Teorema de Pitágoras en n-dimensiones

Fredy Alonso Medina Vanegas

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2016

Teorema de Pitágoras en n-dimensiones

Fredy Alonso Medina Vanegas

Dirigido por:

Milton del Castillo Lesmes Acosta

Magister en Matemática

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2016

Índice general

0.1. Introducción

El teorema de Pitágoras afirma que: "‘el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los lados"’, en general se han realizados estudios por medio de métodos matemáticos para su estudio y demostración, el propósito de la siguiente monografía es reconstruir los argumentos matemáticos necesarios para comprender el teorema de Pitágoras n-Dimensional propuesto por el artículo :
Shwu Yeng , T. Lin You-Feng Lin (1990) The n-dimensional pythagorean theorem, Linear and Multilinear,Department of Mathematics , University of South Florida , Tampa, 02 Abril 2008; haciendo uso de los simplejos y así de esta manera facilitar al lector el tema abordado.

Capítulo 1

Preliminares

El clásico teorema de Pitágoras establece que :
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
en esta nota se generaliza el teorema de pitágoras para cualquier dimensión finita $n \geq 2$.
Sea $\mathbb{R}$ la recta real y sea
$\mathbb{R}^n = \{(X_1, X_2, ..., X_n \setminus X_1, X_2, ..., X_n \in \mathbb{R})\}$
el espacio euclidiano n-dimensional, tambien consideraremos $\mathbb{R}^n$ como un espacio vectorial real y las letras mayúsculas en negrita, con o sin subindices por puntos o vectores en $\mathbb{R}^n$.

1.0.1. Puntos en posición general

Definición. *Un conjunto de puntos* $\{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_n\}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *es llamado en posición general si el conjunto de vectores* $\{\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_0, \mathbb{X}_2 - \mathbb{X}_0, ..., \mathbb{X}_k - \mathbb{X}_0\}$ *es linealmente independiente.*
Por lo tanto, los puntos $\mathbb{X}_0, \mathbb{X}_1, ..., \mathbb{X}_k$ *están en posición general si y sólo si,*

$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathbb{X}_i = 0$ *y* $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$ *implica* $\alpha_i = 0$ *para todo* $i = 0, 1, 2, .., k$. *[1]*

De esto tenemos que si un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ está en posición general, entonces:

1. el conjunto A contiene a lo más $n + 1$ puntos.
2. cada subconjunto de A está tambien en posición general.

Los tres puntos están en posición general si y sólo si son los vértices de un triángulo.
Cuatro puntos que están en posición normal son los vértices de un tetraedro, que tambien será denominado como un $3 - simplex$, un $2 - simplex$ es un triángulo y un $1 - simplex$ es un segmento de linea.

1.0.2. K-simplex

Definición. *Para un conjunto de puntos* $\{\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, ..., \mathbb{A}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *en posición general, el conjunto*

$$\triangle(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, ..., \mathbb{A}_k) \equiv \left\{X \setminus X = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathbb{A}_i,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\ y\ \alpha_i \geq 0\ \ \forall i = 0, 1, ..., k\right\}$$

es llamado el $k-simplex$ *expandido por el conjunto* $\{\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, ..., \mathbb{A}_k\}$*. Los puntos* $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, ..., \mathbb{A}_k$ *son los vértices y* k *es la dimensión del simplex. Para cualquier dos* $\mathbb{A}_i$ *y* $\mathbb{A}_j$*, el* $1-simplex$ $\triangle(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j)$ *es un borde del simplex* $\triangle(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, ..., \mathbb{A}_k)$*. [1]*

Por simplicidad, nosotros debemos escribir $\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j$, para el borde $\triangle(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j)$.
Observe que el borde $\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j$ es un intervalo de recta cerrado uniendo los vértices $\mathbb{A}_i$ y $\mathbb{A}_j$. Por tanto, a travez de cada vertice de un $k-simplex$ tenemos exactamente $k-bordes$, y tenemos en total $\frac{k(k+1)}{2}$ cada $k-simplex$.

1.0.3. k-simplex recto

Definición. $\triangle(O\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, ..., \mathbb{A}_n)$ *es un simplejo recto* n*-dimensional si* $O\mathbb{A}_i$ *y* $O\mathbb{A}_j$ *son ortogonales* $i \neq j$*.Tiene una hipotenusa* $\triangle\left(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, ..., \bar{\mathbb{A}_i}, ..., \mathbb{A}_n\right)$ *donde la barra significa que ese vértice no esta en el lado.[1]*

Por ejemplo, un triángulo derecho es un $2-simplex$ derecho. En la figura 1, el $3-simplex$, $\triangle(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}) \in \mathbb{R}^3$, donde $\mathbb{O} = (0,0,0)\,, \mathbb{A} = (\mathbb{A}, 0, 0)\,, \mathbb{B} = (0, \mathbb{B}, 0)\ \ y\ \mathbb{C} = (0, 0, \mathbb{C})$ es un $3-simplex$ con vértice derecho O. En este ejemplo, llamaremos el $2-simplex$ $\triangle(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})\ \ \ (opuesto\ por\ el\ vrtice$ la hipotenusa y los otros $2-simplex$

$$\triangle(,\mathbb{A}, \mathbb{B})\,,\ \triangle(,\mathbb{B}, \mathbb{C})\,,\ y\ \triangle(,\mathbb{A}, \mathbb{C})$$

los lados del $3-simplex$ $\triangle(,\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$.

