siguiente diagrama

$$(V, \|\cdot\|_2) \xrightarrow{i} (H, \|\cdot\|_1) \xrightarrow{I_H} (H^*, \|\cdot\|_{H^*}) \xrightarrow{T} (V^*, \|\cdot\|_{V^*}).$$

Ahora, si V es un espacio de Hilbert y si identificamos a V con V^*, llegaríamos a que

$$V \subset V,$$

esto no es una contradicción, esta diciendo que existe una inmersión acotada densa de V en V no sobreyectiva

$$h : (V, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (V, \|\cdot\|_2)$$

con $h = I_V \circ T \circ I_H \circ i$. Por tanto para no escribir cosas confusas y aparentemente contradictoras como éstas, sólo se identifica a uno de los dos espacios de Hilbert.

Finalmente con toda esta teoría expuesta podemos trabajar sobre el espacio dual de $W_0^{1,p}(I)$ con $1 \leq p < \infty$ el cual denotamos por $W^{-1,p'}(I)$ y al espacio dual de $H_0^1(I)$ lo denotamos por $H^{-1}(I)$. Para empezar veamos que $H = L^2(I)$ y $V = H_0^1(I)$, con I un intervalo cualquiera, cumplen todas las hipótesis de lo anteriormente expuesto.

Ya tenemos que $H_0^1(I)$ es un subespacio vectorial de $L^2(I)$, y como $C_c^1(I) \subseteq H_0^1(I)$ entonces H_0^1 contiene un espacio denso de $L^2(I)$ y por tanto él es denso en $L^2(I)$. También tenemos que es un espacio de Banach con su propia norma y ya que la inclusión $i : W^{1,p}(I) \to L^p(I)$ es acotada para todo $1 \leq p \leq \infty$, tenemos que la inclusión de H_0^1 es acotada. Por tanto identificando a $L^2(I)$ con su dual, pero no identificando a $H_0^1(I)$ con su dual, obtenemos que para todo intervalo I

$$H_0^1(I) \subset L^2(I) \subset H^{-1}(I),$$

donde la inclusiones representan inmersiones continuas y densas.

También veamos que para $H = L^2(I)$ y $V = W_0^{1,p}(I)$, con I un intervalo acotado y $1 \leq p \leq \infty$, se cumplen las hipótesis.

Por un lado tenemos que

$$W_0^{1,p}(I) \subset C(\bar{I}) \subset L^\infty(I) \subset L^2(I),$$

si I es acotado, y como $C_c^1(I) \subseteq W_0^{1,p}(I)$ y $C_c^1(I)$ es denso en $L^2(I)$ entonces $W_0^{1,p}(I)$ es denso en $L^2(I)$. Esto es, $W_0^{1,p}(I)$ es un subespacio vectorial denso de $L^2(I)$, el cual ya sabemos que con su propia norma es un espacio de Banach.

Por otro lado como la inclusión $i_1 : W^{1,p}(I) \to L^\infty(I)$ es continua por la desigualdad de Sobolev y la inclusión $i_2 : L^\infty(I) \to L^2(I)$ es continua por el Ejemplo 7 entonces la inclusión $i : W_0^{1,p}(I) \to L^2(I)$ es continua.

Por tanto, si I es un intervalo acotado y $1 \leq p \leq \infty$ obtenemos que

$$W_0^{1,p}(I) \subset L^2(I) \subset W^{-1,p'}(I),$$

donde las inmersiones son continuas (y densas para $1 < p < \infty$). Ahora análogamente si I no es acotado y $1 \leq p \leq 2$ obtenemos que

$$W_0^{1,p}(I) \subset L^2(I) \subset W^{-1,p'}(I),$$

donde las inmersiones son continuas (y densas para $1 < p \leq 2$). Por último, al igual que hay un Teorema de la Densidad para los espacios de Sobolev, existe un Teorema de Representación de Riesz para estos espacios tomado de [Brezis, 2010, pag. 219], el cual no resulta difícil demostrar y por tanto lo presenta mos con su demostración.

Teorema 1.16 (Teorema de Representación para $W^{1,p}$). *Sea $F \in W^{-1,p'}(I)$ entonces existen dos funciones $f_1, f_2 \in L^{p'}(I)$, con p' el conjugado de p, tal que*

$$\langle F, u \rangle = \int_I f_1 u + \int f_2 u'$$

para todo $u \in W_0^{1,p}$ y

$$\|F\|_{W^{-1,p'}} = \text{máx}\{\|f_1\|_{p'}, \|f_2\|_{p'}\}.$$

Demostración. Sea $E = L^p(I) \times L^p(I)$ equipado con la norma

$$\|h\| = \|h_0\|_p + \|h_1\|_p,$$

donde $h = (h_0, h_1)$. El mapeo $T : W_0^{1,p} \to E$ definido por $T(u) = (u, u')$ es una isométria lineal. Por tanto $G = T(W_0^{1,p})$ es un subespacio normado de E, equipado con la norma de E. Sea $S = T^{-1} : G \to W_0^{1,p}$ y Definamos

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & \langle F, Sh \rangle. \end{array}$$

Definido Φ de esa manera es un funcional lineal acotado y así, por el Teorema de Hahn-Banach, existe $\overline{\Phi} : E \to \mathbb{R}$ una extensión lineal acotada de Φ y además

$$\|\overline{\Phi}\|_{E^*} = \|\Phi\|_{G^*}.$$

Ya que

$$\begin{aligned}
\|F\|_{W^{-1,p'}} &= \sup_{u \in W_0^{1,p} - \{0\}} \frac{|\langle F, u \rangle|}{\|u\|_{W_0^{1,p}}} \\
&= \sup_{Tu \in T(W_0^{1,p} - \{0\})} \frac{|\langle F, S(T(u)) \rangle|}{\|Tu\|_{W_0^{1,p}}} \\
&= \sup_{h \in G - \{0\}} \frac{|\langle F, Sh \rangle|}{\|h\|_E} \\
&= \sup_{h \in G - \{0\}} \frac{\Phi(h)}{\|h\|_E} \\
&= \|\Phi\|_{G^*},
\end{aligned}$$

entonces

$$\|\overline{\Phi}\|_{E^*} = \|F\|_{W^{-1,p'}}. \tag{1.15}$$

Ahora note que los funcionales $\overline{\Phi}_1 : L^p(I) \to \mathbb{R}$ y $\overline{\Phi}_2 : L^p(I) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$\overline{\Phi}_1(h_1) = \overline{\Phi}(h_1, 0) \text{ y } \overline{\Phi}_2(h_2) = \overline{\Phi}(0, h_2)$$

son funcionales lineales acotados de $L^p(I)$ y se cumple que

$$\overline{\Phi}(h) = \overline{\Phi}_1(h_1) + \overline{\Phi}_2(h_2)$$

para todo $h = (h_1, h_2) \in E$. Por el Teorema de Representación de Riesz existen $f_1, f_2 \in L^{p'}(I)$ tal que

$$\overline{\Phi}_1(h_1) = \int_I f_1 h_1 \text{ y } \overline{\Phi}_2(h_2) = \int_I f_2 h_2$$

y por ende

$$\overline{\Phi}(h) = \int_I f_1 h_1 + \int_I f_2 h_2. \tag{1.16}$$

Veamos que $\|\overline{\Phi}\|_{E^*} = \text{máx}\{\|f_0\|_{p'}, \|f_1\|_{p'}\}$. En efecto, nuevamente por el Teorema de Representación de Riesz tenemos

$$\|\overline{\Phi}_1\|_{(L^p)^*} = \sup_{h_1 \in L^p(I) - \{0\}} \frac{|\overline{\Phi}(h_1, 0)|}{\|h_1\|_p} = \|f_1\|_{p'}$$

y

$$\|\overline{\Phi}_2\|_{(L^p)^*} = \sup_{h_2 \in L^p(I)-\{0\}} \frac{|\overline{\Phi}(0,h_2)|}{\|h_2\|_p} = \|f_2\|_{p'},$$

luego

$$\begin{aligned}
\|\overline{\Phi}\|_{E^*} &= \sup_{(h_1,h_2)\in E-\{(0,0)\}} \frac{|\overline{\Phi}(h_1,h_2)|}{\|h_1\|_p + \|h_2\|_p} \\
&\geq \sup_{(h_1,h_2)\in E-\{(0,0)\}} \frac{|\overline{\Phi}(h_1,h_2)|}{\|h_1\|_p} \\
&\geq \sup_{h_1 \in L^p(I)-\{0\}} \frac{|\overline{\Phi}(h_1,0)|}{\|h_1\|_p} \\
&\geq \|f_1\|_{p'}.
\end{aligned}$$

Análogamente se obtiene que

$$\|\overline{\Phi}\|_{E^*} \geq \|f_2\|_{p'}.$$

Por tanto

$$\|\overline{\Phi}\|_{E^*} \geq \max\{\|f_1\|_{p'}, \|f_2\|_{p'}\}.$$

Por otro lado, para $h \in E$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|\overline{\Phi}(h)| &= \left| \int_I f_1 h_1 + \int_I f_2 h_2 \right| \\
&\leq \left| \int_I f_1 h_1 \right| + \left| \int_I f_2 h_2 \right| \\
&\leq \int_I |f_1||h_1| + \int_I |f_2||h_2| \\
&\leq \|f_1\|_{p'}\|h_1\|_p + \|f_2\|_{p'}\|h_2\|_p \\
&\leq \max\{\|f_1\|_{p'}, \|f_2\|_{p'}\}(\|h_1\|_p + \|h_2\|_p).
\end{aligned}$$

Así

$$\|\overline{\Phi}\|_{E^*} \leq \max\{\|f_1\|_{p'}, \|f_2\|_{p'}\}.$$

Se concluye que

$$\|\overline{\Phi}\|_{E^*} = \max\{\|f_1\|_{p'}, \|f_2\|_{p'}\}. \tag{1.17}$$

Por ultimo para $u \in W_0^{1,p}$, por (1.16), tenemos que

$$\begin{aligned}\langle F, u\rangle &= \langle F, S(Tu)\rangle \\ &= \Phi(T(u)) \\ &= \overline{\Phi}(T(u)) \\ &= \overline{\Phi}(u, u') \\ &= \int_I f_1 u + \int_I f_2 u'\end{aligned}$$

y de (1.15) y (1.17) obtenemos que

$$\|F\|_{W^{-1,p'}} = \|\overline{\Phi}\|_{E^*} = \max\{\|f_1\|_{p'}, \|f_2\|_{p'}\}.$$

Esto concluye la demostración del teorema. □

Para terminar nuestros preliminares de este trabajo introduciremos un teorema más, que es de suma importancial, conocido como El Teorema Espectral.

1.4. Teorema Espectral

Para nuestro trabajo será de suma importancia calcular el espectro de un operador que se define de la siguiente manera.

Definición. Sea $T : E \to E$ un operador lineal acotado con E un espacio normado. Esto es, $T \in L(E, E)$. El conjunto resolvente de T, denotado por $\rho(T)$, se define como

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (T - \lambda I) \text{ es biyectiva}\}.$$

Donde I es el operador identidad de E en E. El espectro de T, denotado por $\sigma(T)$, es el complemento de el resolvente, es decir, $\sigma(T) = (\rho(T))^c = \mathbb{R} - \rho(T)$. Un número real λ se dice un valor propio de T si

$$N(T - \lambda I) \neq \{0\}.$$

Donde $N(T)$ denota el núcleo o kernel de un operador. El conjunto de valores propios es denotado por $EV(T)$.

Note que $\lambda \in EV(T)$ si y solo si existe un vector $v \neq 0 \in E$ tal que

$$T(v) = \lambda v,$$

el vector v es llamado un vector propio asociado al valor propio λ. Ahora es claro que $\lambda \in EV(T)$ si y solo si $(T - \lambda I)$ no es inyectiva y por ende $EV(T) \subseteq \sigma(T)$, sin embargo esta contenencia es muchas veces estricta, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 18. Sea $T : l^2 \to l^2$ definido por $T(u) = (0, u_1, u_2, u_3, \ldots)$ con $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots) \in l^2$, mostrar que $EV(T) \neq \sigma(T)$.

Demostración. Es claro que $T = T - 0I$ no es sobreyectiva puesto que no existe pre-imagen para $u = (1, 0, 0, \ldots)$ luego $0 \in \sigma(T)$, pero $T = T - 0I$ es inyectiva puesto que si $T(u) = T(v)$ con $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$ y $v = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$ entonces

$$(0, u_1, u_2, u_3, \ldots) = (0, v_1, v_2, v_3, \ldots).$$

Luego $u_k = v_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ por ende $u = v$, por tanto $0 \notin EV(T)$. □

Ahora los casos en que esta contenencia es estricta sólo ocurren en la dimensión infinita, pues en dimensión finita se puede probar que efectivamente $EV(T) = \sigma(T)$ para todo operador lineal T.

Se enuncian a continuación algunas propiedades básicas del espectro de un operador, tomadas [Brezis, 2010, pag.163,164]

Teorema 1.17 (Propiedades del Espectro)**.** *Sea E un espacio normado y $T : E \to E$.*

1. *Si T es un operador lineal acotado entonces su espectro $\sigma(T)$ es un conjunto compacto y además*
$$\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|].$$

2. *Si T es compacto y $\dim E = \infty$ entonces*

   a) $0 \in \sigma(T)$.

   b) $\sigma(T) - \{0\} = EV(T) - \{0\}$.

   c) *Se cumple alguno de los siguientes casos:*

      - $\sigma(T) = \{0\}$.
      - $\sigma(T)$ *es un conjunto finito.*
      - $\sigma(T)$ *es una sucesión convergente al 0.*

En dimensión finita todo operador es compacto y aunque no necesariamente el 0 es un valor propio, la parte b) y c) si se cumplen. La parte b) se cumple por lo que $EV(T) = \sigma(T)$ y la parte c) se cumple pues es bien conocido por el álgebra lineal que los valores propios de un operador lineal son siempre finitos y son menores o iguales a la dimensón del espacio.

Ahora, para poder enunciar el teorema espectral debemos recordar algunas definiciones que se manejan en análisis funcional. Estas son operador auto-adjunto y base de Hilbert.

Definición. Sea H un espacio de Hilbert entonces.

- Un operador $T \in L(H, H)$ se dice auto-adjunto si

$$(Tu, v) = (u, Tv)$$

para todo $u, v \in H$.

- Una sucesión (e_n) en H se dice una base de Hilbert si es un conjunto ortonormal total, donde a un conjunto M se le dice total si el subespacio vectorial generado por M es denso en H, el cual se denota por $\langle M \rangle$.

A una base de Hilbert se le llama base, puesto que un conjunto ortonomal (e_k) en un espacio de Hilbert es total si y solo si para todo $x \in H$

$$x = \sum_k (x, e_k) e_k.$$

Una demostración de esto se puede encontrar en [Kreyszig, 1989, Pag.170]. Ahora sí podemos enunciar el último teorema de nuestros preliminares, este es tomado de [Brezis, 2010, Pag.167].

Teorema 1.18 (Teorema Espectral)**.** *Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $T : H \to H$ un operador compacto auto-adjunto, entonces existe una base de Hilbert compuesta de vectores propios.*

Para familiarizar al lector con este teorema veamos un ejemplo, en la dimensión finita.

Ejemplo 19. Sea $T : \mathbb{R}^3 :\to \mathbb{R}^3$ definido por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

muestre que T cumple las hipótesis del teorema espectral y verifique que existe una base de Hilbert compuesta de vectores propios.

Demostración. No es difícil demostrar que un operador en la dimención finita es auto-adjunto si y solo si su matriz asociada es simétrica. Es decir, es igual a su transpuesta.

Por ende T es auto-adjunta y como mencionamos anteriormente todo operador lineal en la dimención finita es compacto, luego T cumple las hipótesis del teorema espectral. Calculemos explícitamente la base de Hilbert compuesta de vectores propios.

Primero calculemos los valores propios, entonces λ es un valor propio si y solo si

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Esto es,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 14\lambda + 8 = 0.$$

Luego los valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{41}}{2} + \frac{5}{2} \quad \lambda_3 = -2.$$

Ahora encontremos un valor propio asociado a cada uno de los valores propios. Para $\lambda_1 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}$, $v_1 = (x, y, z)$ es un vector propio si y solo si

$$Av_1 = \lambda_1 v_1,$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2} & 2 & 3 \\ 2 & 1 - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2} & 2 \\ 3 & 2 & 1 - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego

$$x(\frac{\sqrt{41}}{2} - \frac{3}{2}) + 2y + 3z = 0$$

$$2x + y(\frac{\sqrt{41}}{2} - \frac{3}{2}) + 2z = 0$$

$$3x + 2y + z(\frac{\sqrt{41}}{2} - \frac{3}{2}) = 0.$$

Esto es,

$$x - z = 0$$

$$4y + z(\sqrt{41} - 3).$$

Tomando $x = 1$ obtenemos

$$y = -\frac{\sqrt{41}}{4} - \frac{3}{4} \text{ y } z = 1.$$

Por tanto un vector propio asociado a λ_1 es

$$v_1 = \left(1, -\frac{\sqrt{41}}{4} - \frac{3}{4}, 1\right).$$

Analogamente obtenemos que

$$v_2 = \left(1, \frac{\sqrt{41}}{4} - \frac{3}{4}, 1\right)$$

es un vector asociado a λ_2 y

$$v_3 = (1, 0, -1)$$

es un vector propio asociado a λ_3. Se puede observar que v_1, v_2 y v_3 son ortogonales y ya que todo vector linealmente dependiente de un vector propio es un vector propio entonces

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|},$$
$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} \text{ y}$$
$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$$

son vectores propios asociados a λ_1, λ_2 y λ_3 respectivamente y como v_1, v_2 y v_3 son ortogonales implica que e_1, e_2 y e_3 son ortonormales. Además como todo conjunto de elementos ortogonales es linealmente independiente, se obtiene que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y por tanto una base de Hilbert. □

Gracias al ejemplo anterior el Teorema Espectral, en la dimención finita desde un punto de vista matricial, nos dice simplemente que escogiendo un vector propio de cada uno de los valores propios de una matriz simétrica formamos una base ortogonal, y normalizándolos formamos una base ortonormal. Es decir, que con cada matriz simétrica podemos formar una base ortonormal de vectores propios.

Finalmente tenemos toda la teoría necesaria para poder dar una aplicación del Teorema del Paso de Montaña. Antes de esto procederemos a enunciar y demostrar dicho teorema.

CAPÍTULO 2

TEOREMA DEL PASO DE MONTAÑA

2.1. Condiciones Palais-Smale

Para poder entender y demostrar el Teorema del Paso de Montaña primero debemos estudiar unas condiciones de compactificación sobre funcionales, conocidas como condiciones de Palais -Smale. Para esto veremos algunas propiedades y ejemplos de estas condiciones y así familiarizar un al lector. Para empezar recordemos qué es un funcional diferenciable (en el sentido de Fréchet) y de clase C^1 sobre un espacio de Banach.