En el caso de un $3-simplejo$ derecho, el contenido de la hipotenusa y los lados son medidos por sus áreas.

Teorema 1. *En un simplejo* $3-dimensional$*, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de sus lados.*

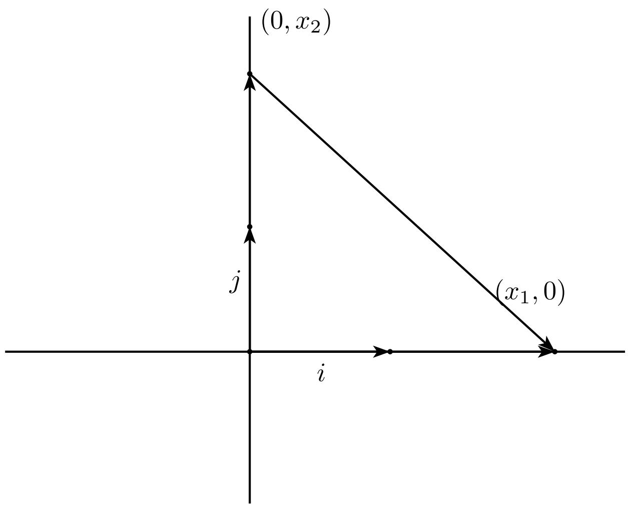
Las palabras y lados, significan respectivamente área de la hipotenusa y área de los lados.

Capítulo 2

Ejemplos Particulares

2.0.1. Teorema de Pitágoras en dimensiones 2-3 y 4

Sea el $2 - simplejo$ definido por los puntos $(0, x_1)$ y $(0, x_2)$ entonces,



Sabemos que el teorema de Pitágoras afirma que el cuadrado de hipotenusa de un triágulo rectágulo es igual a la suma del cuadrado de sus otros dos lados. En este caso sabemos que los lados del triángulo están formados por los siguientes vectores:

$$(x_1, 0)\,(0, x_2) \quad con \quad hipotenusa$$
$$(0, x_2) - (x_1, 0) = (-x_1 - x_2)$$

en donde estos se encuentran en posición general y con esto el $2-simplejo$. Diremos en otras palabras que el cuadrado del contenido de los $1-simplejos$ es igual al contenido de la hipotenusa al cuadrado.

$$X_1 = det\begin{vmatrix} i & j \\ x_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0, -x_1)$$
$$= -jx_1$$
$$= (0, -x_1)$$

$$X_2 = det\begin{vmatrix} i & j \\ 0 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2, 0)$$
$$= ix_2$$
$$= (0, -x_1)$$

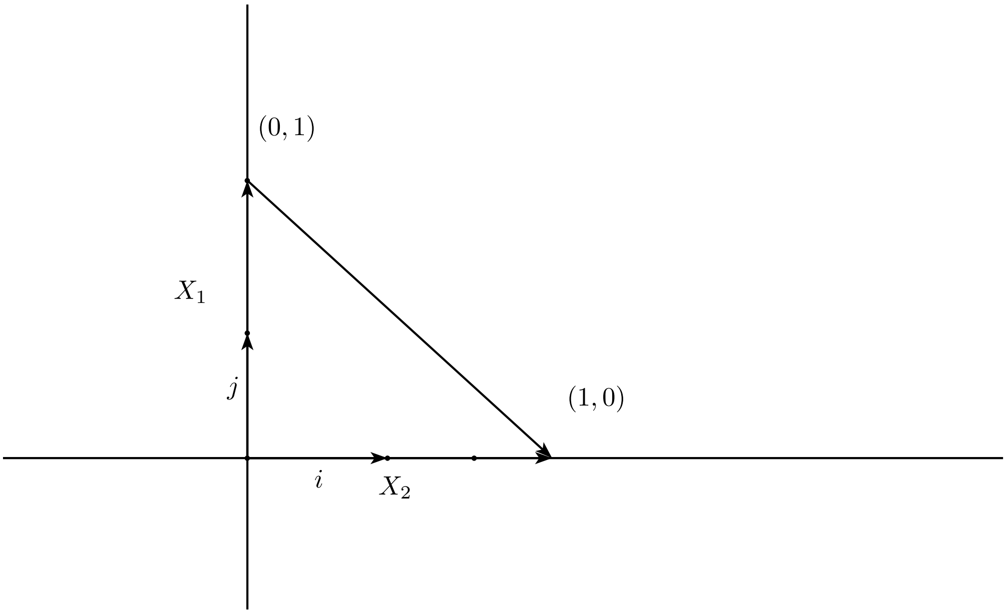
$$H = det\begin{vmatrix} i & j \\ 0 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$= iX_1 + jX_2$$
$$= x_2, x_2$$

$$|x|^2 = X_1 \cdot X_1$$
$$= (0, -x_1) \cdot (0, -x_1)$$
$$= \left(0, x_1^2\right)$$
$$= jx_1^2$$

$$\begin{aligned} |H|^2 &= H \cdot H \\ &= (x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2) \\ &= \left(x_1^2, x_2^2\right) \\ &= ix_1^2 + jx_2^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1. *Para el caso particular en dos dimensiones, sean los vectores* $(1,0),(0,1)$ *los cuales se encuentran en posición general.*



$$X_1 = det \begin{vmatrix} i & j \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0,1)$$
$$= 1$$

$$X_2 = det \begin{vmatrix} i & j \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0,1)$$
$$= i$$

$$X_3 = (0,1) - (0,1)$$
$$= (-1,0)$$

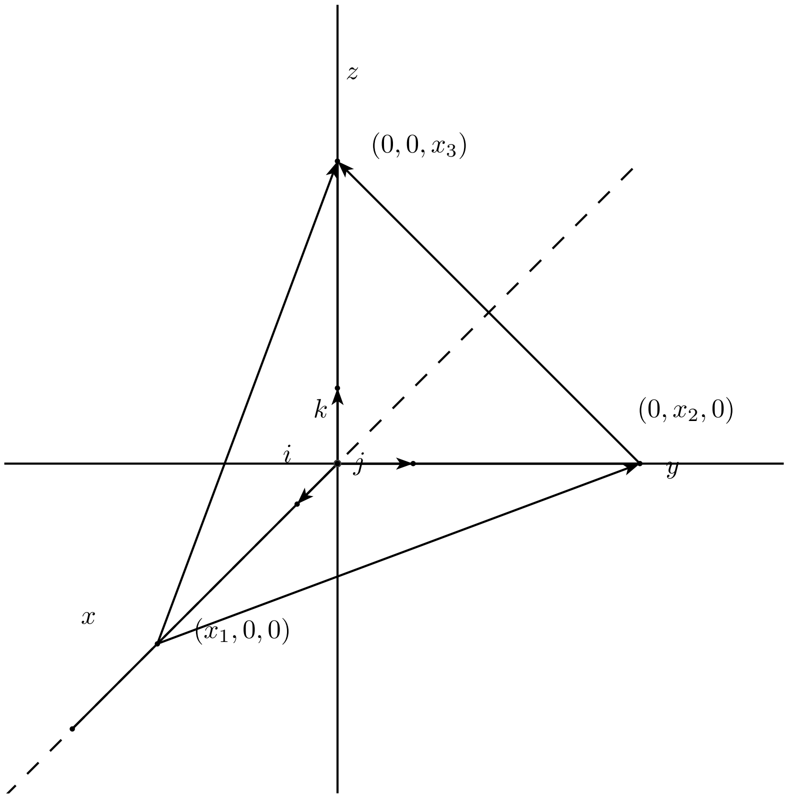
$$X_1^2 = (0,1) \cdot (0,1)$$
$$= (0,1)$$
$$= j^2$$

$$X_2^2 = (1,0) \cdot (1,0)$$
$$= (1,0)$$
$$= i^2$$

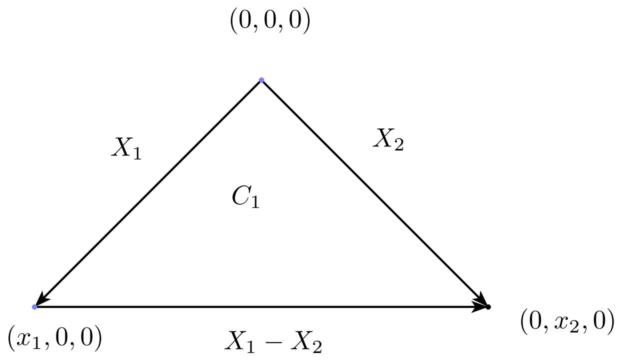
$$\begin{aligned} X_3^2 &= (-1,1)\cdot(-1,1) \\ &= (1,1) \\ &= i^2+j^2 \end{aligned}$$

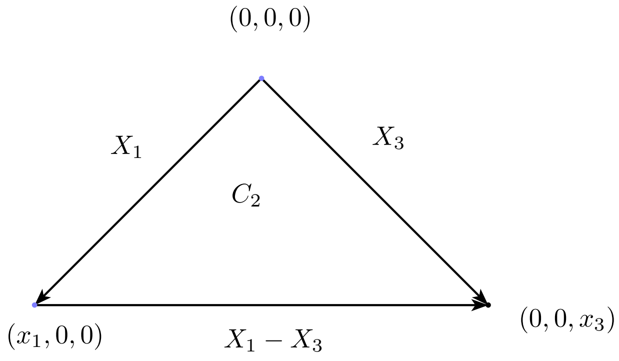
Para hablar del teorema de Pitágoras en el $3-simplejo$ definido por los vectores