Definición. Sean E y F espacios de Banach con norma notada en ambos por $\|\cdot\|$, $A \subseteq E$ abierto, $\Phi : A \to F$ y $a \in A$. Se dice que Φ es diferenciable en a si existe una aplicación lineal continua

$$\begin{array}{rccc} \Phi'(a): & E & \longrightarrow & F \\ & h & \mapsto & \Phi'(a)[h], \end{array}$$

esto es $\Phi'(a) \in L(E, F)$, y existe una aplicación $o(a,h) = o(h)$ tales que

$$\Phi(a+h) = \Phi(a) + \Phi'(a)[h] + o(h) \quad \text{donde} \quad \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0.$$

A la función $o(a,h) = o(h)$ se le denomina el resto de la diferencial. La aplicación lineal continua $\Phi'(a) : E \to F$ es llamada la derivada de Fréchet de Φ en a.

Como es de esperarse, un funcional Φ se dice diferenciable en un abierto A si es diferenciable en todo punto $a \in A$ y la función

$$\begin{array}{rccc} \Phi' : & A & \longrightarrow & L(E,F) \\ & a & \mapsto & \Phi'(a) \end{array}$$

es llamada la derivada de Fréchet de Φ. Dicho esto, podemos dar la siguiente definición.

Definición. Sean E y F espacios de Banach, $A \subseteq E$ abierto y $\Phi : A \to F$ diferenciable en A. Se dice que Φ es un funcional de clase C^1 sobre A o simplemente un funcional C^1, si Φ' es continua en A.

Para familiarizarse un poco más con esta derivada y sus propiedades se puede revisar a [Caicedo, 2005, pag. 63-66, 75-78].

Otra derivada que manejaremos que sera de suma importancia para poder calcular la derivada de Fréchet es la derivada de Gâteux que se define de la siguiente manera.

Definición. Sean E, F espacios normados, $A \subseteq E$ abierto, $a \in A$, $\Phi : A \to F$ y $v \in E$.

- Si existe el límite
$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(a+tv) - \Phi(a)}{t},$$
diremos que que Φ posee derivada direccional o derivada de Gâteux en el punto a en la dirección v.
- La aplicación Φ se dice Gâteux diferenciable en $a \in A$, si para todo $v \in E$ existe el límite
$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(a+tv) - \Phi(a)}{t},$$
el cual denotamos por $\partial\Phi(a, v)$.

La relación de la derivada de Fréchet y la derivada de Gâteux viene dada por el siguiente teorema tomado de [Caicedo, 2005, pag. 66].

Teorema 2.19. *Sean E, F espacios normados, $A \subseteq E$ abierto, $a \in A$ y $\Phi : A \to F$ diferenciable en a. Entonces para todo $v \in E$*

$$\Phi'(a)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(a+tv) - \Phi(a)}{t}.$$

Esto quiere decir que si Φ es diferenciable en a en el sentido de Fréchet entonces es diferenciable en el sentido de Gâteux. Es decir, tiene todas sus derivadas direccionales.

Ahora el recíproco de este teorema no es cierto, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 20. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

entonces Φ es Gâteux diferenciable en $(0,0)$ pero no es Fréchet diferenciable en $(0,0)$.

Demostración. Sea $v = (v_1, v_2)$ entonces

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(0+hv) - \Phi(0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{h|h||v_1|v_2|}{h^2(v_1^2+v_2^2)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \frac{v_1|v_2|}{(v_1^2+v_2^2)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

luego el límite existe y por consiguiente Φ tiene todas sus derivadas direccionales en $(0,0)$. Veamos que no es Fréchet diferenciable. Supongamos que es Fréchet diferenciable, así

$$\Phi'(0)(v) = \partial(\Phi, v) = 0$$

y

$$\lim_{v \to 0} \frac{|\Phi(0+v) - \Phi(0) - \Phi'(0)(v)|}{\|v\|} = 0,$$

pero

$$\begin{aligned} \lim_{v \to 0} \frac{|\Phi(0+v) - \Phi(0) - \Phi'(0)(v)|}{\|v\|} &= \lim_{v \to 0} \frac{1}{\sqrt{(v_1^2+v_2^2)}} \frac{v_1|v_2|}{(v_1^2+v_2^2)} \\ &= \lim_{v \to 0} \frac{v_1|v_2|}{(v_1^2+v_2^2)^{3/2}} \\ &= \lim_{v \to 0} \frac{v_1|v_2|}{\|v\|^3}. \end{aligned}$$

Este limite no existe, puesto que si existiera el límite restringido sobre cualquier recta debe existir, sin embargo si nos acercamos por la recta $v_2 = v_1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{v \to 0} \frac{v_1|v_2|}{(v_1^2+v_2^2)^{3/2}} &= \lim_{v_1 \to 0} \frac{v_1|v_1|}{(2v_1^2)^{3/2}} \\ &= \lim_{v_1 \to 0} \frac{v_1|v_1|}{2^{3/2}|v_1|^3} \\ &= \lim_{v_1 \to 0} \frac{v_1}{2^{3/2}|v_1|^2} \\ &= \lim_{v_1 \to 0} \frac{1}{2^{3/2}v_1} \\ &= \pm\infty, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por tanto Φ no es Fréchet diferenciable. $\square$

Ahora introducimos las condiciones de Palais-Smale. La condición original que aparece en los trabajos de Palais y Smale, que por razones históricas se conoce como la condición (C), es la siguiente. Esta es tomada de [Jabri, 2003, pag. 15].

Definición. Sea X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1. Entonces se dice que Φ cumple la condición (C) si para cualquier subconjunto $S \subseteq X$ tal que la restricción $\Phi|_S$ de Φ sobre S es acotada y el 0 no se encuentra lejos de $\|\Phi'\|(S)$, es decir el 0 es un punto de acumulación de $\|\Phi'\|(S)$, Φ admite un punto crítico en la clausura de S.

Ahora la que actualmente se conoce como condición de Palais- Smale y es denotada por (PS), tomada de [Jabri, 2003, pag. 16], es la siguiente condición.

Definición. Sean X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1. Entonces se dice que Φ cumple la condición de Palais-Smale, denotada por (PS), si para cualquier sucesión (u_n) en X, tal que

$$(\Phi(u_n)) \text{ es acotada y } \quad \Phi'(u_n) \to 0, \tag{2.1}$$

ésta admite una subsucesión convergente.

Cualquier sucesión que satisfaga (2.1) es llamada una sucesión de Palais-Smale. Por ultimo, necesitamos introducir una última condición de compacidad, que fue introducida por Brezis, Coron y Nirenberg y es tomada de [Jabri, 2003, pag. 16].

Definición. Sean X un espacio de Banach, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 y $c \in \mathbb{R}$. Entonces se dice que Φ cumple la condición de Palais-Smale (local) en el nivel c, denotada por $(PS)_c$, si para cualquier sucesión (u_n) en X, tal que

$$\Phi(u_n) \to c \quad \text{y} \quad \Phi'(u_n) \to 0, \tag{2.2}$$

ésta admite una subsucesión convergente.

A continuación mostraremos algunas propiedades y ejemplos de estas condiciones.

Proposición 2.4. *Sean X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1. Si Φ cumple (PS) entonces Φ cumple (C).*

Demostración. Sea $S \subseteq X$ tal que la restricción $\Phi|_S$ de Φ sobre S es acotada y 0 es un punto de acumulación de $\|\Phi'\|(S)$. Entonces existe $v_n = \|\Phi'(u_n)\|$ con $u_n \in S$ para cada $n \in N$, tal que

$$v_n \to 0,$$

luego

$$\Phi'(u_n) \to 0. \tag{2.3}$$

Por otro lado, como $\Phi|_S$ es acotada implica que $(\Phi(u_n))$ es acotada, por ende existe (u_{n_k}) una subsucesión de (u_n) tal que

$$u_{n_k} \to u,$$

con $u \in \overline{S}$. Como $\Phi \in C^1(X)$ entonces Φ' es continua, luego $\Phi'(u_{n_k}) \to \Phi'(u)$ y de (2.3) se obtiene que

$$\Phi'(u) = 0.$$

Esto es, Φ admite un punto critico en la clausura de S. $\square$

La proposición anterior muestra que la condición (PS) implica la condición (C), pero el reciproco no es cierto, como muestra el siguiente ejemplo. Mostrando así que la condicón (PS) es más fuerte que la condición (C).

Ejemplo 21. Sea X un espacio de Banach entonces $\Phi = 0$ cumple (C) pero no cumple (PS).

Demostración. Veamos que $\Phi = 0$ cumple (C). En efecto, sea $x \in X$, se tiene que $\Phi'(x) = 0$ pues si definimos a

$$o(h) = \Phi(a + h) - \Phi(a) - \Phi'(a)[h] = 0 - 0 - 0 = 0,$$

obtenemos que $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0$ y $\Phi' = 0$. Por tanto todo elemento de X es un punto crítico de Φ. Así, para todo $S \subseteq X$ que cumple las hipótesis de (C) éste admite un punto crítico en la clausura de S, puesto que todo punto es un punto crítico.

Veamos ahora que Φ no cumple (PS). Para esto supongamos lo contrario. Sea (u_n) una sucesión en X, luego $\Phi(u_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $(\Phi(u_n))$ es acotada. Por otro lado $\Phi'(u_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por consiguiente $\Phi'(u_n) \to 0$, por tanto (u_n) admite una subsucesión convergente y ya que (u_n) era arbitraria implica que X es compacto, lo cual es una contradicción. $\square$

Por tanto de este ejemplo y la Proposición 2.4 queda que la condición (PS) es más fuerte que (C) y aunque ésta no es equivalente a (PS) basta con darle una condición extra para que sean equivalentes, esto se ilustra en la siguiente proposición.

Proposición 2.5. *Sean X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 y defínase a K como el conjunto de puntos críticos de Φ en X. Entonces Φ cumple (PS) si y solo si Φ cumple (C) y para cualquier conjunto de puntos críticos $B \subseteq K$, tal que $\Phi|_B$ es acotada, cumple que es relativamente compacto.*

Demostración. Si Φ cumple (PS) entonces por proposición 2.4 cumple (C). Ahora veamos que se cumple la segunda condición. En efecto, sea (u_n) en B. Como $\Phi|_B$ es acotada entonces $(\Phi(u_n))$ es acotada y además $\Phi'(u_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\Phi'(u_n) \to 0$ por consiguiente (u_n) admite una subsucesión convergente. Esto implica que B es relativamente compacto.

Veamos ahora que se cumple el recíproco. Sea (u_n) una sucesión de Palais-Smale. Sin perdida de generalidad supongamos que tiene rango infinito. Defínase

$$S_1 = \{u_n : n \in \mathbb{N}\},$$

luego $\Phi|_{S_1}$ es acotado y como $\Phi'(u_n) \to 0$ entonces $0 \in \overline{\|\Phi'\|(S_1)}$, por ende existe $v_1 \in \overline{S_1}$ un punto critico de Φ. Ahora supongamos que u_n no admite subsucesiones convergentes. Es decir, no tiene límites subsecuenciales y por tanto

$$\overline{S_1} = S_1,$$

luego $v_1 \in S_1$ y por tanto $v_1 = u_{n_1}$ para algún $n_1 \in \mathbb{N}$. Defínase ahora

$$S_2 = S_1 - \{u_n : n \leq n_1\},$$

el cual es distinto de vacío por ser S_1 infinito y análogamente obtenemos que $\Phi|_{S_2}$ es acotado y $0 \in \overline{\|\Phi'\|(S_2)}$. Luego existe $v_2 \in \overline{S_2}$ tal que $\Phi'(v_2) = 0$. Pero nuevamente $\overline{S_2} = S_2$, ya que de lo contrario (u_n) tendría un límite subsecuencial. Por tanto $v_2 = u_{n_2}$ para algún $n_2 \in \mathbb{N}$. Así, sucesivamente construimos una subsucesión (u_{n_k}) de (u_n) tal que

$$\Phi'(u_{n_k}) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$u_{n_k} \neq u_{n_l}$$

con $k \neq l$. Ahora defínase $B = \{u_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ y como $(\Phi(u_n))$ es acotada entonces $\Phi|_B$ es acotada, por tanto B es relativamente compacto, luego existe $(u_{n_{k_l}})$ una subsucesión de (u_{n_k}) y por ende una subsucesión de (u_n) tal que

$$u_{n_{k_l}} \to u$$

con $u \in \overline{B}$, lo cual es una contradicción. □

Ya hemos visto algunos ejemplos y propiedades de las condiciones (PS) y (C). Veamos ahora un ejemplo de un funcional que cumple $(PS)_c$ para algún $c \in \mathbb{R}$, pero no para todo $c \in \mathbb{R}$, con el fin de familiarizarnos con esta última condición de Palais-Smale.

Ejemplo 22. El funcional $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $\Phi(u) = \sin(u)$ satisface $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$, pero no cumple $(PS)_c$ para $c = 1, -1$, y por ende no cumple (PS).

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$ y sea (u_n) en $\mathbb{R}$ tal que

$$\Phi(u_n) \to c \quad \text{y} \quad \Phi'(u_n) \to 0,$$

esto es, $\sin(u_n) \to c$ y $\cos(u_n) \to 0$, luego

$$\sin^2(u_n) + \cos^2(u_n) \to c^2.$$

y ya que $\sin^2(u_n) + \cos^2(u_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, implica que $c^2 = 1$, es decir $c = \pm 1$, lo cual es una cotradicción. Por tanto no existe ninguna sucesión (u_n) que cumpla (2.2) para $\Phi(u) = \sin(u)$, y por tanto Φ cumple $(PS)_c$ por vacuidad.

Ahora si $c = 1$, entonces tómese $u_n = \pi/2 + 2n\pi$ por tanto $\sin(u_n) = 1$ y $\cos(u_n) = 0$. Como se puede ver en la siguiente gráfica.

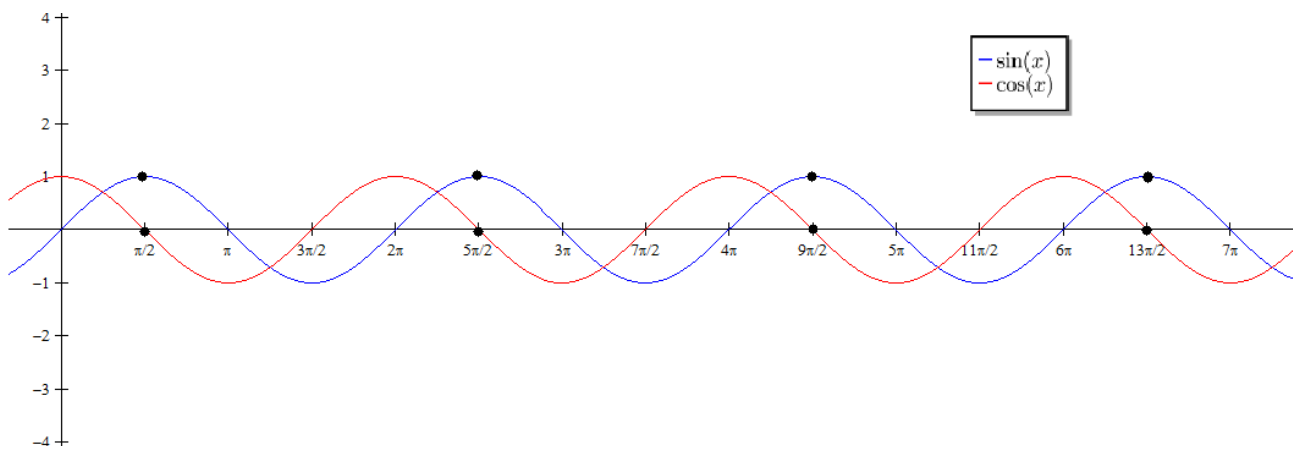

Figura 2.1: la sucesión (u_n)

Luego

$$\Phi(u_n) \to 1 \quad \text{y} \quad \Phi'(u_n) \to 0,$$

pero (u_n) no tiene subsucesiones convergentes. Por tanto Φ no cumple $(PS)_1$. Análogamente se demuestra que Φ no cumple $(PS)_{-1}$, tomando $u_n = -\pi/2 + 2n\pi$. $\square$

Es claro que si Φ cumple (PS) entonces cumple $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Es natural preguntarnos si el recíproco es cierto. La respuesta es afirmativa como muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *Sean X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 entonces Φ cumple (PS) si y solo si Φ cumple $(PC)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que Φ que cumple (PS) y sea (u_n) en X tal que

$$\Phi(u_n) \to c \quad \text{y} \quad \Phi'(u_n) \to 0,$$

para algún $c \in \mathbb{R}$, luego $(\Phi(u_n))$ es acotada y por ende (u_n) admite una subsucesión convergente.

Ahora supongamos que Φ cumple $(PC)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ y sea (u_n) una sucesión de Palais-Smale. Es decir,

$$(\Phi(u_n)) \text{ es acotada y } \quad \Phi'(u_n) \to 0,$$

pero $(\Phi(u_n))$ es una sucesión de números reales, luego por el Teorema de Heine-Borel $A = \{\Phi(u_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto. Es decir, toda sucesión de A tiene una subsucesión convergente, luego existe una subsucesión $(\Phi(u_{n_k}))$ de $(\Phi(u_n))$ convergente a algún número real c y como toda subsucesión de una sucesión convergente, converge y converge al mismo límite, entonces $\Phi'(u_{n_k}) \to 0$ y por ende (u_{n_k}) admite una subsucesión convergente. Es decir, (u_n) admite una subsucesión convergente. □

Veamos ahora una propiedad de la condición $(PS)_c$.

Proposición 2.7. *Sean X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 que cumple $(PS)_c$ para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto*

$$K_c = \{u \in X : \Phi(u) = c \text{ y } \Phi'(u) = 0\}$$

es compacto. Es decir, la condición $(PS)_c$ es una condición de compactificación en el funcional Φ en el sentido que el conjunto de puntos críticos K_c de Φ en el nivel c es compacto.

Demostración. Sea (u_n) una sucesión en K_c entonces se cumple que

$$\Phi(u_n) \to c \quad \text{y} \quad \Phi'(u_n) \to 0,$$

luego existe una subsucesión (u_{n_k}) de (u_n) tal que $u_{n_k} \to u$ con $u \in \overline{K_c}$. Por otro lado

$$K_c = \Phi^{-1}(\{c\}) \cap (\Phi')^{-1}(\{0\})$$

y como $\{c\}$ y $\{0\}$ son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$ y $L(X, \mathbb{R})$ entonces $\Phi^{-1}(\{c\})$ y $(\Phi')^{-1}(\{0\})$ son conjuntos cerrados en X, pues Φ y Φ' son funciones continuas. Luego K_c es cerrado y por ende $u \in K_c$. Es decir, toda sucesión de K_c tiene una subsucesión convergente en él. Por tanto es compacto. □

Note que la proposición anterior no garantiza que si Φ cumple $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ entonces el conjunto de puntos críticos de Φ,

$$K = \bigcup_{c \in X} K_c,$$

sea compacto. En general esto no es cierto, pero para poder dar un ejemplo de un funcional Φ que cumple (PS) y su conjunto de puntos críticos K no es compacto, veamos primero algunas propiedades para garantizar dicha condición.

Proposición 2.8. *Sea $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, si la función*

$$|\Phi| + \|\Phi'\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

es coerciva, es decir la función tiende a ∞ cuando $\|x\|$ tiende a ∞, entonces Φ cumple (PS).

Demostración. Sea (u_n) una sucesión de Palais-Smale, luego existen M_1 y M_2 reales positivos tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|\Phi(u_n)| < M_1 \quad \text{y} \quad \|\Phi'(u_n)\| < M_2.$$

Por tanto

$$(|\Phi| + \|\Phi'\|)(u_n) < M_1 + M_2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego si suponemos que (u_n) no es acotada entonces existe (u_{n_k}) una subsucesión de (u_n) tal que

$$\|u_{n_k}\| \to \infty$$

y por ende

$$(|\Phi| + \|\Phi'\|)(u_n) \to \infty,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto (u_n) es acotada y por teorema de Heine-Borel, $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto. Es decir, toda sucesión de A tiene una subsucesión convergente, en particular (u_n). $\square$

Cuando X es un espacio de Banach de dimensión infinita el criterio anterior no aplica. Sin embargo, podemos dar el siguiente resultado más general.

Proposición 2.9. *Sea $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ con X un espacio de Banach. Suponga que*

$$\Phi'(u) = L(u) + K(u),$$

donde L es un operador lineal invertible continuo con inversa continua y K es compacto y suponga que cualquier sucesión de Palais-Smale de Φ en X es acotada. Entonces Φ cumple (PS).

Demostración. Sea (u_n) una sucesión de Palais-Smale, es decir $(\Phi(u_n))$ es acotada y

$$\Phi'(u_n) = L(u_n) + K(u_n) \to 0.$$

Por ende

$$u_n + L^{-1}(K(u_n)) \to 0.$$

Por otro lado, como K es compacto entonces $A = \{K(u_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto. Veamos que $B = L^{-1}(A) = \{L^{-1}(K(u_n)) : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto. En efecto, como L^{-1} es continuo y con inversa continua tenemos que

$$L^{-1}(\overline{A}) = \overline{L^{-1}(A)} = \overline{B},$$

y puesto que $\overline{A}$ es compacto entonces $L^{-1}(\overline{A}) = \overline{B}$ es compacto. Es decir, B es relativamente compacto.

Por tanto $(L^{-1}(K(u_n)))$ admite una subsucesión convergente; es decir, existe $(L^{-1}(K(u_{n_k})))$ una subsucesión de $(L^{-1}(K(u_n)))$ tal que

$$L^{-1}(K(u_{n_k})) \to w$$

con $w \in X$ y como toda subsucesión de una sucesión convergente converge y converge al mismo límite, entonces

$$u_{n_k} + L^{-1}(K(u_{n_k})) \to 0.$$

Luego

$$u_{n_k} \to -w.$$

Por tanto (u_n) admite una subsucesión convergente. □

Ahora sí, veamos un ejemplo de un funcional Φ que cumpla (PS) y que su conjunto de puntos críticos K no sea compacto.

Ejemplo 23. El funcional

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & u + \sin(u) \end{array}$$

satisface la condición (PS) y su conjunto de puntos críticos no es acotado y por ende no es compacto.

Demostración. Como

$$\begin{aligned} (|\Phi| + |\Phi'|)(u) &= |u + \sin(u)| + |1 + \cos(u)| \\ &\geq |u + \sin(u)| \\ &\geq |u| - 1 \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{u \to \infty} (|\Phi| + |\Phi'|)(u) = \infty.$$

Es decir, Φ es coerciva y por proposición 2.8 cumple la condición de (PS). Por otro lado $\Phi'(u) = 1 + \cos(u) = 0$ si y solo si $u = (2k-1)\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, por tanto el conjunto de puntos críticos de Φ es

$$K = \{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

como ilustra la Figura 2.2 .

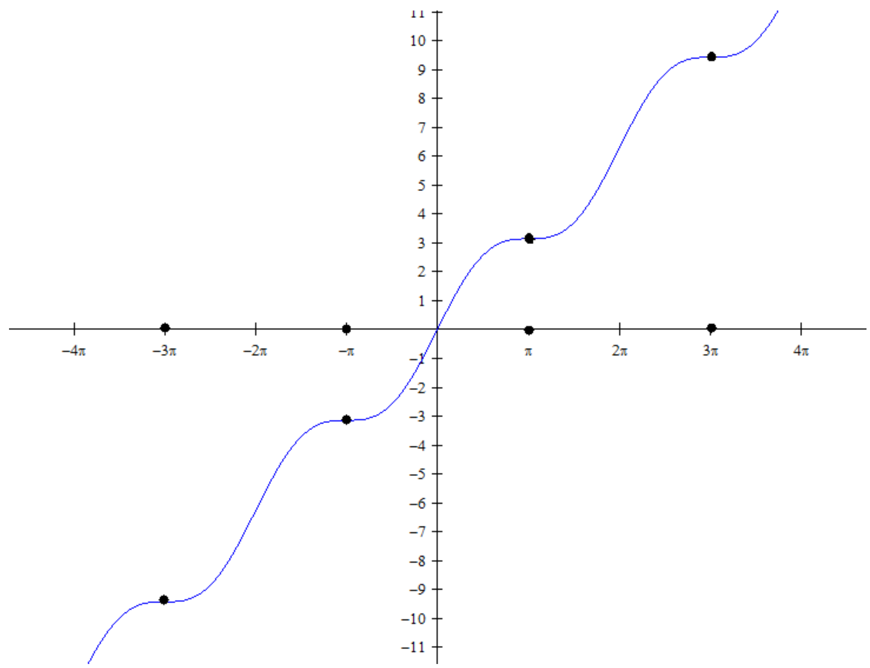

Figura 2.2: puntos críticos

Es claro que el conjunto de puntos críticos K de Φ no es compacto. $\square$

Por último, ya que los ejemplo de funcionales que se han mostrado, que cumplen alguna de estas condiciones de Palais-Smale, han solo sido en $\mathbb{R}^n$. Veamos un par de ejemplos de funcionales en dimensión infinita que cumple la condición (PS). El primero será uno muy sencillo y el segundo necesitara más maquinaria para poder demostrar dicha condición.

Antes de enunciar el primer ejemplo consideremos el espacio de medida $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$, con $P(\mathbb{N})$ las partes de los naturales y μ la medida de conteo. Es decir, para $A \subseteq \mathbb{N}$, $\mu(A) = |A|$ (su cardinal) si A es finito y ∞ en otro caso. Veamos que $l^p = L^p(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$. En efecto, no es difícil demostrar, usando el Teorema de la Convergencia Monótona, que para

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & a_n \end{array}$$

se tiene que

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

y por tanto $f = (a_n) \in L^p(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$ si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$ y tiene $\|a_n\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{1/p}$. Obteniendo así la igualdad deseada.

Hicimos el análisis anterior para mostrar que efectivamente $L^p(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$ es l^p, de esta manera todo l^p se puede ver como un L^p y por tanto toda la teoría que se ha expuesto de los espacios L^p se cumple en los l^p, en particular el Teorema de Representación de Riesz. Procedamos ahora a dar nuestro primer ejemplo en dimensión infinita.

Ejemplo 24. Sea

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & l^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_n) & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \end{array}$$

entonces Φ cumple la condición de (PS).

Demostración. Para empezar, procederemos a encontrar la derivada de Fréchet de Φ, para esto supongamos por un momento que Φ es diferenciable en $\mathbf{x} = (x_n) \in l^p$ entonces por Teorema 2.14 debemos tener que para todo $\mathbf{v} = (v_n) \in l^2$

$$\begin{aligned} \Phi'(\mathbf{x})(\mathbf{v}) &= \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{x})}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + tv_n)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + 2tx_n v_n + t^2 v_n^2 - x_n^2}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n + t \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n \\ &= 2(\mathbf{x}, \mathbf{v})_2. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Representación de Riez tenemos que para todo $\mathbf{x} \in l^2$ el funcional definido como

$$\begin{array}{rccc} f_{\mathbf{x}}: & l^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{v} & \mapsto & (\mathbf{x}, \mathbf{v})_2 \end{array}$$

es un funcional lineal acotado con $\|f_{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{x}\|_2$, obtenemos que

$$\Phi'(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = 2f_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}).$$

Por ende, este es nuestro candidato a ser la derivada de Fréchet. Hasta aquí no hemos demostrado nada. Veamos que $2f_{\mathbf{x}}$ es en efecto la derivada de Fréchet de Φ.

Sea $\mathbf{x} \in l^2$ y $\mathbf{v} \in l^2$ y defínase

$$\begin{aligned} o(\mathbf{v}) &= \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{x}) - 2f_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n \\ &= \|\mathbf{v}\|_2^2, \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{\mathbf{v}\to 0} \frac{o(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_2} = \lim_{\mathbf{v}\to 0} \|\mathbf{v}\|_2 = 0.$$

Por tanto Φ es diferenciable en $\mathbf{x}$ y como este era arbitrario, queda que Φ es diferenciable en l^2 y

$$\Phi'(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = 2f_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}).$$

Esto es,

$$\Phi'(\mathbf{x}) = 2f_{\mathbf{x}}.$$

Veamos que Φ' es continua. En efecto, sea $\epsilon > 0$ y tomese $\delta = \epsilon/2$, si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in l^2$ tal que $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2 < \delta$ entonces

$$\|\Phi'(\mathbf{x}_1) - \Phi'(\mathbf{x}_2)\| = 2\|f_{\mathbf{x}_1} - f_{\mathbf{x}_2}\| = 2\|f_{\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2}\| = 2\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2 < \epsilon,$$

por ende $\Phi \in C^1(l^2, \mathbb{R})$. Veamos finalmente que cumple la condición de (PS). Sea $(\mathbf{x}_n)$ una sucesión en l^2 tal que

$$(\Phi(\mathbf{x}_n)) \ \text{ es acotada y } \quad \Phi'(\mathbf{x}_n) \to 0.$$

Ahora

$$\|\Phi'(\mathbf{x}_n)\| = 2\|f_{\mathbf{x}_n}\| = 2\|\mathbf{x}_n\|_2,$$

luego $\|\mathbf{x}_n\|_2 \to 0$ por tanto $\mathbf{x}_n \to 0$ en l^2. así toda sucesión de Palais-Smale de Φ admite una subsucesión convergente. $\square$

Este ejemplo se dá con el fin de mostrar un ejemplo en la forma mas sencilla posible en la dimensión infinita, pero se puede demostrar de manera análoga que

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & L^p(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \|f\|_p^p \end{array}$$

cumple la condiciones de (PS) con X un espacio de medida cualquiera y se deja como ejercicio.

Antes de proceder con el siguiente ejemplo en la dimensión infinita,recordemos que en el ejemplo anterior la derivada de Gâteux nos dio de manera fácil un candidato de la derivada de Fréchet,sin embargo el verificar que este era la derivada de Fréchet es aveces tedioso. Por tanto con el fin de ahorrarnos cuentas innecesarias presentamos el siguiente criterio, tomado de [Kung-Ching, 2005, pag 3.]

Teorema 2.20. *Sean E, F espacios normados, $A \subseteq E$ abierto y $\Phi : A \to F$ Gâteux diferenciable en A. Si además todas sus derivadas direccionales (Gâteux) son continuas, Esto es, para todo $v \in E$ la función*

$$\begin{array}{rccc} \partial\Phi(\cdot, v): & A & \longrightarrow & F \\ & a & \mapsto & \partial\Phi(a, v) \end{array}$$

es continua, con

$$\partial\Phi(a, v) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(a + tv) - \Phi(a)}{t}.$$

Entonces Φ es Fréchet diferenciable en A.

Procedemos a dar el segundo ejemplo en dimensión infinita, el cual es más interesante.

Ejemplo 25. Sea

$$\begin{array}{rccc} L: & D(L) \subset H_0^1(I) & \longrightarrow & L^2(I) \\ & u & \mapsto & -u'' \end{array}$$

con $I = (0, \pi)$ y $D(L) = \{u \in H_0^1(I) : u' \in H^1(I)\}$, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ un número fijo y $F \in H^{-1}(I)$. Entonces el funcional

$$\begin{array}{rccc} \Phi_\lambda: & H_0^1(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

definido por

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_I [(u'(x))^2 - \lambda u^2(x)]dx - \langle F, u \rangle$$

cumple que

1. Si $\lambda \notin EV(L)$ entonces Φ_λ cumple (PS).

2. Si $\lambda \in EV(L)$ y $F = 0$ entonces Φ_λ no cumple (PS).

Demostración. En primer lugar veamos que $EV(L) = \{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$. En efecto, λ es un valor propio si y solo si

$$L(u) = \lambda u$$

para algún $u \neq 0$ y $u \in D(L)$. Ahora para todo $u \in H^1(I)$ tenemos que $u \in H_0^1(I)$ si y solo si $u = 0$ sobre ∂I [Brezis, 2010, Pag. 217]. Por tanto $u(0) = 0$ y $u(\pi) = 0$. Luego λ es un valor propio si y solo si existe una solución no trivial en $D(L)$ al siguiente problema de frontera

$$u'' + \lambda u = 0 \tag{2.4}$$

$$u(0) = 0 \text{ y } u(\pi) = 0.$$

Hay que tener en cuenta que en (2.4) se esta derivando débilmente y por tanto no sabemos si es una ecuación diferencial clásica. Veamos que si existe $u \in D(L)$ que satisface (2.4) entonces $u \in C^2(I)$. En efecto, sea $u \in D(L)$ tal que satisface (2.4). Así $u \in H_0^1(I)$ y $u' \in H^1(I)$ y ya que $H^1(I) \subseteq C(I)$ entonces $u' \in C(I)$ y por el segundo Teorema Fundamente del Cálculo para Sobolev tenemos que

$$u(x) = \int_0^x u'(t)dy$$

para todo $x \in I$. Como u' es continua entonces estamos sobre la integral de Riemmann. Por el Primer Teorema Fundamental de Cálculo (clásico) $u \in C^1(I)$ con derivada usual u' y como $u'' = -\lambda u$ se obtiene que $u'' \in C^1(I)$. Análogamente, usando el Segundo Teorema Fundamental de Cálculo para Sobolev y el Primer Teorema Fundamental de Cálculo (clásico), obtenemos que $u' \in C^1(I)$ con derivada usual $u'' \in C^1(I)$. Esto es, $u' \in C^2(I)$ y como la derivada usual de u es u' entonces $u \in C^3(I) \subseteq C^2(I)$.

Ahora si $\lambda \leq 0$ tenemos que la solución general de (2.4) en $C^2(I)$ es

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{(-\lambda)}x} + C_2 x e^{\sqrt{(-\lambda)}x},$$

con C_1 y C_2 constantes y por la condición de frontera tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \\ 0 &= C_1 e^{\sqrt{(-\lambda)}\pi} + C_2 \pi e^{\sqrt{(-\lambda)}\pi}, \end{aligned}$$

luego $C_1 = C_2 = 0$. Por tanto $u = 0$. Esto quiere decir que L no tiene valores propios negativos. Ahora si $\lambda > 0$ tenemos que la solución general de (2.4) en $C^2(I)$ es

$$u(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

y ya que se debe cumplir que $u(0) = 0$ y $u(\pi) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \\ 0 &= C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi), \end{aligned}$$

luego

$$C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

Por otro lado $C_2 \neq 0$, de lo contrario u=0, entonces $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. sin embargo, esto ocurre si y solo si $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$\lambda = n^2.$$

Por consiguiente $EV(L) = \{1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots\}$. Por tanto podemos enumerar y ordenar a los valores propios de L,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots,$$

con

$$\lambda_n = n^2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora identificando a $L^2(I)$ con su dual pero no a $H_0^1(I)$ tenemos que

$$H_0^1(I) \subset L^2(I) \simeq (L^2(I))^* \subset H^{-1}(I),$$

o de manera más clara

$$H_0^1 \xrightarrow{i} L^2(I) \xrightarrow{I_{L^2}} (L^2(I))^* \xrightarrow{T} H^{-1}(I),$$

donde las inmersiones son continuas y densas. Ahora demostremos el primer punto. Sea $\lambda \notin EV(L)$, primero veamos que

$$C_0^2(I) = \{u \in C^2(I) : u(0) = 0 \text{ y } u(\pi) = 0\}$$

es denso en $H_0^1(I)$. En efecto, tenemos que

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq C^\infty(I) \subseteq C^k(I).$$

Por el teorema de Densidad para Espacios de Sobolev, $C^k(I)$ es denso en $H^1(I)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces en particular $C^2(I)$ es denso en $H^1(I)$, luego $C_0^2(I)$ es denso en $H_0^1(I)$. Ya que $C_0^2(I) \subseteq D(L)$ se obtiene que $D(L)$ también es denso en $H_0^1(I)$, y por tanto L tiene una única extención lineal acotada

$$\overline{L} : H_0^1(I) \longrightarrow L^2(I)$$

con $\|L\|_{L(D(L),L^2)} = \|\overline{L}\|_{L(H_0^1,L^2)}$.