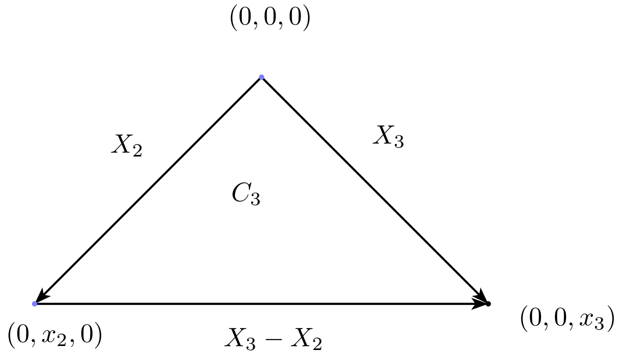
$$(x_1,0,0) = X_1$$
$$(0,x_2,0) = X_2$$
$$(0,0,x_3) = X_3$$



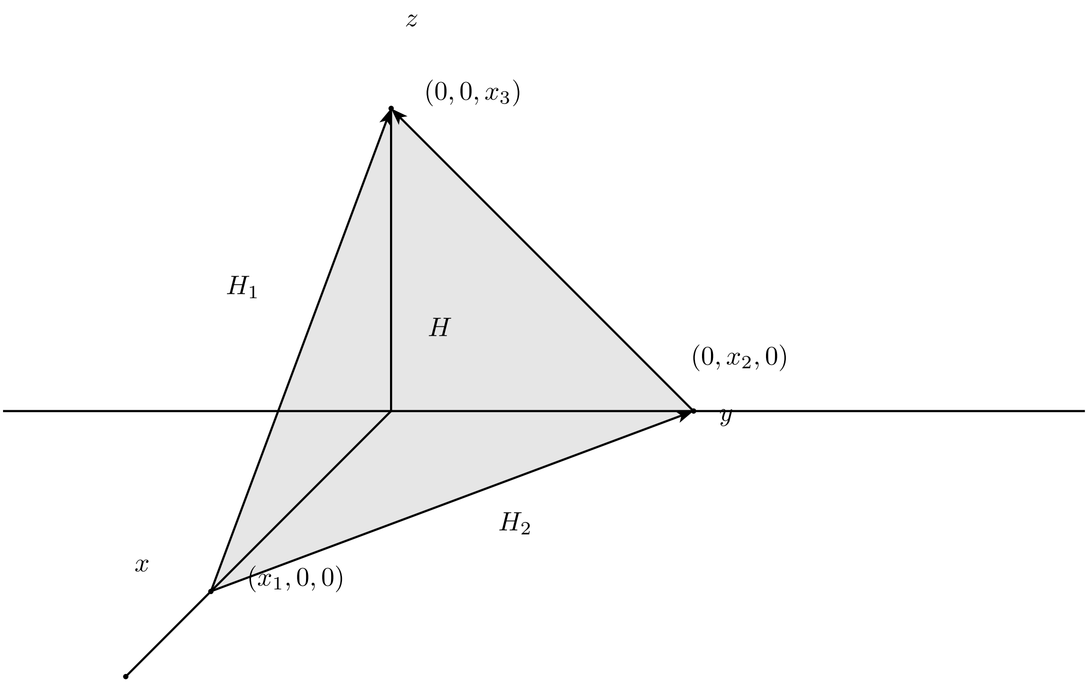
cada cara del $3-simplejo$ estará definido por el $2-simplejo$ de la forma







y llamaremos "hipotenusa" a la cara oblicua.

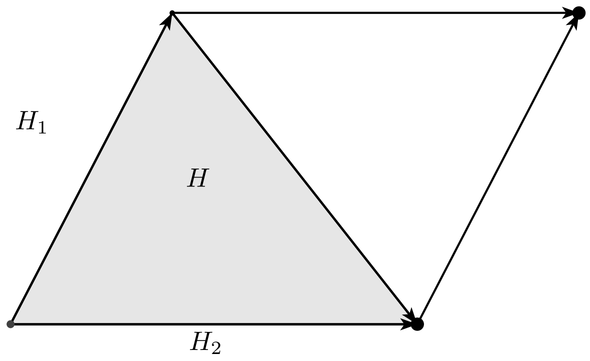


$$\begin{aligned} H_1 &= (x_1,0,0)-(0,0,x_3)=(x_1,0,-x_3) \\ H_2 &= (x_1,0,0)-(0,x_2,0)=(x_1,-x_1,0) \end{aligned}$$

$$H = det \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & 0 & -x_3 \\ x_1 & -x_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= i \begin{vmatrix} 0 & -x_3 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} x_1 & -x_3 \\ x_1 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & -x_2 \end{vmatrix} \\ &= -x_3x_2 - x_1x_3j - x_1x_2k \\ &= x_2x_3i + x_1x_3j + x_1x_2k \end{aligned}$$