Calculemos ahora la derivada de Gâteux de Φ_λ. Sea $u \in D(L)$ y $v \in C_c^1(I)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\partial\Phi_\lambda(u,v) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}\int_I[(u'+hv')^2-\lambda(u+hv)^2]dx - \langle F, u+hv\rangle - \frac{1}{2}\int_I[(u')^2-\lambda u^2]dx + \langle F, u\rangle}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2h}\int_I [2hu'v' + h^2(v')^2 - 2\lambda huv - \lambda h^2 v^2]dx - \frac{h\langle F, v\rangle}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\int_I u'v'dx + \frac{h}{2}\int_I (v')^2dx - \lambda\int_I uvdx - \lambda\frac{h}{2}\int_I v^2dx - \langle F, v\rangle\right) \\
&= \int_I (u'v' - \lambda uv)dx - \langle F, v\rangle \\
&= \int_I (-u''v - \lambda uv)dx - \langle F, v\rangle \\
&= \int_I (L(u)v - \lambda uv)dx - \langle F, v\rangle.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\partial\Phi_\lambda(u,v) = (L(u),v)_2 - \lambda(u,v)_2 - \langle F, v\rangle, \tag{2.5}$$

luego para todo $u \in H_0^1$ y para todo $v \in C_c^1(I)$

$$\partial\Phi_\lambda(u,v) = (\overline{L}(u),v)_2 - \lambda(u,v)_2 - \langle F, v\rangle.$$

Para cada u fijo $\partial\Phi_\lambda(u,v)$ es un operador lineal acotado sobre $C_c^1(I)$, pues $(u,\cdot) : L^2(I) \to \mathbb{R}$ es continuo sobre $(L^2, \|\cdot\|_2)$ y como la inclusión $i : H_0^1(I) \to L^2(I)$ es continua entonces

$$(u,\cdot)_2 : (H_0^1(I), \|\cdot\|_{H^1}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua. En particular

$$(u,\cdot)_2 : (C_c^1(I), \|\cdot\|_{H^1}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua. Luego

$$\partial\Phi_\lambda(u,\cdot) : (C_c^1(I), \|\cdot\|_{H^1}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es un funcional lineal acotado. Entonces se puede extender de manera única a $\overline{C_c^1(I)} = H_0^1(I)$ y obtenemos que para todo $v \in H_0^1(I)$

$$\partial\Phi_\lambda(u,v) = (\overline{L}(u),v)_2 - \lambda(u,v)_2 - \langle F, v\rangle.$$

Por otra parte para v fijo tenemos que $\partial\Phi_\lambda(\cdot,v) : H_0^1(I) \to \mathbb{R}$ es continua. Entonces Φ_λ es Fréchet diferenciable con derivada continua

$$\Phi_\lambda'(u) = f_{\overline{L}(u)} - f_{\lambda u} - F,$$

con

$$\begin{array}{rccc} f_u: & L^2(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & (u,v)_2, \end{array}$$

que restringido a H_0^1 sabemos que es continua ($(L^2)^* \subseteq H^{-1}$). También podemos reescribir la derivada como sigue

$$\Phi'_\lambda(u) = f_{\overline{L}(u)-\lambda u} - F,$$

y si recordamos a

$$\begin{array}{rccc} I_{L^2}: & L^2(I) & \longrightarrow & (L^2(I))^* \\ & u & \mapsto & f_u, \end{array}$$

la isometría canónica de L^2 en su dual, obtenemos que

$$\Phi'_\lambda(u) = I_{L^2}(\overline{L}(u) - \lambda u) - F. \tag{2.6}$$

Como $\lambda \notin EV(L)$, veamos que $\overline{L} - \lambda I_d$ es un homeomorfismo de

$$H_0^1 \to L^2.$$

Tenemos que $L - \lambda I_d : D(L) \to L^2(I)$ es un operador lineal acotado e inyectivo, pues λ no es un valor propio y por tanto existe $G = (L - \lambda I_d)^{-1} : R(L) \to D(L)$ su operador lineal inverso. Si vemos que G es continuo, éste se podrá extender de manera única a todo $L^2(I)$, y como $L - \lambda I_d$ también se puede extender de manera única, las extensiones deben ser inversas una de la otra. Luego $\overline{L} - \lambda I_d$ (la extención de $L - \lambda I_d$) será continua, biyectiva y con inversa continua. Veamos entonces que D es acotado. Esto es, existe $C > 0$ tal que para todo $v \in R(L)$ se cumple que

$$\|Gv\|_{H^1} \leq C\|v\|_2, \tag{2.7}$$

por la inyectividad no es difícil ver que (2.7) se cumple si y solo si existe $C > 0$ tal que para todo $u \in D(L)$ se cumple que

$$\|u\|_{H^1} \leq C\|(L - \lambda I_d)(u)\|_2. \tag{2.8}$$

Veamos que (2.8) se cumple. Sea $u \in D(L)$ con $u \neq 0$, tenemos que

$$\|L - \lambda I_d(u)\|_2 = \| - u'' - \lambda u\|_2 = \|u'' + \lambda u\|_2 = \|w'\|_2,$$

con $w(x) = u'(x) + \lambda \int_0^x u(t)dt$ y $x \in I$. Entonces por Corolario 1.2, existe $C_0 > 0$ tal que para todo $x_0 \in I$ se tiene que

$$\|w - w(x_0)\|_{H^1} \leq C_0\|w'\|_2 = C_0\|L - \lambda I_d(u)\|_2. \tag{2.9}$$

Por otro lado por la desigualdad de Sobolev, existe $C_1 > 0$ tal que para todo $u \in W^{1,2}(I)$ se cumple que

$$\|u\|_\infty \leq C_1 \|u\|_{H^1}.$$

En particular para $w - w(x_0)$ se tiene que

$$\|w - w(x_0)\|_\infty \leq C_1 \|w - w(x_0)\|_{H^1}. \tag{2.10}$$

Tenemos que ver que

$$\|w - w(x_0')\|_\infty \geq \|u'\|_\infty,$$

para algún $x_0' \in I$. En efecto, como $u' \in C(\overline{I})$ y $\overline{I}$ es compacto, existe $x_1 \in \overline{I}$ tal que

$$|u'(x_1)| = \sup_{x \in I} |u'(x)| = \|u'\|_\infty.$$

Si $\lambda < 0$, tenemos 2 casos a) $u'(x_1) \geq 0$ ó b) $u'(x_1) < 0$. Si se cumple $a)$, supongamos que

$$\lambda \int_x^{x_1} u(t)dt - u'(x) < 0, \tag{2.11}$$

para todo $x \in I$. Ahora $u'(x_1) \neq 0$ ya que de lo contrario $\|u'\|_\infty = 0$. Luego $u' = 0$. Es decir, u sería una constante y como $u(0) = 0$ entonces $u = 0$. Entonces existe una vecindad V_{x_1} de x_1, tal que $u' > 0$ en V_{x_1}. Como $u \in C(\overline{I})$ significa que tiene máximo y mínimo, pero no pueden estar en la frontera de I; es decir, en 0 y π, ya que de lo contrario el máximo y mínimo de u serían 0 y por ende u sería la función nula. Por tanto el máximo y mínimo de u están en el interior de I. Esto es, u' se anula en ellos (tiene ceros) y por consiguiente la vecindad V_{x_1} se puede extender máximo hasta el intervalo (y_0, y_1) donde $u' > 0$ en (y_0, y_1) y

$$u'(y_0) = 0 \text{ y } u'(y_1) = 0.$$

Por tanto y_0 y y_1 son puntos extremos y como $u' > 0$ en (y_0, y_1), entonces u es estrictamente creciente sobre (y_0, y_1). Por tanto y_0 es un mínimo y y_1 es un máximo de u, y además

$$y_0 < x_1 < y_1,$$

y no existen más ceros de u' (puntos críticos) en $[y_0, y_1]$. Ahora por (2.11) tenemos que

$$\lambda \int_{y_1}^{x_1} u(t)dt < 0 \;\text{ y }\; \lambda \int_{y_0}^{x_1} u(t)dt < 0.$$

Es decir,

$$\int_{x_1}^{y_1} u(t)dt < 0 \;\text{ y }\; \int_{y_0}^{x_1} u(t)dt > 0. \tag{2.12}$$

Ahora si $u \geq 0$ en I tenemos una contradicción. Por tanto $u(y_0) < 0$ y $u(y_1) \geq 0$. Luego por el Teorema del Valor Intermedio existe $x_2 \in [y_0, y_1]$ tal que

$$u(x_2) = 0,$$

además $u \geq 0$ en $[x_2, y_1]$ y $u < 0$ en $[y_0, x_2]$. Tenemos 2 posibles casos más: i) $x_2 \leq x_1$ ó ii) $x_1 < x_2$. Si ocurre i) entonces $u \geq 0$ en $[x_1, y_1]$ y por tanto

$$\int_{x_1}^{y_1} u(t)dt \geq 0,$$

contradiciendo la parte izquierda de (2.12). Si ocurre ii) entonces $u < 0$ en $[y_0, x_1)$ y por ende

$$\int_{y_0}^{x_1} u(t)dt < 0,$$

contradiciendo la parte derecha de (2.12). Por tanto existe $x_2' \in I$ tal que

$$\lambda \int_{x_2'}^{x_1} u(t)dt - u'(x_2') \geq 0,$$

luego

$$w(x_1) - w(x_2') = u'(x_1) + \lambda \int_{x_2'}^{x_1} u(t)dt - u'(x_2') \geq u'(x_1) \geq 0.$$

Esto es,

$$|w(x_1) - w(x_2')| \geq |u'(x_1)| = \|u'\|_\infty,$$

de aquí se obtiene que

$$\|w - w(x_2')\|_\infty \geq \|u'\|_\infty.$$

Ahora si se cumple b), suponga que para todo $x \in I$

$$\lambda \int_{x}^{x_1} u(t)dt - u'(x_2') > 0$$

y análogamente como en el caso a) se llega a una contradicción. Por tanto existe $x_2' \in I$ tal que

$$\lambda \int_{x_2'}^{x_1} u(t)dt - u'(x_2') \leq 0,$$

luego

$$w(x_1) - w(x_2') = u'(x_1) + \lambda \int_{x_2'}^{x_1} u(t)dt - u'(x_2') \leq u'(x_1) \leq 0,$$

entonces

$$|w(x_1) - w(x_2')| \geq |u'(x_1)| = \|u'\|_\infty$$

y de aquí se obtiene que

$$\|w - w(x_2')\|_\infty \geq \|u'\|_\infty.$$

Por último si $\lambda > 0$, se procede de manera similar. En cualquier caso siempre existe $x_2' \in I$ tal que

$$\|w - w(x_2')\|_\infty \geq \|u'\|_\infty, \tag{2.13}$$

y de (2.9), (2.10) y (2.13), obtenemos que

$$\begin{aligned} \|u'\|_\infty &\leq \|w - w(x_2')\|_\infty \\ &\leq C_1 \|w - w(x_2')\|_{H^1} \\ &\leq C_0 C_1 \|L - \lambda Id(u)\|_2. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\|u'\|_\infty \leq C_0 C_1 \|L - \lambda Id(u)\|_2. \tag{2.14}$$

Por último, por el ejemplo 7, tenemos que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|u'\|_2 \leq C_2 \|u'\|_\infty \tag{2.15}$$

y por la desigualdad de Poincaré existe $C_3 > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1} \leq C_3 \|u'\|_2. \tag{2.16}$$

De (2.14), (2.15) y (2.16) obtenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1} &\leq C_3 \|u'\|_2 \\ &\leq C_3 C_2 \|u'\|_\infty \\ &\leq C_3 C_2 C_1 C_0 \|L - \lambda I_d(u)\|_2. \end{aligned}$$

Queda así demostrado (2.8) y por tanto se obtiene (2.7). Por lo dicho anteriormente $(\overline{L} - \lambda I_d)$ es un homeomorfismo. Luego $I_{L^2} \circ (\overline{L} - \lambda I_d)$ es un homeomorfismo de

$$H_0^1 \to (L^2)^* \subseteq H^{-1},$$

así su inversa $(\overline{L} - \lambda I_d)^{-1} \circ I_{L^2}^{-1}$ es un homeomorfismo de

$$(L^2)^* \to H_0^1$$

y puesto que $(L^2)^*$ es denso en H^{-1}, este homeomorfismo se puede extender de manera única en

$$H^{-1} \to H_0^1.$$

Veamos que Φ_λ cumple (PS). Sea (u_n) en $H_0^1(I)$ una sucesión de Palais-Smale a nivel c, esto es,

$$\Phi_\lambda(u_n) \to c$$

y

$$\Phi'_\lambda(u_n) = I_{L^2}(\overline{L}(u_n) - \lambda u_n) - F \to 0.$$

Como $\Phi'_\lambda(u_n) \in L(H_0^1, \mathbb{R}) = H^{-1}(I)$ entonces $\Phi'_\lambda(u_n) + F$ es una sucesión en $H^{-1}(I)$ convergente a F. Por tanto

$$(\overline{L} - \lambda I_d)^{-1} \circ I_{L^2}^{-1}(\Phi'_\lambda(u_n) + F) \to (\overline{L} - \lambda I_d)^{-1} \circ I_{L^2}^{-1}(F)$$

en $H_0^1(I)$, pero

$$\begin{aligned}(\overline{L} - \lambda I_d)^{-1} \circ I_{L^2}^{-1}(\Phi'_\lambda(u_n) + F) &= (\overline{L} - \lambda I_d)^{-1} \circ I_{L^2}^{-1}(I_{L^2}(\overline{L}(u_n) - \lambda u_n)) \\ &= u_n.\end{aligned}$$

Es decir que

$$u_n \to (\overline{L} - \lambda I_d)^{-1} \circ I_{L^2}^{-1}(F).$$

Por tanto Φ_λ cumple (PS).

Veamos que se cumple el segundo punto del ejemplo. Esto es, $\lambda \in EV(L)$ y $F = 0$, luego $\lambda = \lambda_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y existe $\varphi_k \in D(L)$ una función propia asociada a λ_k. Por tanto consideremos la sucesión $(u_n) = (n\varphi_k)$, entonces tenemos que

$$-n\varphi_k'' = n\lambda_k\varphi_k,$$

multiplicando a ambos lados por $n\varphi_k$,

$$-n^2\varphi_k''\varphi_k = n^2\lambda_k\varphi_k^2,$$

luego

$$\begin{aligned}\int_I n^2\lambda_k\varphi_k^2 dx &= -\int_I n^2\varphi_k''\varphi_k dx \\ &= \int_I n^2\varphi_k'\varphi_k' dx \\ &= \int_I n^2(\varphi_k')^2 dx,\end{aligned}$$

es decir,

$$\Phi_\lambda(n\varphi_k) = \int_I (n\varphi_k')^2 dx - \int_I \lambda_k(n\varphi_k)^2 dx = 0.$$

Por otro lado, de (2.6) tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi'_\lambda(n\varphi_k) &= I_{L^2}(\overline{L}(n\varphi_k) - \lambda_k(n\varphi_k))\\ &= I_{L^2}(\lambda_k n\varphi_k - \lambda_k n\varphi_k)\\ &= I_{L^2}(0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por tanto obtenemos que

$$\Phi_\lambda(u_n) \to 0 \ \text{ y } \ \Phi'_\lambda(u_n) \to 0.$$

Pero (u_n) no admite subsucesiones convergentes, es decir Φ_{λ_k} no cumple (PS). $\square$

Este ejemplo en particular lo utilizaremos más adelante para dar una aplicación al Teorema del Paso de Montaña, por el momento procederemos a ver un principio variacional, que será necesario para poder demostrar el teorema principal de nuestro trabajo.

2.2. Principio Variacional de Ekeland

Existen 2 formas famosas de demostrar el Teorema del Paso de Montaña, uno es vía por el Lema de Deformación y la otra es vía Principio Variacional de Ekeland. Nosotros los haremos a partir del segundo. El lector que esté interesado en saber acerca del Lema de de Deformación y la demostración del Teorema del Paso de Montaña usando dicho Lema puede buscar en [Jabri, 2003, pag. 33-47, 67].

Para poder enunciar y demostrar el Principio Variacional de Ekeland es necesario entender el concepto de la semicontinuidad. Con el fin de presentar dicho concepto en su forma más general y, a su vez, de una manera clara y natural, partiremos de otro concepto, una generalización de las sucesiones.

2.2.1. Redes

Antes de continuar, para trabajar esta sección introduciremos alguna notación extra de la topología general. Denotaremos a (X, τ) un espacio topológico con τ su topología y dado un $x \in X$ denotaremos a $V(x)$ el conjunto de las vecindades de x. Para una sucesión dada (x_n) y un conjunto B diremos que $x_n \in B$ **para casi todo** n si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in B$. Diremos que $x_n \in B$ **para infinitos valores de** n si para todo $N \in \mathbb{N}$ existe un $n_0 \geq N$ tal que $x_{n_0} \in B$.

Es bien conocido por topología general, la siguiente proposición tomada de [Rubiano.O, 2010, Pag.83-84,137].

Proposición 2.10. *Sea X un espacio topológico 1-contable, entonces para todo $Y \subseteq X$ se cumple que.*

1. *$x \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión (x_n) en Y tal que $x_n \to x$.*

2. *Una función $f : X \to Z$, con Z un espacio topológico cualquiera, es continua en x si y solo si para toda sucesión (x_n) en X si $x_n \to x$ entonces $f(x_n) \to f(x)$.*

Esto significa que en los espacios topológicos 1-contables, la adherencia y la continuidad quedan caracterizadas por las sucesiones. Pero si quitamos la condición de ser 1-contable, este resultado es falso, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 26. Sea $X = \mathbb{R}$ con la siguiente topología $\tau = \{Y \subseteq X : Y^c \text{ es numerable, ó } Y^c = X\}$ (la topología de los complementos numerables) y sea $Y = \mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}$ entonces $\sqrt{2} \in \overline{Y}$ pero no existe ninguna sucesión $(x_n) \in Y$ tal que $x_n \to \sqrt{2}$.

Demostración. Sea $V_{\sqrt{2}} \in V(\sqrt{2})$ entonces $\sqrt{2} \in V_{\sqrt{2}}$ y $(V_{\sqrt{2}})^c$ es numerable, por ende $V_{\sqrt{2}}$ es no numerable y por consiguiente

$$Y \cap V_{\sqrt{2}} = V_{\sqrt{2}} - \{\sqrt{2}\} \neq \emptyset.$$

Luego $\sqrt{2} \in \overline{Y}$. Supongamos ahora que existe una sucesión (x_n) en Y tal que $x_n \to \sqrt{2}$, esto es que para toda $V_{\sqrt{2}} \in V(\sqrt{2})$ tenemos que

$$x_n \in V_{\sqrt{2}}$$

para casi todo n. Si tomamos a $V = \mathbb{R} - \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces $\sqrt{2} \in V$, ya que $x_n \in Y$, es decir, $x_n \neq \sqrt{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado como V tiene complemento numerable entonces $V \in V(\sqrt{2})$, pero

$$x_n \notin V$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradiccón. Por tanto no existe una sucesión (x_n) en Y convergente a $\sqrt{2}$. □

De este hecho surge la necesidad de dar una generalización de las sucesiones de tal manera que se pueda caracterizar la continuidad y la adherencia. Se conocen 2 tipos de generalización de las sucesiones, una es conocida como los filtros y la otra como las redes. Puesto que las redes resultan ser una generalización más natural, trabajaremos sobre este concepto. Si el lector desea leer acerca de los filtros en caso de no conocerlos, puede buscar en [Rubiano.O, 2010, Cap. 5]. Ahora antes de definir el concepto de redes, introduzcamos la definición de conjunto dirigido.

Definición. Sea A un conjunto no vacío y $\leq$ una relación de A. Al par $(A, \leq)$ se le dice dirigido si se cumple que

1. Para todo $\alpha \in A$, $\alpha \leq \alpha$.
2. Dados $\alpha, \beta, \gamma \in A$, si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$ entonces $\alpha \leq \gamma$.
3. Dados $\alpha, \beta \in A$, existe $\gamma \in A$ tal que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.

Procedemos ahora sí a definir una red de la siguiente manera, que es tomada de [Sanjuán, 2007, Pag.2].

Definición. Sea X un espacio topológico y A un conjunto dirigido. Una red en X es una función

$$\begin{array}{rccc} x: & A & \longrightarrow & X \\ & \alpha & \mapsto & x_\alpha, \end{array}$$

y la denotamos por $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

De manera parecida a las sucesiones, para $Y \subseteq X$, decimos que

- $x_\alpha \in Y$ finalmente para α, si existe un $\alpha_0 \in A$ tal que para todo $\alpha \in A$, si $\alpha \geq \alpha_0$ entonces $x_\alpha \in Y$.
- $x_\alpha \in Y$ frecuentemente para α, si para todo $\alpha \in A$ existe $\beta \in A$ tal que $\beta \geq \alpha$ y $x_\beta \in Y$.

La red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a $x_0 \in X$ si para toda vecindad V_{x_0} de x_0, se tiene que $x_\alpha \in V_{x_0}$ finalmente para α, y lo denotamos $x_\alpha \to x_0$ o $\lim x_\alpha = x_0$.