Ahora sabemos que para obtener el área de la superficie H consideramos la mitad del paralelogramo formado por los vectores H_1 y H_2

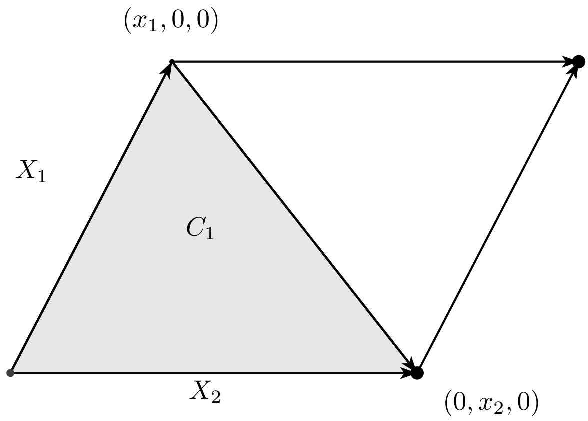


Por tanto esta área al cuadrado resultará como la mitad al cuadrado de esta e igual al anterior usamos el producto punto

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{1}{2}H\right) \cdot \frac{1}{2}(H) \\ H^2 &= (x_2x_3i)^2 + (x_1x_3j)^2 + \left(x_1x_2k\right)^2 \end{aligned}$$

siendo esta la cara oblicua ó "hipotenusa", miremos ahora para los $2 - simplejos$ restantes,

$$\begin{aligned} C_1 &= X_1 - X_2 \\ &= (x_1, 0, 0) - (0, x_2) \\ &= (x_1, -x_2, 0) \end{aligned}$$

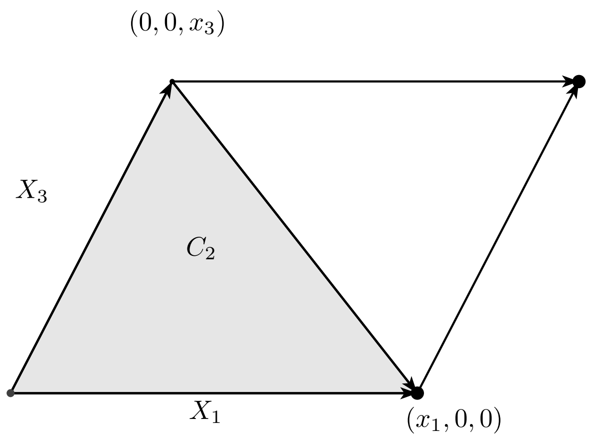


$$C_1 = det\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= i\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} + j\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{vmatrix} \\ &= 0i + 0j + x_1x_2k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1^2 &= \frac{1}{2}(0,0,x_1x_2) \cdot \frac{1}{2}(0,0,x_1x_2) \\ &= \frac{1}{4}(0,0,x_1x_2)^2 \\ &= \frac{1}{4}(x_1x_2)^2 k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= X_1 - X_3 \\ &= (0,0,x_3) - (x_1,0,0) \\ &= (-x_1, 0, x_3, 0) \end{aligned}$$

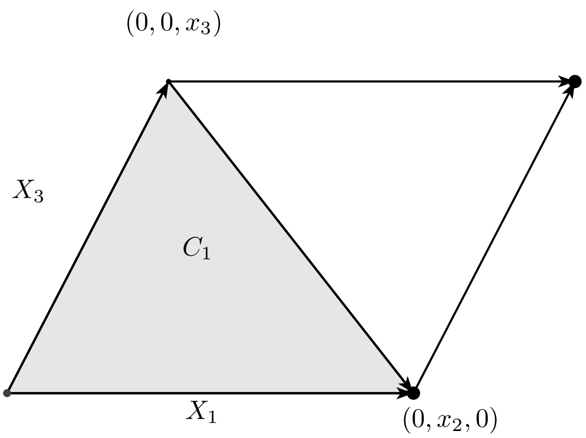


$$C_2 = det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= i \begin{vmatrix} 0 & x_3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 0 & x_3 \\ x_1 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0i + x_1x_3j + 0k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2^2 &= \frac{1}{2}(0, x_1x_3, 0) \cdot \frac{1}{2}(0, x_1x_3, 0) \\ &= \frac{1}{4}\left(0, (x_1x_2)^2, 0\right) \\ &= \frac{1}{4}(x_1x_3)^2 j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= X_3 - X_2 \\ &= (0,0,x_3) - (0,x_2,0) \\ &= (0,-x_2,x_3) \end{aligned}$$



$$C_3 = det\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & x_2 & 0 \end{vmatrix}$$