Es claro que una sucesión (x_n) es una red y los conceptos de *finalmente para* α y *frecuentemente para* α son generalizaciones de *para casi todo* n y *para infinitos valores de* n, al igual que la convergencia en redes es una generalización de la convergencia en sucesiones. Veamos ahora que las redes caracterizan la adherencia y la continuidad.

Proposición 2.11. *Sea X un espacio topológico*

1. *Si X es Hausdorff y $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red de X entonces si $x_\alpha \to x$ y $x_\alpha \to y$ entonces $x = y$.*
2. *Si $Y \subseteq X$ entonces $x \in \overline{Y}$ si y solo si existe una red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ de Y tal que $x_\alpha \to x$.*
3. *Una función $f : X \to Z$, con Z un espacio topológico, es continua en x si y solo si para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X si $x_\alpha \to x$ entonces $f(x_\alpha) \to f(x)$.*

Demostración.

1. Supongamos que $x \neq y$, entonces existen V_x y V_y vecindades de x y y respectivamente con $V_x \cap V_y = \emptyset$. Por otro lado existen $\alpha_0, \alpha_1 \in A$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$ y $\alpha \geq \alpha_1$ entonces

$$x_\alpha \in V_x \quad \text{y} \quad x_\alpha \in V_y$$

respectivamente. Entonces si tomamos $\beta \in A$ tal que $\beta \geq \alpha_0$ y $\beta \geq \alpha_1$, el cual existe por definición de conjunto dirigido, obtenemos que

$$x_\beta \in V_x \cap V_y$$

lo cual es una contradicción y por ende $x = y$.

2. Si $x \in \overline{Y}$ entonces para toda $V \in V(x)$ tenemos que

$$V \cap Y \neq \emptyset.$$

Se puede mostrar fácilmente que $V(x)$ con la relación $\supseteq$ *(contiene a)* es un conjunto dirigido. Por tanto definimos la red $(x_V)_{V \in V(x)}$ tal que

$$x_V \in V \cap Y$$

para todo $V \in V(x)$. Veamos que $x_V \to x$. En efecto, sea $U \in V(x)$ entonces para todo $V \in V(x)$ tal que $V \subseteq U$ se tiene que

$$x_V \in V \cap Y \subseteq U \cap Y \subseteq U.$$

Esto es, $x_V \in U$ finalmente para V, luego $x_V \to x$.

Recíprocamente, sea $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red de Y tal que $x_\alpha \to x$ entonces para toda vecindad V_x de x, existe $\alpha_0 \in A$ tal que

$$x_{\alpha_0} \in V_x$$

y como $x_{\alpha_0} \in Y$, entonces

$$V_x \cap Y \neq \emptyset,$$

es decir, $x \in \overline{Y}$.

3. Si $f : X \to Z$ es continua en x y $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red de X convergente a x. Veamos que $f(x_\alpha) \to f(x)$. Sea $V_{f(x)} \in V(f(x))$ entonces existe $V_x \in V(x)$ tal que

$$f(V_x) \subseteq V_{f(x)}$$

y existe un $\alpha_0 \in A$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$ entonces $x_\alpha \in V_x$ luego

$$f(x_\alpha) \in f(V_x) \subseteq V_{f(x)}$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Esto es, $f(x_\alpha) \in V_{f(x)}$ finalmente para α, es decir, $f(x_\alpha) \to f(x)$.

Recíprocamente supongamos que para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ en X, tal que $x_\alpha \to x$, se tiene que $f(x_\alpha) \to f(x)$ y supongamos además que f no es continua en x. Por ende existe $V_{f(x)} \in V(f(x))$ tal que para toda $V \in V(x)$ se tiene que

$$f(V) \nsubseteq V_{f(x)}.$$

Es decir que para cada $V \in V(x)$ existe $x_V \in V$ tal que

$$f(x_V) \notin V_{f(x)},$$

y por lo anteriormente expuesto $(x_V)_{V \in V(x)}$ es una red de X convergente a x. Como $f(x_V) \notin V_{f(x)}$ para todo $V \in V(x)$, $f(x_V)$ no converge a $f(x)$, lo cual es una contradicción y por tanto f es continua.

□

Queda probado que las redes caracterizan la adherencia y la continuidad. Este hecho generalmente es muy útil. Sin embargo, nosotros tenemos que introducir un concepto más de las redes para poder definir la semicontinuidad.

Definición. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red de $\mathbb{R}$. Decimos que a es un límite inferior de x_α, y lo notamos $a = \underline{\text{lím}} x_\alpha$, si dado $\epsilon > 0$, $a - \epsilon < x_\alpha$ finalmente para α y $x_\alpha < a + \epsilon$ frecuentemente para α.

Diremos también que b es un límite superior de x_α, y lo notamos $b = \overline{\text{lím}} x_\alpha$, si dado $\epsilon > 0$, $b + \epsilon > x_\alpha$ finalmente para α y $x_\alpha > b - \epsilon$ frecuentemente para α.

No es difícil demostrar y se deja como ejercicio que

$$\underline{\text{lím}} x_\alpha = \sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \geq \alpha} x_\beta \tag{2.17}$$

$$\overline{\text{lím}} x_\alpha = \inf_{\alpha \in A} \sup_{\beta \geq \alpha} x_\beta. \tag{2.18}$$

Veamos algunas propiedades del límite inferior y superior.

Proposición 2.12. *Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red de $\mathbb{R}$ entonces existe un único $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que*

$$a = \underline{\text{lím}} x_\alpha$$

donde $\overline{\mathbb{R}}$ denota a $\mathbb{R}$ extendido.

Demostración. El limite inferior existe por (2.17), puesto que en $\overline{\mathbb{R}}$ todo conjunto no vacío tiene sup e ínf. Veamos que es único.

Supongamos que existen a y a', 2 limites inferiores de (x_α), y supongamos sin perdida de generalidad que $a' < a$ y sea $\epsilon > 0$ entonces existe $\alpha_0 \in A$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$ entonces $a - \epsilon < x_\alpha$. Para α_0 existe $\alpha_0' \in A$ con $\alpha_0' \geq \alpha_0$ tal que $x_{\alpha_0'} < a' + \epsilon$. Luego

$$a - \epsilon < x_{\alpha_0'} < a' + \epsilon.$$

Esto es,

$$a < a' + 2\epsilon$$

y como $\epsilon > 0$ era arbitrario entonces

$$a \leq a'$$

lo cual es una contradicción. □

El límite superior de cualquier red también existe y es único en los reales extendidos y su demostración es análoga. Por otro lado, como es de esperarse del límite superior y del inferior se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.13. *Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red de $\mathbb{R}$ entonces*

$$\underline{\text{lím}} x_\alpha \leq \overline{\text{lím}} x_\alpha.$$

Más aun, $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge si y solo si $\underline{\text{lím}} x_\alpha = \overline{\text{lím}} x_\alpha$ y en tal caso

$$\text{lím}\, x_\alpha = \underline{\text{lím}} x_\alpha = \overline{\text{lím}} x_\alpha.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, si denotemos a $a = \underline{\text{lím}} x_\alpha$ y a $b = \overline{\text{lím}} x_\alpha$ entonces $a - \epsilon < x_\alpha$ finalmente para α y $x_\alpha < b + \epsilon$ finalmente para α. Luego existe un $\alpha_0 \in A$ tal que

$$a - \epsilon < x_{\alpha_0} < b + \epsilon.$$

Esto implica que

$$a < b + 2\epsilon$$

y como $\epsilon > 0$ era arbitrario obtenemos que

$$a \leq b.$$

Veamos que si $a = b$ entonces $x_\alpha \to a$. En efecto, sea $\epsilon > 0$ entonces existe α_0 y α_1 en A tal que si $\alpha \geq \alpha_0$ y $\alpha \geq \alpha_1$ entonces $a - \epsilon < x_\alpha$ y $x_\alpha < b + \epsilon = a + \epsilon$, respectivamente, y como A es dirigido existe $\beta \in A$ tal que $\alpha_0 \leq \beta$ y $\alpha_0 \leq \beta$ y por tanto para todo $\alpha \geq \beta$ se tiene que

$$a - \epsilon < x_\alpha < a + \epsilon.$$

Esto es,

$$|x_\alpha - a| < \epsilon,$$

por tanto $x_\alpha \to a$.

Recíprocamente si $x_\alpha \to x$ con $x \in \mathbb{R}$, veamos que $\underline{\text{lím}} x_\alpha = x = \overline{\text{lím}} x_\alpha$. Sea $\epsilon > 0$ entonces existe α_0 tal que si $\alpha \geq \alpha_0$ entonces

$$|x_\alpha - x| < \epsilon.$$

Es decir,

$$x - \epsilon < x_\alpha < x + \epsilon,$$

luego tenemos que $x - \epsilon < x_\alpha$ finalmente para α y a su vez $x_\alpha < x + \epsilon$ finalmente para α, como finalmente para α implica frecuentemente para α, obtenemos por un lado que $x - \epsilon < x_\alpha$ finalmente para α y que $x_\alpha < x + \epsilon$ frecuentemente para α, es decir que $x = \underline{\text{lím}} x_\alpha$; por otro lado, obtenemos que $x - \epsilon < x_\alpha$ frecuentemente para α y que $x_\alpha < x + \epsilon$ finalmente para α así $x = \overline{\text{lím}} x_\alpha$. $\square$

Por último veamos una pequeña propiedad que nos será de utilidad.

Lema 2.1. *Sean $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red en $\mathbb{R}$, $a = \underline{\text{lím}} x_\alpha$ y $b \in \mathbb{R}$ entonces se tiene que $b \leq x_\alpha$ finalmente para α si y solo si $b \leq a$.*

Demostración. Sea $b \leq x_\alpha$ finalmente para α y supongamos que $b > a$ entonces para $\epsilon > 0$, se tiene que

$$x_\alpha < a + \epsilon < b + \epsilon$$

frecuentemente para α y tenemos que

$$b - \epsilon < b < x_\alpha$$

finalmente para α. De donde $b = \underline{\text{lím}} x_\alpha = a$, lo cual es una contradicción. Por tanto $b \leq a$.

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que $b \leq a$ entonces tenemos 2 casos i) $b < a$ y ii) $b = a$. Si se cumple i), existe $\epsilon > 0$ tal que $b = a - \epsilon$ y por ende

$$x_\alpha \geq a - \epsilon = b$$

finalmente para α. Ahora si se cumple ii) entonces para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $x_\alpha \geq b - \epsilon$ finalmente para α. Como ϵ es arbitrario entonces se obtiene que $b \leq x_\alpha$ finalmente para α. $\square$

Finalmente podemos presentar el concepto de semicontinuidad.

2.2.2. Semicontinuidad

El concepto de la semicontinuidad se divide en 2 formas, la semicontinuidad inferior y la semicontinuidad superior, que se define de la siguiente manera y es tomadada de [Sanjuán, 2007, Pag. 5].

Definición. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional y $x_0 \in A$. Se dice que Φ es semicontinua inferiormente en x_0 si para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X con $x_\alpha \to x_0$, se tiene que

$$\underline{\lim}\Phi(x_\alpha) \geq \Phi(x_0).$$

Se dice que Φ es semicontinua inferiormente en X si es semicontinua inferiormente en todo $x \in X$ y se escribe que $\Phi \in sci(X)$.

Se dice que Φ es semicontinua superiormente en x_0 si para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X con $x_\alpha \to x_0$, se tiene que

$$\overline{\lim}\Phi(x_\alpha) \leq \Phi(x_0).$$

Se dice que Φ es semicontinua superiormente en X si es semicontinua superioremente en todo $x \in X$.

Presentamos a la semicontinuidad con esta definición pues a nuestra opinión es la forma más natural de hacerlo. Sin embargo en los textos usualmente se dá otra definición a partir de la imagen inversa de colas. El siguiente teorema muestra que nuestra definición y la usualmente dada coinciden.

Teorema 2.21. *Sea X un espacio de Hausdorff entonces $\Phi \in sci(X)$ si y solo si $\Phi^{-1}(a, \infty)$ es abierto para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que Φ es semicontinua inferiormente en X y que para algún $a \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$F = \Phi^{-1}(-\infty, a]$$

no es cerrado, luego existe $x_0 \in \overline{F} - F$ y existe $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red de F tal que $x_\alpha \to x_0$ y como $x_\alpha \in \Phi^{-1}(-\infty, a]$ entonces

$$\Phi(x_\alpha) \leq a \tag{2.19}$$

para todo $\alpha \in A$ y ya que

$$\underline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha) \geq \Phi(x_0),$$

por el Lema 2.1,

$$\Phi(x_0) \leq \Phi(x_\alpha)$$

finalmente para α, luego existe un α_0 tal que

$$\Phi(x_0) \leq \Phi(x_{\alpha_0}). \tag{2.20}$$

Como $x_0 \notin F$, implica que $\Phi(x_0) \notin (-\infty, a]$. Es decir,

$$\Phi(x_0) > a. \tag{2.21}$$

De (2.19), (2.20) y (2.21) obtenemos que

$$a < \Phi(x_0) \leq \Phi(x_{\alpha_0}) \leq a,$$

lo cual es una contradicción.

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que $\Phi^{-1}(a, \infty)$ es abierto para todo $a \in \mathbb{R}$ y sean $x_0 \in X$ y $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red de X tal que $x_\alpha \to x_0$, entonces para todo $\epsilon > 0$ tenemos que

$$\Phi^{-1}(\Phi(x_0) - \epsilon, \infty) = U_{x_0,\epsilon}$$

es un abierto y como $x_0 \in \Phi^{-1}(\Phi(x_0) - \epsilon, \infty)$ entonces $U_{x_0,\epsilon}$ es una vecindad de x_0, por tanto $x_\alpha \in \Phi^{-1}(\Phi(x_0) - \epsilon, \infty)$ finalmente para α. Esto es, $\Phi(x_\alpha) > \Phi(x_0) - \epsilon$ finalmente para α. Luego por el Lema 2.1,

$$\Phi(x_0) - \epsilon \leq \underline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha)$$

y puesto que el ϵ es arbitrario se obtiene que

$$\Phi(x_0) \leq \underline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha).$$

Por ende $\Phi \in sci(X)$. $\square$

Análogamente se obtiene un resultado similar para la semicontinuidad superior. A continuación, veamos la relación que hay entre la continuidad y la semicontinuidad.

Proposición 2.14. *Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional entonces Φ es continua si y solo si Φ es semicontinua superior e inferiormente.*

Demostración. Si Φ es continua entonces para todo x_0 y toda $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ en X, tal que $x_\alpha \to x_0$, se tiene que $\Phi(x_\alpha) \to \Phi(x_0)$. Luego

$$\overline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha) = \underline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha) = \Phi(x_0).$$

Entonces

$$\underline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha) \geq \Phi(x_0) \ \text{ y } \ \overline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha) \leq \Phi(x_0),$$

por ende Φ es semicontinua inferior y superiormente.

Recíprocamente, si Φ es semicontinua inferior y superiormente, entonces para todo $x_0 \in X$ y toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ en X, tal que $x_\alpha \to x_0$, se tiene que

$$\underline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha) \geq \Phi(x_0) \ \text{ y } \ \overline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha) \leq \Phi(x_0),$$

luego

$$\overline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha) \leq \Phi(x_0) \leq \underline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha),$$

pero esto ocurre solo si

$$\overline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha) = \underline{\text{lím}}\Phi(x_\alpha) = \Phi(x_0),$$

por tanto $\Phi(x_\alpha) \to \Phi(x_0)$ así Φ es continua. $\square$

Ahora si X es 1-contable tenemos que la semicontinuidad queda caracterizada por las sucesiones como se puede observar en la siguiente proposición.

Proposición 2.15. *Sea X un espacio 1-contable y Hausdorff entonces $\Phi \in sci(X)$ si y solo si para todo $x_0 \in X$ y toda sucesión (x_n) en X, tal que $x_n \to x_0$, entonces*

$$\underline{\text{lím}}\Phi(x_n) \geq \Phi(x_0).$$

A esta caracterización por sucesiones se le llama semicontinuidad inferior por sucesiones.

Demostración. Análogamente, como se demostró el teorema 2.21, se obtiene que Φ es semicontinua inferiormente por sucesiones si y solo si $\Phi^{-1}(a, \infty)$ es abierto para todo $a \in \mathbb{R}$, simplemente usando la proposición 2.10, pues ésta permite cambiar la palabra red por sucesión en la demostración del teorema 2.21. $\square$

Se tiene que todo espacio métrico es 1-contable, por tanto tenemos esta caracterización sobre estos espacios y en particular sobre los espacios normados. Hemos visto cómo se comporta la semicontinuidad globalmente. La siguiente proposición nos dice cómo se comporta localmente y su demostración se deja como ejercicio.

Proposición 2.16. *Φ es semicontinua inferiormente en x_0 si y solo si para todo $a < \Phi(x_0)$, existe una vecindad V_{x_0} de x_0 tal que*

$$x_0 \in V_{x_0} \subseteq \Phi^{-1}(a, \infty).$$

Es decir, para todo $a < \Phi(x_0)$, x_0 es un punto interior de $\Phi^{-1}(a, \infty)$.

Por último y más importante, la semicontinuidad inferior asegura un mínimo sobre los espacios compactos, como ilustra el siguiente enunciado.

Proposición 2.17. *Sean X un espacio compacto y de Hausdorff y $\Phi \in sci(X)$. Entonces Φ tiene un mínimo en X.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fijo pero arbitrario, entonces tenemos que para cada $x \in X$,

$$x \in \Phi^{-1}(\Phi(x) - \epsilon, \infty),$$

el cual es abierto. Por tanto

$$\{\Phi^{-1}(\Phi(x) - \epsilon, \infty)\}_{x \in X}$$

es una cubierta abierta, entonces existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tal que

$$\begin{aligned} X &\subseteq \Phi^{-1}(\Phi(x_1) - \epsilon, \infty) \cup \Phi^{-1}(\Phi(x_2) - \epsilon, \infty) \cup \cdots \cup \Phi^{-1}(\Phi(x_n) - \epsilon, \infty) \\ &= \Phi^{-1}[(\Phi(x_1) - \epsilon, \infty) \cup (\Phi(x_2) - \epsilon, \infty) \cup \cdots \cup (\Phi(x_n) - \epsilon, \infty)] \\ &= \Phi^{-1}[(\Phi(x_0) - \epsilon, \infty)] \end{aligned}$$

con $\Phi(x_0) = \text{mín}\{\Phi(x_1), \Phi(x_2), \ldots, \Phi(x_n)\}$ donde obviamente $x_0 = x_i$ para algún $i = 1, 2, \ldots n$ y por ende $x_0 \in X$. Por otro lado, tenemos que

$$\Phi(X) \subseteq (\Phi(x_0) - \epsilon, \infty);$$

es decir, que para todo $x \in X$,

$$\Phi(x) > \Phi(x_0) - \epsilon$$

y como ϵ era arbitrario obtenemos que

$$\Phi(x) \geq \Phi(x_0)$$

para todo $x \in X$. $\square$

Con el fin de presentar algunos ejemplos de funciones semicontinuas no continuas, presentamos la siguiente proposición. Recordemos que una función $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene una descontinuidad en x_0 de primera especie si existen sus limites laterales, los cuales denotamos $\Phi(x_0^-), \Phi(x_0^+)$ y ocurre que estos límites no son iguales (discontinuidad de salto) o que los límites laterales son iguales pero la función evaluada en x_0 es distinto a estos límites(discontinuidad evitable).