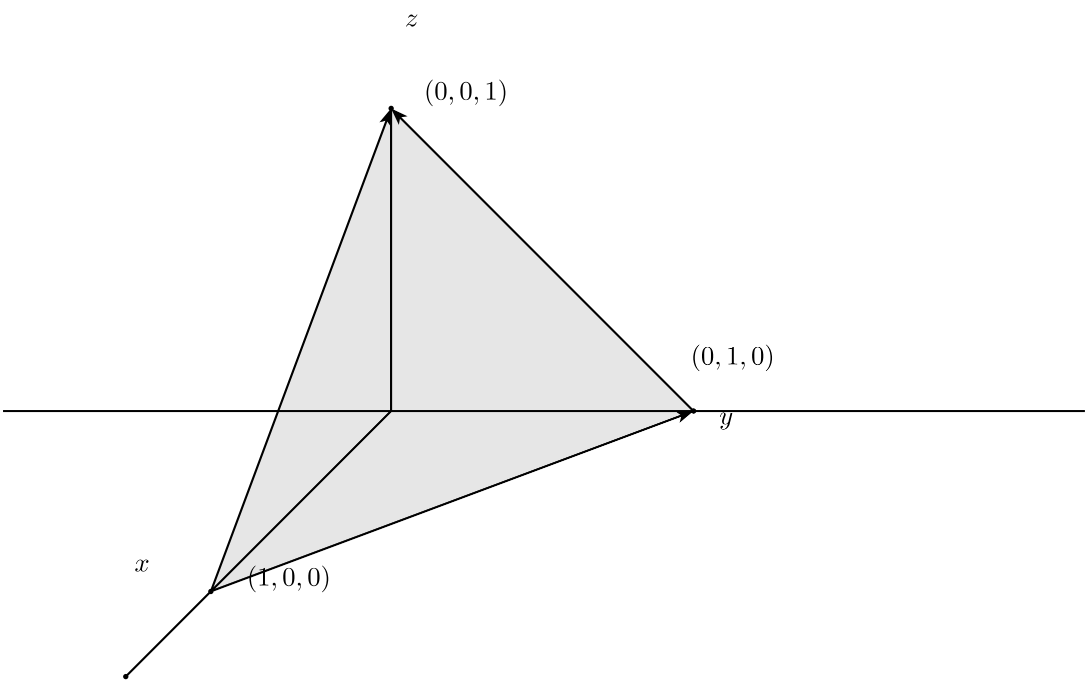
$$\begin{aligned} &= i\begin{vmatrix} 0 & x_3 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 0 & x_3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_2 \end{vmatrix} \\ &= x_2x_3i + 0j + 0k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3^2 &= \frac{1}{2}\left(x_2x_3,0,0\right)\cdot\frac{1}{2}\left(x_2x_3,0,0\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(x_2x_3\right)^2,0,0\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x_2x_3\right)^2 i \end{aligned}$$

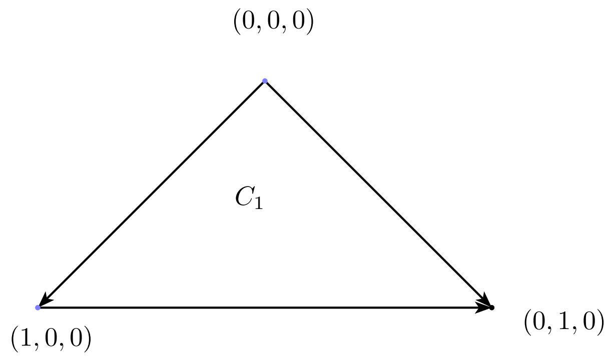
y con esto que

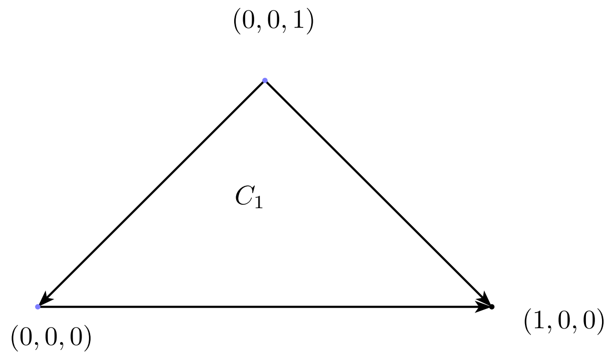
$$H^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2$$

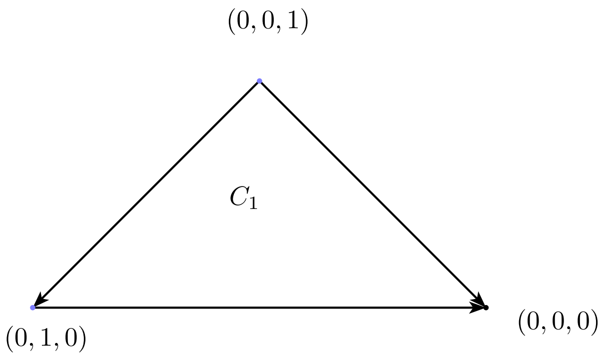
Ejemplo 2. *Para caso particular. Sea el simplejo definido por los puntos* $(1,0,0)$*;* $(0,1,0)$ *y* $(0,0,1)$.