Proposición 2.18. *Sea $\Phi : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con una discontinuidad de primera especie en x_0 y semicontinua inferiormente en B, entonces $\Phi(x_0) = \text{mín}\{\Phi(x_0^-), \Phi(x_0^+)\}$. Recíprocamente si Φ cumple que para todo x_0,*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Phi(x_0 - \epsilon) = \Phi(x_0^-)$$

y

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Phi(x_0 + \epsilon) = \Phi(x_0^+)$$

existen y $\Phi(x_0) = \text{mín}\{\Phi(x_0^-), \Phi(x_0^+)\}$ entonces $\Phi \in sci(B)$.

Demostración. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $\Phi(x_0^-) < \Phi(x_0^+)$ y supongamos además que $\Phi(x_0) = \Phi(x_0^+)$, luego sea $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi(x_0^-) < a < \Phi(x_0^+) = \Phi(x_0).$$

Por tanto $x_0 \in \Phi^{-1}(a, \infty)$. Así, existe V_{x_0} una vecindad de x_0 tal que $V_{x_0} \subseteq \Phi^{-1}(a, \infty)$. Escojamos un $\epsilon > 0$ tal que $x_0 - \epsilon \in V_{x_0}$, luego

$$\Phi(x_0 - \epsilon) \geq a.$$

De donde

$$\Phi(x_0^-) = \lim_{\epsilon \to 0} \Phi(x_0 - \epsilon) \geq a,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto $\Phi(x_0) = \Phi(x_0^-) = \text{mín}\{\Phi(x_0^-), \Phi(x_0^+)\}$.

Veamos ahora el recíproco. Si Φ tiene todos su limites laterales y además cumple que para todo $x_0 \in B$,

$$\Phi(x_0) = \text{mín}\{\Phi(x_0^-), \Phi(x_0^+)\}.$$

Entonces sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $x_n \to x_0$, luego para todo $\epsilon > 0$, $|x_n - x| < \epsilon$ para casi todo n. Esto geométricamente significa que x_n se va acercando por la derecha y/o por la izquierda a x_0. Entonces como los limites laterales existen, para los valores de n para los cuales x_n se acerca a x por la derecha se tendrá que $\Phi(x_n)$ se acerca a $\Phi(x_0^+)$ y para los valores de n para los cuales x_n se acerca a x por la izquierda, se tendrá que $\Phi(x_n)$ se acerca a $\Phi(x_0^-)$. Por lo tanto los únicos límites subsecuenciales posibles de $(\Phi(x_n))$ son $\Phi(x_0^+)$ y $\Phi(x_0^-)$. Como en las sucesiones, el límite superior e inferior son el sup y el ínf de los limites subsecuenciales de una sucesión, obtenemos que

$$\underline{\text{lím}}\Phi(x_n) \geq \text{mín}\{\Phi(x_0^-), \Phi(x_0^+)\}$$

donde el "mayor o igual" se debe a que $\Phi(x_0^-)$ o $\Phi(x_0^+)$ pueden no ser un limite subsecuencial. Por ejemplo si se toma una sucesión (x_n) monótonamente decreciente que converga a x_0 se obtendrá que el único límite subsecuencial de $(\Phi(x_n))$ es $\Phi(x_0^+)$ ya que se acerca únicamente por la derecha. Esto es independiente de si $\Phi(x_0^+)$ es o no el $\text{mín}\{\Phi(x_0^-), \Phi(x_0^+)\}$.

Por tanto

$$\underline{\lim}\Phi(x_n) \geq \min\{\Phi(x_0^-), \Phi(x_0^+)\} = \Phi(x_0),$$

por lo cual Φ es semicontinua inferiormente en B. $\square$

De la proposición anterior tenemos que toda función continua salvo discontinuidades de primera especie es semicontinua inferiormente, siempre y cuando la función evaluada en las descontinuidades sea igual a su limite lateral más pequeño. Algunos ejemplos de funciones semicontinuas inferiormente son los siguientes:

1. Una función continua cualquiera como

$$\Phi_1(x) = e^x$$

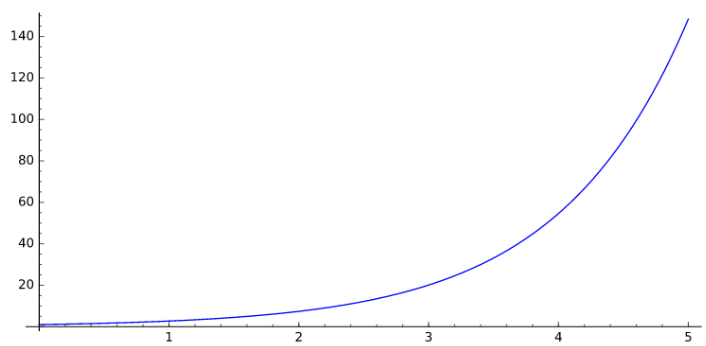

Figura 2.3: grafica de Φ_1

2. Una función continua con una discontinuidad de primera especie como

$$\Phi_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } x \in [0,1] \\ \frac{x^2}{4} + 1 & \text{si } x \in (1,4) \end{cases}$$

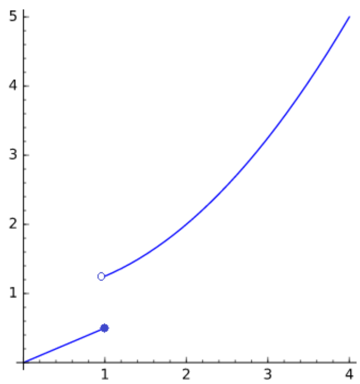

Figura 2.4: grafica de Φ_2

3. Una función continua con dos discontinuidades de primera especie como

$$\Phi_3(x) = \begin{cases} \sin x + 5 & \text{si } x \in [0, \pi) \\ \cos x + 4 & \text{si } x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ \frac{1}{25}\,(x - 3\pi)^3 + \frac{17}{2} & \text{si } x \in (\frac{3\pi}{2}, 10] \end{cases}$$

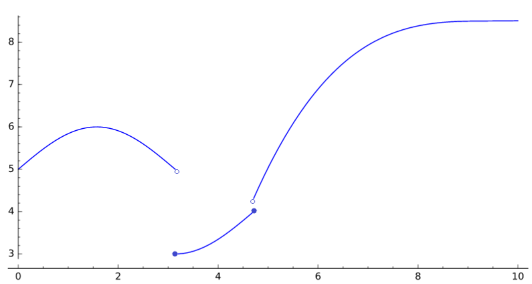

Figura 2.5: grafica de Φ_3

Es claro que todos los resultados que hemos dado para la semicontinuidad inferior tienen un resultado similar para la semicontinuidads superior. Más exactamente, en los espacios 1-contables la semicontinuidad superior queda caracterizada por las sucesiones, en los espacios compactos la semicontinuidad superior asegura la existencia de un máximo y una función continua en los reales salvo discontinuidades de primera especie es semicontinua superiormente si y solo si la función evaluada en las descontinuidades es igual a su limite lateral más grande. La demostración de estas propiedades son análogas a las ya hechas. Por tanto, es natural preguntarnos si las funciones semicontinuas sobre los reales son simplemente funciones continuas salvo discontinuidades de primera especie. La respuesta es no. Es posible encontrar funciones semicontinuas con discontinuidades de segunda especie, como ilustra el siguiente ejemplo, donde una función $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad de segunda especie en x_0 si es discontinua en x_0 y sus limites laterales no existen.

Ejemplo 27. Sea $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si } x > 0 \text{ y } x \in \mathbb{I} \\ x^2+2 & \text{si } x < 0 \text{ y } x \in \mathbb{Q} \\ 3 & \text{si } x < 0 \text{ y } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

entonces Φ es semicontinua en 0 y tiene una descontinuidad de segunda especie en 0.

Demostración. Veamos primero que 0 es una discontinuidad de segunda especie en Φ. En efecto, supongamos que la discontinuidad es de primera especie entonces

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Phi(0-\epsilon) = \Phi(0^-)$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Phi(0+\epsilon) = \Phi(0^+)$$

existen. Esto ocurre si y solo si para toda sucesión (ϵ_n) en $\mathbb{R}$ tal que $\epsilon_n > 0$ y $\epsilon_n \to 0$ se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(0-\epsilon_n) = \Phi(0^-)$$

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(0+\epsilon_n) = \Phi(0^+),$$

luego si tomamos (ϵ_n) una sucesión positiva de los racionales y (δ_n) una sucesión positiva de los irracionales convergentes a cero, obtenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(0-\epsilon_n) = \lim_{n \to \infty} (\epsilon_n)^2 + 2 = 2$$
$$\lim_{n \to \infty} \Phi(0-\delta_n) = \lim_{n \to \infty} 3 = 3$$

y

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(0+\epsilon_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$
$$\lim_{n \to \infty} \Phi(0+\delta_n) = \lim_{n \to \infty} \delta_n + 1 = 1$$

luego

$$2 = \Phi(0^-) = 3 \;\text{ y }\; 0 = \Phi(0^+) = 1,$$

lo cual es una contradicción. Por ende 0 es un discontinuidad de segunda especie. Veamos ahora que Φ es semicontinua inferiormente en 0.

Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$, tal que $x_n \to 0$, note que $\Phi(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $\Phi(x_n) \geq 0 = \Phi(0)$ para todo n por ende

$$\underline{\lim}\Phi(x_n) \geq \Phi(0).$$

Por tanto Φ es semicontinua inferiormente en 0. $\square$

Procedemos a enunciar y demostrar el Principio Variacional de Ekeland.

2.2.3. Enunciado y Demostración del Principio

El principio fue establecido en 1972 por Ekeland. Es un extraordinario resultado comparable con el Teorema del Paso de Montaña que ha probado ser una herramienta muy poderosa en muchas áreas del análisis. Este resultado nos dice que cuando un funcional Φ de un espacio métrico completo, es semicontinuo inferiormente y acotado, este posee una sucesión minimizadora que cumple una propiedad interesante en su reducción. El exacto enunciado es el siguiente tomado de [Jabri, 2003, pag. 23]

Teorema 2.22 (Principio Variacional de Ekeland)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional en sci(X) acotado inferiormente. Sea $\epsilon > 0$ y $x \in X$ tal que*

$$\Phi(x) \leq \inf_{u \in X} \Phi(u) + \epsilon.$$

Entonces para todo $\delta > 0$ existe $y \in X$ tal que

1. $\Phi(y) \leq \Phi(x)$
2. $d(x, y) < \delta$
3. $\Phi(y) \leq \Phi(u) + (\epsilon/\delta)d(u, y)$ *para todo $u \in X$.*

Esto significa, que dado una aproximación inicial (punto inicial) que tengamos del ínf de Φ, siempre podemos encontrar una mejor aproximación que esté tan cerca al ínf de Φ como nosotros queramos. Un buen gráfico que muestra lo que ocurre es la Figura 2.6, tomado de [Jabri, 2003, pag. 24].

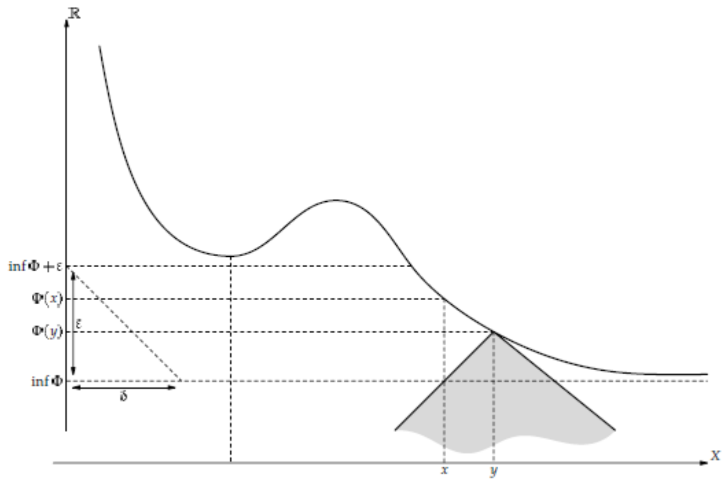

Figura 2.6: Principio variacional de Ekeland

Demostración. Consideremos la relación en X dada por

$$u \preceq v \text{ si y solo si } \Phi(u) \leq \Phi(v) - \frac{\epsilon}{\delta} d(u,v),$$

donde $\preceq$ define una relación de orden parcial en X dependiente de δ. Para ver esto veamos primero la reflexividad, como $\Phi(u) \leq \Phi(u) + 0 = \Phi(u) + (\epsilon/\delta)d(u,u)$, luego $u \preceq u$. Ahora veamos que es antisimetrica. Si $u \preceq v$ y $v \preceq u$ entonces

$$\Phi(u) \leq \Phi(v) - \frac{\epsilon}{\delta} d(u,v) \text{ y } \Phi(v) \leq \Phi(u) - \frac{\epsilon}{\delta} d(u,v),$$

luego

$$\Phi(u) \leq \Phi(u) - 2\frac{\epsilon}{\delta} d(u,v).$$

Por consiguiente $0 \leq -2(\epsilon/\delta)d(u,v)$. Es decir, $d(u,v) \leq 0$ si y solo si $d(u,v) = 0$, luego $u = v$. Por último, para ver la transitividad, supongamos que $u \preceq v$ y $v \preceq w$ entonces

$$\Phi(u) \leq \Phi(v) - \frac{\epsilon}{\delta} d(u,v) \text{ y } \Phi(v) \leq \Phi(w) - \frac{\epsilon}{\delta} d(w,v).$$

De donde

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &\leq \Phi(w) - \frac{\epsilon}{\delta} d(u,v) - \frac{\epsilon}{\delta} d(w,v) \\
&= \Phi(w) - \frac{\epsilon}{\delta}[d(u,v) + d(w,v)] \\
&\leq \Phi(w) - \frac{\epsilon}{\delta} d(u,w),
\end{aligned}$$

por tanto $u \preceq w$.

Ahora construiremos una sucesión decreciente de conjuntos cerrados (S_n) de X, usando el orden $\preceq$, tal que la intersección

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n = \{y\} = \{y(\delta)\}.$$

Para empezar, definamos para cada $v \in X$ a

$$I_v = \{u \in X : u \preceq v\}.$$

Es claro que $v \in I_v$, veamos que I_v es cerrado para todo $v \in X$. En efecto, sea $u \in \overline{I}_v$, por tanto existe (u_n) en I_v tal que $u_n \to u$. Luego, como la sucesión está en I_v, tenemos que

$$\Phi(u_n) + \frac{\epsilon}{\delta} d(u_n, v) \leq \Phi(v)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi(v) &\geq \underline{\text{lím}}[\Phi(u_n) + \frac{\epsilon}{\delta} d(u_n, v)] \\ &\geq \underline{\text{lím}}\Phi(u_n) + \frac{\epsilon}{\delta}\underline{\text{lím}} d(u_n, v). \end{aligned}$$

Como toda métrica es continua y $u_n \to u$ entonces

$$d(u, v) = \text{lím}\, d(u_n, v) = \underline{\text{lím}} d(u_n, v)$$

y como $\Phi \in sci(X)$, tenemos que

$$\underline{\text{lím}}\Phi(u_n) \geq \Phi(u),$$

por tanto

$$\Phi(v) \geq \Phi(u) + \frac{\epsilon}{\delta} d(u, v).$$

Es decir, $u \preceq v$. Luego $u \in I_v$, por ende $\overline{I}_v \subseteq I_v$, si y solo si $\overline{I}_v = I_v$. Esto es, I_v es cerrado. Ahora definamos a $z_1 = x$ y al conjunto

$$S_1 = \{u \in X : u \preceq z_1\} = I_{z_1},$$

entonces tomemos a $z_2 \in S_1$ tal que

$$\Phi(z_2) \leq \inf_{u\in S_1} \Phi(u) + \frac{\epsilon}{2},$$

el cual existe por la definición del ínf. Inductivamente construimos la sucesión (S_n), definido por

$$S_n = \{u \in X : u \preceq z_n\} = I_{z_n}$$

con $z_{n+1} \in S_n$ y satisface que

$$\Phi(z_{n+1}) \leq \inf_{u\in S_n} \Phi(u) + \frac{\epsilon}{n+1}.$$

Es claro que S_n es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$ y ya que $z_{n+1} \preceq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces si $u \in S_{n+1}$ implica que $u \preceq z_{n+1} \preceq z_n$ y por ende $u \in S_n$, es decir,

$$S_{n+1} \subseteq S_n.$$

Tenemos que (S_n) es una sucesión decreciente de cerrados, veamos que $\operatorname{diam} S_n \to 0$ donde $\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$, con $A \subseteq X$. En efecto.

Sea $u \in S_{n+1}$ entonces $u \preceq z_{n+1}$ y $u \in S_n$. Esto implica que

$$\Phi(u) \leq \Phi(z_{n+1}) - \frac{\epsilon}{\delta} d(u, z_{n+1}).$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \Phi(u) + \frac{\epsilon}{\delta} d(u, z_{n+1}) &\leq \Phi(z_{n+1}) \\ &\leq \inf_{v \in S_n} \Phi(v) + \frac{\epsilon}{n+1} \\ &\leq \Phi(u) + \frac{\epsilon}{n+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d(u, z_{n+1}) \leq \frac{\delta}{n+1} \tag{2.22}$$

y como (2.22) se cumple para todo $u \in S_{n+1}$, entonces para todo $u, v \in S_{n+1}$ se tiene que

$$d(u,v) \leq d(u, z_{n+1}) + d(v, z_{n+1}) \leq \frac{2\delta}{n+1}.$$

De donde

$$\operatorname{diam} S_n \leq \frac{2\delta}{n+1}.$$

Luego $\operatorname{diam} S_n \to 0$. Ya que X es completo y (S_n) es una sucesión decreciente de cerrados tal que $\operatorname{diam} S_n \to 0$ entonces

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = \{y\}.$$

Veamos que y satisface 1), 2) y 3). En efecto.

1. Como $y \in S_1$ entonces $y \preceq x$, esto es,

$$\Phi(y) \leq \Phi(x) - \frac{\epsilon}{\delta} d(x,y) \leq \Phi(x).$$

2. Ahora tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{\delta}d(x,y) &\leq \Phi(x) - \Phi(y)\\ &\leq \inf_{u\in X}\Phi(u) + \epsilon - \Phi(y)\\ &= \epsilon + (\inf_{u\in X}\Phi(u) - \Phi(y))\end{aligned}$$

y como $\Phi(y) \geq \inf_{u\in X}\Phi(u)$ entonces $\inf_{u\in X}\Phi(u) - \Phi(y) \leq 0$, por ende

$$\frac{\epsilon}{\delta}d(x,y) \leq \epsilon + (\inf_{u\in X}\Phi(u) - \Phi(y)) \leq \epsilon.$$

Luego

$$d(x,y) \leq \delta.$$

3. Por último, sea $u \in X$ y supongamos que $u \preceq y$, entonces $u \preceq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ende $u \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ luego $u = y$. Por tanto $y \preceq u$ para todo $u \in X$. Es decir,

$$\Phi(y) \leq \Phi(u) - \frac{\epsilon}{\delta}d(u,y).$$

□

Finalmente podemos enunciar y demostrar el teorema principal de nuestro trabajo.

2.3. El Teorema Del Paso De Montaña

Antes de enunciar el teorema introduciremos un concepto más que explica la razón de su nombre.

Definición. Sean X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional continuo, se dice que Φ tiene geometría de montaña si existen $r > 0$ y $\rho > 0$ tal que

$$\rho = \inf_{u\in S_r(0)}\Phi(u),$$

$\Phi(0) < \rho$ y $\Phi(u_0) < \rho$ para algún $u_0 \in X$ con $\|u_0\| > r$. Donde $S_r(0)$ es la esfera con centro en 0 y radio r. Es decir, $S_r(0) = \{u \in X : \|u\| = r\}$.

Para entender porque un funcional con geometría de montaña tiene imagen con aspecto de montaña, consideremos en primer lugar a $X = \mathbb{R}$. Sea $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que cumple la geometría de montaña. Entonces existen r y ρ que cumplen las propiedades mencionadas anteriormente, pero $S_r(0)$ en $\mathbb{R}$ consiste en solo dos puntos, $\{-r, r\}$. Entonces las condiciones de la geometría de montaña en $\mathbb{R}$ se resume en el siguiente gráfico.

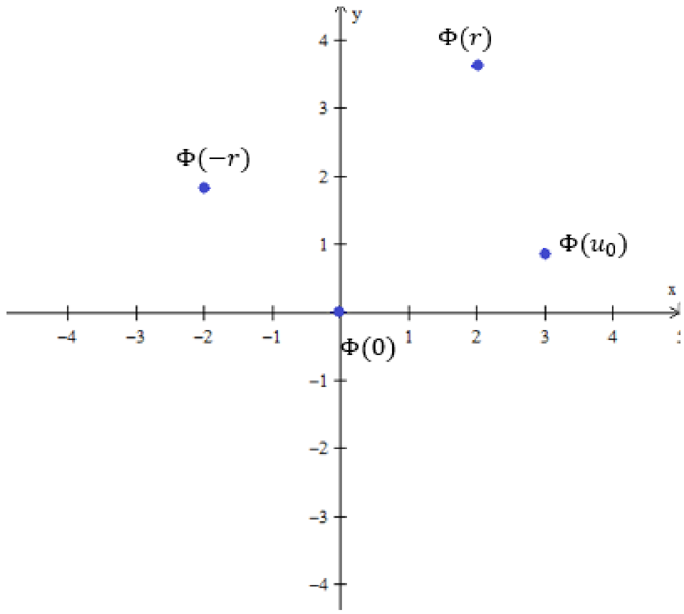

Figura 2.7: condiciones para la geometría de montaña

Es decir, consiste en solo 4 puntos, y como Φ es continua, entonces la imagen de Φ será un camino que una estos cuatros puntos. Esta tiene una forma parecida a la siguiente imagen.

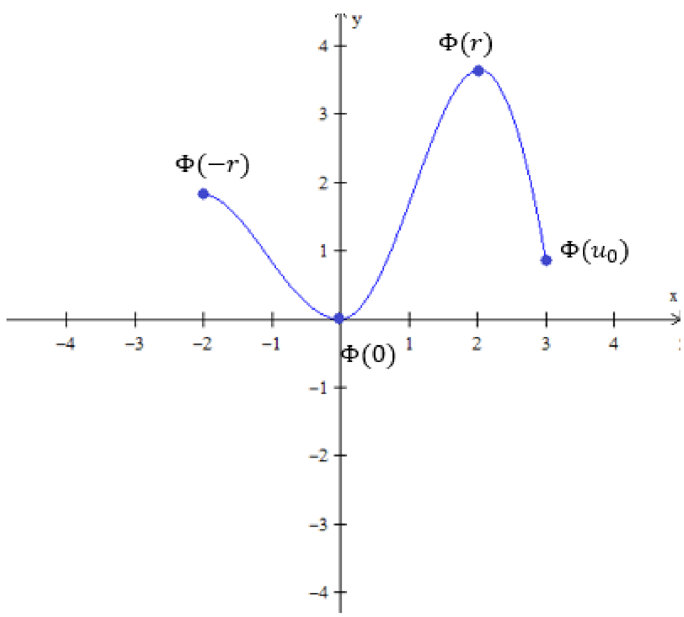

Figura 2.8: geometría de montaña en $\mathbb{R}$

Donde se puede apreciar las montañas. Ahora en $\mathbb{R}^2$, bajo el mismo razonamiento, esto es, usando el hecho de que Φ es continua, un funcional que cumpla la geometría de montaña tiene el siguiente aspecto.

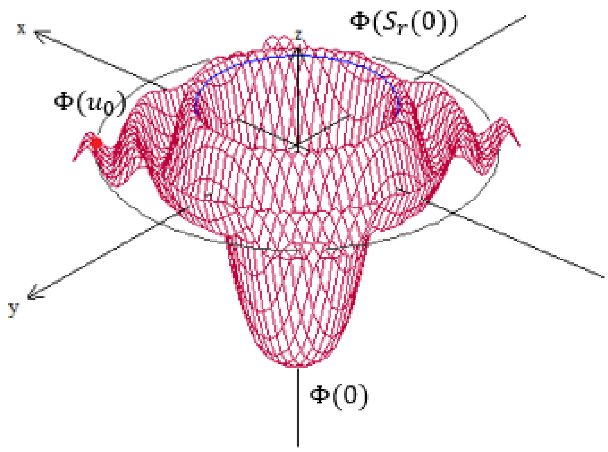

Figura 2.9: geometría de montaña en $\mathbb{R}^2$

Finalmente procedemos a enunciar y demostrar el teorema principal de nuestro trabajo, que es tomado de [Jabri, 2003, pag. 66].

Teorema 2.23 (El Teorema del Paso de Montaña, Ambrosetti y Rabinowitz)**.** *Sean X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 si Φ satisface (PS), es decir.*

- *Para toda sucesión (u_n) en X tal que si*

$$(\Phi(u_n)) \quad \textit{es acotada y} \quad \Phi'(u_n) \to 0,$$

  ésta admite una subsucesión convergente.

Y si además Φ tiene geometría de montaña, es decir.

- *Existen $r > 0$ y $\rho > 0$ tal que*

$$\rho = \inf_{u \in S_r(0)} \Phi(u),$$

  $\Phi(0) < \rho$ y $\Phi(u_0) < \rho$ para algún $u_0 \in X$ con $\|u_0\| > r$.

Entonces Φ *tiene un valor critico* $c \geq \rho$ *con*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma} \Phi(u)$$

donde Γ *denota el conjunto de todos los caminos* γ *que unen a* 0 *con* u_0.

Demostración. Sin pérdida de generalidad tomamos a cada $\gamma \in \Gamma$ definida en $[0,1]$, es decir, $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(1) = u_0$. Consideremos a E, el conjunto de funciones continuas $\gamma : [0,1] \to X$, se tiene que E es un espacio vectorial con la suma y producto escalar definidas puntualmente y

$$\|\gamma\|_\Gamma = \max_{t \in [0,1]} \|\gamma(t)\|,$$

es una norma sobre E. Ahora, $\Gamma \subseteq E$ sobre la métrica que induce la norma de E es un espacio métrico completo.

Consideremos el funcional $\Psi : \Gamma \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Psi(\gamma) = \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)),$$

veamos que Ψ es semicontinua inferiormente. En efecto, sea (γ_n) en Γ tal que $\gamma_n \to \gamma$ en Γ. Por tanto $\gamma_n(t) \to \gamma(t)$ uniformemente en $[0,1]$. Por otro lado para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, γ y γ_n son continuas. Entonces $K_n = \gamma([0,1]) \cup \gamma_n([0,1])$ es compacto. Por tanto Φ es uniformemente continua sobre K_n. Luego para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $\|u - v\| < \delta$ con $u, v \in K_n$ entonces

$$|\Phi(u) - \Phi(v)| < \epsilon.$$

Como $\gamma_n(t) \to \gamma(t)$ uniformemente en $[0,1]$, existe $N = N(\delta(\epsilon)) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\|\gamma_n(t) - \gamma(t)\| < \delta$$

para todo $t \in [0,1]$. Luego

$$|\Phi(\gamma_n(t)) - \Phi(\gamma(t))| < \epsilon$$

para todo $n \geq N$ y $t \in [0,1]$. Esto es,

$$-\epsilon < \Phi(\gamma(t)) - \Phi(\gamma_n(t)) < \epsilon.$$

Por ende

$$\Phi(\gamma(t)) - \epsilon < \Phi(\gamma_n(t)) \ \text{ y } \ \Phi(\gamma_n(t)) < \Phi(\gamma(t)) + \epsilon,$$

para todo $t \in [0,1]$ y $n \geq N$. Entonces

$$\max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) - \epsilon < \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma_n(t))$$

y

$$\max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma_n(t)) < \max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t)) + \epsilon.$$

Es decir,

$$\Psi(\gamma) - \epsilon < \Psi(\gamma_n) \ \text{ y } \ \Psi(\gamma_n) < \Psi(\gamma) + \epsilon,$$

para $n \geq N$, luego

$$\underline{\lim}\Psi(\gamma_n) = \Psi(\gamma).$$

Por tanto queda que $\Psi \in sci(\Gamma)$, por otro lado veamos que

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \Psi(\gamma) \geq \max\{\Phi(0), \Phi(u_0)\}.$$

En efecto, ya que para todo $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(1) = u_0$ entonces $\Phi(\gamma(0)) = \Phi(0)$ y $\Phi(\gamma(1)) = \Phi(u_0)$ y por ende

$$\max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t)) \geq \max\{\Phi(0), \Phi(u_0)\},$$

es decir,

$$\Psi(\gamma) \geq \max\{\Phi(0), \Phi(u_0)\}$$

para todo $\gamma \in \Gamma$. Esto significa que Ψ esta acotado inferiormente y efectivamente c esta bien definido (es decir es un numero real) y se cumple que $c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \Psi(\gamma) \geq \max\{\Phi(0), \Phi(u_0)\}$. Como Ψ es semicontinua inferiormente y acotada se cumplen las hipótesis del Principio Variacional de Ekeland.

Luego para $\epsilon > 0$, por definición de inf, existe $\gamma'_\epsilon \in \Gamma$ tal que

$$\Psi(\gamma'_\epsilon) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma} \Psi(\gamma) + \epsilon^2 = c + \epsilon^2.$$

Por el Principio Variacional de Ekeland tomando $\delta = \epsilon$, existe $\gamma_\epsilon \in \Gamma$ tal que

1. $\Psi(\gamma_\epsilon) \leq \Psi(\gamma'_\epsilon) \leq c + \epsilon^2$.
2. $\|\gamma_\epsilon - \gamma'_\epsilon\|_\Gamma < \epsilon$.
3. $\Psi(\gamma_\epsilon) < \Psi(\gamma) + \epsilon\|\gamma_\epsilon - \gamma\|_\Gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Veamos que existe $t_\epsilon \in I$ tal que

$$\|\Phi'(\gamma_\epsilon(t_\epsilon))\| \leq \epsilon.$$

En efecto, primero consideremos para cada $\gamma \in \Gamma$ la curva

$$\sigma(t) = \gamma_\epsilon(t) - \gamma(t),$$

está es una función continua con $\sigma(0) = \sigma(1) = 0$. Esta función es llamada la variación de $\gamma_\epsilon(t)$ con respecto γ.

Ahora como $\Phi \circ \gamma_\epsilon$ es continua sobre el compacto $[0, 1]$ entonces existe $t_\epsilon \in [0, 1]$ tal que

$$\Phi(\gamma_\epsilon(t_\epsilon)) = \Psi(\gamma_\epsilon).$$

Así mismo para cada $\gamma \in \Gamma$ existe $y_\gamma \in X$ tal que

$$\Phi(y_\gamma) = \Psi(\gamma).$$

Veamos que para cada $u \in S_1(0)$ existe un y_γ tal que

$$u = \frac{y_\gamma}{\|y_\gamma\|}.$$

Es decir, que los vectores que maximizan a Φ sobre alguna curva γ, normalizados, cubren a $S_1(0)$. En efecto, para cada $u \in S_1(0)$ tomemos $y = ru \in S_r(0)$. Tenemos que

$$\text{mín}\{\Phi(0), \Phi(u_0)\} < \rho \leq \Phi(y).$$

Por tanto está bien definido el intervalo

$$I = [\text{mín}\{\Phi(0), \Phi(u_0)\}, \Phi(y)].$$

Como Φ es continua y I es arcoconexo entonces $\Phi^{-1}(I)$ es arcoconexo. Ahora, como $0, u_0, y \in \Phi^{-1}(I)$ entonces existe un arco γ contenido en $\Phi^{-1}(I)$ que une a 0 con u_0 y pasa por y, luego $\gamma \in \Gamma$. Por otro lado para todo $t \in [0, 1]$

$$\Phi(\gamma(t)) \in I.$$

Es decir,

$$\Phi(\gamma(t)) \leq \Phi(y).$$

Esto es,

$$\max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) = \Phi(y).$$

Por tanto $y_\gamma = y = ru$, entonces $u = y/\|y\| = y_\gamma/\|y_\gamma\|$. Esto quiere decir que los vectores $y_\gamma/\|y_\gamma\|$ cubren a $S_1(0)$. Más aun, para cada $u \in S_1(0)$ existe un arco γ tal que Φ se maximiza sobre γ en ru.

Definimos para cada $\gamma \in \Gamma$ a

$$w_\gamma = \frac{y_\gamma - \gamma_\epsilon(t_\epsilon)}{h}$$

con $h > 0$ y ya que los vectores $y_\gamma/\|y_\gamma\|$ cubren a $S_1(0)$ entonces los vectores $w_\gamma/\|w_\gamma\|$ también cubren a $S_1(0)$. Es decir, para cada $u \in S_1(0)$ existe un w_γ tal que

$$u = \frac{w_\gamma}{\|w_\gamma\|}.$$

Ahora note que para cada y que maximiza a Φ sobre algún arco γ, esta curva nunca es única. Es decir, siempre se puede encontrar otra curva γ' tal que $y = y_\gamma = y_{\gamma'}$, mas aún para toda curva γ siempre se puede encontrar una curva γ' tal que $y_\gamma = y_{\gamma'}$ y su variación con respecto a γ_ϵ cumple que

$$\|\sigma_{\gamma'}\|_\Gamma = \|\gamma' - \gamma_\epsilon\|_\Gamma \leq \|y_\gamma - \gamma_\epsilon(t_\epsilon)\|.$$

Esto es,

$$\|\sigma_{\gamma'}\|_\Gamma \leq h\|w_\gamma\|$$

y por el principio variacional de Ekeland (la parte 3) tenemos que

$$\Psi(\gamma_\epsilon) < \Psi(\gamma') + \epsilon\|\gamma_\epsilon - \gamma'\|_\Gamma.$$

Es decir,

$$\Phi(\gamma_\epsilon(t_\epsilon)) \leq \Phi(y_\gamma) + \epsilon\|\gamma_\epsilon - \gamma'\|_\Gamma,$$

luego

$$\Phi(\gamma_\epsilon(t_\epsilon)) - \Phi(\gamma_\epsilon(t_\epsilon) + hw_\gamma) \leq \epsilon\|\gamma_\epsilon - \gamma'\|_\Gamma = \epsilon\|\sigma_{\gamma'}\|_\Gamma \leq \epsilon h\|w_\gamma\|.$$

Por tanto

$$\frac{\Phi(\gamma_\epsilon(t_\epsilon)) - \Phi(\gamma_\epsilon(t_\epsilon) + hw_\gamma)}{h} \leq \epsilon\|w_\gamma\|.$$

Haciendo $h \to 0$ obtenemos que

$$\Phi'(\gamma_\epsilon(t_\epsilon))[-w_\gamma] \leq \epsilon\|w_\gamma\|,$$

luego para todo $u \in S_1(0)$ obtenemos que

$$\Phi'(\gamma_\epsilon(t_\epsilon))[-u] \leq \epsilon.$$

Esto también aplica para $-u \in S_1(0)$, luego

$$\Phi'(\gamma_\epsilon(t_\epsilon))[u] \leq \epsilon.$$

Por ende

$$|\Phi'(\gamma_\epsilon(t_\epsilon))[u]| \leq \epsilon$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\|\Phi'(\gamma_\epsilon(t_\epsilon))\|_{X^*} &= \sup_{u\in S_1(0)} |\Phi'(\gamma_\epsilon(t_\epsilon))[u]| \\ &\leq \epsilon,\end{aligned}$$

como queríamos ver. Por otro lado también tenemos, por el Principio Variacional de Ekeland (parte 1), que

$$|\Phi(\gamma_\epsilon(t_\epsilon)) - c| = \Phi(\gamma_\epsilon(t_\epsilon)) - c \leq \epsilon^2.$$

Entonces si definimos a $u_n = \gamma_{1/n}(t_{1/n})$ con $n \in \mathbb{N}$ obtenemos que

$$\|\Phi'(u_n)\|_{X^*} \leq \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |\Phi(u_n) - c| \leq \frac{1}{n^2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$\Phi(u_n) \to c \quad \text{y} \quad \Phi'(u_n) \to 0$$

y como Φ satisface (PS), existe (u_{n_k}) una subsucesión de (u_n) tal que $u_{n_k} \to u$ para algún $u \in X$. De aquí, como Φ y Φ' son continuas, se obtiene que

$$\Phi(u_{n_k}) \to \Phi(u) \quad \text{y} \quad \Phi'(u_{n_k}) \to \Phi'(u),$$

luego

$$\Phi(u) = c \quad \text{y} \quad \Phi'(u) = 0.$$

Es decir, u es un punto crítico y c un valor crítico.

Veamos por último que $c \geq \rho$. Se tiene que γ se interseca con $S_r(0)$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Luego existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\gamma(t_0) \in S_r(0)$ entonces

$$\Phi(\gamma(t_0)) \geq \rho.$$

Por ende

$$\max_{u\in\gamma([0,1])} \Phi(u) \geq \rho.$$

Ya que esto ocurre para todo $\gamma \in \Gamma$, implica que

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in\gamma([0,1])} \Phi(u) \geq \rho,$$

concluyendo así la demostración del teorema. $\square$

En el próximo capítulo procederemos a dar una aplicación del Teorema del Paso de Montaña

CAPÍTULO 3

UNA APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL PASO DE MONTAÑA

La aplicación que mostraremos del Teorema Del Paso De Montaña será su gran utilidad para demostrar la existencia de soluciones (débiles) de ecuaciones diferenciales muy generales.