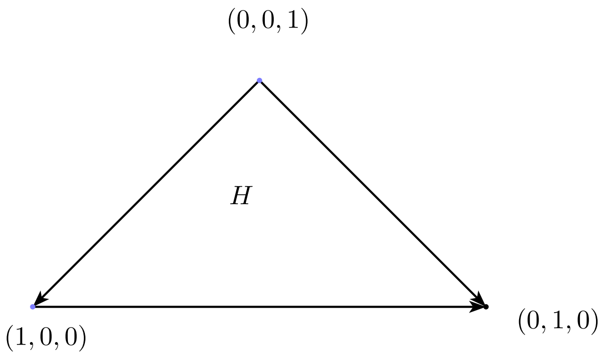


Interpretemos que para el caso del $3 - simplejo$ *el teorema de Pitágoras muestra que el contenido al cuadrado de la hipotenusa será igual a la suma del cuadrado del contenido de cada uno de sus otros* $2 - simplejo$ *así:*


(0, 0, 0)
C_1
(1, 0, 0)
(0, 1, 0)


(0, 0, 1)
C_1
(0, 0, 0)
(1, 0, 0)





$$\begin{aligned} H_1 &= (1,0,0)-(0,0,1)=(1,0,-1) \\ H_2 &= (1,0,0)-(0,1,0)=(1,-1,0) \end{aligned}$$

$$H = det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= i \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= x_2 x_3 i + 0j + 0k \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} -i - j - k \\ i + j + k \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= (1,0,0) - (0,1,0) \\ &= (1,-1,0) \end{aligned}$$

$$C_1 = det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= i \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0i - 0j + 1k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1^2 &= \frac{1}{2}(0,0,1) \cdot \frac{1}{2}(0,0,1) \\ &= \frac{1}{4}\left((x_2 x_3)^2, 0, 0\right) \\ &= \frac{1}{4} 1^2 k \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= (0,0,1) - (1,0,0) \\ &= (-1,0,1) \end{aligned}$$

$$C_2 = det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad i \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \quad 0i + 1j + 0k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_2^2 &= \frac{1}{2}(0,1,0) \cdot \frac{1}{2}(0,1,0) \\
&= \frac{1}{4}(0,1,0) \\
&= \frac{1}{4}j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_3 &= (0,0,1) - (0,1,0) \\
&= (0,-1,1)
\end{aligned}
$$

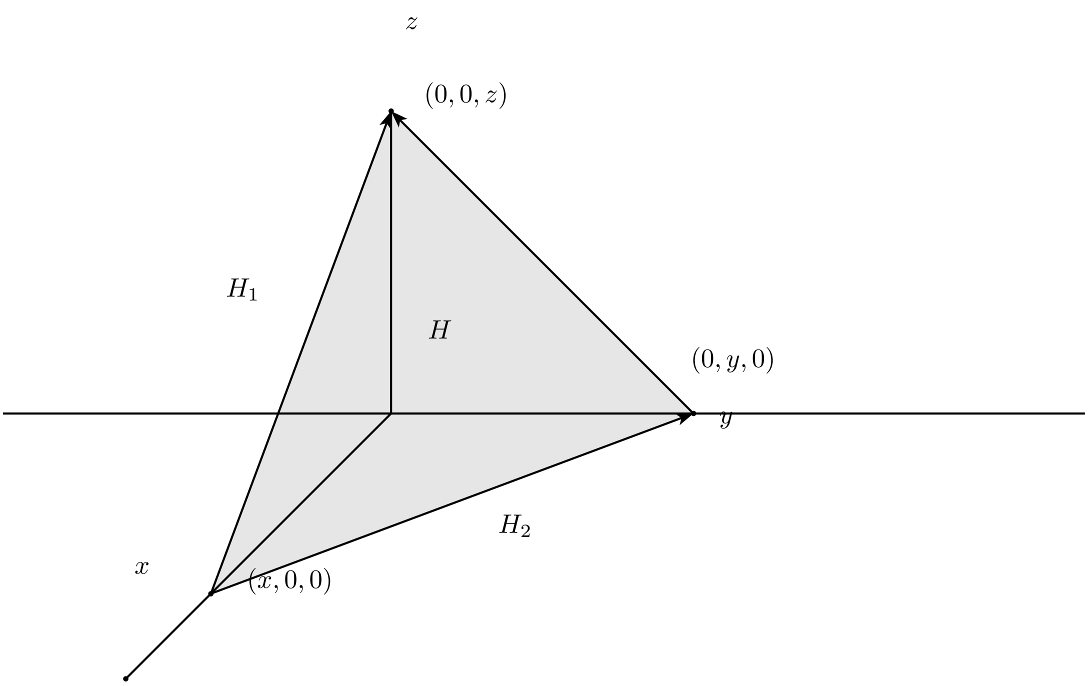
$$
C_3 = det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad i \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \quad -i + 0j + 0k
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

Determinante de Caley-Menger

La generalización del teorema de Pitágoras corresponde exactamente a los siguientes pasos en el caso del $3-simplex$ *rectangular de vértices* $(0,0,0),(x,0,0),(0,y,0),(0,0,z)$.



Para el área del triángulo sombreado, procedemos a determinarla en términos de las longitu-

des de los lados, lo que conduce al determinante de Cayley-Menger. En el plano el área del triángulo con vértices en $(0,0),(a,b),(c,d)$ *está dada por:*

$$\frac{1}{2}det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

en el caso del área del triángulo determinado por los vértices $(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)$*, está dada por:*

$$\frac{1}{2}det\begin{bmatrix} x_1-z_1 & x_2-z_2 \\ y_1-z_1 & y_2-z_2 \end{bmatrix}$$

Este determinante es exactamente igual al determinante

$$\frac{1}{2}det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya que por propiedades del determinante al multiplicar la tercera fila por -1 *y sumarla a la primera fila y luego a la segunda fila resulta*

$$\frac{1}{2}det\begin{bmatrix} x_1-z_1 & x_2-z_2 & 0 \\ y_1-z_1 & y_2-z_2 & 0 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{bmatrix}$$

que verifica la igualdad, por lo tanto:

[] El área del triángulo determinado por los vértices $(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)$*, está dada por*

$$\frac{1}{2}det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se consiguen dos determinantes que conducen a la misma área del triángulo determinado por los vértices considerados, esto con el objetivo de relacionarla con la longitud de los lados; estos dos determinantes son (nótese que son determinantes de matrices $4x4$*):*

$$-\frac{1}{2}det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_1x_1+x_2x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 & y_1y_1+y_2y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 & z_1z_1+z_2z_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{8}det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1x_1+x_2x_2 & -2x_1 & -2x_2 & 1 \\ y_1y_1+y_2y_2 & -2y_1 & -2y_2 & 1 \\ z_1z_1+z_2z_2 & -2z_1 & -2z_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se produce la siguiente multiplicación

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_1x_1+x_2x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 & y_1y_1+y_2y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 & z_1z_1+z_2z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1x_1+x_2x_2 & -2x_1 & -2x_2 & 1 \\ y_1y_1+y_2y_2 & -2y_1 & -2y_2 & 1 \\ z_1z_1+z_2z_2 & -2z_1 & -2z_2 & 1 \end{bmatrix}^t =$$

$$det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2 & (x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2 \\ 1 & (y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2 & 0 & (y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2 \\ 1 & (z_1-x_1)^2+(z_2-x_2)^2 & (z_1-y_1)^2+(z_2-y_2)^2 & 0 \end{bmatrix}$$

resultado que se escribirá,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d(X,Y) & d(X,Z) \\ 1 & d(Y,X) & 0 & d(Y,Z) \\ 1 & d(Z,X) & d(Z,Y) & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando esta fórmula del área de la denominada hipotenusa del $3-simplex$ *rectangular de vértices* $(0,0,0), (x,0,0), (0,y,0), (0,0,z)$ *se tiene,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x^2+y^2 & x^2+z^2 \\ 1 & y^2+x^2 & 0 & y^2+z^2 \\ 1 & z^2+x^2 & z^2+y^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinante que puede calcularse así, Multiplicando la primera columna por $-x^2$ *y sumándola a la segunda columna, la primera columna por* $-y^2$ *y sumándola a la tercera columna, la primera columna por* $-z^2$ *y sumándola a la cuarta columna,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -x^2 & x^2 & x^2 \\ 1 & y^2 & -y^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & z^2 & -z^2 \end{bmatrix}$$

Ahora factor común x^2 *en la segunda fila,* y^2 *en la tercera fila y* z^2 *en la cuarta fila,*

$$x^2y^2z^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{x^2} & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{y^2} & 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{z^2} & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Primera fila por -1 *y sumándola a la segunda, tercera y cuarta,*

$$x^2y^2z^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{x^2} & -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{y^2} & 0 & -2 & 0 \\ \frac{1}{z^2} & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Expandiendo por la primera columna,

$$-16A^2 = -4y^2z^2 - 4x^2z^2 - 4x^2y^2$$

$$A^2 = \frac{y^2z^2}{4} + \frac{x^2z^2}{4} + \frac{x^2y^2}{4}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

Bibliografía

[1] The n-Dimensional pythagorean theorem*; Shwu Yeng ; T. Lin You-Feng Lin ;Department of Mathematics, University of South Florida, Tampa, FL, 33620 ,Published online: 02 Apr 2008.*

[2] An Introduction to the Geometry of n Dimensions*; D. M. Y. Sommerville, , Dover Publications, Inc., New York, pp. 118-140, 1958.*