3.1. El Resorte con Forzamiento

El problema que vamos a considerar es la ecuación diferencial del resorte con forzamiento f con problema de frontera. Más precisamente

$$\begin{gathered} -u'' - \lambda u = f \\ u(0) = 0 \quad u(\pi) = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Para empezar veamos que esta ecuación modela un resorte. Considere un resorte con una partícula de masa 1 (Kg) sobre una superficie sin fricción, además suponga que sobre la partícula actúa una fuerza F_r no necesariamente conservativa. Como muestra la siguiente gráfica.

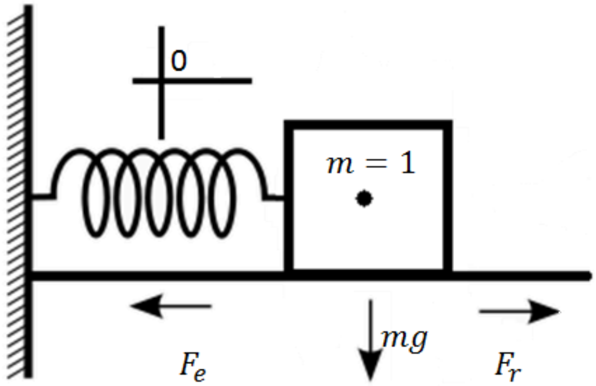

Figura 3.1: El Resorte

Donde centramos el origen donde el resorte tiene su longitud natural. Denotamos a λ la constante de elasticidad del resorte y a $u(t)$ la enlogación del resorte en el tiempo t. Ahora, sobre la partícula se ejerce 2 fuerzas, la fuerza ejercida por el resorte que por la ley de Hooke es

$$F_e = -\lambda u$$

y la fuerza no necesariamente conservativa ejercida sobre la particula que notaremos por $-f$. Es decir,

$$F_r = -f.$$

Entonces la fuerza total es

$$F = F_e + F_r = -\lambda u - f$$

y como

$$F = ma = mu'' = u'',$$

obtenemos que

$$u'' = -\lambda u - f.$$

Es decir,

$$-u'' - \lambda u = f.$$

Ahora procedemos a responder la siguiente pregunta ¿Como asegurar la existencia de alguna solución de (3.1) para una f muy general? Pero ¿Que quiere decir f muy general? Para esto consideremos nuevamente a la isometría canónica de L^2 sobre $I = (0, \pi)$

$$I_{L^2} : L^2(I) \longrightarrow (L^2(I))^*.$$

Más precisamente a su inversa

$$I_{L^2}^{-1} : (L^2(I))^* \longrightarrow L^2(I).$$

Tenemos que $(L^2(I))^*$ es denso en $H^{-1}(I)$. Por tanto podemos extender de manera única a $I_{L^2}^{-1}$ a todo $H^{-1}(I)$. Luego para cada $F \in H^{-1}(I)$ existe una $f \in I_{L^2}^{-1}(H^{-1}(I))$ tal que

$$\langle F, u\rangle = (f, u)_2$$

para todo $u \in H_0^1(I)$. Nótese que

$$L^2(I) \subseteq I_{L^2}^{-1}(H^{-1}(I)).$$

Diremos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ está en $H^{-1}(I)$ si

$$\begin{array}{rccc} (f,\cdot)_2 : & H_0^1(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & (f,u)_2 \end{array}$$

pertenece a $H^{-1}(I)$. Estas funciones aquí descritas se dice que tienen **-1 derivada débil**.

Este conjunto es bastante grande ya que

$$C^k(I) \subseteq C^1(I) \subseteq W^{1,q}(I) = H^1(I) \subseteq C(I) \subseteq R(I) \subseteq L^\infty(I) \subseteq L^p(I) \subseteq L^2(I) \subseteq H^{-1}(I).$$

Es decir, encierra prácticamente a todas las funciones que hemos trabajado en este trabajo y otras. Mostraremos el alcance del Teorema del Paso de Montaña utilizándolo en el problema (3.1) con f una función con -1 derivada.

3.2. El Lagrangiano

Una solución (Clásica) del problema (3.1) es una función $u \in C^1(I)$ con $I = (0, \pi)$ y con u' diferenciable en el sentido usual. Es decir, con 2 derivadas que cumple (3.1). Luego

$$-u'' - \lambda u = f.$$

Multiplicando a ambos lados por $\varphi \in C_c^1(I)$

$$-u''\varphi - \lambda u\varphi = f\varphi$$

e integrando sobre I obtenemos que

$$-\int_I u''\varphi - \lambda \int_I u\varphi = \int_I f\varphi.$$

Como φ es de soporte compacto se anula sobre ∂I, de donde

$$\int_I u''\varphi = u'\varphi|_{\partial I} - \int_I u'\varphi' = -\int_I u'\varphi'.$$

Por consiguiente

$$\int_I u'\varphi' - \lambda \int_I u\varphi = \int_I f\varphi. \tag{3.2}$$

Mostramos así que toda solución de (3.1) debe cumplir (3.2) pero para que una función cumpla esta igualdad solo necesita tener una derivada. Más aun, solo necesita tener una derivada débil.

Definición. Decimos que una función $u \in H_0^1(I)$ es solución débil del problema (3.1) si cumple (3.2) para toda $\varphi \in C_c^1(I)$

La razón de ser de esta definición es la siguiente. Si se tiene que existe una solución débil u y si se puede demostrar que $u' \in H^1(I)$ entonces nos podemos "devolver". Pues, por definición de derivada débil tenemos que para todo $\varphi \in C_c^1(I)$,

$$\int_I u'\varphi' = -\int_I u''\varphi.$$

Luego obtenemos que

$$(-u'' - \lambda u - f, \varphi)_2 = 0$$

para todo $\varphi \in C_c^1(I)$ y como $C_c^1(I)$ es denso en $L^2(I)$, obtenemos que

$$-u'' - \lambda u = f.$$

Recordemos que estamos derivando débilmente. Si u' es diferenciable entonces u es solución clásica.

Por tanto una vez tengamos una solución débil solo tenemos que ver que condiciones debe cumplir f para que la solución débil sea 2 veces diferenciable en el sentido usual y ser así una solución clásica. A esto se le conoce como .^{es}tudiar la regularidad del problema".

Ahora, la idea (técnica) con la cual resolveremos el problema (3.1) usando el Teorema del Paso de Montaña es la siguiente. Idea que es tomada de [Brézis et al., 1980].

Supongamos que existe un funcional $\Phi : H_0^1(I) \to \mathbb{R}$ Fréchet diferenciable tal que para todo $v \in C_c^1(I)$ cumple que

$$\Phi'(u)[v] = \int_I u'v' - \lambda \int_I uv - \int_I fv.$$

Supongamos además que Φ tiene al menos un punto critico u_0, luego para todo $v \in H_0^1(I)$ se tiene que

$$\Phi'(u_0)[v] = 0.$$

En particular, para $v \in C_c^1(I)$ se obtiene que

$$\int_I u_0'v' - \lambda \int_I u_0 v - \int_I fv = 0.$$

Esto es, u_0 es solución débil de (3.1). **Esto muestra que al encontrar dicho funcional, pasamos de un problema de ecuaciones diferenciales a un problema variacional.**

De hecho ya sabemos quien es este funcional, puesto que en el Ejemplo 25 dimos al funcional

$$\Phi_\lambda : \quad H_0^1(I) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

definido por

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_I [(u'(x))^2 - \lambda u^2(x)]dx - \langle F, u\rangle$$

y demostramos que es un funcional de clase C^1 y que para $v \in H_0^1(I)$ se tiene que

$$\Phi'(u)[v] = \int_I (u'v' - \lambda uv)dx - \langle F, v\rangle,$$

simplemente hay que tomar a $\langle F, v\rangle = (f, v)_2$.

El funcional Φ_λ es llamado el **Lagrangiano** del problema o sistema descrito por (3.1). La razón de este nombre se debe a la física. Veamos una pequeña introducción al lagrangiano en física y su relación con nuestro trabajo tomado de [Herbert Goldstein, 2002, pag. 21,35].

Dado un sistema de n partículas x_i que se mueven bajo fuerzas conservativas, en mecánica teórica, se define al langrangiano del sistema como

$$L = K - V$$

donde K es la energía cinética del sistema, es decir,

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(v_i)^2$$

con m_i la masa de x_i, y v_i la velocidad de x_i en el instante de tiempo t y V es la energía potencial del sistema.

Ahora **El Principio de Mínima Acción** en física dice que si $\{\sigma_i\}$ son las trayectorias que modelan el sistema; es decir, las trayectorias por las cuales viajan las partículas x_i respectivamente con parametrizaciones $x_i(t)$ donde $t \in I$ e I es un intervalo de tiempo, se debe cumplir que el funcional

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \Phi(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \int_I L(x_1(t), x_2(t) \ldots, x_n(t))dt$$

se minimiza en las trayectorias σ_i que modelan el sistema. Este funcional es llamado la Acción del sistema y desde un punto de vista físico dice que la naturaleza siempre escogerá las trayectorias que minimicen la acción.

Por tanto la solución del sistema es un punto crítico de la acción que es exactamente lo que ocurre en nuestro caso, en general definimos.

Definición. Dada una ecuación diferencial, si existe un funcional tal que dado cualquier punto critico del funcional éste es solución de la ecuación diferencial, el funcional será llamado el lagrangiano o acción del sistema.

Para verificar un poco el principio de mínima acción de la física, veamos que su lagrangiano coincide con el nuestro.

Ejemplo 28. El lagrangiano del resorte desde el punto vista de la física, cuando no hay forzamiento, es Φ_λ con $f = 0$.

Demostración. Como no hay forzamiento estamos bajo fuerzas conservativas. Ahora, recordemos que $u(t)$ mide la enlogación del resorte y λ es la constante de elasticidad. Tenemos solo una partícula con velocidad $u'(t)$ y masa 1 por tanto

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}u'(t)$$

y la energía potencial del sistema es la energía potencial elástica, que se define por

$$V = \frac{1}{2}\lambda(u(t))^2.$$

Por tanto el lagrangiano del resorte sin forzamiento es

$$L = \frac{1}{2}u'(t) - \frac{1}{2}\lambda(u(t))^2,$$

y su acción es

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_I [(u'(x))^2 - \lambda u^2(x)]dx$$

□

Ahora para finalizar, procedemos a demostrar (en algunos casos) que nuestro lagrangiano en efecto tiene un punto crítico.

3.3. Solución al Problema

Por todo lo anteriormente expuesto si demostramos que el lagrangiano Φ_λ tiene un punto crítico habremos demostrado la existencia de una solución (débil) al problema (3.1) y por **El Teorema Del Paso de Montaña**, basta ver que Φ_λ satisface (PS) y tiene geometría de montaña. Ahora nuevamente por el Ejemplo 25 ya tenemos que Φ_λ satisface (PS) para $\lambda \notin EV(L) = \{1, 4, \ldots, n^2, \ldots\}$ y que no satisface (PS) para $\lambda \in EV(L) = \{1, 4, \ldots, n^2, \ldots\}$. Por tanto falta ver que Φ_λ tiene geometría de montaña, veamos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 29. sean $\lambda \in \mathbb{R}$ un número fijo, $I = (0, \pi)$ y $F \in H^{-1}(I)$, $F \neq 0$ y

$$\Phi_\lambda : \quad H_0^1(I) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

definido por

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_I [(u'(x))^2 - \lambda u^2(x)]dx - \langle F, u\rangle,$$

entonces existe $u_0 \in H_0^1(I)$ tal que el funcional $\Psi_\lambda(u) = \Phi_\lambda(u - u_0)$ cumple geometría de montaña.

Demostración. Primero note que existe $u_0 \neq 0 \in H_0^1(I)$ tal que

$$\Phi_\lambda(u_0) > 0$$

y un $u_1 \neq 0 \in H_0^1(I)$ tal que

$$\Phi_\lambda(u_1) < 0,$$

pues si la función es no negativa o no positiva, $0 \in H_0^1(I)$ seria un un mínimo o un máximo y por ende

$$\Phi'_\lambda(0) = 0.$$

Por tanto

$$I_{L^2}(\overline{L}(0) - \lambda 0) - F = 0.$$

Es decir,

$$F = 0$$

y estamos suponiendo que $F \neq 0$.

Ahora, considere el intervalo $J = (0, \infty)$. Como Φ es continua,

$$\Phi_\lambda^{-1}(J)$$

es abierto. Ya que $u_0 \in \Phi_\lambda^{-1}(J)$ entonces existe $r_0 > 0$ tal que

$$B_{r_0}(u_0) \subseteq \Phi_\lambda^{-1}(J). \tag{3.3}$$

Ahora existe un radio $r_1 > 0$ con $r_1 < r_0$ tal que

$$\rho_1 = \inf_{u \in S_{r_1}(u_0)} \Phi(u),$$

cumple que $\Phi_\lambda(u_0) < \rho_1$. Tenemos por (3.3) que

$$\Phi_\lambda(u) > 0$$

para todo $u \in B_{r_0}(u_0)$. En particular para $u \in S_{r_1}(u_0)$ luego $\rho_1 > 0$. Es decir, $\Phi_\lambda(0) = 0 < \rho_1$ y además $0 \notin B_{r_0}(u_0)$, pues de lo contrario $\Phi_\lambda(0) > 0$. Por tanto, tenemos para r_1 y ρ_1 que

$$\rho_1 = \inf_{u \in S_{r_1}(0)} \Psi_\lambda(u),$$

$\Psi_\lambda(0) = \Phi_\lambda(u_0) < \rho_1$ y $\Psi_\lambda(u_0) = \Phi_\lambda(0) = 0 < \rho_1$. Por ultimo $\|u_0\|_{H^1} > r_1$, puesto que $0 \notin B_{r_0}(u_0)$ y por ende $\|u_0\|_{H^1} \geq r_0 > r_1$. Por tanto se concluye que Ψ_λ tiene geometría de montaña. $\square$

Ahora, no demostramos que Φ_λ cumple geometría de montaña sino una traslación de él, esto no afecta el resultado porque

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda'(u) &= (\Phi_\lambda \circ T)'(u) \\ &= \Phi_\lambda'(T(u))T'(u) \end{aligned}$$

con $T(u) = u - u_0$. No es difícil demostrar que $T'(u) = I_d$, el operador identidad, y por tanto

$$\Psi_\lambda'(u) = \Phi_\lambda'(u - u_0),$$

Así Ψ_λ cumple (PS) para $\lambda \notin EV(L) = \{1, 4, \ldots, n^2, \ldots\}$. Puesto que si (u_n) es una sucesión de Palais-Smale de Ψ_λ entonces $(u_n - u_0)$ es una sucesión de Palais-Smale de Φ_λ y por el Ejemplo 25, $u_n - u_0 \to (\overline{L} - \lambda Id)^{-1} \circ (I_{L^2})^{-1}(F)$, luego $u_n \to (\overline{L} - \lambda Id)^{-1} \circ (I_{L^2})^{-1}(F) + u_0$.

Se concluye entonces que, por el Teorema del Paso de Montaña, Ψ_λ y por ende Φ_λ tiene un punto crítico para $\lambda \notin EV(L) = \{1, 4, \ldots, n^2, \ldots\}$, es decir, que el problema (3.1) para estos valores de λ, existe solución débil.

Ahora como comentario final, por la demostración del Teorema del Paso de Montaña sabemos que la geometría de montaña garantiza la existencia de una sucesión de Palais-Smale y por la condición de (PS) esta sucesión tiene una subsucesión convergente y a donde converge es el punto crítico del funcional. Por tanto para $\lambda \notin EV(L) = \{1, 4, \ldots, n^2, \ldots\}$, existe al menos una sucesión de palais-smale de Ψ_λ y por ende existe una sucesión de palais-smale de Φ_λ. Por el ejemplo 25 esta sucesión converge a

$$(\overline{L} - \lambda I_d)^{-1} \circ (I_{L^2})^{-1}(F) = (\overline{L} - \lambda I_d)^{-1}(f). \tag{3.4}$$

Así no sólo sabemos que existe una solución débil al problema (3.1) para $\lambda \notin EV(L) = \{1, 4, \ldots, n^2, \ldots\}$, sino que esta dada por (3.4).

CONCLUSIONES

- Se concluye que los métodos variacionales y mas precisamente el Teorema Del Paso de Montaña es de gran utilidad para garantizar la existencia de soluciones débiles en ecuaciones diferenciales, sin embargo el ejemplo que dimos en este trabajo es muy sencillo. Este teorema puede ser utilizado para resolver otros tipos de ecuaciones diferenciales como EDO no lineales, EDP lineales, EDP lineales no homogeneas y EDP no lineales. Por ejemplo en [Brézis et al., 1980], utilizando el TPM, resuelven la siguiente ecuación diferencial parcial no lineal con condiciones de frontera y condiciones de periodicidad

$$\Delta u + g(u) = u_{tt} - u_{xx} + g(u) = 0$$

$$u(0,t) = 0 \quad u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,t+2\pi) = u(x,t).$$

  Donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, monotonamente creciente y $g(0) = 0$. Pero un ejemplo como este se sale del alcance del trabajo.

- Nuestra aplicación también mostró la relación que hay entre los métodos variacionales y la física, más precisamente con el Principio de Mínima Acción.

- Se concluye también que el TPM tiene sus limitaciones, puesto que no se puede decidir con él si existe o no solución a la ecuación diferencial dada en nuestro trabajo para $\lambda \in EV(L)$. Para este caso se sugiere tomar una sucesión λ_k, no de valores propios, convergente a λ. Así existirá una sucesión u_k de soluciones débiles a nuestro problema para λ_k respectivamente y estudiar que sucede con la sucesión de funciones (u_k) cuando k tiende a infinito. Este problema hace parte de la teoría de la bifurcación y esta idea es desarrollada en detalle en [Kung-Ching, 2005] .

- Queda pendiente ver en los casos donde existe solución débil, que condiciones debe tener f para que la solución débil tenga segunda derivada y sea así una solución clásica. Esto hace parte del campo de la regularidad. Por esta razón no lo estudiamos, ya que no hacia parte del objetivo de este trabajo.

Bibliografía

[Bartle, 2014] Bartle, R. (2014). *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* Wiley Classics Library. Wiley.

[Brezis, 2010] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer Verlag.

[Brézis et al., 1980] Brézis, H., Coron, J. M., and Nirenberg, L. (1980). Free Vibrations for a Nonlinear Wave Equation and a Theorem of P. Rabinowitz. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXXIII:667–689.

[Caicedo, 2005] Caicedo, J. F. (2005). *Calculo Avanzado. Introducción.* Universidad Nacional de Colobmia, Bogotá.

[Herbert Goldstein, 2002] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, J. L. S. (2002). *Classical Mechanics.* Addison Wesley.

[Jabri, 2003] Jabri, Y. (2003). *The Mountain Pass Theorem.* Cambridge University Press.

[Kreyszig, 1989] Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley and Sons.

[Kung-Ching, 2005] Kung-Ching, C. (2005). *Methods in Nonlinear Analysis.* Springer Verlag, Berlin.

[Rubiano.O, 2010] Rubiano.O, G. (2010). *Topología general.* Universidad Nacional de Colobmia, Bogotá.

[Sanjuán, 2007] Sanjuán, A. (2007). Semicontinuidad Inferior por Redes. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 8(2).

[Wussing, 1998] Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI de España Editores, S.A, Madrid.